مذكّرة حول

خوارزميات الأريثماطيقي في أنظمة عد متعددة

تروزين عبد الرزاق

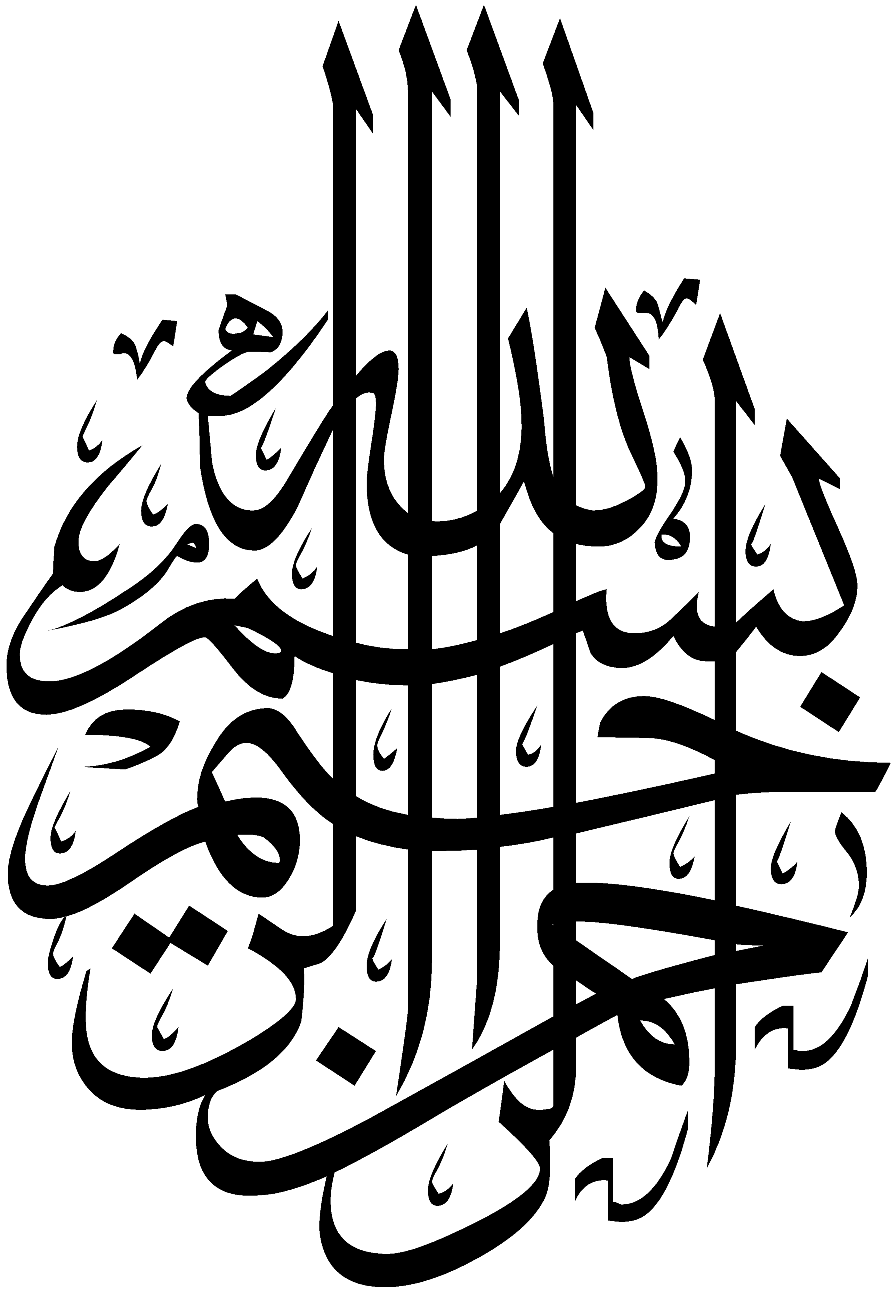
A Note about

Arithmetic algorithms in different numeral systems

TROUZINE Abderrezzaq

First revision		المراجعة الأولى
	2020/04/14	
Second revision		المراجعة الثانية
	2021/07/17	
Third revision		المراجعة الثالثة
	2022/06/04	
Fourth revision		المراجعة الرابعة
	2023/05/31	

https://github.com/am-trouzine/Arithmetic-algorithms-in-different-numeral-systems



[1]

[1] In the name of Allah, the Entirely Merciful, the Especially Merciful.

Introduction

In the name of Allah, praise be to Allah, and prayers and peace be upon Muhammad, the unlettered prophet.

The beginning was that I wanted to program a file compression algorithm, and I started from the premise of changing the basis of the calculation. Because I use JavaScript, I found it difficult to divide, so I decided first to program basic arithmetic algorithms in this programming language. After implementing it, I decided to move to the algorithms for roots and exponents, but before programming that, some mathematical questions had to be answered, such as how to find the unreal square roots without a calculator, and what about the rest of the roots? Most of this has been done - thanks to Allah - and translated programmatically.

I thought to put aside the file compression project and to collect some of what Allah has bestowed on me in these notes, perhaps they will be useful by the grace of Allah.

This work shares answers to mathematical questions, and shares suggested proofs for famous mathematical laws, most of which raised while writing the code of file compression project.

And thank Allah the god of everything.

مقدمة

بسم الله والحمد لله والصلاة والسلام على محمد النبي الأمي.

كانت البداية أني أردت برمجة خوارزمية ضغط ملفات، وانطلقت من فرضية تغيير أساس الحساب. ولأني أستعمل الجافاسكريبت، وجدت صعوبة في عملية القسمة، فقررت أولا برمجة خوارزميات الحساب الأساسية بلغة البرمجة هذه. وبعد تنفيذها أحببت الانتقال إلى خوارزميات الجذور والأسس، لكن قبل برمجة ذلك، كان يتوجب حل بعض الإشكاليات الرياضية، مثل كيف أجد الجذور التربيعية الغير حقيقية بدون آلة حاسبة وماذا عن بقية الجذور؟ وقد تم معظم ذلك – بفضل الله – وترجمته برمجيا.

ارتأيت أن أضع مشروع ضغط الملفات جانبا وأجمع بعض ما تفضل الله به علي في هذه المذكرات، لعلها تكون نافعة بفضل الله.

إن هذا العمل مشاركة لإجابات عن تساؤلات رياضية، ومشاركة براهين مقترحة لقوانين رياضية شهيرة، وردت معظمها أثناء كتابة الكود البرمجي لمشروع ضغط الملفات.

والحمد لله رب العالمين.

`NRoot(1024, 16)` (*177778 Ms*)

$$\sqrt[16]{1024} = 1.5422108254079408$$

`Q('ABCD',16)` (*1809 Ms*)

$$\sqrt[3]{ABCD_{b16}} = 23.4C6403084A398696$$

`P('125',12)` (*16 Ms*)

$$125^{12} = 14551915228366851806640625$$

`div('125',13)` (*52 Ms*)

$$\frac{125}{13} = 9.6153846153846153$$

`div('125',13,8)` (*25 Ms*)

$$\frac{125_{b8}}{13_{b8}} = 7.5642721350564272$$

`div('125',13,16)` (*51 Ms*)

$$\frac{125_{b16}}{13_{b16}} = F.6BCA1AF286BCA1AF$$

`R('2',10,125)` (*57542 Ms*)

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785$$

$$696718753769480731766797379907324784621070388 5$$

$$0387534327641572735013846230912297024924 83$$

`R('A',11,5)` (*31 Ms*)

$$\sqrt{\mathrm{A}_{\mathrm{b11}}} = 3.186\mathrm{A}9$$

1- Quadratic equations:

1- المعادلات من الدرجة الثانية:

A quadratic equation is the linear representation of the multiplication of (a static number x plus or minus another number) by (the same static number x plus or minus another number).

المقصود بمعادلة من الدرجة الثانية هو الكتابة الخطية لمضروب (عدد ثابت x نضيفه أو ننقص منه عددا) في نفس العدد الثابت x نضيفه أو ننقص منه عددا).

We consider this form a basis of quadratic equation:

نعتبر هذه الكتابة أصلا لمعادلة من الدرجة الثانية:

$$(x-3)(x+2)$$

It's quadratic equation is :

معادلتها من الدرجة الثانية هي:

$$x^2-x-6$$

It could be observed that substituting x by a number gives the same result in both forms.

يمكن ملاحظة أن تعويض x بعدد ما سيعطي نفس النتيجة في الكتابتين.

The first form is:

الكتابة الأولى هي:

$$(x-3)(x+2)$$

The second form is:

والكتابة الثانية هي:

$$x^2-x-6$$

E.g.

مثال:

$$(5-3)(5+2)=(2)(7)=14=5^2-5-6=25-5-6=14$$

$$(3.17-3)(3.17+2)=(0.17)(5.17)=0.8789=3.17^2-3.17-6=10.0489-3.17-6=0.8789$$

2- Solving quadratic equations:

2- حل المعادلات من الدرجة الثانية:

Solving a quadratic equation is to find the two numbers (or the number) which when substituted with x results zero.

المقصود بحل معادلة من الدرجة الثانية هو إيجاد العددين (أو العدد) الذي من أجل تعويضه بـ x تكون نتيجة المعادلة تساوي الصفر.

I.e. to find the same known numbers with an opposite sign, so that the sum in one bracket equals zero.

أي هو إيجاد نفس العددين المعلومين بإشارة مختلفة من أجل أن يكون أحد الحدين يساوي الصفر.

These two numbers (or number) is/are called the root(s) of the equation.

يسمى هذين العددين (أو هذا العدد) بجذري المعادلة (أو جذر المعادلة المضاعف).

The two roots of this equation

جذري هذه المعادلة

$$x^2 - x - 6$$

Are 3 and -2 , i.e. $(x = -2)$ and $(x = 3)$ because its original form is

هما العددان 3 و-2 أي $(x = -2)$ و$(x = 3)$ لأن أصلها

$$(x - 3)(x + 2)$$

Where

بحيث

$$({\color{red}3} - 3)(x + 2) = 0 \times (x + 2) = {\color{red}3}^2 - {\color{red}3} - 6 = 0$$

And

و

$$(x - 3)({\color{red}-2} + 2) = (x - 3) \times 0 = ({\color{red}-2})^2 - ({\color{red}-2}) - 6 = 0$$

To find the two roots of a quadratic equation, the discriminant law is used

لإيجاد حلي معادلة من الدرجة الثانية يُستعمل قانون المميز الشهير

$$(x_1 > x_2): x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Where the form of the equation is:

بحيث أن شكل المعادلة هو:

$$a(x^2 + bx + c)$$

The value of a is the number multiplied by x^2 and:

قيمة a هي العدد المضروب في x^2 و:

$$b = -a(x_1 + x_2), \qquad c = a(x_1 x_2)$$

3- A remark about the discriminant law:

3- ملاحظة حول استعمال قانون المميز:

These two representations are considered quadratic equations:

تُعتَبر هاتين الكتابتين معادلتين من الدرجة الثانية:

$$a_1(x^2 + b_1 x + c_1) \dots (I)$$

$$a_2(x^2 + b_2 x + c_2) \dots (II)$$

This representation is also considered a quadratic equation that is the sum of the two previous representations:

وتُعتَبر هذه الكتابة أيضا معادلةً من الدرجة الثانية، أصلها الكتابة الأولى زائد الكتابة الثانية:

$$\left((a_1 + a_2)x^2 + (a_1 b_1 + a_2 b_2)x + (a_1 c_1 + a_2 c_2)\right) \dots (III)$$

These representations are also considered quadratic equations:

وهذه الكتابات أيضا معادلات من الدرجة الثانية:

$$(a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1) \dots (IV)$$
$$(a_1 + a_2)x^2 + (b_1)x + (c_1 + c_2) \dots (V)$$
$$(a_1)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2) \dots (VI)$$

The law of the discriminant is productive in real numbers in the first and the second representation (I) and (II), where a_1 and a_2 are a number multiplied by all the terms of the equation.

يكون قانون المميز مُنتِجًا – في مجموعة الأعداد الحقيقية – في الكتابتين الأولى والثانية (I) و(II)، بحيث a_1 و a_2 هما عدد مضروب في جميع حدود المعادلة.

The law of the discriminant is not productive in real numbers in the majority of representations that are the addition or subtraction of all or some of the terms of one or many quadratic equations.

لا يكون قانون المميز منتجا في مجموعة الأعداد الحقيقية في معظم الكتابات التي أصلها جمع أو طرح كل أو بعض حدود معادلة أو عدة معادلات من الدرجة الثانية.

E.g.

مثال:

$$2x^2 - 4x + 14$$

It is the sum of the two equations:

هي مجموع المعادلتين:

$$(x^2 - 7x + 12) + (x^2 + 3x + 2)$$

It can be written:

ويمكن كتابتها بالشكل:

$$(x - 3)(x - 4) + (x + 2)(x + 1)$$

The law of the discriminant is not productive, here, n real numbers.

قانون المميز فيها ليس منتجا في مجموعة الأعداد الحقيقة.

$$\frac{4 \pm \sqrt{-96}}{4}$$

4- A suggested proof of the discriminant law:

4- برهنة مُقترَحَة على قانون المميز:

$$\alpha(x - x_1)(x - x_2)$$
$$= \alpha(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)$$
$$= \alpha x^2 - (x_1 + x_2)\alpha x + x_1x_2\alpha$$
$$\mathrm{A} = \alpha$$
$$\mathrm{B} = -(x_1 + x_2)A \dots (1)$$
$$\Gamma = x_1x_2A \dots (2)$$
$$(1) \rightarrow\ x_1 = \left(\frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} - x_2\right)\ ;\ x_2 = \left(\frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} - x_1\right)\ ;\ (x_1 + x_2) = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$$
$$(2) \rightarrow (x_1x_2) = \frac{\Gamma}{\mathrm{A}}$$
$$(1) \rightarrow (x_1 + x_2) = \frac{-B}{A} \dots (3)$$
$$(3) \rightarrow (x_1 + x_2)^2 = \frac{B^2}{A^2}$$

$$(3) \rightarrow ({x_1}^2 + {x_2}^2 + 2x_1x_2) = \frac{B^2}{A^2}$$

$$(3) \rightarrow \left({x_1}^2 + {x_2}^2 + \mathbf{2}\frac{\mathbf{\Gamma}}{\boldsymbol{A}}\right) = \frac{B^2}{A^2}\left(from\ (2)\ \text{من}\right)$$

$$(3) \rightarrow {x_1}^2 + {x_2}^2 = \frac{B^2}{A^2} - \frac{2\Gamma}{\mathrm{A}}$$

$$(3) \rightarrow {x_1}^2 + {x_2}^2 = \frac{B^2 - 2\mathrm{A}\Gamma}{A^2}$$

$$(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) = 2x_1 \ldots (4)$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = (x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = (x_1 + x_2) + \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{\mathbf{-B}}{\mathbf{A}} + \sqrt{(x_1 - x_2)^2}\left(from\ (1)\ \text{من}\right)$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 - \ 2x_1x_2}$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 - \frac{\mathbf{2\Gamma}}{\mathbf{A}}}\left(from\ (2)\text{من}\right)$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{\frac{\boldsymbol{B^2} - \mathbf{2A\Gamma}}{\boldsymbol{A^2}} - \frac{2\Gamma}{\mathrm{A}}}\left(from\ (3)\text{من}\right)$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{\frac{B^2 - 2\mathrm{A}\Gamma}{A^2} - \frac{2\mathrm{A}\Gamma}{A^2}}$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{\frac{B^2 - 4\mathrm{A}\Gamma}{A^2}}$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \frac{\sqrt{B^2 - 4\mathrm{A}\Gamma}}{\mathrm{A}}$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B} + \sqrt{B^2 - 4\mathrm{A}\Gamma}}{\mathrm{A}}$$

$$(4) \rightarrow x_1 = \frac{-\mathrm{B} + \sqrt{B^2 - 4\mathrm{A}\Gamma}}{2\mathrm{A}}$$

We have لدينا

$$x_2 = \frac{-B}{A} - x_1$$

So إذن

$$x_2 = \frac{-B}{A} - \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2A}\right)$$

$$x_2 = \frac{-B}{A} + \frac{B - \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2A}$$

$$x_2 = \frac{-2B}{2A} + \frac{B - \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2A}$$

$$x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2A}$$

We have, also لدينا، أيضا

$$x_1 x_2 = \frac{\Gamma}{A}$$

$$x_2 = \frac{\Gamma}{A x_1}$$

So

إذن

$$x_2 = \frac{\Gamma}{A\left(\frac{-B+\sqrt{B^2-4A\Gamma}}{2A}\right)}$$

$$x_2 = \frac{\Gamma}{\frac{-B+\sqrt{B^2-4A\Gamma}}{2}}$$

$$x_2 = \frac{2\Gamma}{-B+\sqrt{B^2-4A\Gamma}}$$

By substituting x_2

بتعويض x_2

$$\frac{-B}{A} - x_1 = \frac{2\Gamma}{-B+\sqrt{B^2-4A\Gamma}}$$

$$x_1 = \frac{-B}{A} - \frac{2\Gamma}{-B+\sqrt{B^2-4A\Gamma}}$$

And also

وأيضا

$$x_1 = \frac{2\Gamma}{-B-\sqrt{B^2-4A\Gamma}}$$

Or we can substitute the value of x_1 found in (4) in either (1) or (2)

أو بإمكاننا تعويض قيمة x_1 التي وجدناها في (4) إما في (1) أو في (2)

5- The nature of the discriminant:

5- طبيعة المميز:

Considering the quadratic equations, the discriminant Δ is the square of one root minus the other root

بالنسبة للمعادلات من الدرجة الثانية، المميز Δ هو مربع أحد الجذرين ناقص الجذر الآخر

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$$

6- Substituting by the middle term:

6- التعويض بالحد الأوسط:

In quadratic equations of the form

في معادلات الدرجة الثانية من الشكل

$$x^2 + \beta x + \gamma$$

If x_1, H, x_2 are considered consecutive numbers by r, where x_1 and x_2 are the roots of

إذا اعتبرنا x_1, H, x_2 أعداد متتالية بـ r، حيث x_1 و x_2 جذرا المعادلة، و $H = \frac{x_1+x_2}{2}$ أو $H = \frac{-\beta}{2}$، the equation, and $H = \frac{x_1+x_2}{2}$ or $H = \frac{-\beta}{2}$, and $r = x_2 - H = H - x_1$: substituting x by the middle term H results $-r^2$.

و $r = x_2 - H = H - x_1$، فإن تعويض x بالحد الأوسط H يعطي $-r^2$.

$$x^2 + \beta x + \gamma$$
$$H^2 + \beta H + (H-r)(H+r)$$
$$H^2 - 2H^2 + H^2 - r^2$$

The following two balancing can be placed:

يمكن وضع المقابلتين التاليتين:

$$(x_1 + x_2)^2 := ([H-r] + [H+r])^2$$
$$({x_1}^2 + {x_2}^2 + 2x_1x_2) := (4H^2) \dots (I)$$

And:

و:

$$(x_1 - x_2)^2 := ([H-r] - [H+r])^2$$
$$({x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1x_2) := (4r^2) \dots (II)$$

Adding (I) to (II):

بجمع (I) و (II):

$$(2{x_1}^2 + 2{x_2}^2) = (4H^2 + 4r^2)$$
$$2({x_1}^2 + {x_2}^2) - 4H^2 = 4r^2$$
$$r^2 = \frac{2\left(({x_1}^2 + {x_2}^2) - 2H^2\right)}{4}$$
$$r = \sqrt{\frac{\left(({x_1}^2 + {x_2}^2) - 2H^2\right)}{2}}$$
$$r = \sqrt{\frac{(\beta^2 - 2\gamma) - 2H^2}{2}} = \sqrt{\frac{((2H)^2 - 2\gamma) - 2H^2}{2}} = \sqrt{H^2 - \gamma} \dots (A)$$

Subtracting (I) and (II):

وبطرح (I) و(II):

$$(4x_1x_2) = (4H^2 - 4r^2)$$
$$(x_1x_2) = (H^2 - r^2)$$
$$r^2 = -(x_1x_2) + H^2$$
$$r = \sqrt{-(x_1x_2) + H^2}$$
$$r = \sqrt{-\gamma + H^2} \dots (A)$$

Starting from the above, we can find both x_1 and x_2 in terms of H and r, where r is A.

انطلاقا مما سبق يمكن إيجاد كل من x_1 و x_2 بدليل H و r، بحيث r تساوي A.

$$x_1 = H - r$$
$$x_2 = H + r$$
$$r = \sqrt{-\gamma + H^2}$$
$$H = \frac{-\beta}{2}$$

7- Solving polynomial equations:

7- حل المعادلات كثيرة الحدود:

- It is known that the roots of a polynomial equation are the known terms before distributing them, with a different sign (the known terms in this example are -1, -2 and -3 and the roots of the equation are 1, 2 and -3):

- معلوم أن جذور معادلة كثيرة حدود، هو الحدود المعلومة قبل نشرها بإشارة مختلفة (الحدود المعلومة في هذا المثال هي -1 و -2 و -3 وجذور المعادلة هي 1 و 2 و 3):

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$= x^3 - 6x^2 + 11x^1 + -6x^0$$
$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

- It is known that substituting the unknown x with one of the roots of the equation produces 0.

- معلوم أن تعويض المجهول x بأحد جذور المعادلة ينتج 0.

$$(3-1)(3-2)(3-3) = 3^3 - 6(3)^2 + 11(3) - 6 = 0$$

- It is known that the last term of a polynomial equation (i.e. the term multiplied by x^0) is the multiplication of all the roots of the equation (taking into account the note in Title 3, and taking into account the sign, that is, negative if the number of negative roots is odd).

- معلوم أن الحد الأخير من معادلة كثيرة حدود (أي الحد المضروب في x^0) هو مضروب جميع جذور المعادلة (مع مراعاة الملاحظة المذكورة في العنوان 3، ومع مراعاة الإشارة، أي سالبة إذا كان عدد الجذور السالبة فرديا).

Based on the foregoing, the following non-algebraic algorithm, which can be translated programmatically, can be used to solve polynomial equations:[3]

يمكن – انطلاقا مما سبق – استعمال الخوارزمية – الغير جبرية – التالية – التي يمكن ترجمتها برمجيا – لحل المعادلات كثيرة الحدود:[2]

- Finding the divisors of the last term (i.e. the term multiplied by x^0).

- إيجاد قواسم الحد الأخير (أي الحد المضروب في x^0).

[2] ترجمة برمجية لهذه الخوارزمية لحل معادلات الدرجة الثالثة: https://codepen.io/am_trouzine/full/WNaVwPy

[3] A programmatically translated version of this algorithm to solve cubic equations: https://codepen.io/am_trouzine/full/WNaVwPy

- Substitute the unknown x with the divisors with different signs.
- If the last term (i.e. the term multiplied by x^0) is zero, we take 0 as one of the roots of the equation, and continue the algorithm with the penultimate term.

- تعويض المجهول x بالقواسم بإشارات مختلفة.
- إذا كان الحد الأخير (أي الحد المضروب في x^0) معدوما، نحتسب 0 أحد جذور المعادلة، ونواصل الخوارزمية بالحد ما قبل الأخير.

8- Sequence of power two:

8- متتالية الأعداد ذات الأس اثنين:

Representing the number two with squares gives this form □□ and representing the number four gives this form □□□□

رسم العدد اثنان بمربعات يعطي هذا الشكل □□ ورسم العدد أربعة يعطي هذا الشكل □□□□

- Representing the number two raised to power two 2^2 gives

- رسم العدد اثنان أس اثنان 2^2 هو

□□
□□

Where the sum of squares is 4, i.e. 2×2

حيث مجموع المربعات هو 4 أي 2×2

- Representing the number four raised to power two 4^2 gives

- رسم العدد أربعة أس اثنان 4^2 هو

□□□□
□□□□
□□□□
□□□□

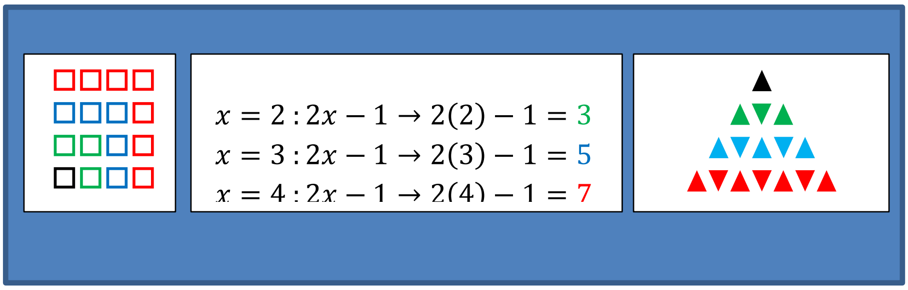
Where the sum of squares is 16, i.e. 4×4

حيث مجموع المربعات هو 16 أي 4×4

It can be stated that the sum of squares increases with the function:

يُلاحَظ أن عدد المربعات يتزايد في كل مرة بالدالة:

$$2x - 1$$



$$x = 1 \to x^2 = 2(1) - 1 = 1 \to 1^2 = 1$$
$$x = 2 \to 2(2) - 1 = 3 \to 2^2 = 1 + 3 = 4$$
$$x = 3 \to 2(3) - 1 = 5 \to 3^2 = 1 + 3 + 5 = 9$$
$$x = 4 \to 2(4) - 1 = 7 \to 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$\dots$$
$$x = n \to 2(n) - 1 \to n^2 = 1 + \dots + 2(n-1) - 1 + 2(n) - 1$$

Whereas for negative numbers[5] the sum of squares increases with the opposite sign of the function:

بينما بالنسبة للأعداد السالبة[4] يتزايد أس اثنين في كل مرة بعكس إشارة الدالة:

$$2x + 1$$

$$x = -1 \rightarrow 2(-1) + 1 = -1 \rightarrow (-1)^2 = -(-1) = 1$$
$$x = -2 \rightarrow 2(-2) + 1 = -3 \rightarrow (-2)^2 = -(-1 - 3) = 4$$
$$x = -3 \rightarrow 2(-3) + 1 = -5 \rightarrow (-3)^2 = -(-1 - 3 - 5) = 9$$
$$x = -4 \rightarrow 2(-4) + 1 = -7 \rightarrow (-4)^2 = -(-1 - 3 - 5 - 7) = 16$$

It can be stated that power two is a sequence that first's term is one and the sum of terms is the last term raised to power two, because the difference between the contained terms is static, it equals 2.

يمكن القول أن أس اثنين هي متتالية حدّها الأول هو واحد ومجموع حدودها هو الحد الأخير أس اثنين، لأن الفرق بين الحدود المجموعة ثابت، يساوي 2.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$$
$$x_n = 2n - 1$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2$$

9- Square root:

9- الجذر التربيعي:

C.f.

انظر

https://codepen.io/am_trouzine/full/mdzQprx

https://youtube.com/watch?v=aqDXhK3-j6c

To find the square root of a number, we represent the number as squares, then we divide up the squares as a square shape.

لإيجاد الجذر التربيعي لعدد نمثّل العدد على شكل مربّعات، ثم نقسّم المربّعات على شكل مربّع.

E.g. 1: Calculating the square root of 4

مثال 1: حساب الجذر التربيعي للعدد 4

Representation of number 4 as squares:

العدد 4 على شكل مربّعات:

□□□□

Dividing up the squares as square shape:

تقسيم المربّعات الأربعة على شكل مربّع:

□□
□□

The square root of 4 is 2 because we have two rows.

جذر العدد 4 هو 2 لأن لدينا صفّين.

---

[4] يعتبر هذا تصورا أوليا، وقد يكون خاطئا، لقد تم بناء النسخة الأولى من الكود البرمجي على أساس هذا التصور، وهو مثبت في المراجعة الأولى من هذا الكتاب. انظر العنوان 11

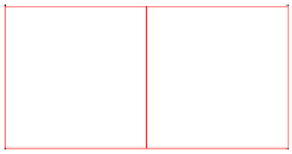
[5] This is a preliminary conception, and it may be wrong, the first version of the code was built upon it, it is included in the first revision of the book. c.f. title 11

E.g. 2: Calculating the square root of 2

مثال 2: حساب الجذر التربيعي للعدد 2

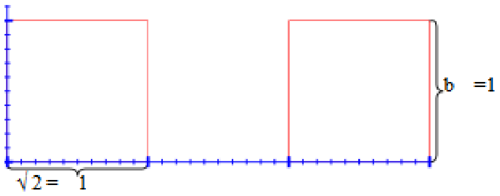
Representation of number 2 as squares

العدد 2 على شكل مربّعات:



Dividing up the two squares as square shape:

تقسيم المربّعين الاثنين على شكل مربّع:

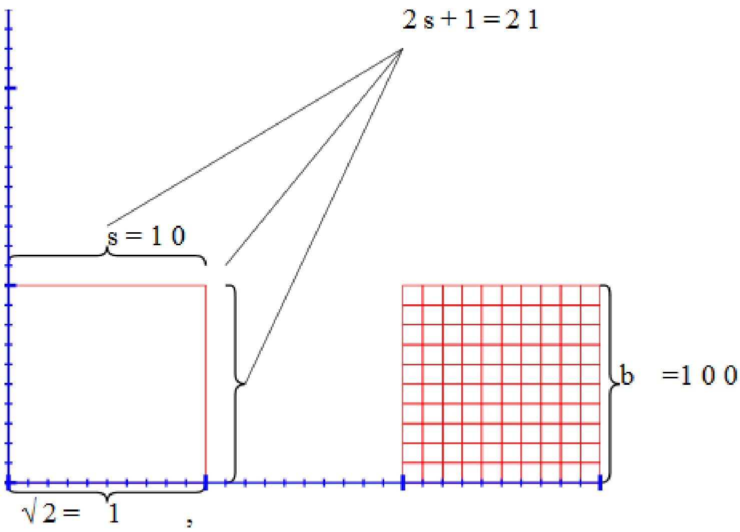


One square remains

يبقى مربّع واحد

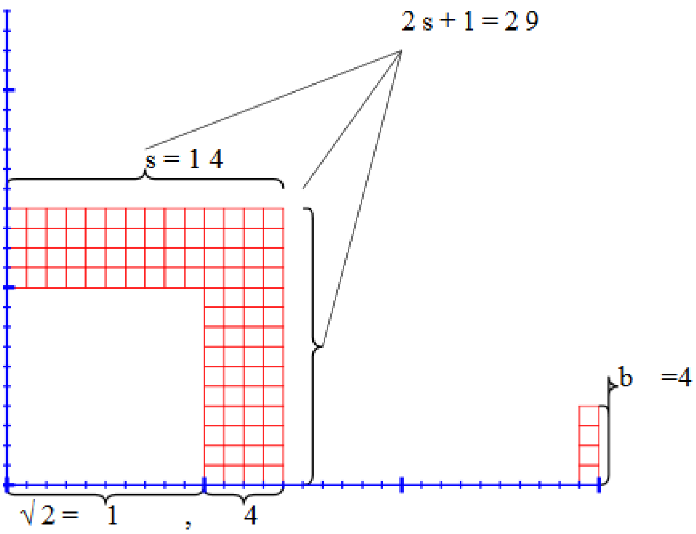
We divide it up to 100 squares

نقسّمه على مئة مربّع



We divide up the 100 squares by the first square

نوزّع المربعات المئة على المربع الأول

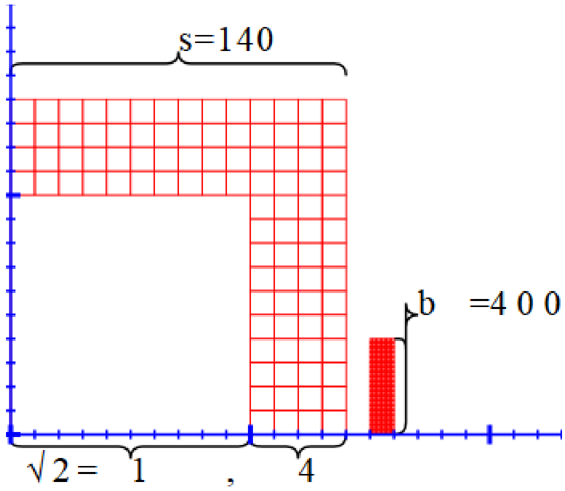


Four squares remain

يبقى أربع مربعات

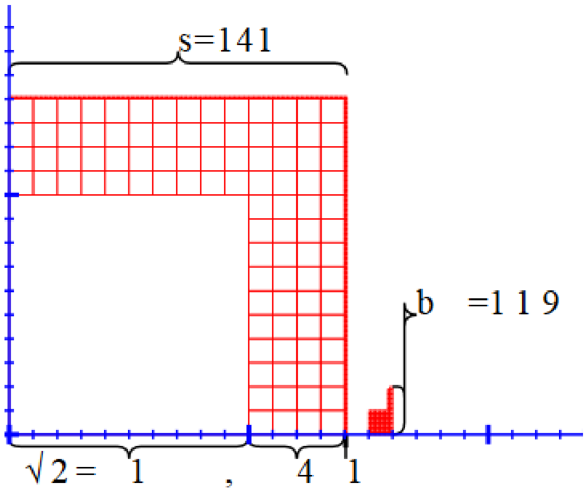
We divide each square to 100 squares

نقسّم كل مربّع على مئة مربّع



We divide the 400 square by the first square

نوزّع المربعات الأربع مئة على المربع الأول



The square root of 2 with two digits after the decimal point is 1.41 according to the numbers of rows.

الجذر التربيعي لـ2 بعددين بعد الفاصلة هو 1.41 حسب عدد الصفوف.

We may proceed similarly to find more numbers after the decimal point.

يمكن مواصلة العملية لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.

C.f. appendix 1 for the algorithmic representation of this method.

انظر الملحق 1 للكتابة الخوارزمية لهذه الطريقة.

10- Theories on square root :

10- نظريات حول الجذر التربيعي:

Theory 1:

نظرية 1:

All natural numbers that have a decimal point in their square roots, have an infinite number of digits after the decimal point, ~~as there~~

جميع الأعداد الطبيعية التي تحتوي جذورها التربيعية على فاصلة، لديها عدد غير منته من الأعداد بعد الفاصلة،

~~is no number from 1 to 9 that when multiplied by itself gives 0 on the right~~[7].

~~لأنه لا يوجد عدد من 1 إلى 9 مَضروبه في نفسه يعطي 0 على اليمين~~[6].

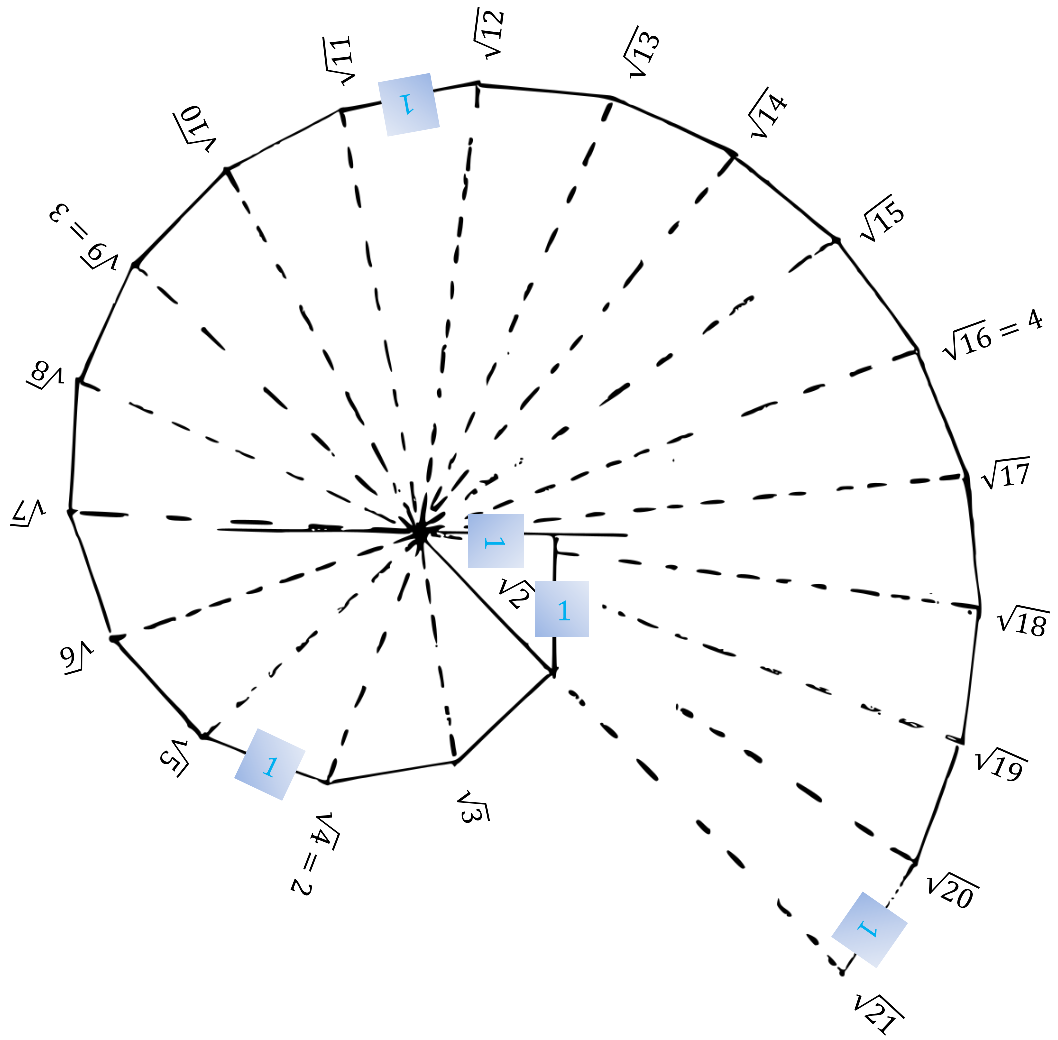
$$\sqrt[2]{2} = 1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679737990732478462107038 8$$

Theory 2:

According to the above, square roots that contain an infinite number of digits after the comma are unreal roots, because in fact they can be represented geometrically according to the Pythagorean theorem, and in their representation they are finite.

نظرية 2:

حسب ما تقدم، الجذور التربيعية التي تحتوي عدد غير منته من الأرقام بعد الفاصلة هي جذور غير حقيقة، لأنه في الحقيقة يمكن تمثيلها هندسيا بحسب نظرية فيثاغورس، وهي في تمثيلها منتهية.



[6] كانت هذه فرضية أولية، تم إلغاؤها لأنه يوجد أعداد – في أنظمة عد أخرى – مضروبها في نفسها يعطي 0 على اليمين.

[7] This was the initial hypotheses and it’s cancelled, as there exist – in other numeral systems – numbers whose multiplication by themselves yields 0 on the left.

Theory 3:

نظرية 3:

The most efficient representation of an unreal square root is $\sqrt{x}$, that is, by avoiding the approximate values.

التمثيل الأكثر فعالية للجذر التربيعي غير الحقيقي هو $\sqrt{x}$ أي باجتناب القيم التقريبية.

11- Finding the next real square of a real square:

11- إيجاد المربع الحقيقي الموالي لمربع حقيقي:

A real square is a square whose root does not contain an infinite number of digits after the comma. (See theory 1 in title 10).

المقصود بمربع حقيقي هو المربع الذي جذره لا يحتوي عدد غير منته من الأرقام بعد الفاصلة. (انظر نظرية 1 في العنوان 10).

The real square y that follows the real square x can be found with the following function:

يمكن إيجاد المربع الحقيقي y الموالي للمربع الحقيقي x بالدالة التالية:

$$y = x + [2(\sqrt{x}) + 1]$$

E.g.

مثال:

$$x = 81, (\sqrt{x} = 9)$$
$$y = 81 + [2(\sqrt{81}) + 1]$$
$$y = 81 + [2(9) + 1]$$
$$y = 81 + [18 + 1]$$
$$y = 81 + [19]$$
$$y = 100$$
$$\sqrt{y} = 10$$

12- Finding the next real square of a real square:

12- إيجاد المربع الحقيقي السابق لمربع حقيقي:

The real square y that preceeds the real square x can be found with the following function:

يمكن إيجاد المربع الحقيقي y السابق للمربع الحقيقي x بالدالة التالية:

$$y = x - [2(\sqrt{x}) - 1]$$

E.g.

مثال:

$$x = 81, (\sqrt{x} = 9)$$
$$y = 81 - [2(\sqrt{81}) - 1]$$
$$y = 81 - [2(9) - 1]$$
$$y = 81 - [18 - 1]$$
$$y = 81 - [17]$$
$$y = 64$$
$$\sqrt{y} = 8$$

13- Terms of power three:

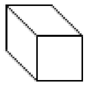
13- حدود الأعداد ذات الأس ثلاثة:

Power three numbers can be represented as cubes.

الأعداد ذات الأس ثلاثة يمكن تمثيلها على شكل مكعبات.

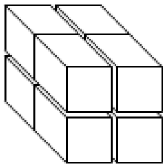
The number 1 raised to power 3 = 1 (1 cube)

العدد 1 أس 3 = 1 (مكعب واحد)



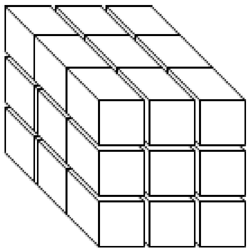
2 raised to power 3 = 8 (8 cubes)

العدد 2 أس 3 = 8 (8 مكعبات)



3 raised to power 3 = 27 (27 cubes)

العدد 3 أس 3 = 27 (27 مكعب)



The sum of power 3 increases with the function:

يتزايد أس 3 كل مرة بالدالة:

$$3x^2 - 3x + 1$$

This can be remarked the same way as power 2.

يمكن أن يلاحظ هذا بنفس طريقة أس 2.

$$x = 1 \rightarrow 3(1) - 3(1) + 1 = 1 \rightarrow 1^3 = 1$$
$$x = 2 \rightarrow 3(4) - 3(2) + 1 = 7 \rightarrow 2^3 = 1 + 7 = 8$$
$$x = 3 \rightarrow 3(9) - 3(3) + 1 = 19 \rightarrow 3^3 = 1 + 7 + +19 = 27$$
$$x = 4 \rightarrow 3(16) - 3(4) + 1 = 37 \rightarrow 4^3 = 1 + 7 + 19 + 37 = 64$$
$$\dots$$
$$x = n \rightarrow 3(n^2) - 3(n) + 1 \rightarrow n^3 = 1 + \dots + 3(n^2) - 3(n) + 1$$

Whereas for negative numbers[9] the sum of power 3 increases with the opposite sign of the function:

بينما بالنسبة للأعداد السالبة[8] يتزايد أس 3 في كل مرة بعكس إشارة الدالة:

[8] يعتبر هذا تصورا أوليا، وقد يكون خاطئا، لقد تم بناء النسخة الأولى من الكود البرمجي على أساس هذا التصور، وهو مثبت في المراجعة الأولى من هذا الكتاب. انظر العنوان 14

[9] This is a preliminary conception, and it may be wrong, the first version of the code was built upon it, it is included in the first revision of the book. c.f. title 14

$$3x^2 + 3x + 1$$

$$x = -1 \to 3(-1^2) + 3(-1) + 1 = 1 \to (-1)^3 = -(1) = -1$$
$$x = -2 \to 3(-2^2) + 3(-2) + 1 = 7 \to (-2)^3 = -(1 + 7) = -8$$
$$x = -3 \to 3(-3^2) + 3(-3) + 1 = 19 \to (-3)^3 = -(1 + 7 + 19) = -27$$
$$x = -4 \to 3(-4^2) + 3(-4) + 1 = 37 \to (-4)^3 = -(1 + 7 + 19 + 37) = -64$$

14- Finding the next real cube of a real cube:

14- إيجاد المكعب الحقيقي الموالي لمكعب حقيقي:

The real cube y that follows the real cube x can be found with the following function:

يمكن إيجاد المكعب الحقيقي y الموالي للمكعب الحقيقي x بالدالة التالية:

$$y = x + \left[3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 3\left(\sqrt[3]{x}\right) + 1\right]$$

E.g.

مثال:

$$x = 64, \left(\sqrt[3]{x} = 4\right)$$
$$y = 64 + \left[3\left(\sqrt[3]{64}\right)^2 + 3\left(\sqrt[3]{64}\right) + 1\right]$$
$$y = 64 + [3(4)^2 + 3(4) + 1]$$
$$y = 64 + [48 + 12 + 1]$$
$$y = 64 + [61]$$
$$y = 125$$
$$\sqrt[3]{y} = 5$$

15- Finding the next real cube of a real cube:

15- إيجاد المكعب الحقيقي السابق لمكعب حقيقي:

The real cube y that precedes the real cube x can be found with the following function:

يمكن إيجاد المكعب الحقيقي y السابق للمكعب الحقيقي x بالدالة التالية:

$$y = x - \left[3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 3\left(\sqrt[3]{x}\right) + 1\right]$$

E.g.

مثال:

$$x = 64, \left(\sqrt[3]{x} = 4\right)$$
$$y = 64 - \left[3\left(\sqrt[3]{64}\right)^2 - 3\left(\sqrt[3]{64}\right) + 1\right]$$
$$y = 64 - [3(4)^2 - 3(4) + 1]$$
$$y = 64 - [48 - 12 + 1]$$
$$y = 64 - [37]$$
$$y = 27$$
$$\sqrt[3]{y} = 3$$

16- Generalization of nth power terms increase:

16- تعميم تزايد حدود الأعداد ذات الأس ن:

Power 2 increases with the function:

يتزايد أس 2 في كل مرة بـ

$$(x-1)+x$$
$$2x-1$$

Power 3 increases with the function:

يتزايد أس 3 في كل مرة بـ

$$(2x-1)(x-1)+x^2$$
$$3x^2-3x+1$$

Power 4 increases with the function:

يتزايد أس 4 في كل مرة بـ

$$(3x^2-3x+1)(x-1)+x^3$$
$$4x^3-6x^2+4x-1$$

Power 5 increases with the function:

يتزايد أس 5 في كل مرة بـ

$$(4x^3-6x^2+4x-1)(x-1)+x^4$$
$$5x^4-10x^3+10x^2-5x+1$$

Power 16 increases with the function:

يتزايد أس 16 في كل مرة بـ

$$16x^{15}-120x^{14}+560x^{13}-1820x^{12}+4368x^{11}-8008x^{10}+11440x^9-12870x^8+11440x^7-8008x^6+4368x^5-1820x^4+560x^3-120x^2+16x-1$$

17- Generalization of nth power terms decrease:

17- تعميم تناقص حدود الأعداد ذات الأس ن:

Power 2 decreases with the function:

يتناقص أس 2 في كل مرة بـ

$$(x+1)+x$$
$$2x+1$$

Power 3 decreases with the function:

يتناقص أس 3 في كل مرة بـ

$$(2x+1)(x+1)+x^2$$
$$3x^2+3x+1$$

Power 4 decreases with the function:

يتناقص أس 4 في كل مرة بـ

$$(3x^2+3x+1)(x+1)+x^3$$
$$4x^3+6x^2+4x+1$$

18- Theoretical generalizations about n^{th} roots:

Whatever x, from 1 to 9, there is no x^n that yields 0 on the right, because only 5 multiplied by an even number gives 0 on the right, and 5 times 5 is odd.

Based on the above:

1- All natural numbers whose n^{th} roots contain a comma have an infinite number of digits after the comma.

2- The n^{th} roots that contain a finite number of digits after the comma are real n^{th} roots for dividing a number with a real n^{th} root by another number with a real n^{th} root such as $\sqrt[2]{\frac{16}{25}}$ or $\sqrt[2]{\frac{25}{16}}$.

2-1- It is known that a number divided by a multiple of three (after reduction) gives a recurring number after the comma, so the n^{th} root of the product of a number with a real n^{th} root over a multiple of three with a real n^{th} root (after reduction) will give a number with infinite recurring digits after the comma with – according to the above – being a real n^{th} root, such as $\sqrt[2]{\frac{16}{9}}$ and $\sqrt[2]{\frac{25}{81}}$.

18- تعميمات نظرية حول الجذور النونية:

مهما يكن x من 1 إلى 9، فإنه لا يوجد عدد x^n يُنتِج 0 على اليمين، لأنه فقط 5 مضروب في عدد زوجي يعطي 0 على اليمين، وحاصل 5 في 5 عددٌ فردي.

انطلاقا مما سبق:

1- جميع الأعداد الطبيعية التي تحتوي جذورها النونية على فاصلة، لديها عدد غير منته من الأرقام بعد الفاصلة، وتعتبر هذه جذورا نونية غير حقيقية، تمثيلها الأمثل هو $\sqrt[n]{x}$.

2- الجذور النونية التي تحتوي على عدد منته من الأرقام بعد الفاصلة، هي جذور نونية حقيقية لحاصل قسمة عدد ذو جذر نوني حقيقي على عدد ذو جذر نوني حقيقي آخر مثل $\sqrt[2]{\frac{16}{25}}$ أو $\sqrt[2]{\frac{25}{16}}$.

2-1- معلوم أن عدد مقسوم على عدد مضاعف لثلاثة (بعد الاختزال) يعطي عددا متكررا بعد الفاصلة، من ذلك سيعطي الجذر النوني لحاصل عدد ذو جذر نوني حقيقي على عدد مضاعف لثلاثة ذو جذر نوني حقيقي (بعد الاختزال) عددا بأرقام متكررة غير منتهية بعد الفاصلة مع كونه – حسب ما سبق – جذرا نونيا حقيقيا، مثل $\sqrt[2]{\frac{16}{9}}$ و $\sqrt[2]{\frac{25}{81}}$.

<table>
<tr><td>Appendix 1: TROUZINE's natural algorithm to calculate the square root of a number (The natural algorithm)</td><td>ملحق 1: خوارزمية تروزين الطبيعية لحساب الجذر التربيعي لعدد (الخوارزمية الطبيعية)</td></tr>
<tr><td>The algorithm may be tested on this link:</td><td>بإمكانك تجربة الخوارزمية على هذا الرابط:</td></tr>
<tr><td colspan="2">https://codepen.io/am_trouzine/full/ExoPmmy</td></tr>
<tr><td>Let N be the number that we want to calculate its square root

The square root of N is calculated in two stages:</td><td>نفترض N العدد الذي نريد حساب جذره التربيعي

يتم حساب الجذر التربيعي للعدد N في مرحلتين:</td></tr>
<tr><td><u>The first stage: finding the nearest real root of N:</u>

We make $n = N$

- We subtract from n the terms $2x - 1$ starting from $x = 1$
  ○ While $n > 0$, we make $x = x + 1$, and we proceed the substraction.
  ○ When $n = 0$, this stage stops and the number N has a real square root of x.
  ○ When $n < 0$, this stage stops, the nearest real square root is $x - 1$, and we continue the second stage to find the numbers after the comma.</td><td><u>المرحلة الأولى: إيجاد الجذر الحقيقي القريب للعدد N:</u>

نضع $n = N$

- نطرح من العدد n حدود $2x - 1$ ابتداء من $x = 1$
  ○ ما دام $n > 0$ نجعل $x = x + 1$ ونواصل عملية الطرح.
  ○ إذا صار $n = 0$، تتوقف هذه المرحلة وللعدد N جذر تربيعي حقيقي هو x.
  ○ إذا صار $n < 0$، تتوقف هذه المرحلة، الجذر التربيعي الحقيقي القريب للعدد N هو $x - 1$، ونواصل المرحلة الثانية لإيجاد الأعداد بعد الفاصلة.</td></tr>
</table>

<u>The second stage: Finding the numbers after the comma:</u>
Let x be the nearest square root of N
Let $b = N - x^2$
The following process is repeated for the number of digits we want to find after the comma:
We divide this process into 3 steps
Step 1: We multiply the number x by ten, and we multiply the number b by a hundred
Step 2: We assume $s = x$,
Step 3: We subtract $2s + 1$ from b
- If the result of b is greater than zero:
  o we add to s one, and continue from step 3
- <u>If the result of b equals zero</u>: then N is a decimal number with a real square root, its square root should be calculated without a comma starting from the first stage.
- If the result of b is less than zero:
  o We make i the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$
  o In the space after the comma, we write the number i
  o We get to b the quotient of $2s + 1$,
  o We add to x the number of substractions i,
  o We continue with the values of x and b from step 1 to find more numbers after the comma.
	<u>المرحلة الثانية: إيجاد الأعداد بعد الفاصلة:</u>
	نفترض x الجذر التربيعي القريب للعدد N
	نفترض $b = N - x^2$
	نكرر العملية التالية بعدد الأرقام التي نريد إيجادها بعد الفاصلة:
	نقسم هذه العملية إلى 3 خطوات
	الخطوة 1: نضرب العدد x في عشرة، ونضرب العدد b في مئة
	الخطوة 2: نفترض $s = x$ ،
	الخطوة 3: نطرح من العدد b حاصل $2s + 1$
	- إذا كانت نتيجة b أكبر تماما من الصفر:
	  o نضيف إلى s واحد، ونواصل من الخطوة 3
	- <u>إذا كانت نتيجة b تساوي الصفر</u>: فالعدد N عدد عشري لديه جذر تربيعي حقيقي، نحسب جذره التربيعي بدون فاصلة ابتداء من المرحلة الأولى.
	- إذا كانت نتيجة b أصغر من الصفر:
	  o نجعل i عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$
	  o نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العددi
	  o نرد إلى b حاصل$2s + 1$،
	  o نضيف إلى x عدد مرات الطرح i،
	  o ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ x و b من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.

<u>E.g.</u> A number with a real square root	**<u>مثال:</u>** عدد بجذر تربيعي حقيقي
$N = 64;\ \sqrt{N} = ?$	
We make $n = N$ - We subtract from n the terms $2x - 1$ starting from $x = 1$	نضع $n = N$ - نطرح من العدد n حدود $2x - 1$ ابتداء من $x = 1$

$x=1: n=64-(2x-1)=64-1=63$ $x=2: n=63-(4-1)=63-3=60$ $x=3: n=60-5=55$ $x=4: n=55-7=48$ $x=5: n=48-9=39$ $x=6: n=39-11=28$ $x=7: n=28-13=15$ $x=8: n=15-15=0$	
This stage stops and the number N has a real square root of x.	تتوقف هذه المرحلة وللعدد N جذر تربيعي حقيقي هو x.
$\sqrt{N}=x;\ \sqrt{64}=8$	
E.g. A number with an unreal square root	**مثال:** عدد بجذر تربيعي غير حقيقي
$N=122$ $\sqrt{N}=?$	
We make $n=N$ - We subtract from n the terms $2x-1$ starting from $x=1$	نضع $n=N$ - نطرح من العدد n حدود $2x-1$ ابتداء من $x=1$
$x=1: n=122-(2x-1)=122-1=121$ $x=2: n=121-(4-1)=121-3=118$ $x=3: n=118-5=113$ ... $x=10: n=41-19=22$ $x=11: n=22-21=1$ $x=12: n=1-23=-22$	
This stage stops, the nearest real square root is $x-1$, and we continue the second stage to find the numbers after the comma.	تتوقف هذه المرحلة، الجذر التربيعي الحقيقي القريب للعدد N هو $x-1$، ونواصل المرحلة الثانية لإيجاد الأعداد بعد الفاصلة.
$\sqrt{N}=x-1$ $\sqrt{122}\approx 12-1\approx 11$	
Let x be the nearest square root of N Let $b=N-x^2$	نفترض x الجذر التربيعي القريب للعدد N نفترض $b=N-x^2$
$x=11$ $b=N-x^2=122-121=1$	
Step 1: We multiply the number x by ten, and we multiply the number b by a hundred	**الخطوة 1:** نضرب العدد x في عشرة، ونضرب العدد b في مئة
$x=x\times 10=110$ $b=b\times 100=100$	
Step 2: We assume $s=x$,	**الخطوة 2:** نفترض $s=x$ ،

<table>
<tr><td colspan="2">$s = 110$</td></tr>
<tr><td>Step 3: We subtract $2s + 1$ from b</td><td>الخطوة 3: نطرح من العدد b حاصل $2s + 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b = b - (2s + 1) = 100 - 221 = -121$</td></tr>
<tr><td>- As the result of b is less than zero:
○ We make i the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$</td><td>- بما أن نتيجة b أصغر من الصفر:
○ نجعل i عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$i = 0$</td></tr>
<tr><td>○ In the space after the comma, we write the number i</td><td>○ نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العددi</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sqrt{122} \approx 11.0$</td></tr>
<tr><td>○ We get to b the quotient of $2s + 1$,
○ We add to x the number of subtractions i,</td><td>○ نرد إلى b حاصل$2s + 1$،
○ نضيف إلى x عدد مرات الطرح i،</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = x + 0 = 110$
$b = 100$</td></tr>
<tr><td>We continue with the values of x and b from step 1 to find more numbers after the comma.</td><td>ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ x و b من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.</td></tr>
<tr><td>Step 1: We multiply the number x by ten, and we multiply the number b by a hundred</td><td>الخطوة 1: نضرب العدد x في عشرة، ونضرب العدد b في مئة</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = x \times 10 = 1100$
$b = b \times 100 = 10000$</td></tr>
<tr><td>Step 2: We assume $s = x$,</td><td>الخطوة 2: نفترض $s = x$ ،</td></tr>
<tr><td colspan="2">$s = 1100$</td></tr>
<tr><td>Step 3: We subtract $2s + 1$ from b</td><td>الخطوة 3: نطرح من العدد b حاصل $2s + 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b = b - (2s + 1) = 10000 - 2201 = 7799 \ldots (i = 1)$</td></tr>
<tr><td>- If the result of b is greater than zero:
○ we add to s one, and continue from step 3</td><td>- إذا كانت نتيجة b أكبر تماما من الصفر:
○ نضيف إلى s واحد، ونواصل من الخطوة 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">$s = s + 1 = 1101: b = b - (2s + 1) = 7799 - 2203 = 5596 \ldots (i = 2)$
$s = 1102: b = b - (2s + 1) = 5596 - 2205 = 3391 \ldots (i = 3)$
$s = 1103: b = b - (2s + 1) = 3391 - 2207 = 1184 \ldots (i = 4)$
$s = 1104: b = b - (2s + 1) = 1184 - 2209 = -1025$</td></tr>
<tr><td>- As the result of b is less than zero:
○ We make i the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$</td><td>- بما أن نتيجة b أصغر من الصفر:
○ نجعل i عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$i = 4$</td></tr>
<tr><td>○ In the space after the comma, we write the number i</td><td>○ نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العددi</td></tr>
</table>

$\sqrt{122} \approx 11.04$	
○ We get to b the quotient of $2s+1$, ○ We add to x the number of substractions i,	○ نرد إلى b حاصل$2s+1$، ○ نضيف إلى x عدد مرات الطرح i،
$x = x + 4 = 1104$ $b = 1184$	
We continue with the values of x and b from step 1 to find more numbers after the comma.	ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ x و b من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.
Step 1: We multiply the number x by ten, and we multiply the number b by a hundred	**الخطوة 1:** نضرب العدد x في عشرة، ونضرب العدد b في مئة
$x = x \times 10 = 11040$ $b = b \times 100 = 118400$	
Step 2: We assume $s = x$,	**الخطوة 2:** نفترض $s = x$ ،
$s = 11040$	
Step 3: We subtract $2s+1$ from b	**الخطوة 3:** نطرح من العدد b حاصل $2s+1$
$b = b - (2s+1) = 118400 - 22081 = 96319 \ldots (i = 1)$	
- If the result of b is greater than zero: ○ we add to s one, and continue from step 3	- إذا كانت نتيجة b أكبر تماما من الصفر: ○ نضيف إلى s واحد، ونواصل من الخطوة 3
$s = s + 1 = 11041: b = b - (2s+1) = 96319 - 22083 = 74236 \ldots (i = 2)$ $s = 11042: b = b - (2s+1) = 74236 - 22085 = 52151 \ldots (i = 3)$ $s = 11043: b = b - (2s+1) = 52151 - 22087 = 30064 \ldots (i = 4)$ $s = 11044: b = b - (2s+1) = 30064 - 22089 = 7975 \ldots (i = 5)$ $s = 11045: b = b - (2s+1) = 7975 - 22091 = -14116$	
- As the result of b is less than zero: ○ We make i the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$	- بما أن نتيجة b أصغر من الصفر: ○ نجعل i عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$
$i = 5$	
○ In the space after the comma, we write the number i	○ نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العددi
$\sqrt{122} \approx 11.045$	
○ We get to b the quotient of $2s+1$, ○ We add to x the number of substractions i,	○ نرد إلى b حاصل$2s+1$، ○ نضيف إلى x عدد مرات الطرح i،
$x = x + 5 = 11045$ $b = 7975$	
We continue with the values of x and b from step 1 to find more numbers after the comma.	ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ x و b من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.
…	

Computational representation of the algorithm in JavaScript.	الكتابة البرمجية للخوارزمية بلغة البرمجة جافاسكريبت.

```
function sqrt(N){
      if(N<0) {return NaN;}
      var fn1 = function (x){
            var a=x;
            for(var i=1;i<=x;i++){
                  a-=2*i-1;
                  if(a==0) return i;
                  if(a<0) return i-1;
            }
            return i-1;
      }
      var f2= function (s, b){
            for(var i=0; i<10; i++){
                  b-=s*2 +1;
                  if(b<0){b+=s*2+1;break}
                  if(b==0){return [i, b];}
                  s++;
             }
             return [i, b];
       }
       var dec=20; // numbers after comma
       var x=fn1(N), b= N-x*x, r=[], S=x;
       if(b)
            for(var i=0; i<dec; i++){
                  b*=100;
                  x*=10 ;
                  var q=f2( x, b);
                  if(q[1]==0){
                        console.log('a decimal number with a real square root');
                        var d=N.toString().split('.')[1].length;
                        for(var j=1; j<10;j++) if(j*2>=d) break;
                        return sqrt(N*Math.pow(10, d*2)) /Math.pow(10,d)
                  }
                  r.push(q[0]);
                  x=x+q[0]; b=q[1];
            }
      return S+(b? '.'+r.join('')  : '' ) ;
}

var n= 13;
console.log(Math.sqrt(n), sqrt(n) ) ;
// 3.605551275463989
// 3.60555127546398929311
```

Appendix 2: TROUZINE's natural algorithm to calculate the cubic root of a number (The natural algorithm)	**ملحق 2: خوارزمية تروزين الطبيعية لحساب الجذر التكعيبي لعدد (الخوارزمية الطبيعية)**
The algorithm may be tested on this link:	بإمكانك تجربة الخوارزمية على هذا الرابط:
https://codepen.io/am_trouzine/full/GRyoWbM	
Let N be the number that we want to calculate its cubic root The cubic root of N is calculated in two stages:	نفترض N العدد الذي نريد حساب جذره التكعيبي يتم حساب الجذر التكعيبي للعدد N في مرحلتين:

The first stage: finding the nearest real root of N:
We make $n = N$
- We subtract from n the terms $3x^2 - 3x + 1$ starting from $x = 1$
  ○ While $n > 0$, we make $x = x + 1$, and we proceed the substraction.
  ○ When $n = 0$, this stage stops and the number N has a real cubic root of x.
  ○ When $n < 0$, this stage stops, the nearest real cubic root is $x - 1$, and we continue the second stage to find the numbers after the comma.
	المرحلة الأولى: إيجاد الجذر الحقيقي القريب للعدد N:
	نضع $n = N$
	- نطرح من العدد n حدود $3x^2 - 3x + 1$ ابتداء من $x = 1$
	  ○ ما دام $n > 0$ نجعل $x = x + 1$ ونواصل عملية الطرح.
	  ○ إذا صار $n = 0$، تتوقف هذه المرحلة وللعدد N جذر تكعيبي حقيقي هو x.
	  ○ إذا صار $n < 0$، تتوقف هذه المرحلة، الجذر التكعيبي الحقيقي القريب للعدد هو $x - 1$، ونواصل المرحلة الثانية لإيجاد الأعداد بعد الفاصلة.

<u>The second stage: Finding the numbers after the comma:</u>
Let x be the nearest cubic root of N
Let $b = N - x^3$
The following process is repeated for the number of digits we want to find after the comma:
We divide this process into 3 steps
Step 1: We multiply the number x by ten, and we multiply the number b by a thousand
Step 2: We assume $s = x$,
Step 3: We subtract $3s^2 + 3s + 1$ from b
- If the result of b is greater than zero:
  o we add to s one, and continue from step 3
- <u>If the result of b equals zero</u>: then N is a decimal number with a real cubic root, its cubic root should be calculated without a comma starting from the first stage.
- If the result of b is less than zero:
  o We make i the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$
  o In the space after the comma, we write the number i
  o We get to b the quotient of $3s^2 + 3s + 1$
  o We add to x the number of subtractions i,
  o We continue with the values of x and b from step 1 to find more numbers after the comma.
	<u>المرحلة الثانية: إيجاد الأعداد بعد الفاصلة:</u>
	نفترض x الجذر التكعيبي القريب للعدد N
	نفترض $b = N - x^3$
	نكرر العملية التالية بعدد الأرقام التي نريد إيجادها بعد الفاصلة:
	نقسم هذه العملية إلى 3 خطوات
	الخطوة 1: نضرب العدد x في عشرة، ونضرب العدد b في ألف
	الخطوة 2: نفترض $s = x$ ،
	الخطوة 3: نطرح من العدد b حاصل $3s^2 + 3s + 1$
	- إذا كانت نتيجة b أكبر تماما من الصفر:
	  o نضيف إلى s واحد، ونواصل من الخطوة 3
	- <u>إذا كانت نتيجة b تساوي الصفر</u>: فالعدد N عدد عشري لديه جذر تكعيبي حقيقي، نحسب جذره التكعيبي بدون فاصلة ابتداء من المرحلة الأولى.
	- إذا كانت نتيجة b أصغر من الصفر:
	  o نجعل i عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$
	  o نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العددi
	  o نرد إلى b حاصل$3s^2 + 3s + 1$،
	  o نضيف إلى x عدد مرات الطرح i،
	  o ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ x و b من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.

<u>E.g.</u> A number with a real cubic root	**<u>مثال:</u>** عدد بجذر تكعيبي حقيقي
$N = 64;\ \sqrt[3]{N} = ?$	
We make $n = N$ - We subtract from n the terms $3x^2 - 3x + 1$ starting from $x = 1$	نضع $n = N$ - نطرح من العدد n حدود $3x^2 - 3x + 1$ ابتداء من $x = 1$
$x = 1: n = 64 - (3x^2 - 3x + 1\ ) = 64 - 1 = 63$ $x = 2: n = 63 - (12 - 6 + 1) = 63 - 7 = 56$ $x = 3: n = 56 - 19 = 37$ $x = 4: n = 37 - 37 = 0$	
this stage stops and the number N has a real cubic root of x.	تتوقف هذه المرحلة وللعدد N جذر تكعيبي حقيقي هو x.

$\sqrt[3]{N} = x;\ \sqrt[3]{64} = 4$	
E.g. A number with an unreal cubic root	**مثال:** عدد بجذر تكعيبي غير حقيقي
$N = 66$ $\sqrt[3]{N} = ?$	
We make $n = N$ - We subtract from n the terms $3x^2 - 3x + 1$ starting from $x = 1$	نضع $n = N$ - نطرح من العدد n حدود $3x^2 - 3x + 1$ ابتداء من $x = 1$
$x = 1: n = 66 - (3x^2 - 3x + 1\ ) = 66 - 1 = 65$ $x = 2: n = 65 - (12 - 6 + 1) = 65 - 7 = 58$ $x = 3: n = 58 - 19 = 39$ $x = 4: n = 39 - 37 = 2$ $x = 5: n = 2 - 61 = -59$	
This stage stops, the nearest real cubic root is $x - 1$, and we continue the second stage to find the numbers after the comma.	تتوقف هذه المرحلة، الجذر التكعيبي الحقيقي القريب للعدد هو $x - 1$، ونواصل المرحلة الثانية لإيجاد الأعداد بعد الفاصلة.
$\sqrt[3]{N} = x - 1$ $\sqrt[3]{66} \approx 5 - 1 \approx 4$	
Let x be the nearest cubic root of N Let $b = N - x^3$	نفترض x الجذر التكعيبي القريب للعدد N نفترض $b = N - x^3$
$x = 4$ $b = N - x^3 = 66 - 64 = 2$	
Step 1: We multiply the number x by ten, and we multiply the number b by a thousand	**الخطوة 1:** نضرب العدد x في عشرة، ونضرب العدد b في ألف
$x = x \times 10 = 40$ $b = b \times 1000 = 2000$	
Step 2: We assume $s = x$,	**الخطوة 2:** نفترض $s = x$ ،
$s = 40$	
Step 3: We subtract $3s^2 + 3s + 1$ from b	**الخطوة 3:** نطرح من العدد b حاصل $3s^2 + 3s + 1$
$b = b - \left(3s^2 + 3s + 1\right) = 2000 - 4921 = -2921$	
- As the result of b is less than zero: ○ We make i the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$	- بما أن نتيجة b أصغر من الصفر: ○ نجعل i عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$
$i = 0$	
○ In the space after the comma, we write the number i	○ نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العددi

<table>
<tr><td colspan="2">$\sqrt[3]{66} \approx 4.0$</td></tr>
<tr><td>○ We get to b the quotient of $3s^2 + 3s + 1$,
○ We add to x the number of substractions i,</td><td>○ نرد إلى b حاصل$3s^2 + 3s + 1$،
○ نضيف إلى x عدد مرات الطرح i،</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = x + 0 = 40, b = 2000$</td></tr>
<tr><td>We continue with the values of x and b from step 1 to find more numbers after the comma.</td><td>ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ x و b من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.</td></tr>
<tr><td>Step 1: We multiply the number x by ten, and we multiply the number b by a thousand</td><td>الخطوة 1: نضرب العدد x في عشرة، ونضرب العدد b في ألف</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = x \times 10 = 400, b = b \times 1000 = 2000000$</td></tr>
<tr><td>Step 2: We assume $s = x$,</td><td>الخطوة 2: نفترض $s = x$ ،</td></tr>
<tr><td colspan="2">$s = 400$</td></tr>
<tr><td>Step 3: We subtract $3s^2 + 3s + 1$ from b</td><td>الخطوة 3: نطرح من العدد b حاصل $3s^2 + 3s + 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b = b - (3s^2 + 3s + 1) = 2000000 - 481201 = 1518799 \ldots (i = 1)$</td></tr>
<tr><td>- If the result of b is greater than zero:
○ we add to s one, and continue from step 3</td><td>- إذا كانت نتيجة b أكبر تماما من الصفر:
○ نضيف إلى s واحد، ونواصل من الخطوة 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">$s = s + 1 = 401: b = b - \left(3s^2 + 3s + 1\right) = 1518799 - 483607 = 1035192 \ldots (i = 2)$
$s = 402: b = 1035192 - 486019 = 549173 \ldots (i = 3)$
$s = 403: b = 549173 - 488437 = 60736 \ldots (i = 4)$
$s = 404: b = 60736 - 490861 = -430125$</td></tr>
<tr><td>- As the result of b is less than zero:
○ We make i the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$</td><td>- بما أن نتيجة b أصغر من الصفر:
○ نجعل i عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$i = 4$</td></tr>
<tr><td>○ In the space after the comma, we write the number i</td><td>○ نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العددi</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sqrt[3]{66} \approx 4.04$</td></tr>
<tr><td>○ We get to b the quotient of $3s^2 + 3s + 1$,
○ We add to x the number of substractions i,</td><td>○ نرد إلى b حاصل$3s^2 + 3s + 1$،
○ نضيف إلى x عدد مرات الطرح i،</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = x + 4 = 404$
$b = 60736$</td></tr>
<tr><td>We continue with the values of x and b from step 1 to find more numbers after the comma.</td><td>ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ x و b من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.</td></tr>
<tr><td>Step 1: We multiply the number x by ten, and we multiply the number b by a thousand</td><td>الخطوة 1: نضرب العدد x في عشرة، ونضرب العدد b في ألف</td></tr>
</table>

$x = x \times 10 = 4040, b = b \times 1000 = 60736000$	
Step 2: We assume $s = x$,	**الخطوة 2:** نفترض $s = x$ ،
$s = 4040$	
Step 3: We subtract $3s^2 + 3s + 1$ from b	**الخطوة 3:** نطرح من العدد b حاصل $3s^2 + 3s + 1$
$b = b - (3s^2 + 3s + 1) = 60736000 - 48976921 = 11759079 \ldots (i = 1)$	
- If the result of b is greater than zero: ○ we add to s one, and continue from step 3	- إذا كانت نتيجة b أكبر تماما من الصفر: ○ نضيف إلى s واحد، ونواصل من الخطوة 3
$s = s + 1 = 4041: b = b - (3s^2 + 3s + 1) = 11759079 - 49001167 = -37242088$	
- As the result of b is less than zero: ○ We make i the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$	- بما أن نتيجة b أصغر من الصفر: ○ نجعل i عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$
$i = 1$	
○ In the space after the comma, we write the number i	○ نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العدد i
$\sqrt[3]{66} \approx 4.041$	
○ We get to b the quotient of $3s^2 + 3s + 1$, ○ We add to x the number of substractions i,	○ نرد إلى b حاصل $3s^2 + 3s + 1$، ○ نضيف إلى x عدد مرات الطرح i،
$x = x + 1 = 4041$ $b = 11759079$	
We continue with the values of x and b from step 1 to find more numbers after the comma.	ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ x و b من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.
…	

Computational representation of the algorithm in JavaScript.	الكتابة البرمجية للخوارزمية بلغة البرمجة جافاسكريبت.

```
function cbrt(N){
      var ss='';
      if(N<0) {N*=-1;  ss='-';}
      var fn1 = function (x){
            var a=x;
            for(var i=1;i<=x;i++){
                  a-=3*i*i -3*i +1;
                  if(a==0) return i;
                  if(a<0) return i-1;
            }
            return i-1;
      }

      var f2= function (s, b){
            for(var i=0; i<10; i++){
                  b-=3*s*s +3*s +1;
                  if(b<0){b+=3*s*s +3*s +1;break}
                  if(b==0){return [i, b];}
                  s++;
             }
             return [i, b];
       }

       var dec=20; // numbers after comma
       var x=fn1(N), b, r=[], S=x;
       b= N-x*x*x;
       if(b)
            for(var i=0; i<dec; i++){
                  b*=1000;
                  x*=10 ;
                  var q=f2( x, b);
                  if(q[1]==0){
                        console.log('a decimal number with a real cubic root');
                        var d=N.toString().split('.')[1].length;
                        for(var j=1; j<10;j++) if(j*3>=d) break;
                        return cbrt((ss=='-'?-1:1)*N*Math.pow(10, d*3))
/Math.pow(10,d)
                  }
                  r.push(q[0]);
                  x=x+q[0]; b=q[1];
            }
      return ss+S+(b? '.'+r.join('')  : '' ) ;
}

var n= 13;
console.log(Math.cbrt(n), cbrt(n) ) ;
// 2.3513346877207573
// 2.35133468772075748950
```

Appendix 3: TROUZINE's natural algorithm to calculate the n^{th} root of a number (The natural algorithm)	**ملحق 3: خوارزمية تروزين الطبيعية لحساب الجذر النوني لعدد (الخوارزمية الطبيعية)**
The algorithm may be tested on this link:	بإمكانك تجربة الخوارزمية على هذا الرابط:
https://codepen.io/am_trouzine/full/XWVdwMv	
C.f. Generalization of n^{th} power terms increase and Generalization of n^{th} power terms decrease	انظر تعميم تزايد حدود الأعداد ذات الأس ن وتعميم تناقص حدود الأعداد ذات الأس ن
Before starting the calculation of the n^{th} root, we find the function of increase and the function of decrease from the abovementioned method. The first function is used to find the real or the nearest real root, and the second is used to find the digits after comma.	قبل البدء في حساب الجذر النوني، نقوم بإيجاد دالتي التزايد والتناقص من الطريقة أعلاه. نستعمل الدالة الأولى لإيجاد الجذر الحقيقي أو الجذر الحقيقي القريب، ونستعمل الدالة الثانية لإيجاد الأعداد بعد الفاصلة.
E.g. Calculating the 5^{th} root of a number	**مثال: حساب الجذر الخامس لعدد**

Power 5 increases with the function: | يتزايد أس 5 في كل مرة ب

$$5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1$$

Power 5 decreases with the function: | يتناقص أس 5 في كل مرة ب

$$5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

Let N be the number that we want to calculate its 5^{th} root Let $n^{th} = 5$ because we want to calculate the 5^{th} root The 5^{th} root of N is calculated in two stages:	نفترض N العدد الذي نريد حساب جذره الخامس نفترض $n^{th} = 5$ لأننا نريد حساب الجذر الخامس يتم حساب الجذر الخامس للعدد N في مرحلتين:
The first stage: finding the nearest real root of N: We make $n = N$ - Starting from $x = 1$, we subtract from n the terms of:	**المرحلة الأولى: إيجاد الجذر الحقيقي القريب للعدد N:** نضع $n = N$ - ابتداء من $x = 1$، نطرح من العدد n حدود:
$5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1$	
○ While $n > 0$, we make $x = x + 1$, and we proceed the substraction. ○ When $n = 0$, this stage stops and the number N has a real 5^{th} root of x. ○ When $n < 0$, this stage stops, the nearest real 5^{th} root is $x - 1$, and we continue the second stage to find the numbers after the comma.	○ ما دام $n > 0$ نجعل $x = x + 1$ ونواصل عملية الطرح. ○ إذا صار $n = 0$، تتوقف هذه المرحلة وللعدد N جذر نوني خامس حقيقي هو x. ○ إذا صار $n < 0$، تتوقف هذه المرحلة، الجذر الخامس الحقيقي القريب للعدد هو $x - 1$، ونواصل المرحلة الثانية لإيجاد الأعداد بعد الفاصلة.

<table>
<tr><td><u>The second stage: Finding the numbers after the comma:</u>
Let x be the nearest 5th root of N
Let $b = N - x^{(n^{th})}$ i.e. $b = N - x^5$
The following process is repeated for the number of digits we want to find after the comma:
We divide this process into 3 steps
Step 1: We multiply the number x by ten, and we multiply the number b by $10^{(n^{th})}$ i.e. 10^5
Step 2: We assume $s = x$,
Step 3: We subtract from b</td><td dir="rtl"><u>المرحلة الثانية: إيجاد الأعداد بعد الفاصلة:</u>
نفترض x الجذر الخامس القريب للعدد N
نفترض $b = N - x^{(n^{th})}$ أي $b = N - x^5$
نكرر العملية التالية بعدد الأرقام التي نريد إيجادها بعد الفاصلة:
نقسم هذه العملية إلى 3 خطوات
الخطوة 1: نضرب العدد x في عشرة، ونضرب العدد b في $10^{(n^{th})}$ أي 10^5
الخطوة 2: نفترض $s = x$ ،
الخطوة 3: نطرح من العدد b حاصل</td></tr>
<tr><td colspan="2">$5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$</td></tr>
<tr><td>- If the result of b is greater than zero:
  o we add to s one, and continue from step 3
- <u>If the result of b equals zero</u>: then N is a decimal number with a real nth root, its nth root should be calculated without a comma starting from the first stage.
- If the result of b is less than zero:
  o We make i the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$
  o In the space after the comma, we write the number i
  o We get to b the quotient of:</td><td dir="rtl">- إذا كانت نتيجة b أكبر تماما من الصفر:
  o نضيف إلى s واحد، ونواصل من الخطوة 3
- <u>إذا كانت نتيجة b تساوي الصفر</u>: فالعدد N عدد عشري لديه جذر نوني حقيقي، نحسب جذره النوني بدون فاصلة ابتداء من المرحلة الأولى.
- إذا كانت نتيجة b أصغر من الصفر:
  o نجعل i عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$
  o نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العددi
  o نرد إلى b حاصل:</td></tr>
<tr><td colspan="2">$5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$</td></tr>
<tr><td> o We add to x the number of subtractions i,
  o We continue with the values of x and b from step 1 to find more numbers after the comma.</td><td dir="rtl"> o نضيف إلى x عدد مرات الطرح i،
  o ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ x و b من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.</td></tr>
<tr><td>Computational representation of the algorithm in JavaScript.</td><td dir="rtl">الكتابة البرمجية للخوارزمية بلغة البرمجة جافاسكريبت.</td></tr>
</table>

```
function PowSeq(x){
  var a= [[[1,0]]]
  for(var i=1; i<x; i++){
    for(var j=0; j<a.length; j++){
      a[j]=PolyMul(a[j], [[1,1],[-1,0]])
    }
    a.push([[1,i]])
  }
  var b=[[0,0]];
  for(var i=0; i<a.length; i++){
    b=PolyAdd(b, a[i])
  }
```

```
  return b.sort(function(x,y){return x[1]<y[1]?1:-1})
}
function RSeq(x){
  var a= [[[1,0]]]
  for(var i=1; i<x; i++){
    for(var j=0; j<a.length; j++){
      a[j]=PolyMul(a[j], [[1,1],[+1,0]])
    }
    a.push([[1,i]])
  }
  var b=[[0,0]];
  for(var i=0; i<a.length; i++){
    b=PolyAdd(b, a[i])
  }
  return b.sort(function(x,y){return x[1]<y[1]?1:-1})
}
function PolyAdd(a, y){
  for(var i=0; i<y.length; i++){
    a.push(y[i])
  }
  for(var i=0; i<a.length-1; i++){
    for(var j=i+1; j<a.length; j++){
      if(a[i][1]==a[j][1]){
        a[i][0]+=a[j][0]; a.splice(j, 1);  j--
      }
    }
  }
  return a.sort(function(x,y){return x[1]>y[1]?1:0})

}
function PolyMul(x, y){
  var a=[]
  for(var i=0; i<x.length; i++){
    for(var j=0; j<y.length; j++){
      a.push([x[i][0]*y[j][0], x[i][1]+y[j][1]])
    }
  }
  for(var i=0; i<a.length-1; i++){
    for(var j=i+1; j<a.length; j++){
      if(a[i][1]==a[j][1]){
        a[i][0]+=a[j][0]; a.splice(j, 1);  j--
      }
    }
  }
  return a.sort(function(x,y){return x[1]>y[1]?1:0})
}
function nroot(N, nth, dec){
      if(nth==0) return NaN;
      if(nth==1) return N;
      if(nth<0) return 1/ nroot(N, nth*-1, dec);
      //negative number
      if(!(nth%2) && N<0) {return NaN;}
      var ss='';
      if(N<0) {N*=-1;  ss='-';}

      var fn1 = function (x){
            var a=x, j;
            var seq=PowSeq(nth);
            for(var i=1;i<=x;i++){
                  j=0;
                  seq.forEach(function(e){
```

```
                    j+=e[0]*Math.pow(i,e[1])
                });
                a=a-j;
                if(a==0) return i;
                if(a<0) return i-1;
            }
            return i-1;
        }

        var f2= function (s, b){
            var j;
            var seq=RSeq(nth);
            for(var i=0; i<10; i++){
                j=0;
                seq.forEach(function(e){
                    j+=e[0]*Math.pow(s,e[1])
                });

                b-= j;
                if(b<0){b+=j;break}
                if(b==0){
                    return [i, b]
                }
                s++;
             }
             return [i, b];
         }

         var dec=dec?dec:16; // numbers after comma
         var x=S=fn1(N), b=N-Math.pow(x,nth) , r=[], q;
         if(b)
            for(var i=0; i<dec; i++){
                b*=Math.pow(10,nth);
                x*=10 ;
                q=f2( x, b);
                if(q[1]==0){
                    //a decimal number with a real nth root
                    console.log('a decimal number with a real nth root');
                    var d=N.toString().split('.')[1].length;
                    for(var j=1; j<10;j++){
                        if(j*nth>=d)break;
                    }
                    return nroot((ss=='-'?-1:1)*N*Math.pow(10, d*nth), nth,
dec) / Math.pow(10,d)
                }
                r.push(q[0]);
                x=x+q[0]; b=q[1];
            }
         return ss+S+(b? '.'+r.join('')  : '' ) ;
}

var n= 524288 , nth=19;
console.log( nroot(n,nth,6), Math.pow(n, 1/nth) );
// 2
// 2

var n= 52411288 , nth=11;
console.log( nroot(n,nth,6), Math.pow(n, 1/nth) );
// 5.032292
// 5.032292702825373
```

Contents المحتويات

تروزين عبد الرزاق

مهتم باللغات، وأنظمة الكتابة، والعلوم البحتة،
والرياضيات الكلاسيكية، وبرمجة الحواسيب.

TROUZINE Abderrezzaq

Interested in languages, writing systems, pure sciences, classical mathematics, and computers programming.

am.trouzine@gmail.com