StatPhys

30 марта 2020 г.

Выражение кинетической энергий вращения через угловую скорость:

$$E_{\text{rot}}(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right)$$

Выражение плотности вероятности угловой скорости:

$$\rho(\vec{\omega}) = C\, e^{-\frac{E_{\text{rot}}(\vec{\omega})}{T}}$$

где единица измерения T есть erg

Определение момента импульса:

$$\vec{L} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}$$

Выражение тензора инерции в системе координат главных осей инерции:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

где I_i – главный момент инерции

Среднее значение непрерывной случайной величины X:

$$\langle X \rangle = \int_{(X)} x\rho_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Среднее значение преобразования случайной величины X:

$$\langle g(X) \rangle = \int_{(X)} g(x)\,\rho_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Условие нормировки:

$$\int_{(X)} \rho_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

где ρ_X и (X) – плотность вероятности и область определения величины X

Инициализация

```
[156]: from sympy import *
from IPython.display import Markdown, display
import numpy as np

var('omega1 omega2 omega3 L1 L2 L3 C', real=True)
var('I1 I2 I3 T', positive=True)

E_rot_expr = S(1) / 2 * (I1 * omega1**2 + I2 * omega2**2 + I3 * omega3**2)
```

Задача 1

```
[157]: rho_expr = C * exp(- E_rot_expr / T)

int_expr = integrate(rho_expr,
                     (omega1, 0, oo),
                     (omega2, 0, oo),
                     (omega3, 0, oo))

C_set = solveset(int_expr - 1, C)

Markdown(fr'$\displaystyle C \in {latex(C_set)}$')
```

[157]:

$$C \in \left\{\frac{2\sqrt{2}\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\sqrt{I_3}}{\pi^{\frac{3}{2}}T^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

```
[158]: C_expr, = C_set
rho_expr_vec_omega = rho_expr.subs(C, C_expr)

Markdown(fr'$\displaystyle \rho(\vec\omega) = {latex(rho_expr_vec_omega)}$')
```

[158]:

$$\rho(\vec{\omega}) = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\sqrt{I_3}e^{\frac{-\frac{I_1\omega_1^2}{2}-\frac{I_2\omega_2^2}{2}-\frac{I_3\omega_3^2}{2}}{T}}}{\pi^{\frac{3}{2}}T^{\frac{3}{2}}}$$

Задача 2

Из определения момента импульса и выражения тензора инерции:

$$L_i = I_i\omega_i$$

Выражение E_{rot} через L_i:

```
[159]: E_rot_expr1 = E_rot_expr.subs([(omega1, L1 / I1),
                               (omega2, L2 / I2),
                               (omega3, L3 / I3)])
```

```
E_rot_expr1
```

[159]:

$$\frac{L_3^2}{2I_3} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_1^2}{2I_1}$$

[160]:

```
rho_expr = C * exp(- E_rot_expr1 / T)

int_expr = integrate(rho_expr,
                     (L1, 0, oo),
                     (L2, 0, oo),
                     (L3, 0, oo))

C_set = solveset(int_expr - 1, C)

Markdown(fr'$\displaystyle C \in {latex(C_set)}$')
```

[160]:

$$C \in \left\{\frac{2\sqrt{2}}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\sqrt{I_3}T^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

[161]:

```
C_expr, = C_set
rho_expr_vec_L = rho_expr.subs(C, C_expr)

Markdown(fr'$\displaystyle \rho(\vec L) = {latex(rho_expr_vec_L)}$')
```

[161]:

$$\rho(\vec{L}) = \frac{2\sqrt{2}e^{\frac{-\frac{L_3^2}{2I_3} - \frac{L_2^2}{2I_2} - \frac{L_1^2}{2I_1}}{T}}}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\sqrt{I_3}T^{\frac{3}{2}}}$$

Задача 3

Плотность вероятности компоненты угловой скорости ω_i:

$$\rho(\omega_i) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \rho(\vec{\omega})\,\mathrm{d}\omega_j\mathrm{d}\omega_k \quad i \neq j \neq k$$

Среднее значение величины ω_i:

$$\langle\omega_i\rangle = \int\limits_0^\infty \omega_i\rho(\omega_i)\,\mathrm{d}\omega_i$$

Среднее значение преобразования $g(\omega_i)$:

$$\langle g(\omega_i)\rangle = \int\limits_0^\infty g(\omega_i)\,\rho(\omega_i)\,\mathrm{d}\omega_i$$

[193]:
```python
omega = np.array([omega1, omega2, omega3])
n = len(omega)

for i in range(n):
    mask = np.ones(n, dtype=bool)
    mask[i] = False

    rho_expr_omega = integrate(rho_expr_vec_omega,
                               *[(omega_, 0, oo) for omega_ in omega[mask]])

    overage_omega = integrate(omega[i] * rho_expr_omega, (omega[i], 0, oo))
    overage_omega_2 = integrate(omega[i]**2 * rho_expr_omega, (omega[i], 0, oo))

    expr = factor(overage_omega**2 - overage_omega_2)

    display(Markdown(fr'$\displaystyle \
        \langle \omega_{i+1} \rangle^2 - \langle \omega_{i+1}^2 \rangle =␣
 ↪{latex(expr)}$'))
```

$\langle \omega_1 \rangle^2 - \langle \omega_1^2 \rangle = -\frac{T(-2+\pi)}{\pi I_1}$

$\langle \omega_2 \rangle^2 - \langle \omega_2^2 \rangle = -\frac{T(-2+\pi)}{\pi I_2}$

$\langle \omega_3 \rangle^2 - \langle \omega_3^2 \rangle = -\frac{T(-2+\pi)}{\pi I_3}$

Задача 4

Плотность вероятности компоненты момента импульса L_i:

$$\rho(L_i) = \int_0^\infty\int_0^\infty \rho(\vec{L})\,\mathrm{d}L_j\mathrm{d}L_k \quad i \neq j \neq k$$

Среднее значение величины L_i:

$$\langle L_i \rangle = \int_0^\infty L_i \rho(L_i)\,\mathrm{d}L_i$$

Среднее значение преобразования $g(L_i)$:

$$\langle g(L_i) \rangle = \int_0^\infty g(L_i)\,\rho(L_i)\,\mathrm{d}L_i$$

[195]:
```python
L = np.array([L1, L2, L3])
n = len(L)

for i in range(n):
    mask = np.ones(n, dtype=bool)
    mask[i] = False

    rho_expr_L = integrate(rho_expr_vec_L,
                           *[(L_, 0, oo) for L_ in L[mask]])

    overage_L = integrate(L[i] * rho_expr_L, (L[i], 0, oo))
    overage_L_2 = integrate(L[i]**2 * rho_expr_L, (L[i], 0, oo))

    expr = factor(overage_L**2 - overage_L_2)

    display(Markdown(fr'$\displaystyle \
        \langle L_{i+1} \rangle^2 - \langle L_{i+1}^2 \rangle =␣
 ↪{latex(expr)}$'))
```

$\displaystyle \langle L_1 \rangle^2 - \langle L_1^2 \rangle = -\frac{I_1 T \left(-2 + \pi\right)}{\pi}$

$\displaystyle \langle L_2 \rangle^2 - \langle L_2^2 \rangle = -\frac{I_2 T \left(-2 + \pi\right)}{\pi}$

$\displaystyle \langle L_3 \rangle^2 - \langle L_3^2 \rangle = -\frac{I_3 T \left(-2 + \pi\right)}{\pi}$

Задание 5

В силу линейности операции усреднения:

$$\langle \omega \rangle = \langle \omega_1 \rangle$$