

Задача

Вычислить неопределенный интеграл функции $f(x) = x$ без привлечения таблиц производных и интегралов.

Средство решения

Решение можно вычислить через интеграл Римана.

Запишем средство решения:

неопределенный интеграл

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C,$$

первообразная

$$F(x) = \int_a^x f(x) \, dx,$$

определенный интеграл

$$S = \int_a^b f(x) \, dx,$$

интеграл Римана

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

сумма Римана

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i,$$

элемент ряда/суммы Римана

$$a_i = f(x_i) \Delta x_i.$$

Вариант элемента ряда Римана:

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b - a}{n},$$

$$x_i = i \Delta x - a,$$

$$a_i = f\left(i \frac{b-a}{n} - a\right) \frac{b-a}{n}.$$

Решение

$$F(x) = \int_0^x x \, dx,$$

$$S = \int_0^x x \, dx,$$

$$a_i = i \frac{x^2}{n^2},$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{1+n}{2} n,$$

$$S_n = \frac{1+n}{2} n \frac{x^2}{n^2} = \frac{1+n}{2n} x^2,$$

$$S = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n}{2n} = \frac{x^2}{2},$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2},$$

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C.$$