Задача

Вычислить неопределенный интеграл функции $f(x) = x^n$ без привлечения таблиц производных и интегралов.

Средство решения

Решение можно вычислить через интеграл Римана

Запишем средство решения:

неопределенный интеграл

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

первообразная

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)\,\mathrm{d}x,$$

определенный интеграл

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

интеграл Римана

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

сумма Римана

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

элемент ряда/суммы Римана

$$a_i = f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Вариант элемента ряда Римана:

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n},$$

$$x_i = i\,\Delta x - a,$$

$$a_i = f\left(i\,\frac{b-a}{n} - a\right)\,\frac{b-a}{n}.$$

Решение

$$F(x) = \int\limits_0^x x^m\,\mathrm{d}x,$$

$$S = \int\limits_0^x x^m\,\mathrm{d}x,$$

$$a_i = f\left(i\,\frac{x}{n}\right)\,\frac{x}{n} = i^m\,\frac{x^{m+1}}{n^{m+1}},$$

моя попытка

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{i=1}^{n} i^m \\
&= 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (n-3)^m + (n-2)^m + (n-1)^m + n^m \\
&= (n-(n-1))^m + (n-(n-2))^m + (n-(n-3))^m \\
&+ \cdots + (n-3)^m + (n-2)^m + (n-1)^m + (n-0)^m \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)^m,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2A &= \sum_{i=1}^{n} i^m + \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)^m \\
&= n^m + \sum_{i=1}^{n-1} i^m + \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)^m + (n-0)^m \\
&= 2n^m + \sum_{i=1}^{n-1}\left(i^m + (n-i)^m\right) \\
&= 2n^m + \sum_{i=1}^{n-1}\left(i^m + (n-i)^m\right)
\end{aligned}$$

$$i^m + (n-i)^m = i^m + \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} n^{m-k}(-i)^k$$

вольфрам альфа

https://www.wolframalpha.com/input/?i=sum+i^m+i%3D1..n

$$\sum_{i=1}^{n} i^m = H_n^{(-m)},$$

$$S_n = H_n^{(-m)} \frac{x^{m+1}}{n^{m+1}},$$

https://www.wolframalpha.com/input/?i=lim+n->inf+HarmonicNumber(n%2C+-m)+%2F+n^(m%2B1)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{H_n^{(-m)}}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1},$$

$$S = x^{m+1} \lim_{n \to \infty} \frac{H_n^{(-m)}}{n^{m+1}} = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

$$F(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$