

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	2
1 ПРЯМАЯ ЗАДАЧА БКЗ	3
2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	6
2.1 Слабая постановка	6
2.2 Апроксимация	9
3 РАСЧЕТНАЯ СЕТКА	11
3.1 Постановка задачи	11
3.2 Построение одномерной сетки	12
3.3 Построение двумерной сетки	14
3.4 Результаты	26
4 РЕШЕНИЕ	28
4.1 Модель 1	28
4.2 Модель 2	34
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	40
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	41

ВВЕДЕНИЕ

<В скобках <> указаны комментарии>

<Введение позже будет. Полагаю, необходимо искать материал еще.>

1 ПРЯМАЯ ЗАДАЧА БКЗ

Боковое каротажное зондирование (БКЗ) состоит в измерении потенциала электрического поля, создаваемого в среде точечным электрическим зарядом. Далее по измеренному распределению потенциала предпринимается попытка воссоздать геометрию среды, а также ее удельное сопротивление в разных точках пространства.

Поскольку наличие электрического поля в проводящей среде означает возникновение в ней тока, точечный заряд, о котором говорилось выше, фактически представляет собой электрод, находящийся под напряжением относительно бесконечно удаленных точек (условимся называть его излучающим). Технически это достигается за счет использования дополнительного электрода, располагаемого на большом расстоянии от первого; тем самым цепь замыкается, и течение тока становится возможным. В действительности нас не будет интересовать распределение поля на существенном удалении от излучающего электрода, поэтому мы ограничимся моделью, в которой ток растекается от него на условную бесконечность, обладающую нулевым потенциалом. Следует отметить, что на практике как размер излучающего электрода, так и его потенциал являются конечными. При этом, однако, становится необходимым детальный учет геометрии области контакта прибора со средой. Дабы избежать подобных затруднений, мы будем считать электрод точечным, а распределение поля вокруг него – сингулярным, задавая интенсивность излучения не потенциалом излучающего электрода, а силой протекающего через него тока.

Распределение потенциала в среде регистрируется приемными электродами, наличие которых само по себе искажает линии тока в пространстве. Этим эффектом, однако, можно пренебречь, если величина тока, протекающего через приемные электроды, невелика. Далее мы будем считать, что последнее предположение верно.

Расположение приемных электродов варьируется в зависимости от того, какие именно величины предполагается наблюдать непосредственно. Если речь

идет об измерении потенциала электрического поля как такового, то каждый отдельно взятый электрод может рассматриваться как самостоятельный зонд; в этом случае мы имеем дело с потенциал-зондом (строго говоря, техническая реализация потенциал-зонда может быть более сложной, но для теоретических расчетов это значения не имеет). Если же измерять предполагается не сам потенциал, а составляющую его градиента (т.е., с точностью до знака, компоненту напряженности электрического поля), используется пара близко расположенных приемных электродов - так называемый градиент-зонд. При таком подходе рассматриваются не потенциалы электродов в отдельности, а разность их потенциалов, которая и позволяет судить об искомой величине градиента. Независимо от типа зонда, под его длиной мы будем понимать расстояние между излучающим электродом и приемными.

На практике результаты измерений БКЗ принято представлять не значениями потенциалов, которые пропорциональны силе тока в излучающем электроде, а независящими от тока значениями кажущихся удельных сопротивлений. Под кажущимся удельным сопротивлением понимается удельное сопротивление такой однородной среды, в которой измерение данным зондом привело бы в точности к тем же результатам, что были получены фактически. Таким образом, при исследовании однородной среды методом БКЗ все зонды, независимо от их типов и длин, приводили бы к одному и тому же значению кажущегося удельного сопротивления, которое соответствовало бы истинному удельному сопротивлению вещества, заполняющего пространство. В случае неоднородной среды никакой прямой аналогии нет, и вычисление ее истинных параметров по кажущимся удельным сопротивлениям становится довольно сложной задачей, которая и представляет собой обратную задачу БКЗ. На практике она может быть сформулирована следующим образом: даны значения кажущегося удельного сопротивления, полученные с нескольких разных зондов (отличающихся, как правило, длиной, но также, возможно, типом и расположением); найти удельное сопротивление среды в каждой точке пространства. Ясно, что в отсутствие дополнительных упрощающих предположений эта задача становится принципиально неразрешимой.

Прямая задача БКЗ заключается в прогнозировании кажущихся удельных сопротивлений, которые должны быть получены в процессе измерения зондами заданных типов и длин. Характеристики сред, в которых осуществляются измерения, также будем считать известными. Прямая задача, в отличие от обратной, всегда разрешима.

2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Формализуем задачу, описанную в предыдущем пункте. Во-первых, поместим излучающий электрод в начало координат $\mathbf{x} = 0$ и введем обозначение I для силы протекающего через него тока.

<Здесь вывод задачи Дирихле для электрического потенциала. Вывод и математическая постановка для кажущегося сопротивления потенцил- и градиент-зондов. Полагаю, нужно хорошо разобрать информацию в источнике [1] и в отчете по БКЗ Магадеева.>

Электрический потенциал $u = u(\mathbf{x})$ электрического поля удовлетворяет задаче Дирихле для уравнения Пуассона [1, с. 67]:

$$\nabla \cdot (\nabla u(\mathbf{x})/\rho(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2.2)$$

где Ω — бесконечная область пространства, $\partial\Omega$ — граница области Ω , точки которой находятся на бесконечности ($\mathbf{x} \in \partial\Omega : |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$), $f = f(\mathbf{x})$ — источниковый член.

Источниковый член в случае точечного источника потенциала в точке $\mathbf{x} = 0$:

$$f(\mathbf{x}) = -I\delta(\mathbf{x}), \quad (2.3)$$

где $\delta(\mathbf{x})$ — обобщенная функция дельта-функция Дирака.

2.1 Слабая постановка

Достаточно гладкая функция u , удовлетворяющая обеим равенствам (2.1) и (2.2), известна как классическое решение для краевой задачи. Для задачи Дирихле, функция u является классическим решением, только если она дважды непрерывно дифференцируемая в открытой области Ω ($u \in C^2(\Omega)$) и непрерывная в закрытой области Ω ($u \in C^0(\overline{\Omega})$). В случаях областей с негладкими границами или функций, не являющихся гладкими, f — источниковых членов

(к тому же функция УЭС ρ негладкая), функция u , удовлетворяющая (2.1)–(2.2), может не быть гладкой (или обычной) достаточно, чтобы считалась классическим решением. Поскольку f не является гладкой функцией, то вторая производная решения u не является гладкой, и следовательно $u \notin C^2(\Omega)$ и не существует классического решения. Для таких задач, которые возникают из вполне обоснованных математических моделей, необходима альтернативная запись краевых задач. Поскольку эта альтернативная запись менее ограничивает в плане допустимых входных данных, она названа слабой постановкой [2, с. 14].

<Текст на английском языке будет переден на русский язык.>

FEniCS is based on the finite element method, which is a general and efficient mathematical machinery for the numerical solution of PDEs. The starting point for the finite element methods is a PDE expressed in variational form. Experience shows that you can work with FEniCS as a tool to solve PDEs even without thorough knowledge of the finite element method, as long as you get somebody to help you with formulating the PDE as a variational problem [3, c. 12].

The basic recipe for turning a PDE into a variational problem is to multiply the PDE by a function v , integrate the resulting equation over the domain Ω , and perform integration by parts of terms with second-order derivatives. The function v which multiplies the PDE is called a test function. The unknown function u to be approximated is referred to as a trial function. The terms trial and test functions are used in FEniCS programs too. The trial and test functions belong to certain so-called function spaces that specify the properties of the functions.

В данном случае, сначала умножим уравнение Пуассона на тестовую функцию v и интегрируем по заданной области Ω :

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla u / \rho) v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.4)$$

We here let dx denote the differential element for integration over the domain Ω . We will later let ds denote the differential element for integration over the boundary of Ω .

Как правило, когда получают вариационную постановку, избавляются от высших степеней производных. Здесь мы имеем производную второго порядка функции u , которая может быть переведена в производные первого порядка функций u и v посредством применения метода интегрирования по частям. Формула гласит

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla u / \rho) v \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad (2.5)$$

где $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ есть производная u по направлению внешней нормали n на границе.

Еще одной особенностью вариационных постановок является то, что тестовая функция должна зануляться на участках границы, где известно u . В нашей задаче, это значит, что $v = 0$ на всей границе $\partial\Omega$. Первый член в правой части уравнения следовательно пропадает. Из (2.4) и (2.5) следует

$$-\int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.6)$$

If we require that this equation holds for all test functions v in some suitable space \hat{V} , the so-called test space, we obtain a well-defined mathematical problem that uniquely determines the solution u which lies in some (possibly different) function space V , the so-called trial space. We refer to (2.6) as the weak form or variational form of the original boundary-value problem (2.1)–(2.2).

The proper statement of our variational problem now goes as follows: find $u \in V$ such that

$$-\int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx. \quad (2.7)$$

The trial and test spaces V and \hat{V} are in the present problem defined as

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \quad (2.8)$$

$$\hat{V} = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}. \quad (2.9)$$

Область определения функций пространств есть Ω , и эти функции удовлетворяют граничным условиям: значения функций на $\partial\Omega$ равны нулю. In short, $H^1(\Omega)$ is the mathematically well-known Sobolev space containing functions

v such that v^2 and $|\nabla v|^2$ have finite integrals over Ω (essentially meaning that the functions are continuous). The solution of the underlying PDE must lie in a function space where the derivatives are also continuous, but the Sobolev space $H^1(\Omega)$ allows functions with discontinuous derivatives. This weaker continuity requirement of u in the variational statement (2.7), as a result of the integration by parts, has great practical consequences when it comes to constructing finite element function spaces. In particular, it allows the use of piecewise polynomial function spaces; i.e., function spaces constructed by stitching together polynomial functions on simple domains such as intervals, triangles, or tetrahedrons.

2.2 Аппроксимация

<Текст на английском языке будет переден на русский язык.>

The variational problem (2.7) is a continuous problem: it defines the solution u in the infinite-dimensional function space V . The finite element method for the Poisson equation finds an approximate solution of the variational problem (2.7) by replacing the infinite-dimensional function spaces V and \hat{V} by discrete (finite-dimensional) trial and test spaces $V_h \subset V$ and $\hat{V}_h \subset \hat{V}$. The discrete variational problem reads: find $u_h \in V_h \subset V$ such that [3, c. 14]

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in \hat{V}_h \subset \hat{V}. \quad (2.10)$$

This variational problem, together with a suitable definition of the function spaces V_h and \hat{V}_h , uniquely define our approximate numerical solution of Poisson's equation (2.1). Note that the boundary conditions are encoded as part of the trial and test spaces. The mathematical framework may seem complicated at first glance, but the good news is that the finite element variational problem (2.10) looks the same as the continuous variational problem (2.7), and FEniCS can automatically solve variational problems like (2.10)!

Приближенное решение разыскивается в виде:

$$u_h = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

где $\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_N(\mathbf{x})$ — некоторые заданные (базисные) функции, удовлетворяющие граничным условиям; c_1, c_2, \dots, c_N — неизвестные, подлежащие вычислению. Их находят, решая систему алгебраических уравнений [4, с. 14]:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.12)$$

$\varphi_i(\mathbf{x})$ — базисная функция, непрерывная на Ω , равная нулю на $\partial\Omega$ и заданная таким образом:

$$\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j, \\ 1, & \text{если } \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j; \end{cases} \quad (2.13)$$

где \mathbf{x}_i — координаты i -того узла сетки.

3 РАСЧЕТНАЯ СЕТКА

При применении метода конечных элементов к данной задаче возникают затруднения, связанные с тем, что искомый потенциал поля имеет особенность (уходит на бесконечность) в окрестности источника тока. Это приводит к необходимости сгущения расчётной сетки в этой окрестности, но сильное сгущение приводит к чрезмерному росту числа узлов сетки и, как следствие, сильному росту времени, требуемому на решение.

Поэтому представляет актуальность задача построения оптимальной сетки, в которой сочетаются высокая точность получаемого решения и малое число узлов.

3.1 Постановка задачи

В качестве модельной рассматривалась задача для трёхслойной осесимметричной модели системы скважина–пласт: задача рассматривается в цилиндрической системе координат (r, z) , где $r > 0$ — радиальная координата, z — осевая координата, по которой область однородна (единственный однородный пласт бесконечной мощности), первый слой — сама скважина ($0 < r < 1$) с УЭС $\rho_c = 1$, второй слой — зона проникновения ($1 < r < r_{3\pi} = 9$) с УЭС $\rho = 15$, третий слой — пласт ($r > r_\pi$) с УЭС $\rho_\pi = 10$. В начале координат размещается источник тока силой 1.

В качестве основы для расчётной сетки использовалась одномерная сетка, узлы которой рассчитаны в параграфе 3.2, отложенная на лучах, исходящих из начала координат под различными углами. Затем эта основа дополнялась узлами, лежащими на границах разрыва УЭС $r = 1$ и $r = r_\pi$. Также производилось дополнительное адаптивное сгущение сетки в областях, в которых наблюдалось сильное искажение решения по сравнению с эталонным (полученным на сетке с большим числом узлов во всей области).

3.2 Построение одномерной сетки

Задача БКЗ моделируется, как правило, для осесимметричного случая, что приводит к двумерным задачам. Известно, что точное решение (потенциал электрического поля) для случая одинакового во всём пространстве удельного электрического сопротивления (УЭС) есть константа, делённая на расстояние до источника:

$$\varphi(r, z) = \frac{C}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

(здесь начало координат совпадает с источником тока)

Поскольку для любого распределения УЭС решение в малой окрестности источника тока практически определяется УЭС в этой же окрестности (а она считается постоянной, равной УЭС жидкости в скважине), решение будет всегда иметь одну и ту же особенность в начале координат и изменяться плавно вдали от источника тока. В качестве первого приближения к оптимальной сетке можно использовать оптимальную одномерную сетку для известного распределения $y = 1/x$, и затем эту одномерную сетку распространять на несколько лучей, исходящих из начала координат.

Поэтому первой поставленной задачей было построение оптимальной одномерной сетки для интерполяции известной функции $y = 1/x$:

Задача. Данна функция $y = 1/x$ на интервале $[\delta, +\infty)$ ($\delta > 0$). Построить на ней сетку $\{x_i, i = 0, 1, \dots\}$ из наименьшего числа узлов (начиная с $x_0 = \delta$) так, чтобы разность между функцией y и приближающим её сплайном первого порядка на этой сетке не превышала заданного значения ε .

Математическая постановка:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ — исходная функция}$$

$$X = (x_i), i \in [0, N] \text{ — сетка}$$

$$x_0 = \delta \text{ — известное}$$

$$F(x) = \begin{cases} F_0(x), & x \in [x_0, x_1] \\ F_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ \dots \\ F_{N-1}(x), & x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases} \quad (3.1)$$

$$F_i(x) = A_i x + B_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} F_i(x_i) = f(x_i) \\ F_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \end{cases} \Rightarrow A_i, B_i \quad (3.3)$$

$$R(x) = \begin{cases} R_0(x), & x \in [x_0, x_1] \\ R_1(x), & x \in [x_1, x_2] \\ \dots \\ R_{N-1}(x), & x \in [x_{N-1}, x_N] \end{cases} \quad (3.4)$$

$$R_i(x) = |F_i(x) - f(x)|, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (3.5)$$

$$R'_i(x) = 0 \Rightarrow x_{\max} \quad (3.6)$$

$$R_i(x_{\max}) = \varepsilon \Rightarrow x_{i+1} \quad (3.7)$$

Решение:

$$\begin{cases} F_i(x_i) = f(x_i) \\ F_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_i x_i + B_i = f(x_i) \\ A_i x_{i+1} + B_i = f(x_{i+1}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \\ B_i = f(x_i) - A_i x_i \end{cases} \quad (3.8)$$

$$R_i(x) = A_i x + B_i - \frac{1}{x} \quad (3.9)$$

$$R'_i(x) = A_i + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x_{\max} = \frac{1}{\sqrt{-A_i}} \quad (3.10)$$

$$R_i(x_{\max}) = A_i \frac{1}{\sqrt{-A_i}} + B_i - \sqrt{-A_i} = \varepsilon \Rightarrow \quad (3.11)$$

$$x_{i+1} = \begin{cases} \frac{\varepsilon x_i^2 + x_i - 2\sqrt{\varepsilon x_i^3}}{\varepsilon^2 x_i^2 - 2\varepsilon x_i + 1}, & \text{— выражение для нового левого узла} \\ \frac{\varepsilon x_i^2 + x_i + 2\sqrt{\varepsilon x_i^3}}{\varepsilon^2 x_i^2 - 2\varepsilon x_i + 1}; & \text{— выражение для нового правого узла} \end{cases} \quad (3.12)$$

Решение уравнения (3.11) было получено посредством библиотеки SymPy в Python.

3.3 Построение двумерной сетки

Для построения вершин шестиугольников использованы одномерные сетки: узлы решения для гиперболы и узлы, равноотстоящие в логарифмическом масштабе. Использована реализация триангуляции библиотеки triangle на Python с различными настройками: режимы добавления новых узлов, учет графа, значения ограничения снизу значений углов треугольников.

1. Построены вершины шестиугольников из узлов решения для гиперболы. Построены сегменты (отрезки) внутреннего и внешнего границ (сегменты изображены красными линиями) и обозначена метка дыры (изображена красным крестиком) внутри внутренней границы для триангуляции (рис. ??). Вызвана триангуляция библиотеки triangle с настройкой 'pq30', где 'p' сообщает библиотеке о вводе графа, 'q30' — ограничение снизу 30 градусов значений углов треугольников двухмерной сетки.

Кол-во узлов: 421

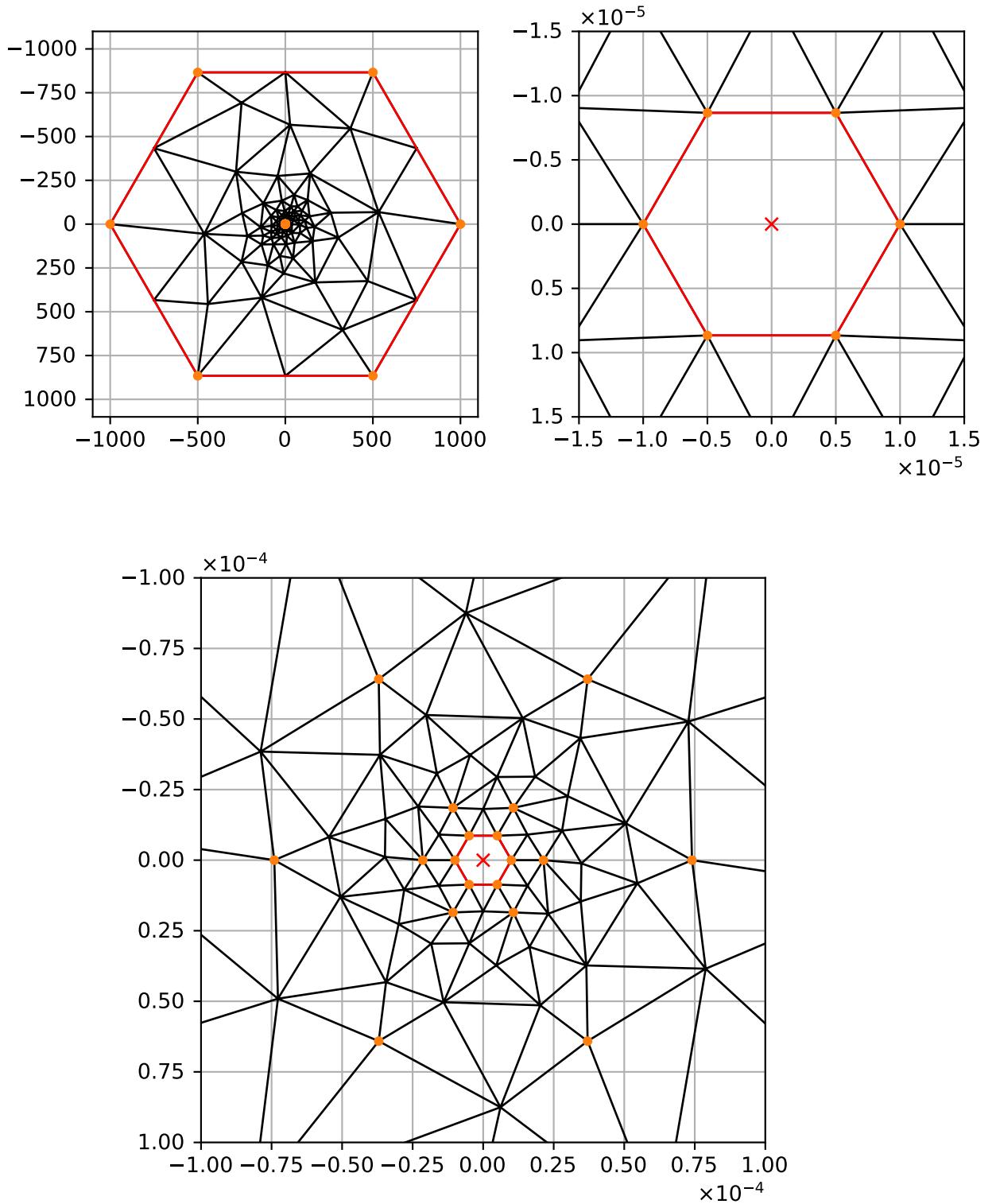
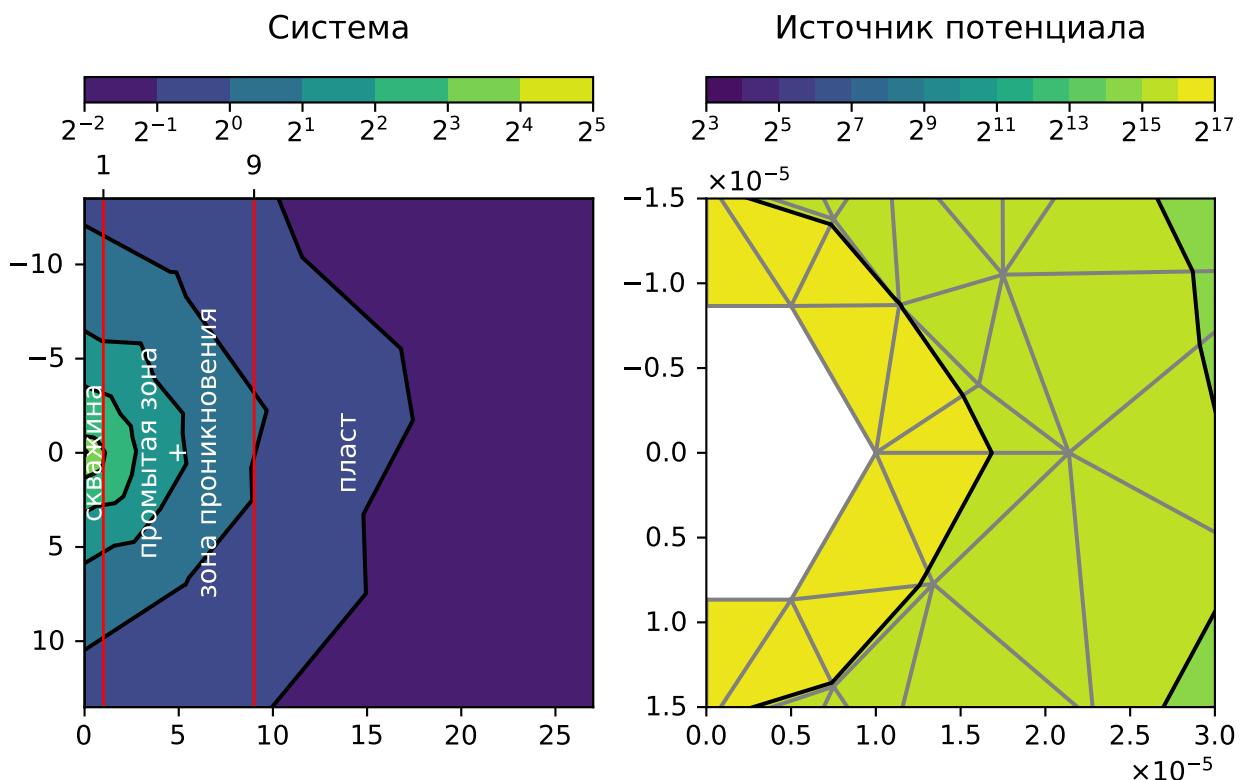
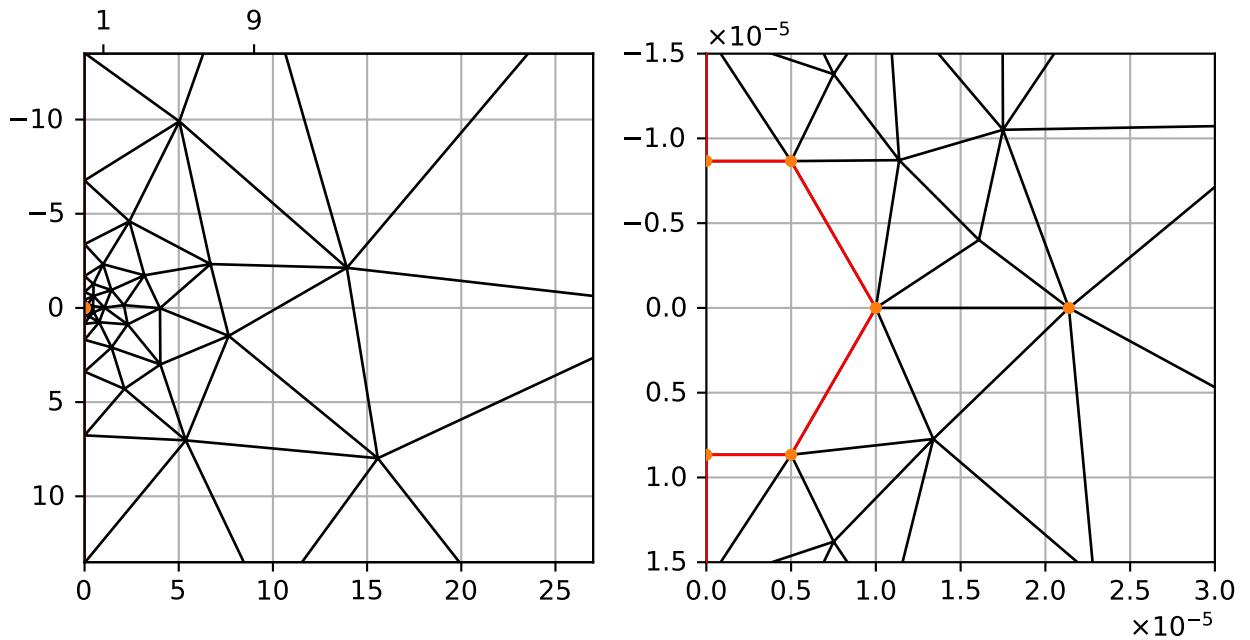
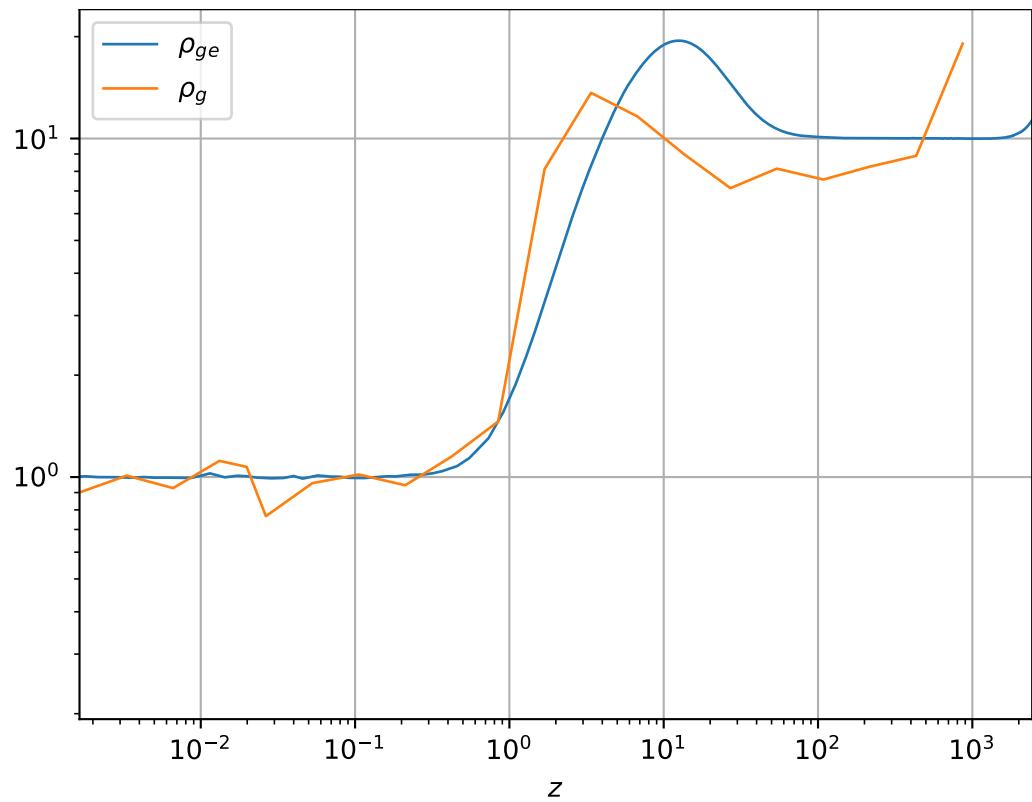


Рис. 3.1

2. Для расчетной сетки выбраны узлы, расположенные справа от оси $r = 0$, и построены сегменты половинок внутреннего и внешнего границ. Использованы лагранжевые элементы \mathcal{P}_1 .

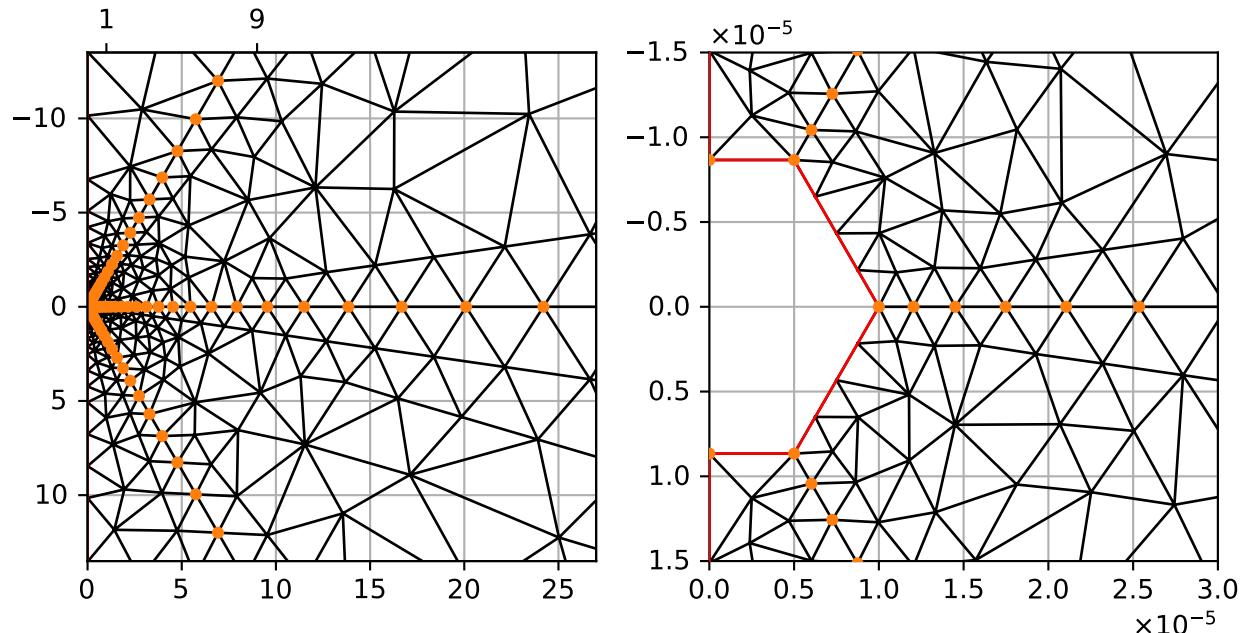
Кол-во узлов: 221

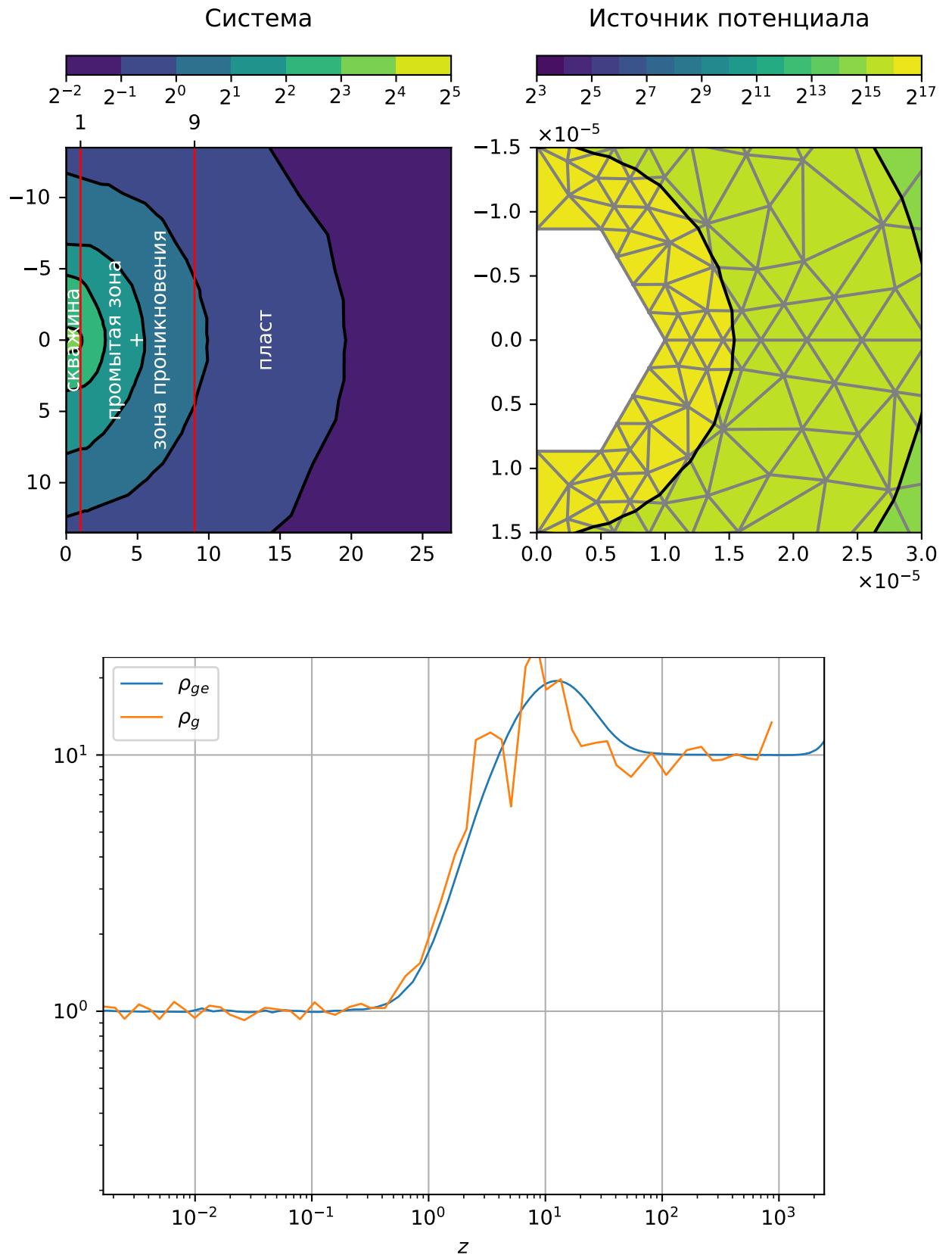




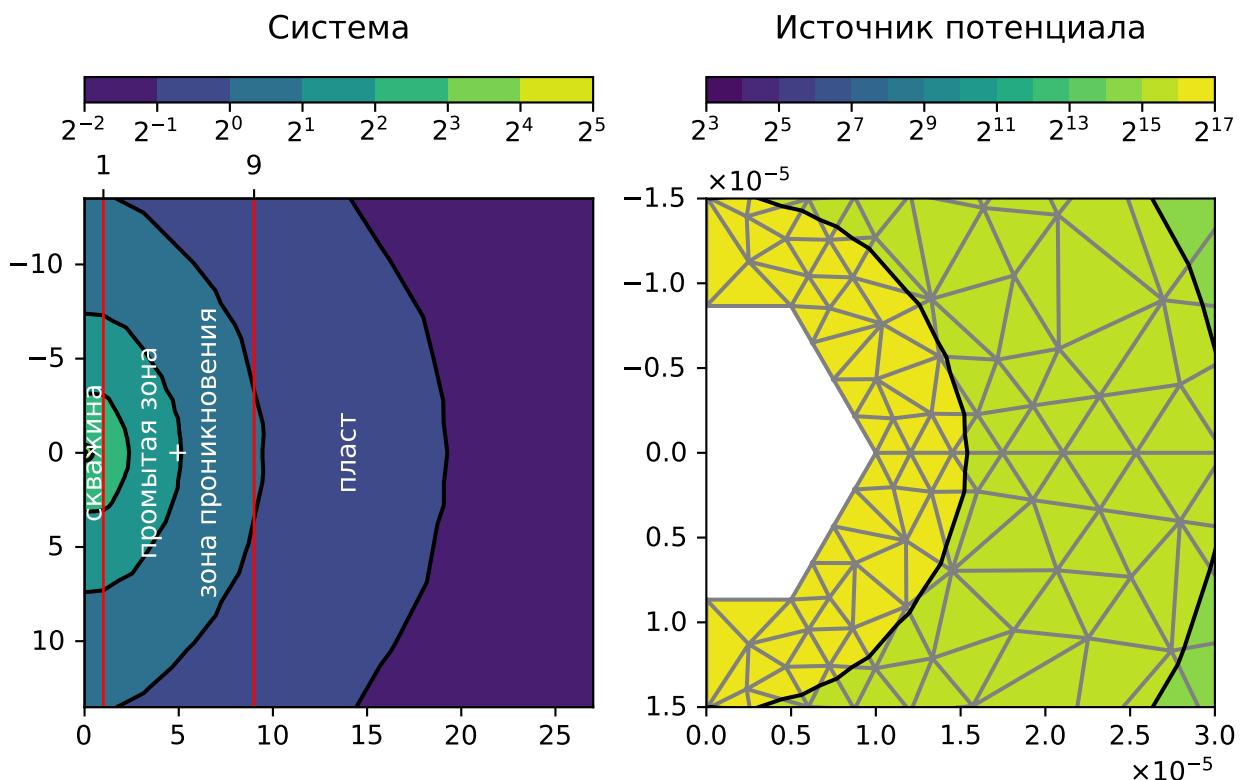
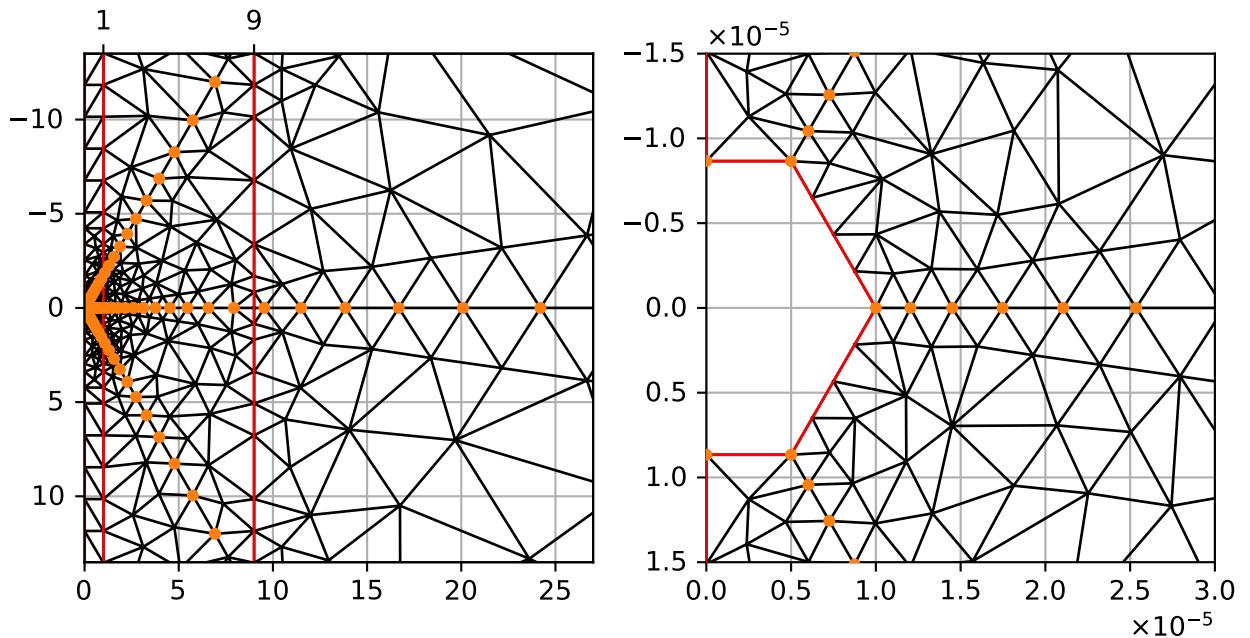
3. Использованы узлы, равноотстоящие в логарифмическом масштабе.

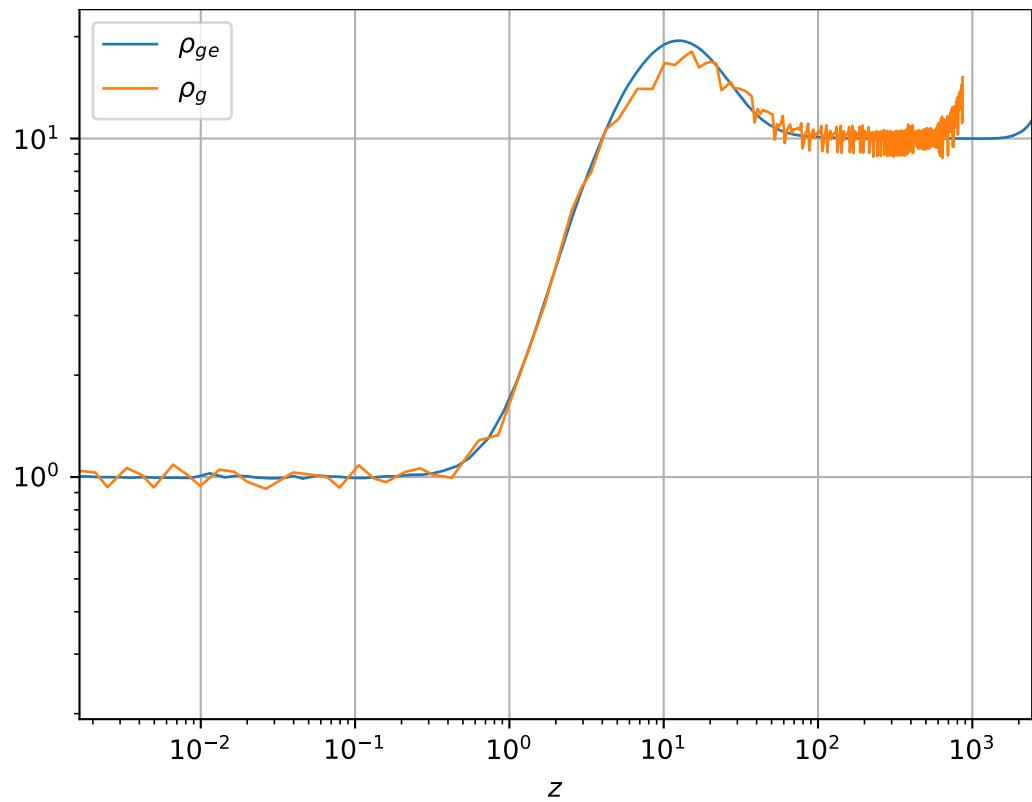
Кол-во узлов: 1510





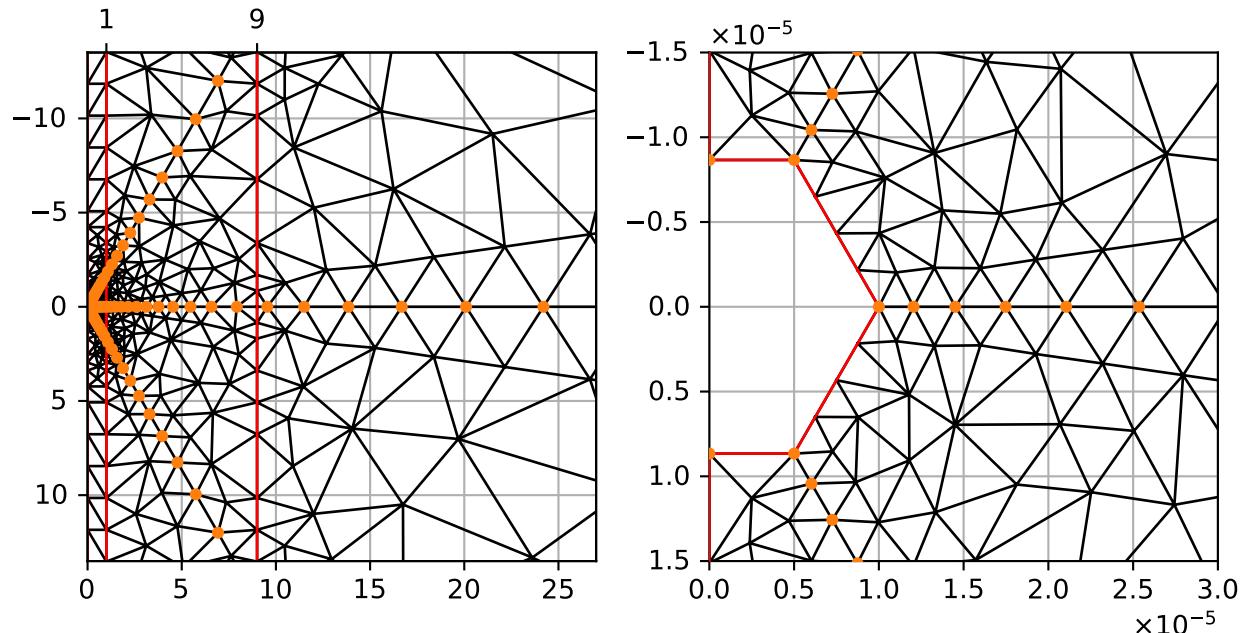
4. Добавлены сегменты на местах разрыва коэффициента УЭС.
Кол-во узлов: 7201

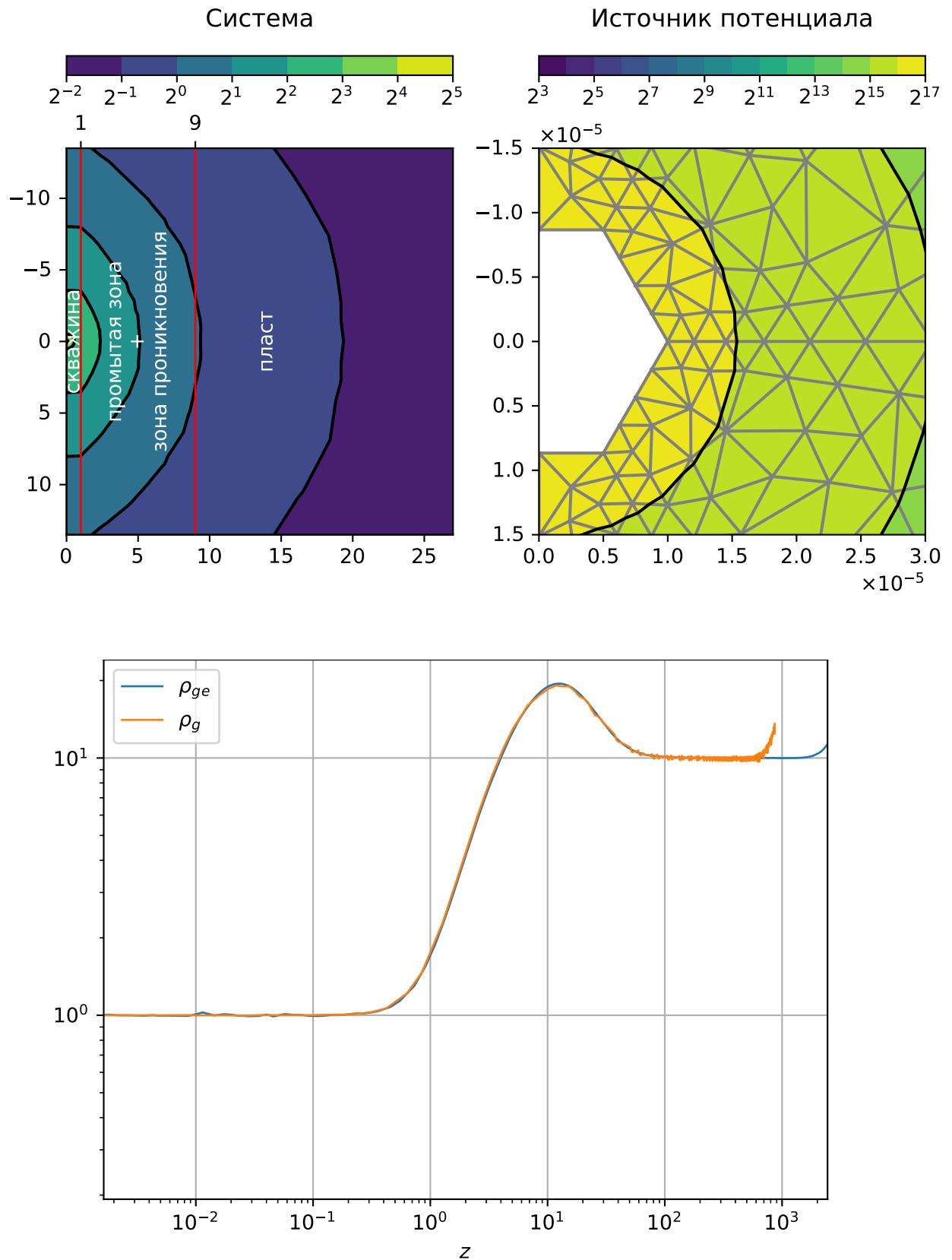




5. Использованы лагранжевые элементы \mathcal{P}_3 .

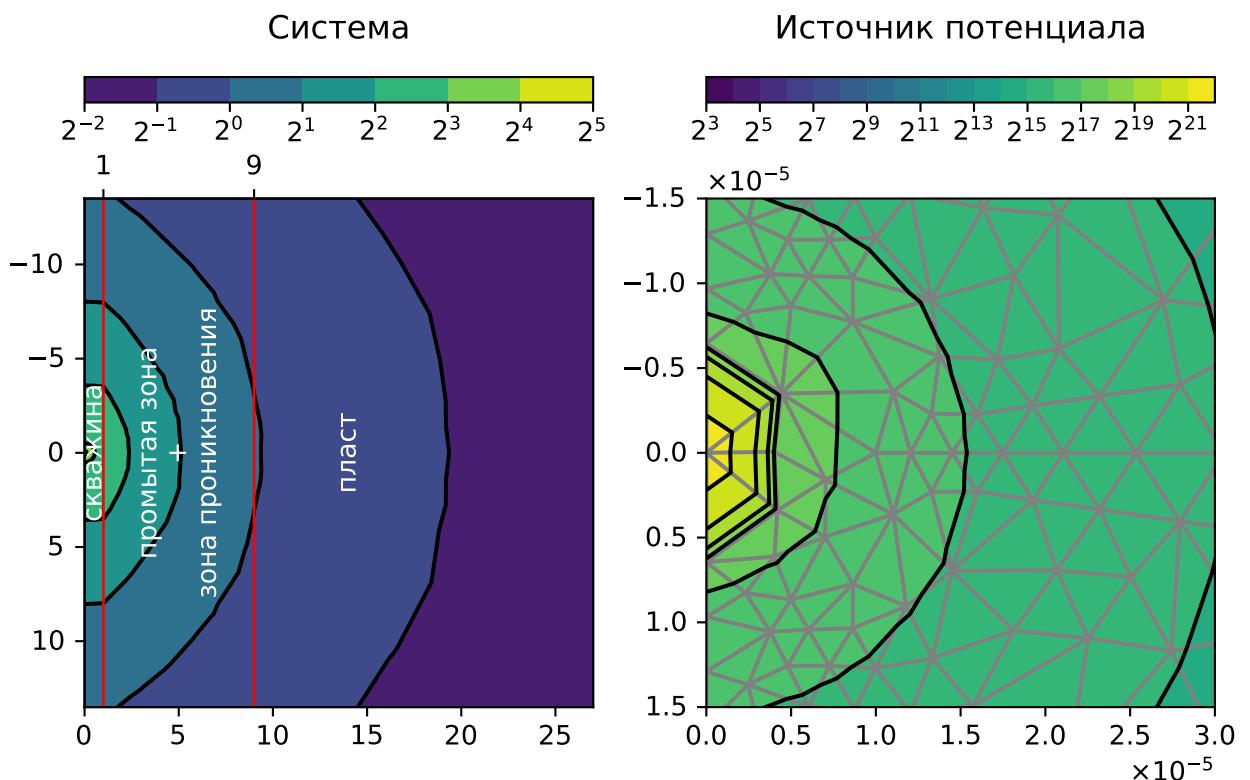
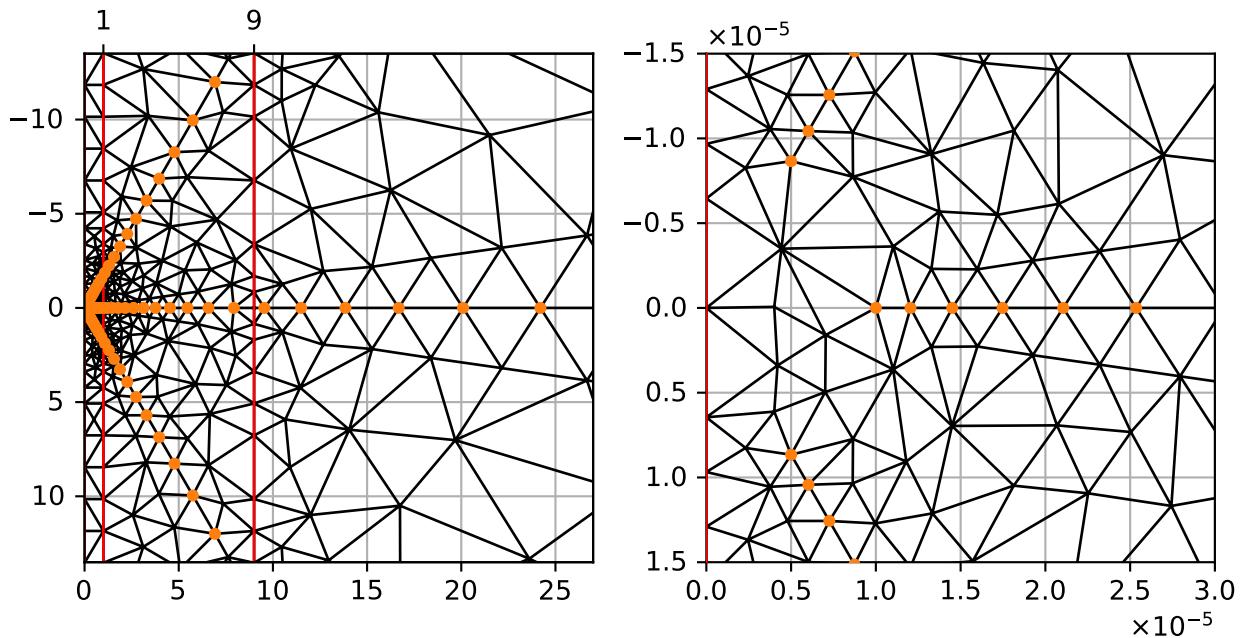
Кол-во узлов: 7201

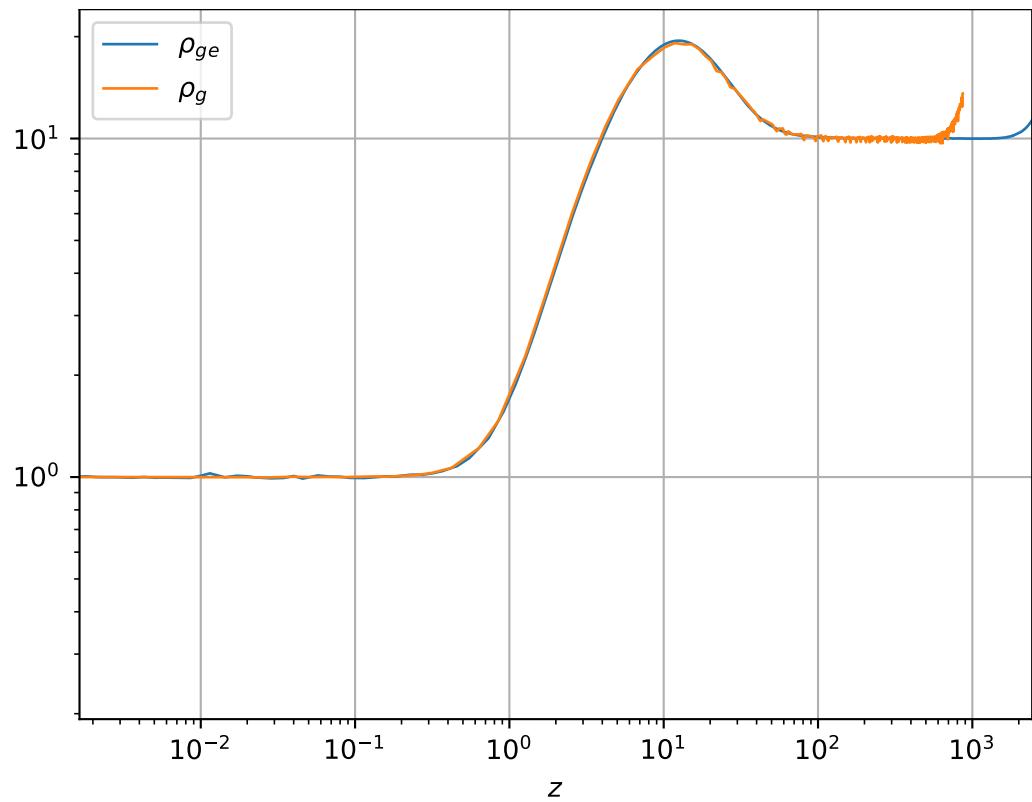




6. Использован точечный источник вместо внутреннего граничного условия.

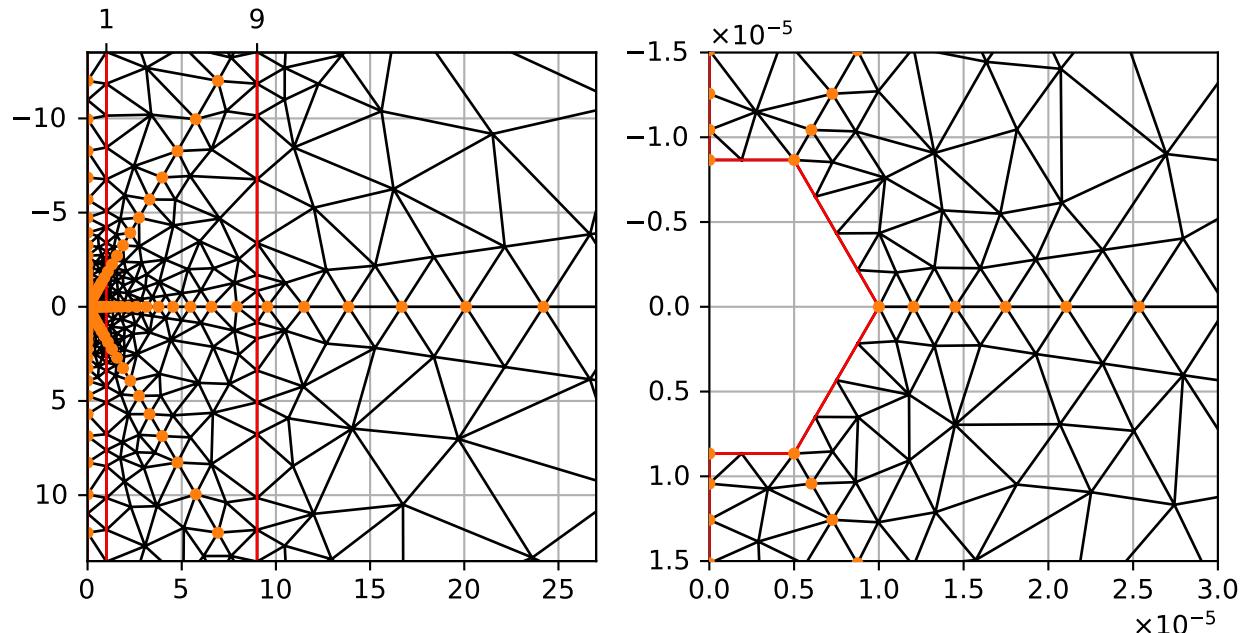
Кол-во узлов: 6659

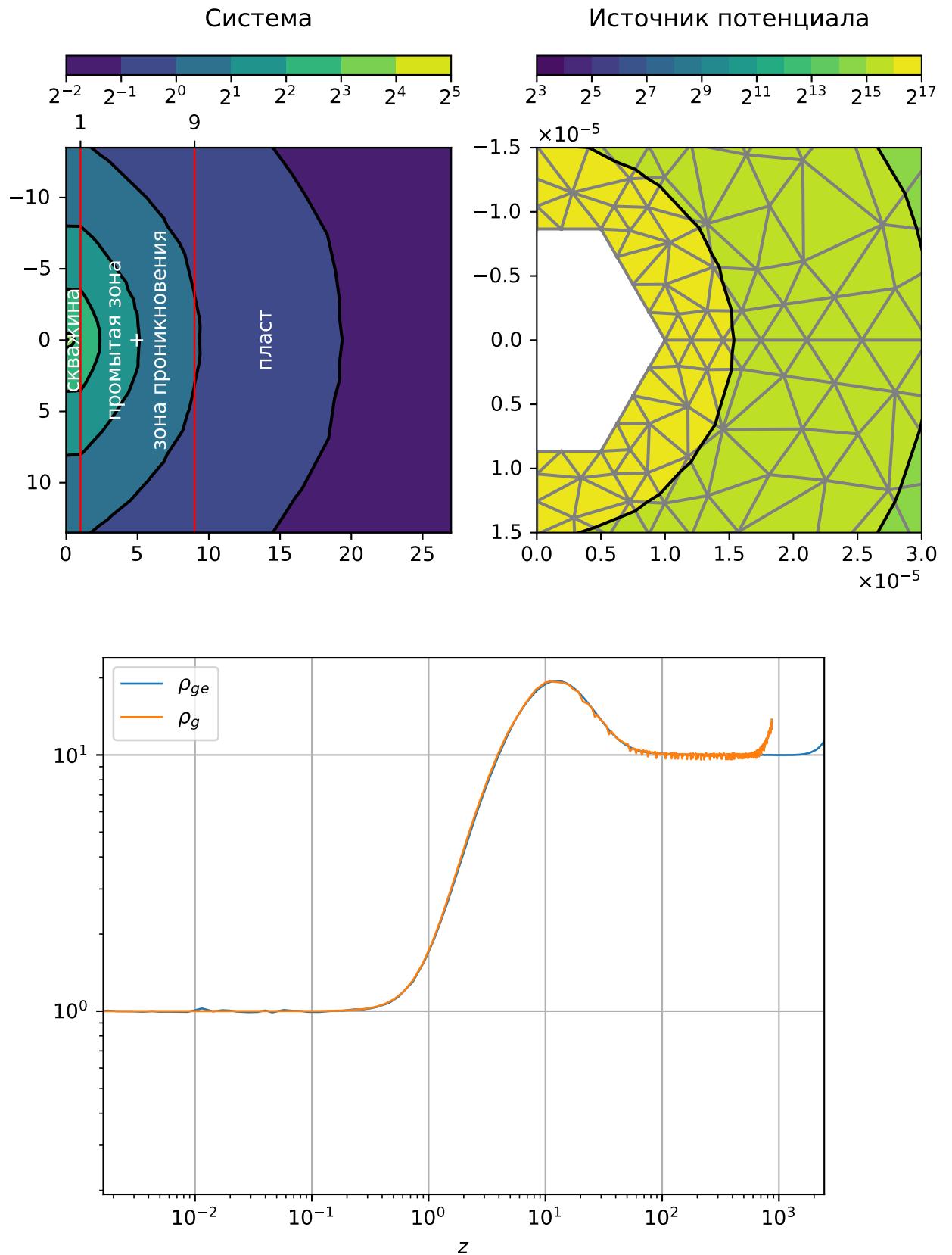




7. Добавлены на границе $r = 0$ узлы одномерной сетки.

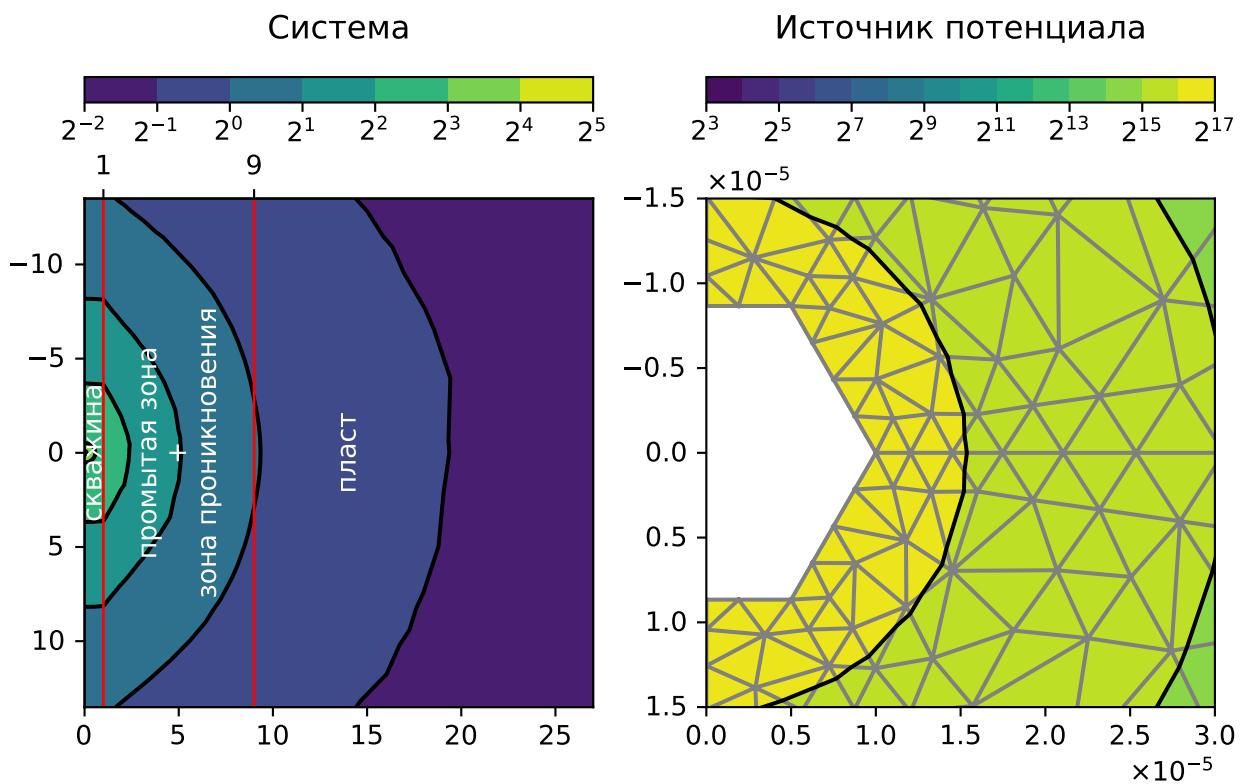
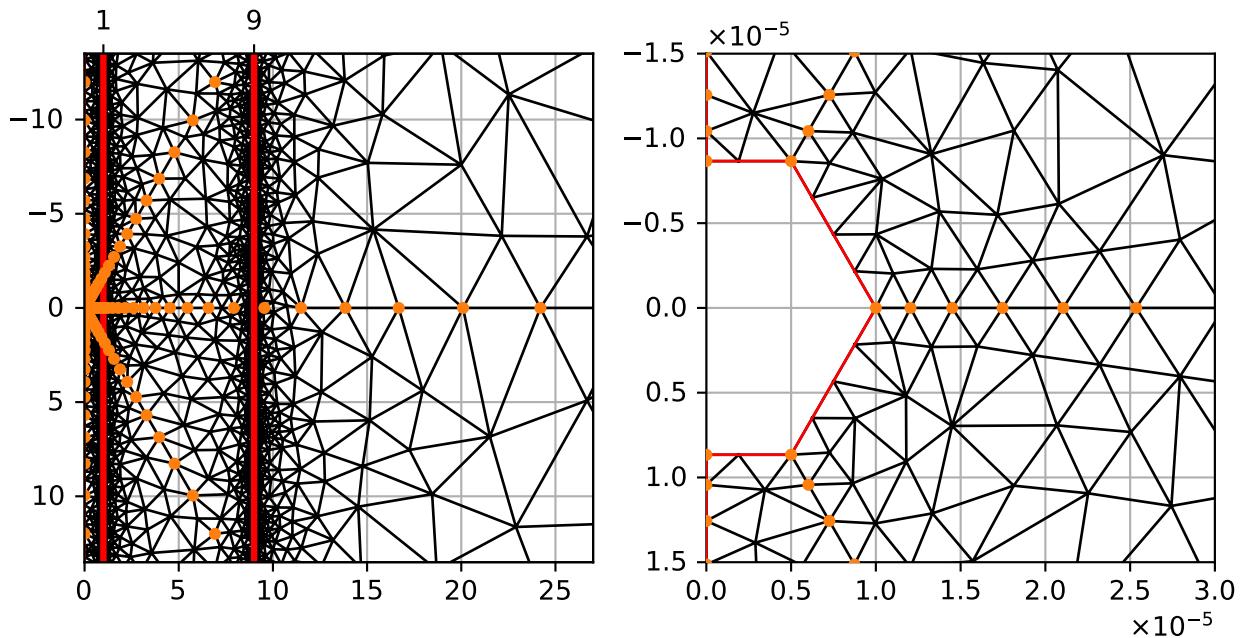
Кол-во узлов: 6845

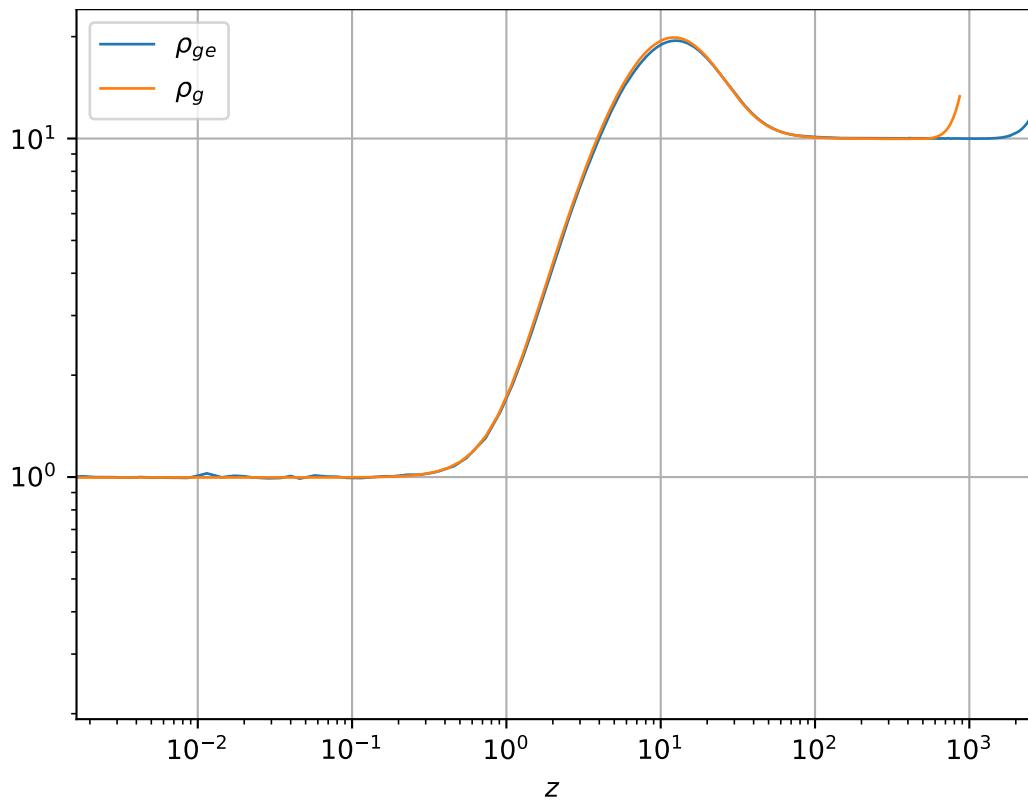




8. Добавлены сегменты возле мест разрыва коэффициента УЭС. Использованы лагранжевые элементы \mathcal{P}_2 .

Кол-во узлов: 156856





<Здесь новые эксперименты, которые еще не оформлены, и лучший эксперимент, в котором получилось приемлемое решение кажущегося сопротивления во всей области с меньшим числом узлов.>

3.4 Результаты

Оптимальный результат получен в эксперименте X за время в среднем X сек. со среднеквадратичным отклонением X сек. при N проходов с N циклами. Использованы: функция PointSource библиотеки FEniCS для введения точечного источника потенциала; узлы, равноотстоящие в логарифмическом масштабе; узлы лежащие в местах пересечений границ областей УЭС с концетрическими окружностями и лучами, отрезки графа на местах разрыва коэффициента УЭС; лагранжевые элементы \mathcal{P}_2 ; настройка библиотеки triangle 'pq30'. Использован ПК для вычисления: операционная система Ubuntu 18.04 LTS, процессор Intel Pentium 4415U 2.30 ГГц с 4 логическими процессорами (4 = 1*2*2 — 1 физический процессор, 2 ядра в физическом процессоре, 2 потока в каждом ядре).

В результате проведённых численных экспериментов разработан метод построения оптимальных сеток для решения задачи БКЗ на сетке, позволяющий получить приемлемое численное решение с меньшими затратами ресурсов.

4 РЕШЕНИЕ

<описание двух моделей>

Использован ПК для вычисления: операционная система Ubuntu 18.04 LTS, процессор Intel Pentium 4415U 2.30 ГГц с 4 логическими процессорами ($4 = 1 \cdot 2 \cdot 2$ — 1 физический процессор, 2 ядра в физическом процессоре, 2 потока в каждом ядре).

4.1 Модель 1

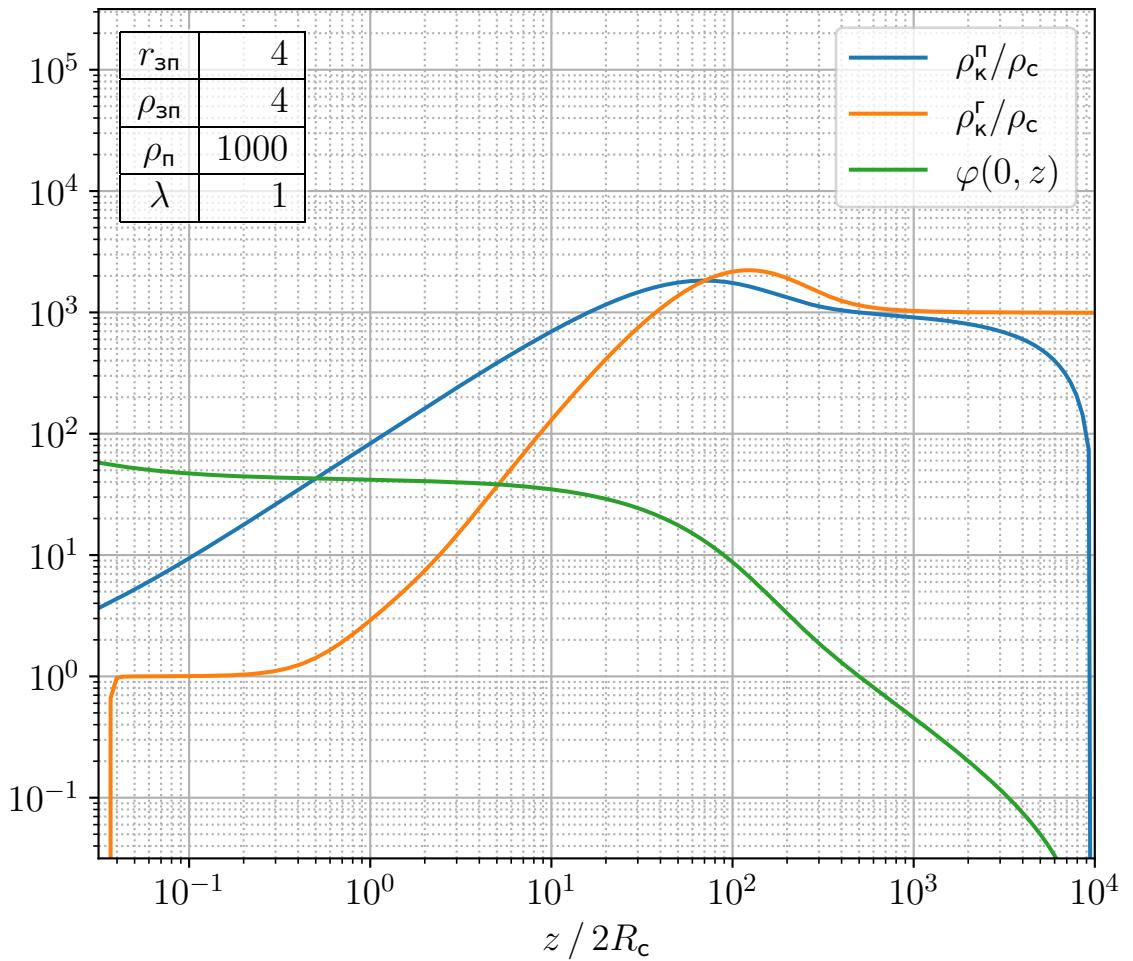


Рис. 4.1

Время вычисления решения (рис. 4.1) 1.24 с ± 38.3 мс, 7 проходов (среднее значение ± среднеквадратичное отклонение от 7 проходов, в каждом проходе 1 цикл).

6409 узлов расчетной сетки.

Далее изображены поле, расчетная сетка и решение для палетки с этой расчетной сеткой.

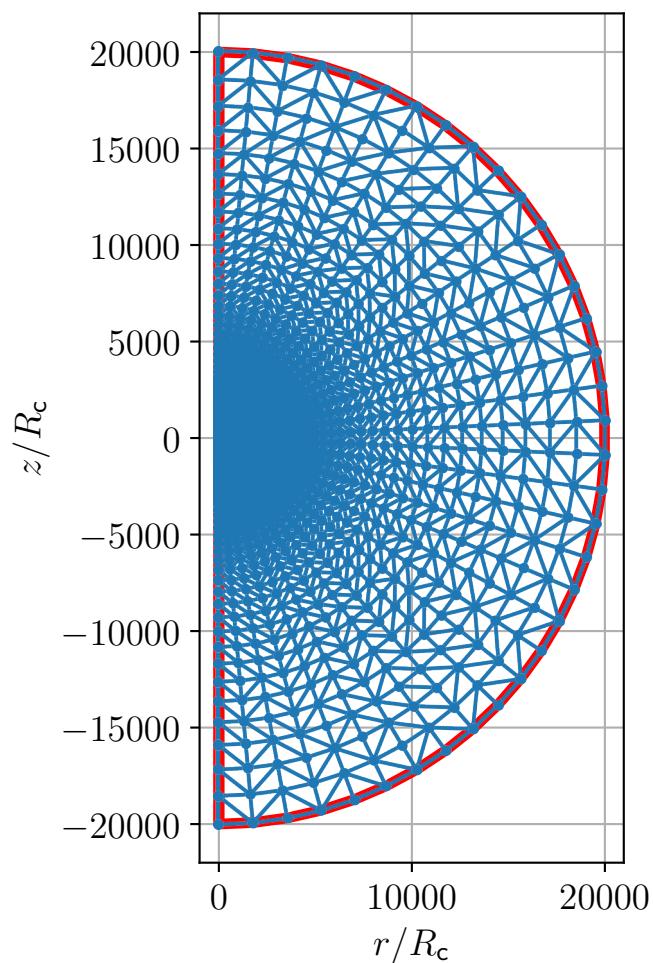


Рис. 4.2

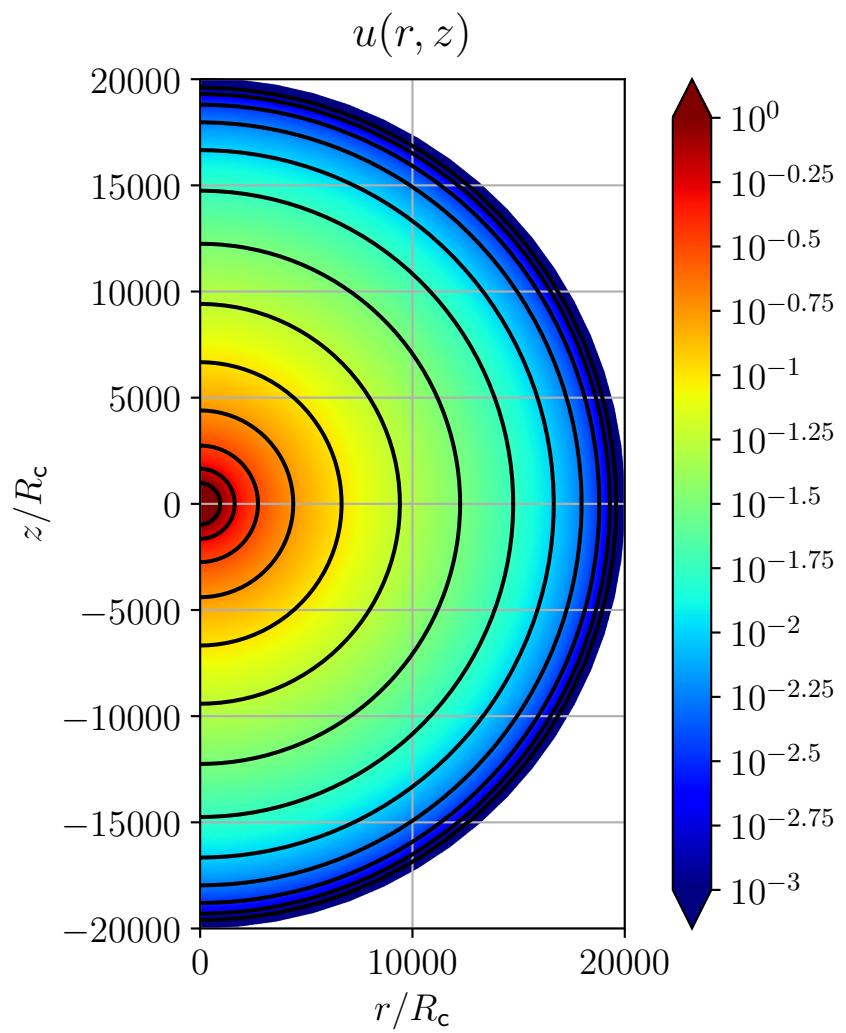


Рис. 4.3

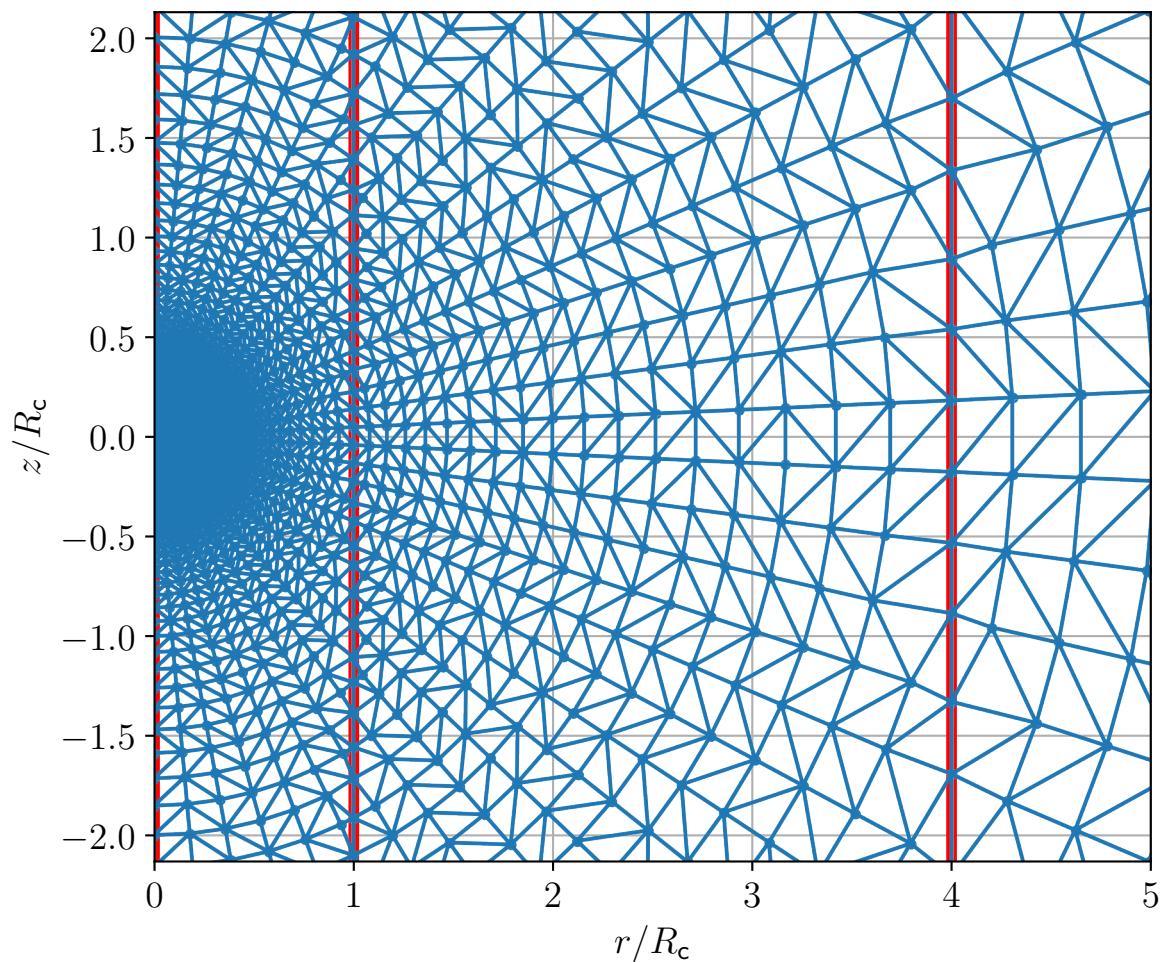


Рис. 4.4

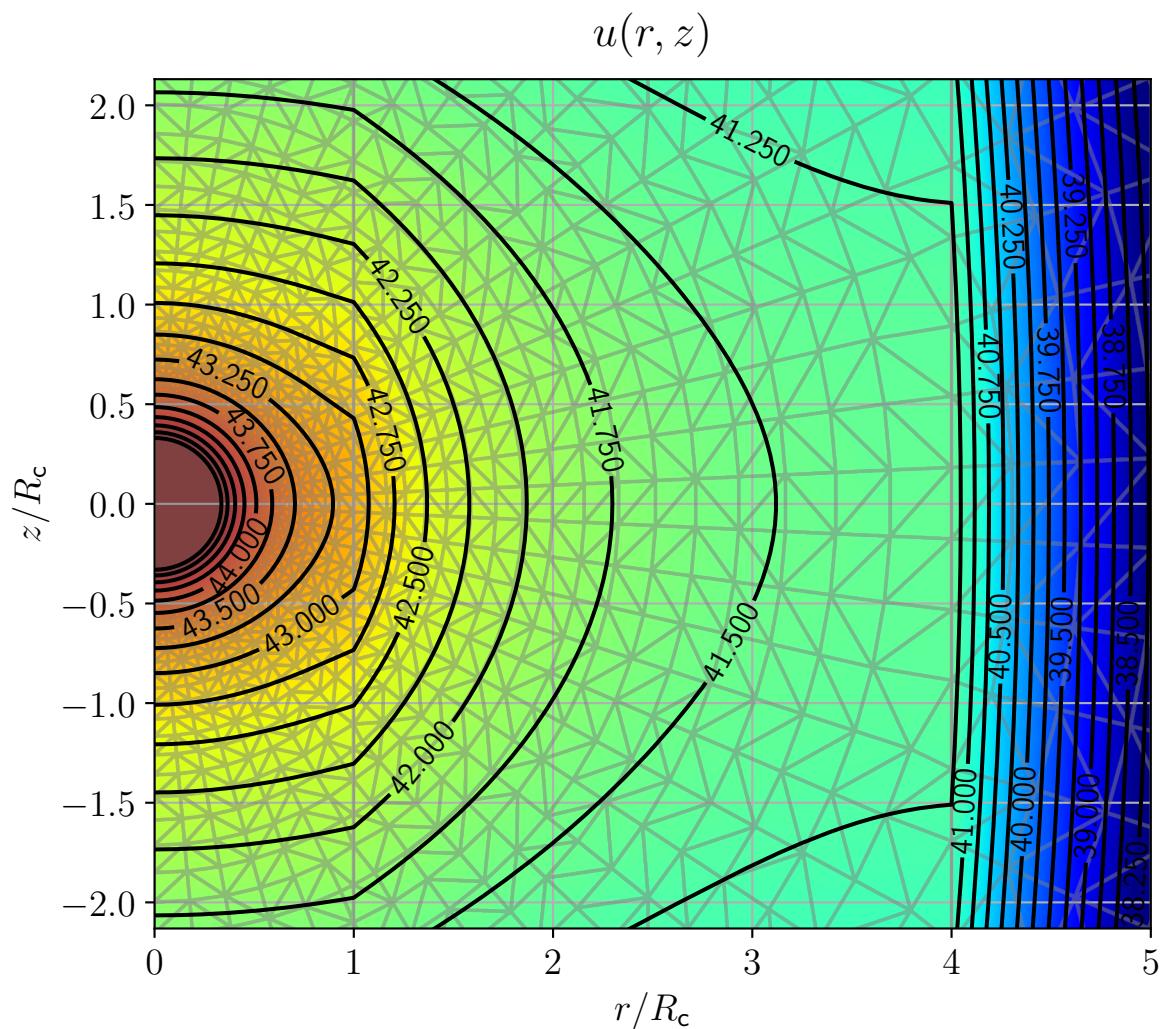


Рис. 4.5

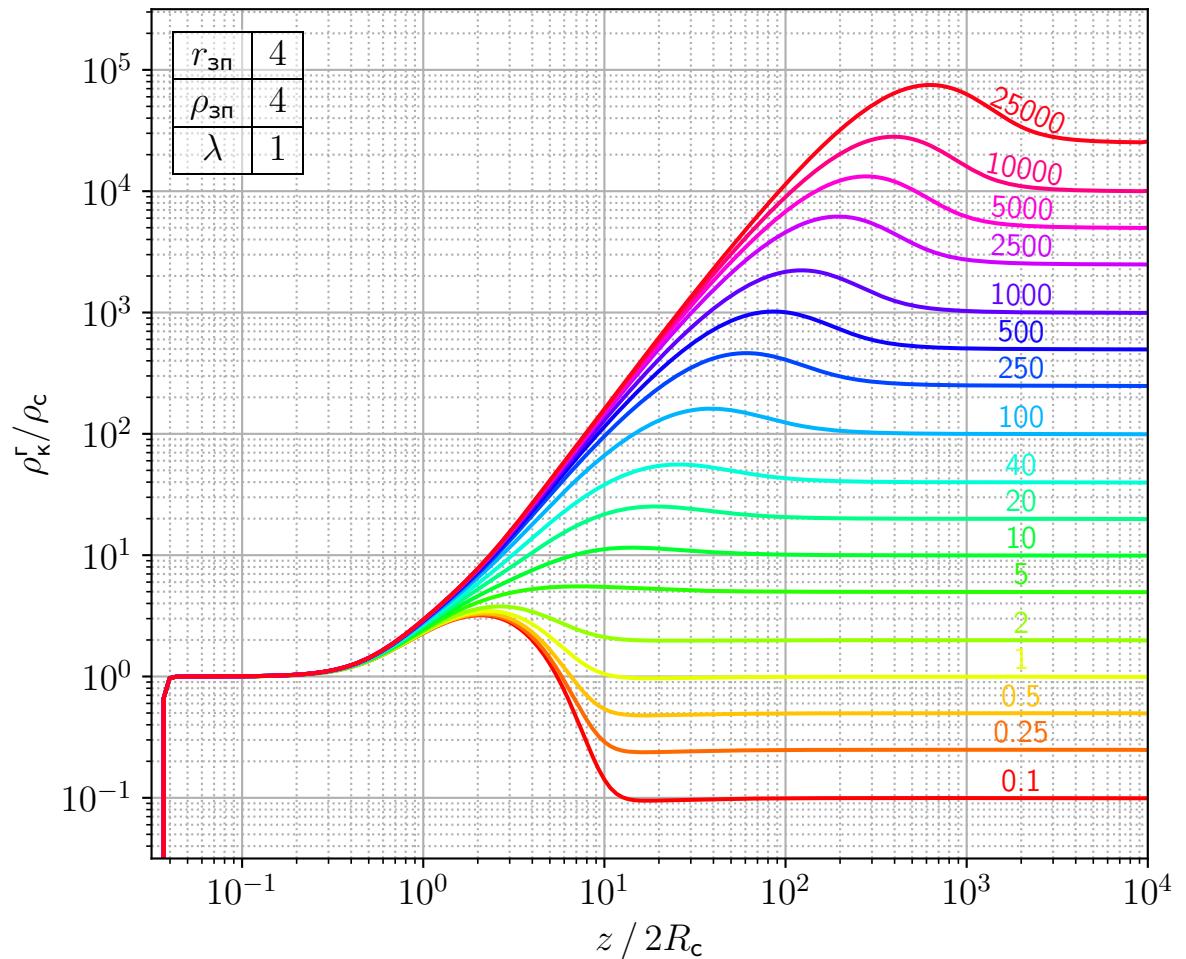


Рис. 4.6

Время вычисления палетки 18 с ± 159 мс, 7 проходов.

4.2 Модель 2

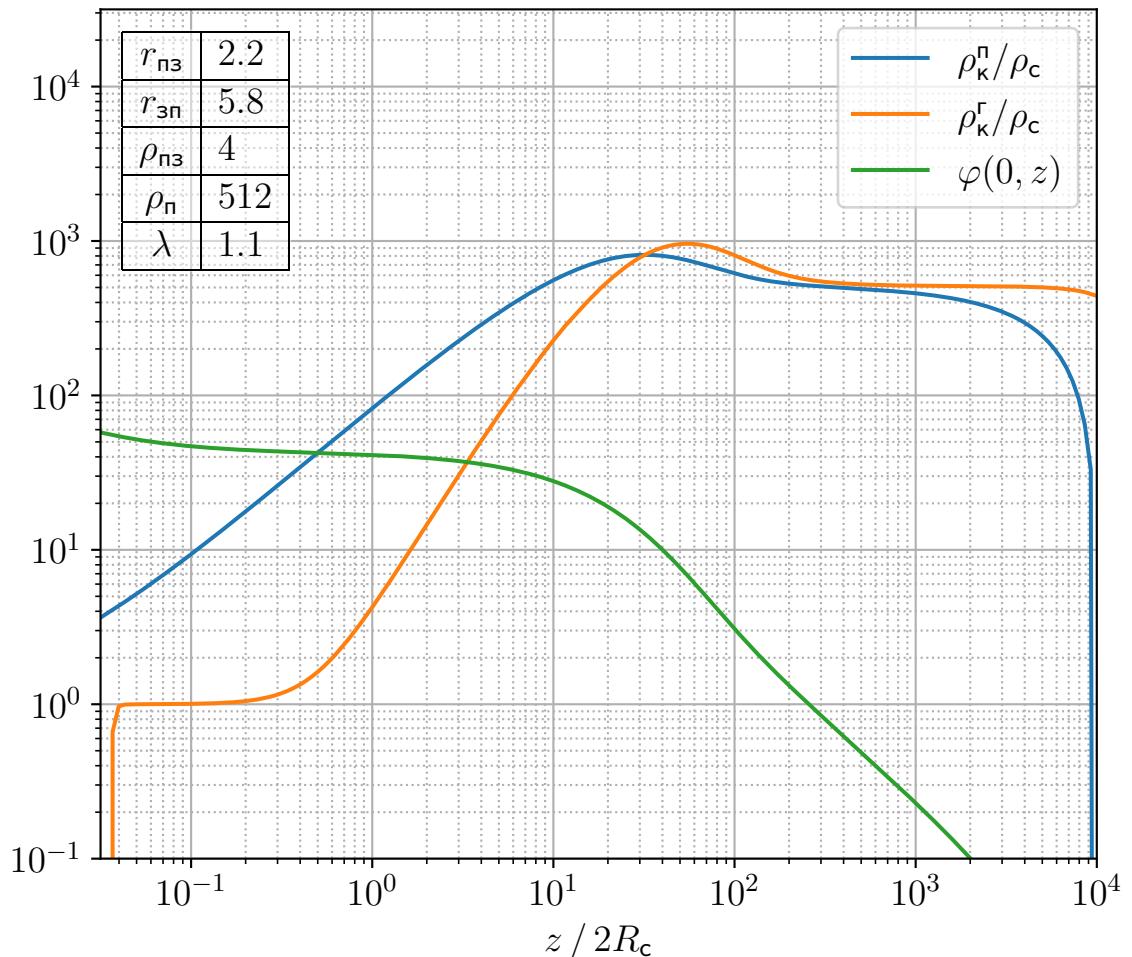


Рис. 4.7

Время вычисления решения 1.23 с \pm 16.3 мс, 7 проходов.
 6613 узлов расчетной сетки.
 Далее изображены поле, расчетная сетка и решение для палетки с этой расчетной сеткой.

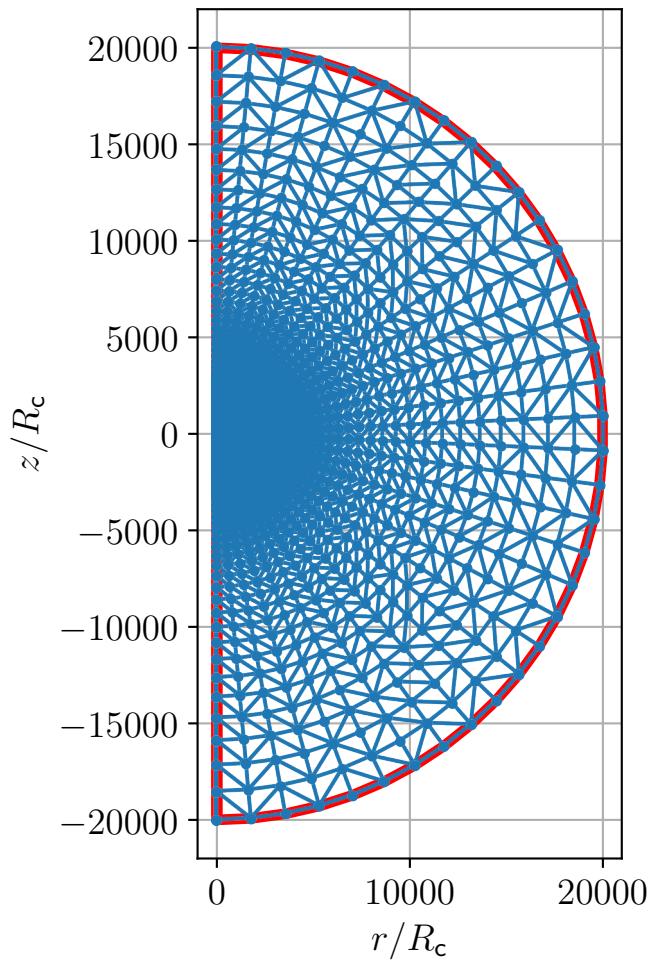


Рис. 4.8

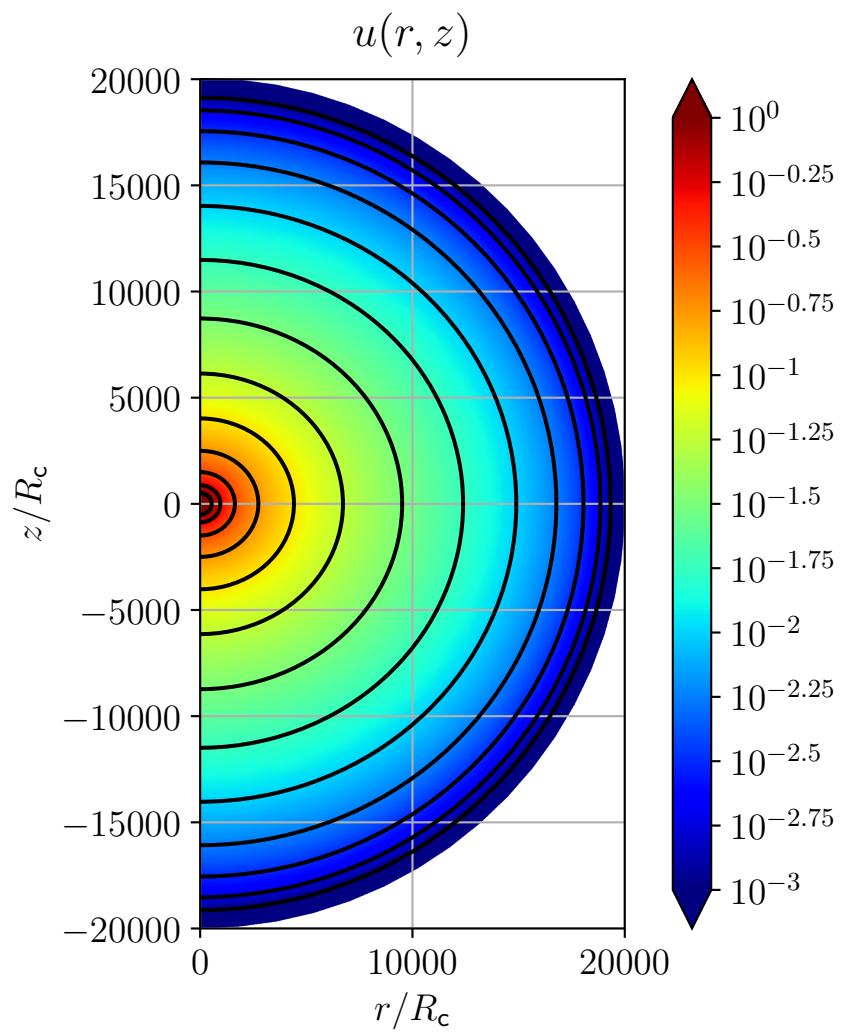


Рис. 4.9

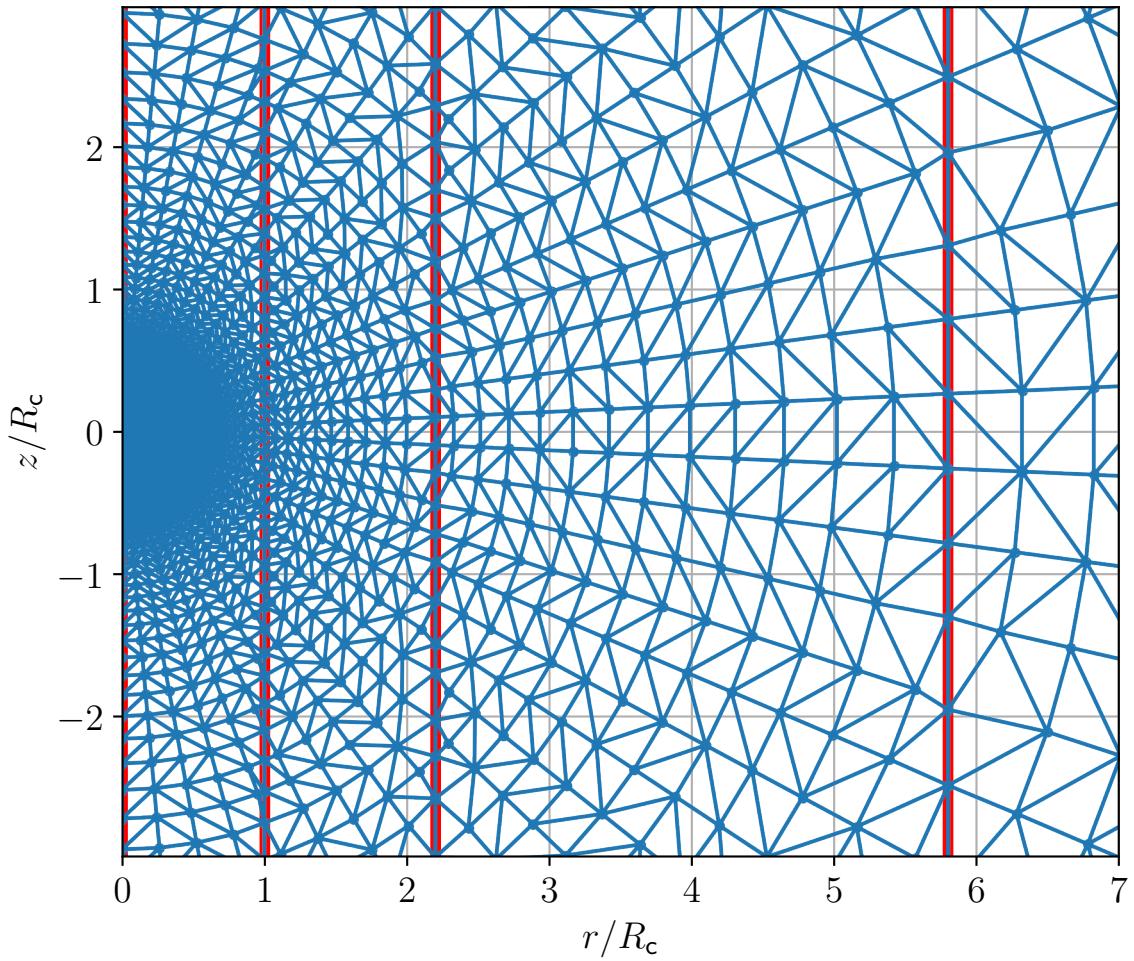


Рис. 4.10

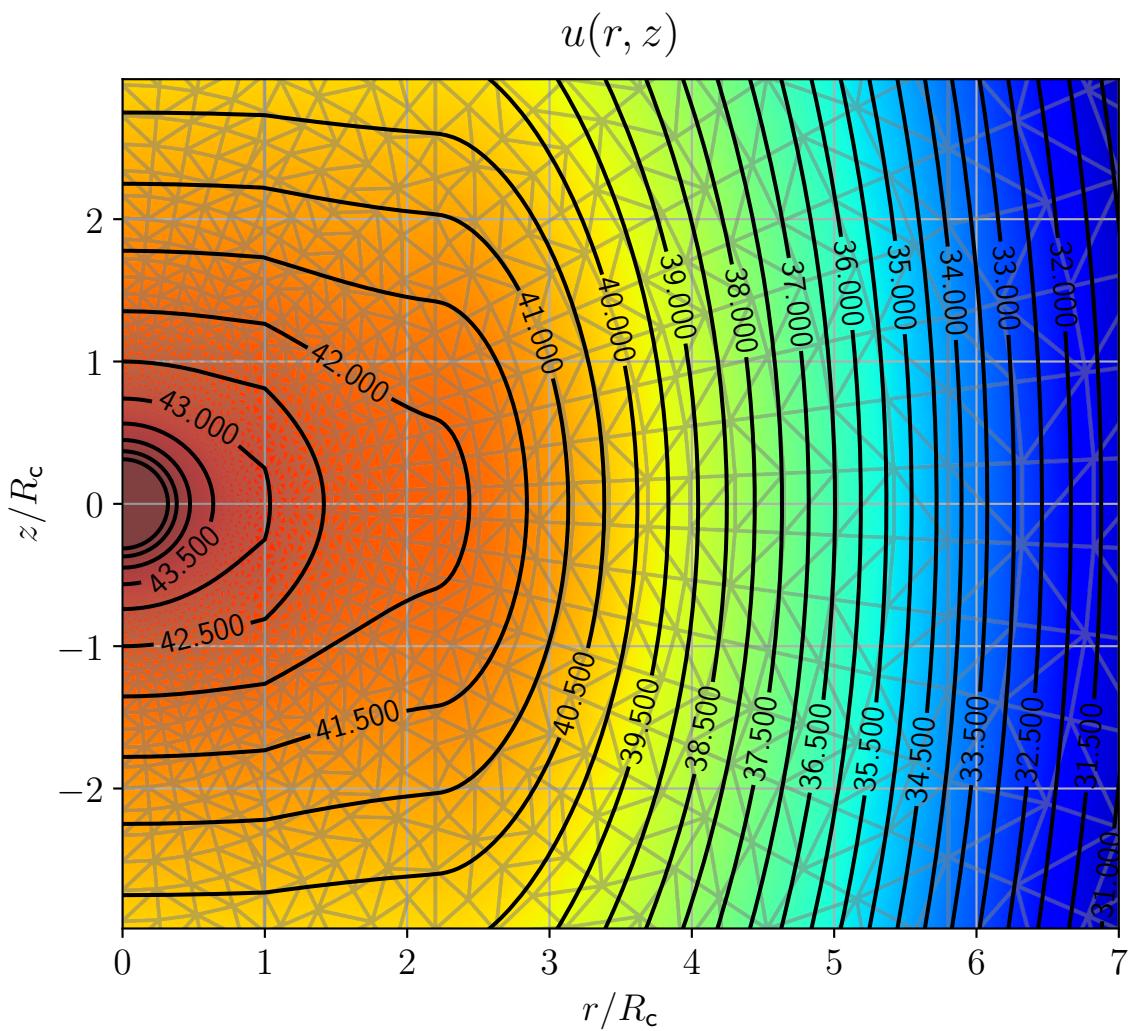


Рис. 4.11

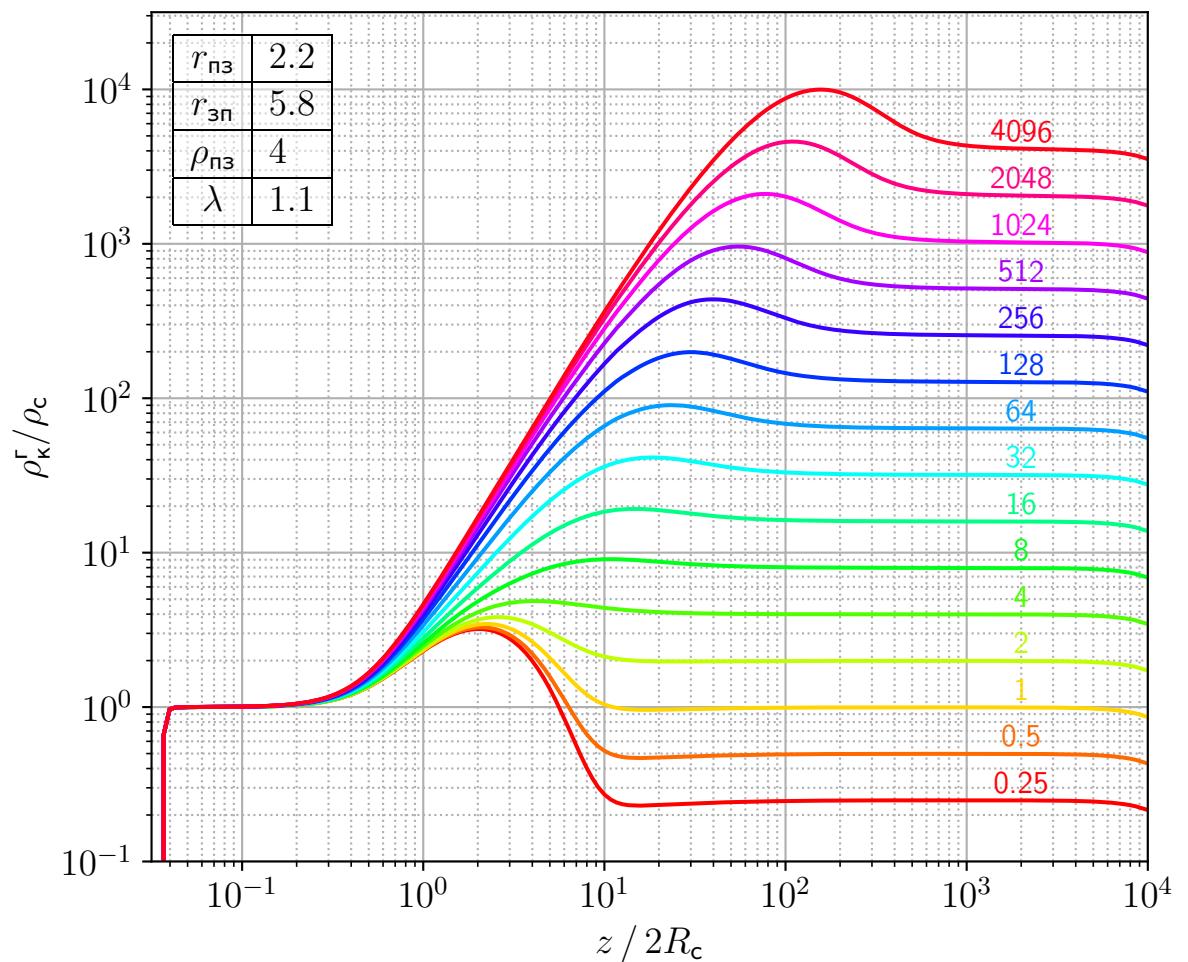


Рис. 4.12

Время вычисления палетки 16.5 с \pm 176 мс, 7 проходов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

<все итоги, которые заявлены в предыдущих главах>

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Электрическое зондирование геологической среды. Часть 1. Прямые задачи и методика работ / И. Н. Модин, В. А. Шевнин, В. К. Хмелевской [и др.] — МГУ Москва, 1988. — 176 с. — URL: http://geophys.geol.msu.ru/STUDY/5KURS/Book1_1988MSU.pdf
2. Finite Elements and Fast Iterative Solvers: with Applications in Incompressible Fluid Dynamics (2nd edition) / H. Elman, D. Silvester, A. Wathen. — OUP, Oxford, 2014. — 480 с. — URL: <https://books.google.ru/books?id=Ly-TAwAAQBAJ>
3. Solving PDEs in Python –The FEniCS Tutorial Volume I / H. P. Langtangen, A. Logg. — Springer, 2017. — 153 с. — URL: <https://fenicsproject.org/pub/tutorial/pdf/fenics-tutorial-vol1.pdf>
4. Введение в теорию метода конечных элементов. Учебное пособие / Р.З. Даутов, М.М. Карчевский. — Казань: Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова–Ленина, 2004. — 239 с. — URL: https://kpfu.ru/staff_files/F1229619272/MKEbookDRZ.pdf