

Estimation and Hypothesis Testing 2 | *Les estimateurs et les tests d'hypothèses 2*

Nahomi Ichino and/et Yannick Kouogueng

22 May/mai 2025

Covariate Adjustment | *Ajustement des covariables*

Cluster Randomization | *Randomisation par grappe*

Multiple Arm Experiments | *Les expériences avec plusieurs bras*

Factorial Design | *La conception factorielle*

A Quick Reminder | *Un petit rappel*

- ▶ Remember: Analyze as you randomize
 - ▶ We prefer estimators that are unbiased and have greater precision
 - ▶ Hypothesis testing can be simple with linear regression
- ▶ N'oubliez pas : Analysez comme vous randomisez
 - ▶ Nous préférons les estimateurs non biaisés et plus précis
 - ▶ Test d'hypothèse peut être simple avec la régression linéaire

Covariate Adjustment | *Ajustement des covariables*

Estimator: Linear regression with covariates |

Estimateur : La régression linéaire avec des covariables

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Z_i + \gamma X_i + e_i$$

- ▶ We can include a **pre-treatment covariate** X that is *predictive* of the outcome variable in our regression model.
- ▶ Think of X as fixed before the randomization. For example: pre-treatment measure of the outcome.
- ▶ Careful: This can bias our estimates, but improve their precision.
- ▶ Nous pouvons inclure une **covariable pré-traitement** X qui est *prédictive* de la variable de résultat dans notre modèle de régression.
- ▶ Pensez que X est fixé avant la randomisation. Par exemple : une mesure du résultat avant le traitement.
- ▶ Attention : Cela peut biaiser nos estimations, mais améliorer leur précision.

Estimator: Linear regression with covariates | *Estimateur : La régression linéaire avec des covariables*

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Z_i + \hat{\gamma} X_i + e_i$$

- ▶ The estimated coefficient on the treatment variable ($\hat{\beta}_1$) is again our \widehat{ATE} .
- ▶ The estimated coefficient on the covariate ($\hat{\gamma}$) is *not* the causal effect of that variable.
- ▶ Le coefficient estimé sur la variable de traitement ($\hat{\beta}_1$) est encore notre \widehat{ATE} .
- ▶ Le coefficient estimé de la covariable ($\hat{\gamma}$) n'est *pas* l'effet estimé causal de cette variable.

Estimator: Linear regression with covariates | *Estimateur : La régression linéaire avec des covariables*

| | Reject FM | |
|--------------------|-----------|----------|
| | (1) | (2) |
| EFM Treat | 0.093*** | 0.095*** |
| Standard Error | 0.027 | 0.020 |
| RI <i>p</i> -value | 0.001 | <0.001 |
| Hypothesis | + | + |
| Control Mean | 0.82 | 0.82 |
| Control SD | 0.16 | 0.16 |
| DV Range | [0-1] | [0-1] |
| Blocked FE | Yes | Yes |
| Controls | No | 16 |
| Adj- R^2 | 0.09 | 0.23 |
| Observations | 998 | 998 |

Note: * $p < .1$, ** $p < 0.05$, and *** $p < 0.01$

Estimator: Linear regression with covariates | *Estimateur : La régression linéaire avec des covariables*

```
library(estimatr)  
# lm_robust(Y ~ treatment + Language + Gender)
```


Cluster Randomization | *Randomisation par grappe*

Estimator: Regression with cluster-robust standard errors | *Estimateur : La régression avec des erreurs types robustes au niveau du cluster*

$$Y_{ic} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Z_c + e_{ic}$$

$$Y_{ic} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Z_c + \hat{\gamma} X_{ic} + e_{ic}$$

- ▶ Our analysis has to take into account the fact that treatment is assigned at the cluster level with *cluster-robust standard errors*.
- ▶ $\hat{\beta}_1$ is the \widehat{ATE} of the treatment on individual units.
- ▶ We can also do covariate adjustment at the same time.
- ▶ Notre analyse doit prendre en compte le fait que le traitement est attribué au niveau du cluster avec des *erreurs types robustes au niveau du cluster*.
- ▶ $\hat{\beta}_1$ est \widehat{ATE} du traitement sur les unités individuelles.
- ▶ Nous pouvons également effectuer un ajustement covariable en même temps.

Cluster Randomization | *Randomisation par grappe*

```
library(estimatr)  
  
# lm_robust(Y ~ treatment, clusters=cluster_variable)  
  
# lm_robust(Y ~ treatment + covariate, clusters=cluster_variable)
```

Multiple Arm Experiments | *Les expériences avec plusieurs bras*

Estimator 1: Difference-in-Means | *Estimateur 1 : La différence en moyennes*

| | | |
|------------|------------|-------------------|
| Z_A only | Z_B only | Neither (control) |
|------------|------------|-------------------|

- ▶ We can always take the difference-in-means between any two groups.
- ▶ Nous pouvons toujours tenir compte de la différence de moyens entre deux groupes.

Estimator 2: Linear regression | *Estimateur 2 : La régression linéaire*

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_A Z_{Ai} + \hat{\beta}_B Z_{Bi} + e_i$$

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_A Z_{Ai} + \hat{\beta}_B Z_{Bi} + \hat{\gamma} X_i + e_i$$

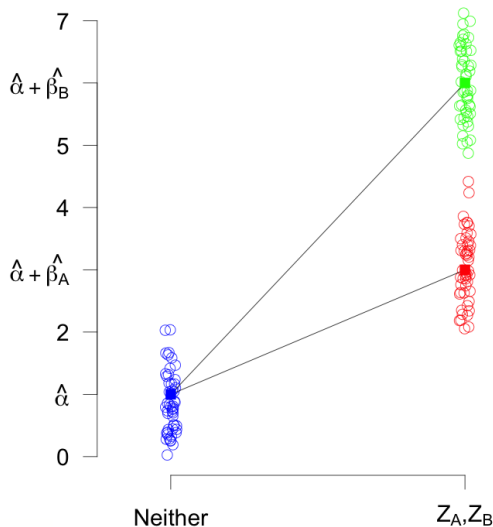
- ▶ Regression with an indicator variable for each of the two treatment arms.
 - ▶ $Z_{Ai} = 1$ if unit i has treatment Z_A , 0 otherwise
 - ▶ $Z_{Bi} = 1$ if unit i has treatment Z_B , 0 otherwise
- ▶ We can also do covariate adjustment at the same time.
- ▶ Régression avec une variable indicatrice pour chacun des deux bras de traitement.
 - ▶ $Z_{Ai} = 1$ si unité i a traitement Z_A , sinon 0
 - ▶ $Z_{Bi} = 1$ si unité i a traitement Z_B , sinon 0
- ▶ Nous pouvons également effectuer un ajustement covariable en même temps.

Estimator 2: Linear regression | *Estimateur 2 : La régression linéaire*

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_A Z_{Ai} + \hat{\beta}_B Z_{Bi} + e_i$$

- ▶ $\hat{\beta}_A$ is the \widehat{ATE} of Z_A (compared with control).
 - ▶ $\hat{\beta}_B$ is the \widehat{ATE} of Z_B (compared with control).
 - ▶ How do we estimate the effect of Z_B compared to Z_A ?
- ▶ $\hat{\beta}_A$ est \widehat{ATE} de Z_A (par rapport au contrôle).
 - ▶ $\hat{\beta}_B$ est \widehat{ATE} de Z_B (par rapport au contrôle).
 - ▶ Comment estimer l'effet de Z_B par rapport à Z_A ?

Estimator 2: Linear regression | *Estimateur 2 : La régression linéaire*



Z_A only

Z_B only

Neither (control)

$$Y_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_A Z_{Ai} + \hat{\beta}_B Z_{Bi} + e_i$$

Estimators for Multi-arm Designs | *Les estimateurs pour les expériences avec plusieurs bras*

```
# library(estimatr)  
# difference_in_means(Y ~ treatment,  
#           condition1="T1",  
#           condition2="T2")  
#  
#  
# library(car)  
# M <- lm_robust(Y ~ as.factor(treatment))  
# linearHypothesis(M, "T1=T2")
```

Factorial Design | *La conception factorielle*

Estimator 1: Difference-in-Means | *Estimateur 1 : La différence en moyennes*

| | | Z_2 | |
|-------|---|----------------------|------------|
| | | 1 | 0 |
| Z_1 | 1 | Both Z_1 and Z_2 | Z_1 only |
| | 0 | Z_2 only | Neither |

- ▶ We use factorial design, when we are interested in interaction effects.
- ▶ If we have a 2*2 factorial design, we have four groups.
- ▶ We can always take the difference-in-means between any two groups.
- ▶ Nous utilisons un plan factoriel quand nous nous intéressons aux effets d'interaction.
- ▶ Si nous avons une conception factorielle 2*2, nous avons 4 groupes.
- ▶ Nous pouvons toujours tenir compte de la différence de moyens entre deux groupes.

Estimator 2: Linear Regression with an Interaction Term | *Estimateur 2 : La régression linéaire avec un terme d'interaction*

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Z_{1i} + \hat{\beta}_2 Z_{2i} + \hat{\beta}_3 Z_{1i} * Z_{2i} + e_i$$

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Z_{1i} + \hat{\beta}_2 Z_{2i} + \hat{\beta}_3 Z_{1i} * Z_{2i} + \hat{\gamma} X_i + e_i$$

- ▶ Indicator variables for Z_1 and Z_2 .
- ▶ We can also do covariate adjustment at the same time.
- ▶ Variables indicatrices pour Z_1 et Z_2 .
- ▶ Nous pouvons également effectuer un ajustement covariable en même temps.

Estimator 2: Linear Regression with an Interaction Term | *Estimateur 2 : La régression linéaire avec un terme d'interaction*

| | $Z_2 = 1$ | $Z_2 = 0$ |
|-----------|----------------------|------------|
| $Z_1 = 1$ | Both Z_1 and Z_2 | Z_1 only |
| $Z_1 = 0$ | Z_2 only | Neither |

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Z_{1i} + \hat{\beta}_2 Z_{2i} + \hat{\beta}_3 Z_{1i} * Z_{2i} + e_i$$

- ▶ Estimand | Paramètre: $E[Y(Z_1 = 1)|Z_2 = 0] - E[Y(Z_1 = 0)|Z_2 = 0]$
 - ▶ $\hat{\beta}_1$ is the \widehat{ATE} of Z_1 conditional on $Z_2 = 0$ | \widehat{ATE} de Z_1 conditionnel à $Z_2 = 0$.

Estimator 2: Linear Regression with an Interaction Term | *Estimateur 2 : La régression linéaire avec un terme d'interaction*

| | $Z_2 = 1$ | $Z_2 = 0$ |
|-----------|----------------------|------------|
| $Z_1 = 1$ | Both Z_1 and Z_2 | Z_1 only |
| $Z_1 = 0$ | Z_2 only | Neither |

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 Z_{1i} + \hat{\beta}_2 Z_{2i} + \hat{\beta}_3 Z_{1i} * Z_{2i} + e_i$$

- ▶ Estimand | Paramètre: $E[Y(Z_1 = 1)|Z_2 = 1] - E[Y(Z_1 = 0)|Z_2 = 1]$
 - ▶ $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_3 = \widehat{ATE}$ of Z_1 conditional on $Z_2 = 1$ | \widehat{ATE} de Z_1 conditionnel à $Z_2 = 1$
- ▶ β_3 is called the interaction effect. β_3 est appelé l'effet d'interaction.

Estimator 2: Linear Regression with an Interaction Term | *Estimateur 2 : La régression linéaire avec un terme d'interaction*

| Antisocial behaviors, z-score | |
|-------------------------------|---------------------|
| Intercept | 0.151 |
| Therapy | -0.249** (0.088) |
| Cash | -0.079 (0.091) |
| Cash*Therapy | -0.308** (0.089) |

NOTE: * p<0.05; ** p<0.01; *** p<0.001 . The table reports intent-to-treat estimates of the effect of each treatment arm, controlling for covariates and block fixed effects. Taken from Table 2 of Blattman, Jamison, and Sheridan (2017)

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} - 0.249 \text{Therapy} - 0.079 \text{Cash} - 0.308 \text{Therapy} * \text{Cash}$$

Estimator 2: Linear Regression with an Interaction Term | *Estimateur 2 : La régression linéaire avec un terme d'interaction*

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} - 0.249 \text{Therapy} - 0.079 \text{Cash} - 0.308 \text{Therapy} * \text{Cash}$$

Neither: $\hat{Y} = \hat{\alpha}$

Cash only: $\hat{Y} = \hat{\alpha} - 0.079$

Therapy only: $\hat{Y} = \hat{\alpha} - 0.249$

Therapy and Cash: $\hat{Y} = \hat{\alpha} - 0.249 - 0.079 - 0.308$

\widehat{ATE} of Cash conditional on No Therapy = $\hat{\alpha} - 0.079 - \hat{\alpha} = -0.079$

\widehat{ATE} of Cash conditional on Therapy =
 $\hat{\alpha} - 0.249 - 0.079 - 0.308 - (\hat{\alpha} - 0.249) = -0.079 - 0.308 = -0.387$

Interaction effect = $-0.079 - 0.308 - (-0.079) = -0.308$

Estimator 2: Linear Regression with an Interaction Term | *Estimateur 2 : La régression linéaire avec un terme d'interaction*

```
library(estimatr)
# lm_robust(Y ~ Z1 + Z2 + Z1*Z2)

# lm_robust(Y ~ Z1*Z2)

# lm_robust(Y ~ Z1*Z2 + covariate)
```