Содержание

Предел метода прямоуольников

Предельный случай метода прямоугольников это интеграл Римана. Так можно точно символьно вычислить первообразную функции, интегрируемой по Риману.

Продемонстрируем на функциях $y = x$ и $y = x^n$.

Определим формулу одной из первообразных для этих функций через определенный интеграл

$$F(x) = \int\limits_0^x f(x)dx.$$

Формула метода правых прямоугольников для определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n f_i \Delta x_i = S_n,$$

$$\Delta x_i = h = \frac{b-a}{n},$$

$$x_i = ih,$$

$$f_i = f(x_i) = f(ih),$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(ih)h = h\sum_{i=1}^n f(ih).$$

Тогда формула первообразной

$$F(x) \approx h(x)\sum_{i=1}^n f(ih(x)) = S_n(x), \quad h(x) = \frac{x}{n}.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = F(x).$$

Первообразная функции $y = x$

Вычислим

$$S_n(x) = \frac{x}{n} \sum i \frac{x}{n} = \frac{x^2}{n^2} \sum i$$
$$= \frac{x^2}{n^2} \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{x^2}{2} \frac{n+1}{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{x^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{x^2}{2}.$$

Тогда

$$F(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Первообразная функции $y = x^m$

Вычислим

$$S_n(x) = \frac{x}{n} \sum \left(i \frac{x}{n}\right)^m = \frac{x^{m+1}}{n^{m+1}} \sum i^m.$$

https://www.wolframalpha.com/input?i=sum+i%5Em%2C+i%3D1+to+n

$$\sum_{i=1}^{n} i^m = H_n^{(-m)}.$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = x^{m+1} \lim_{n\to\infty} \frac{H_n^{(-m)}}{n^{m+1}}.$$

https://www.wolframalpha.com/input?i=limit+HarmonicNumber%28n%2C+-m%29+%2F+n%5E%28m+%2B+1%29%2C+n+to+infinity

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n^{(-m)}}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}. \quad (m > 0)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}. \quad (m > 0)$$

Тогда

$$F(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}. \quad (m > 0)$$

Без Wolfram Alpha не обошлось, и то для $m > 0$ только(

Для $m < 0$ функция наверное не интегрируемая по Риману, ибо не ограничена в окрестности нуля. Но мб она интегрируема по отдельности на множествах определения $\{x \in \mathbb{R} | x < 0\} = (-\infty, 0)$ и $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\} = (0, +\infty)$, не включающие ноль, тогда можно вычислить первообразную по некой схеме?