# مذكّرة حول

# خوارزميات الأريثماطيقي في أنظمة عد متعددة

**تروزين عبد الرزاق**

# *A Note about*

# *Arithmetic algorithms in different numeral systems*

**TROUZINE Abderrezzaq**


| | | |
|---|---|---|
| First revision | | المراجعة الأولى |
| | 2020/04/14 | |
| Second revision | | المراجعة الثانية |
| | 2021/07/17 | |
| Third revision | | المراجعة الثالثة |
| | 2022/06/04 | |
| Fourth revision | | المراجعة الرابعة |
| | 2023/05/31 | |

https://github.com/am-trouzine/Arithmetic-algorithms-in-different-numeral-systems

**Archived on Zenodo**

DOI 10.5281/zenodo.18050439

**https://doi.org/10.5281/zenodo.18050439**

**Version: v1.0.0**

**Year: 2025**

## Introduction

These notes originated from an attempt to implement arithmetic algorithms for a file compression project. While working in JavaScript, difficulties arose in basic operations such as division, particularly when considering changes in the numeral base. This motivated the development of fundamental arithmetic procedures independent of a fixed base.

Following the implementation of these basic operations, attention shifted toward algorithms for powers and roots. Before programming such algorithms, several mathematical questions had to be addressed, including how to compute square roots without relying on calculators, and how to generalize this approach to arbitrary nth roots. The exploration of these questions led to constructive methods based on monotonic behavior, which were subsequently translated into code.

The initial compression project was then set aside in order to collect and organize these algorithmic and mathematical observations into the present notes. The aim is to document the underlying ideas, constructions, and behaviors that emerged during implementation, rather than to provide a fully formalized theoretical treatment.

## المقدّمة

نشأت هذه المذكرات من محاولة برمجة خوارزميات حسابية في إطار مشروع لضغط الملفات. أثناء العمل بلغة JavaScript ظهرت صعوبات في بعض العمليات الأساسية، مثل القسمة، خاصة عند التفكير في تغيير أساس التمثيل العددي. دفع ذلك إلى تطوير خوارزميات للحساب الأساسي تكون مستقلة عن أساس عددي معيّن.

بعد تنفيذ هذه العمليات الأساسية، انتقل الاهتمام إلى خوارزميات الأسس والجذور. وقبل الشروع في برمجتها، كان لا بد من معالجة بعض التساؤلات الرياضية، من بينها: كيف يمكن حساب الجذر التربيعي دون الاعتماد على الآلات الحاسبة، وكيف يمكن تعميم ذلك ليشمل الجذر النوني؟ أدّى البحث في هذه الأسئلة إلى بناء طرائق إنشائية تعتمد على السلوك الرتيب (التزايد والتناقص)، ثم تُرجمت هذه الطرائق إلى كود برمجي.

بعد ذلك، تم وضع مشروع ضغط الملفات جانبًا مؤقتًا من أجل جمع هذه الملاحظات الرياضية والخوارزمية وتنظيمها في هذه المذكرات. ويهدف هذا العمل إلى توثيق الأفكار والبُنى والسلوكيات التي ظهرت أثناء التنفيذ البرمجي، دون الادعاء بتقديم معالجة نظرية مكتملة الصياغة.

## About the Notes

These notes present exploratory work on arithmetic algorithms related to powers, roots, and monotonic increase/decrease functions. The focus is on constructive methods that rely on basic arithmetic operations (+, −, ×) and that can be applied across different positional numeral systems.

A central theme of the notes is the use of explicit increase and decrease functions associated with powers. These functions provide a productive framework for navigating between successive powers and roots, allowing the computation of previous and next values as well as arbitrary-precision approximations of nth roots.

The notes emphasize algorithmic structure and behavior rather than formal proof. Some geometric and algebraic intuitions that guided the development are mentioned, but not all derivations are fully formalized at this stage.

## About the Algorithm

The method for computing nth roots described in these notes is referred to as Trouzine's Natural Algorithm. The name reflects its reliance on basic arithmetic operations and monotonic structure, without dependence on calculator-based methods or base-specific numerical shortcuts.

The algorithm is designed to compute nth roots with arbitrary precision and is formulated in a way that does not rely on properties specific to base 10. Instead, it operates on positional numeral representations, making it adaptable in principle to different numeral bases.

## حول المذكرات

تتناول هذه المذكرات أعمالًا استكشافية حول خوارزميات حسابية متعلقة بالأسس والجذور ودوال التزايد والتناقص الرتيبة. وينصبّ التركيز على طرائق إنشائية تعتمد على العمليات الحسابية الأساسية (+، −، ×)، ويمكن تطبيقها على أنظمة تمثيل عددي موضعية مختلفة.

أحد المحاور المركزية في هذه المذكرات هو استعمال دوال صريحة للتزايد والتناقص مرتبطة بالأسس. توفّر هذه الدوال إطارًا منتجًا للتنقّل بين القيم المتتالية للأسس والجذور، وتمكّن من حساب القيم السابقة أو اللاحقة، وكذلك من تقريب الجذور النونية بدقة اعتباطية.

تركّز هذه المذكرات على البنية الخوارزمية والسلوك الحسابي أكثر من تركيزها على البراهين الصورية. وقد ذُكرت بعض الحدوس الهندسية والجبرية التي وجّهت التطوير، إلا أن الصياغة الكاملة لبعض الاستنتاجات لم تُستكمل بعد.

## حول الخوارزمية

تُسمّى طريقة حساب الجذر النوني المعروضة في هذه المذكرات «الخوارزمية الطبيعية لتروزين». ويعكس هذا الاسم اعتمادها على العمليات الحسابية الأساسية والبنية الرتيبة، دون اللجوء إلى طرائق قائمة على الآلات الحاسبة أو خصائص خاصة بأساس عددي معيّن.

صُمّمت الخوارزمية لحساب الجذور النونية بدقة اعتباطية، وصيغت بطريقة لا تعتمد على خصائص خاصة بالأساس العشري، بل تتعامل مع الأعداد ضمن أنظمة تمثيل موضعية، مما يجعلها – من حيث المبدأ – قابلة للتكيّف مع أسس عددية مختلفة.

## About the Code

The accompanying JavaScript code is a reference implementation of the algorithms described in these notes. Its primary purpose is to demonstrate correctness and reproducibility rather than performance optimization.

The code implements arithmetic operations, power-related increase and decrease functions, and nth-root computation with arbitrary precision. It mirrors the structure of the notes and serves as a practical illustration of the underlying ideas.

Some limitations are currently known. In particular, certain increase/decrease functions return intermediate values in base 10, which may raise errors when the algorithm is used with numeral bases that do not include base-10 digits. This behavior is documented and can be corrected through explicit base conversion.

## Authorship and Scope

The algorithms, notes, and reference implementation presented here are the author's original work, developed independently and without institutional affiliation. External sources, where used, will explicitly be acknowledged.

This release represents a snapshot of ongoing work. It is intended as an initial public record of the ideas and implementations open to revision, correction, and extension.

## حول الكود البرمجي

الكود البرمجي المرفق بلغة JavaScript هو تنفيذ مرجعي للخوارزميات الموصوفة في هذه المذكرات. والغرض الأساسي منه هو إظهار صحة الأفكار وقابليتها لإعادة الإنتاج، وليس تحسين الأداء أو السرعة.

ينفّذ الكود العمليات الحسابية، ودوال التزايد والتناقص المرتبطة بالأسس، وحساب الجذر النوني بدقة اعتباطية. وهو يعكس بنية المذكرات ويقدّم تمثيلًا عمليًا للأفكار المطروحة.

توجد بعض القيود المعروفة في النسخة الحالية. على سبيل المثال، تُرجع بعض دوال التزايد والتناقص قيمًا وسيطة بالأساس العشري، مما قد يؤدي إلى أخطاء عند استعمال الخوارزمية مع أسس عددية لا تتضمن أرقام الأساس 10. وقد تم توثيق هذا السلوك، ويمكن تصحيحه من خلال تحويل الأساس بشكل صريح.

## التأليف ونطاق العمل

الخوارزميات والمذكرات والتنفيذ البرمجي المرجعي المعروضة هنا هي عمل أصلي للمؤلف، أُنجز بشكل مستقل ودون انتماء مؤسسي. وسيتم التصريح بالمراجع الخارجية حيثما استُعملت.

تمثّل هذه النسخة لقطة مرحلية لعمل جارٍ تطويره. وهي موجّهة لتكون سجلًا علنيًا أوليًا للأفكار والتنفيذات، وقابلة للتصحيح والمراجعة والتوسعة.

## Known Issues and Planned Revisions

The following points are acknowledged at the time of this release:

- The notes are written bilingually (Arabic and English) and require linguistic revision and harmonization.
- Some explanations, particularly those related to increase/decrease functions and their algebraic formulation, should be expanded.
- Extensions to negative numbers have not yet been fully developed.
- Additional mathematical contributions related to arithmetic algorithms are intended to be incorporated.
- The code requires refactoring toward a clearer object-oriented structure, with improved documentation and comments.
- Base-handling inconsistencies in the current implementation need correction.

These issues are documented in order to preserve transparency and guide future revisions.

## الإشكالات المعروفة والمراجعات المخطّط لها

يُقرّ في هذه النسخة بالنقاط التالية:

- كُتبت المذكرات باللغتين العربية والإنجليزية، وهي بحاجة إلى مراجعة لغوية وتوحيد في الصياغة.
- تحتاج بعض الشروحات، خاصة المتعلقة بدوال التزايد والتناقص وصياغتها الجبرية، إلى توسعة وتوضيح.
- لم تُطوّر بعد الامتدادات المتعلقة بالأعداد السالبة تطويرًا كاملًا.
- يُخطّط لإدراج مساهمات رياضية إضافية مرتبطة بخوارزميات الحساب.
- يحتاج الكود إلى إعادة تنظيم باتجاه بنية كائنية أوضح، مع تحسين الشروح والتعليقات.
- توجد لا اتساقات متعلقة بالتعامل مع الأسس العددية المختلفة، وهي بحاجة إلى تصحيح.

ذُكرت هذه النقاط حفاظًا على الشفافية وتوجيهًا للمراجعات اللاحقة.

## External References and Prior Occurrences

Earlier demonstrations and discussions related to the algorithms presented here have appeared in the following forms:

Presentations illustrating the geometric and algorithmic intuition.

## مراجع خارجية وظهور سابق

ظهرت عروض ومناقشات سابقة متعلقة بالخوارزميات المقدّمة هنا في الأشكال التالية:

عروض تشرح الحدس الهندسي والخوارزمي.

https://www.youtube.com/watch?v=aqDXhK3-j6c
https://codepen.io/am_trouzine/full/mdzQprx

Interactive implementations hosted on CodePen.

تنفيذات تفاعلية مستضافة على CodePen

https://codepen.io/am_trouzine/full/ExoPmmy
https://codepen.io/am_trouzine/full/GRyoWbM
https://codepen.io/am_trouzine/full/XWVdwMv

Public answers on Stack Overflow introducing an early form of the nth-root algorithm.

إجابات منشورة على Stack Overflow تتضمن صيغة مبكرة لخوارزمية الجذر النوني.

TROUZINE Abderrezaq (https://math.stackexchange.com/users/627525/trouzine-abderrezaq), How to manually calculate cube roots, URL (version: 2022-03-20): https://math.stackexchange.com/q/4408659
TROUZINE Abderrezaq (https://math.stackexchange.com/users/627525/trouzine-abderrezaq), Is there any simple method to calculate $\sqrt x$ without using logarithm, URL (version: 2022-03-21): https://math.stackexchange.com/q/4409291

Source code hosted on GitHub accompanying these notes.

الكود المصدري المستضاف على GitHub والمرافق لهذه المذكرات.

https://github.com/am-trouzine/Arithmetic-algorithms-in-different-numeral-systems/

Links to these materials are provided for reference and historical context.

أُدرجت روابط هذه المواد لأغراض التوثيق والسياق التاريخي.

`NRoot(1024, 16)` (*177778 Ms*)

$$\sqrt[16]{1024} = 1.5422108254079408$$

`Q('ABCD',16)` (*1809 Ms*)

$$\sqrt[3]{ABCD_{b16}} = 23.4C6403084A398696$$

`P('125',12)` (*16 Ms*)

$$125^{12} = 14551915228366851806640625$$

`div('125',13)` (*52 Ms*)

$$\frac{125}{13} = 9.6153846153846153$$

`div('125',13,8)` (*25 Ms*)

$$\frac{125_{b8}}{13_{b8}} = 7.5642721350564272$$

`div('125',13,16)` (*51 Ms*)

$$\frac{125_{b16}}{13_{b16}} = F.6BCA1AF286BCA1AF$$

`R('2',10,125)` (*57542 Ms*)

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785$$

696718753769480731766797379907324784621070388503875343276415727350138462309122970249248

0387534327641572735013846230912297024924 83

`R('A',11,5)` (*31 Ms*)

$$\sqrt{\mathrm{A}_{\mathrm{b11}}} = 3.186\mathrm{A}9$$

## 1- Quadratic equations:

## 1- المعادلات من الدرجة الثانية:

A quadratic equation is the linear representation of the multiplication of (a static number $x$ plus or minus another number) by (the same static number $x$ plus or minus another number).

المقصود بمعادلة من الدرجة الثانية هو الكتابة الخطية لمضروب (عدد ثابت $x$ نضيفه أو ننقص منه عددا) في (نفس العدد الثابت $x$ نضيفه أو ننقص منه عددا).

We consider this form a basis of quadratic equation:

نعتبر هذه الكتابة أصلا لمعادلة من الدرجة الثانية:

$$(x-3)(x+2)$$

It's quadratic equation is :

معادلتها من الدرجة الثانية هي:

$$x^2-x-6$$

It could be observed that substituting $x$ by a number gives the same result in both forms.

يمكن ملاحظة أن تعويض $x$ بعدد ما سيعطي نفس النتيجة في الكتابتين.

The first form is:

الكتابة الأولى هي:

$$(x-3)(x+2)$$

The second form is:

والكتابة الثانية هي:

$$x^2-x-6$$

E.g.

مثال:

$$(5-3)(5+2)=(2)(7)=14=5^2-5-6=25-5-6=14$$

$$(3.17-3)(3.17+2)=(0.17)(5.17)=0.8789=3.17^2-3.17-6=10.0489-3.17-6=0.8789$$

## 2- Solving quadratic equations:

## 2- حل المعادلات من الدرجة الثانية:

Solving a quadratic equation is to find the two numbers (or the number) which when substituted with $x$ results zero.

المقصود بحل معادلة من الدرجة الثانية هو إيجاد العددين (أو العدد) الذي من أجل تعويضه بـ $x$ تكون نتيجة المعادلة تساوي الصفر.

I.e. to find the same known numbers with an opposite sign, so that the sum in one bracket equals zero.

أي هو إيجاد نفس العددين المعلومين بإشارة مختلفة من أجل أن يكون أحد الحدين يساوي الصفر.

These two numbers (or number) is/are called the root(s) of the equation.

يسمى هذين العددين (أو هذا العدد) بجذري المعادلة (أو جذر المعادلة المضاعف).

The two roots of this equation

جذري هذه المعادلة

$$x^2 - x - 6$$

Are 3 and $-2$ , i.e. $(x = -2)$ and $(x = 3)$ because its original form is

هما العددان 3 و$-2$ أي $(x = -2)$ و$(x = 3)$ لأن أصلها

$$(x-3)(x+2)$$

Where

بحيث

$$(3-3)(x+2) = 0 \times (x+2) = 3^2 - 3 - 6 = 0$$

And

و

$$(x-3)(-2+2) = (x-3) \times 0 = (-2)^2 - (-2) - 6 = 0$$

To find the two roots of a quadratic equation, the discriminant law is used

لإيجاد حلي معادلة من الدرجة الثانية يُستعمل قانون المميز الشهير

$$(x_1 > x_2): x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Where the form of the equation is:

بحيث أن شكل المعادلة هو:

$$a(x^2 + bx + c)$$

The value of $a$ is the number multiplied by $x^2$ and:

قيمة $a$ هي العدد المضروب في $x^2$ و:

$$b = -a(x_1 + x_2), \qquad c = a(x_1 x_2)$$

### 3- A remark about the discriminant law:

### 3- ملاحظة حول استعمال قانون المميز:

These two representations are considered quadratic equations:

تُعتَبر هاتين الكتابتين معادلتين من الدرجة الثانية:

$$a_1(x^2 + b_1 x + c_1) \dots (I)$$

$$a_2(x^2 + b_2 x + c_2) \dots (II)$$

This representation is also considered a quadratic equation that is the sum of the two previous representations:

وتُعتَبر هذه الكتابة أيضا معادلةً من الدرجة الثانية، أصلها الكتابة الأولى زائد الكتابة الثانية:

$$\left((a_1 + a_2)x^2 + (a_1 b_1 + a_2 b_2)x + (a_1 c_1 + a_2 c_2)\right) \dots (III)$$

These representations are also considered quadratic equations:

وهذه الكتابات أيضا معادلات من الدرجة الثانية:

$$(a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1) \dots (IV)$$
$$(a_1 + a_2)x^2 + (b_1)x + (c_1 + c_2) \dots (V)$$
$$(a_1)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2) \dots (VI)$$

The law of the discriminant is productive in real numbers in the first and the second representation $(I)$ and $(II)$, where $a_1$ and $a_2$ are a number multiplied by all the terms of the equation.

يكون قانون المميز مُنتِجًا – في مجموعة الأعداد الحقيقية – في الكتابتين الأولى والثانية $(I)$ و$(II)$، بحيث $a_1$ و $a_2$ هما عدد مضروب في جميع حدود المعادلة.

The law of the discriminant is not productive in real numbers in the majority of representations that are the addition or subtraction of all or some of the terms of one or many quadratic equations.

لا يكون قانون المميز منتجا في مجموعة الأعداد الحقيقية في معظم الكتابات التي أصلها جمع أو طرح كل أو بعض حدود معادلة أو عدة معادلات من الدرجة الثانية.

E.g.

مثال:

$$2x^2 - 4x + 14$$

It is the sum of the two equations:

هي مجموع المعادلتين:

$$(x^2 - 7x + 12) + (x^2 + 3x + 2)$$

It can be written:

ويمكن كتابتها بالشكل:

$$(x - 3)(x - 4) + (x + 2)(x + 1)$$

The law of the discriminant is not productive, here, n real numbers.

قانون المميز فيها ليس منتجا في مجموعة الأعداد الحقيقة.

$$\frac{4 \pm \sqrt{-96}}{4}$$

### 4- A suggested proof of the discriminant law:

### 4- برهنة مُقترَحَة على قانون المميز:

$$\alpha(x - x_1)(x - x_2)$$
$$= \alpha(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2)$$
$$= \alpha x^2 - (x_1 + x_2)\alpha x + x_1x_2\alpha$$
$$\mathrm{A} = \alpha$$
$$\mathrm{B} = -(x_1 + x_2)A \dots (1)$$
$$\Gamma = x_1x_2A \dots (2)$$
$$(1) \rightarrow\ x_1 = \left(\frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} - x_2\right)\ ;\ x_2 = \left(\frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} - x_1\right)\ ;\ (x_1 + x_2) = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$$
$$(2) \rightarrow (x_1x_2) = \frac{\Gamma}{\mathrm{A}}$$
$$(1) \rightarrow (x_1 + x_2) = \frac{-B}{A} \dots (3)$$
$$(3) \rightarrow (x_1 + x_2)^2 = \frac{B^2}{A^2}$$

$$(3) \rightarrow ({x_1}^2 + {x_2}^2 + 2x_1x_2) = \frac{B^2}{A^2}$$

$$(3) \rightarrow \left({x_1}^2 + {x_2}^2 + \mathbf{2}\frac{\boldsymbol{\Gamma}}{\boldsymbol{A}}\right) = \frac{B^2}{A^2}\left(from\ (2)\ \text{من}\right)$$

$$(3) \rightarrow {x_1}^2 + {x_2}^2 = \frac{B^2}{A^2} - \frac{2\Gamma}{\mathrm{A}}$$

$$(3) \rightarrow {x_1}^2 + {x_2}^2 = \frac{B^2 - 2\mathrm{A}\Gamma}{A^2}$$

$$(x_1 + x_2) + (x_1 - x_2) = 2x_1 \ldots (4)$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = (x_1 + x_2) + (x_1 - x_2)$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = (x_1 + x_2) + \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{\mathbf{-B}}{\mathbf{A}} + \sqrt{(x_1 - x_2)^2}\left(from\ (1)\ \text{من}\right)$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1x_2}$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 - \frac{\mathbf{2\Gamma}}{\mathbf{A}}}\left(from\ (2)\text{من}\right)$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{\frac{\boldsymbol{B^2 - 2\mathrm{A}\Gamma}}{\boldsymbol{A^2}} - \frac{2\Gamma}{\mathrm{A}}}\left(from\ (3)\text{من}\right)$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{\frac{B^2 - 2\mathrm{A}\Gamma}{A^2} - \frac{2\mathrm{A}\Gamma}{A^2}}$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{\frac{B^2 - 4\mathrm{A}\Gamma}{A^2}}$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \frac{\sqrt{B^2 - 4\mathrm{A}\Gamma}}{\mathrm{A}}$$

$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B} + \sqrt{B^2 - 4\mathrm{A}\Gamma}}{\mathrm{A}}$$

$$(4) \rightarrow x_1 = \frac{-\mathrm{B} + \sqrt{B^2 - 4\mathrm{A}\Gamma}}{2\mathrm{A}}$$

We have لدينا

$$x_2 = \frac{-B}{A} - x_1$$

So إذن

$$x_2 = \frac{-B}{A} - \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2A}\right)$$

$$x_2 = \frac{-B}{A} + \frac{B - \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2A}$$

$$x_2 = \frac{-2B}{2A} + \frac{B - \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2A}$$

$$x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2A}$$

We have, also لدينا، أيضا

$$x_1 x_2 = \frac{\Gamma}{A}$$
$$x_2 = \frac{\Gamma}{A x_1}$$

So

إذن

$$x_2 = \frac{\Gamma}{A\left(\frac{-B+\sqrt{B^2-4A\Gamma}}{2A}\right)}$$
$$x_2 = \frac{\Gamma}{\frac{-B+\sqrt{B^2-4A\Gamma}}{2}}$$
$$x_2 = \frac{2\Gamma}{-B+\sqrt{B^2-4A\Gamma}}$$

By substituting $x_2$

بتعويض $x_2$

$$\frac{-B}{A} - x_1 = \frac{2\Gamma}{-B+\sqrt{B^2-4A\Gamma}}$$
$$x_1 = \frac{-B}{A} - \frac{2\Gamma}{-B+\sqrt{B^2-4A\Gamma}}$$

And also

وأيضا

$$x_1 = \frac{2\Gamma}{-B-\sqrt{B^2-4A\Gamma}}$$

Or we can substitute the value of $x_1$ found in $(4)$ in either $(1)$ or $(2)$

أو بإمكاننا تعويض قيمة $x_1$ التي وجدناها في $(4)$ إما في $(1)$ أو في $(2)$

### 5- The nature of the discriminant:

### 5- طبيعة المميز:

Considering the quadratic equations, the discriminant $\Delta$ is the square of one root minus the other root

بالنسبة للمعادلات من الدرجة الثانية، المميز $\Delta$ هو مربع أحد الجذرين ناقص الجذر الآخر

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$$

### 6- Substituting by the middle term:

### 6- التعويض بالحد الأوسط:

In quadratic equations of the form

في معادلات الدرجة الثانية من الشكل

$$x^2 + \beta x + \gamma$$

If $x_1, H, x_2$ are considered consecutive numbers by $r$, where $x_1$ and $x_2$ are the roots of

إذا اعتبرنا $x_1, H, x_2$ أعداد متتالية بـ $r$، حيث $x_1$ و $x_2$ جذرا المعادلة، و $H = \frac{x_1+x_2}{2}$ أو $H = \frac{-\beta}{2}$، the equation, and $H = \frac{x_1+x_2}{2}$ or $H = \frac{-\beta}{2}$, and $r = x_2 - H = H - x_1$: substituting $x$ by the middle term $H$ results $-r^2$.

و $r = x_2 - H = H - x_1$، فإن تعويض $x$ بالحد الأوسط $H$ يعطي $-r^2$.

$$x^2 + \beta x + \gamma$$
$$H^2 + \beta H + (H - r)(H + r)$$
$$H^2 - 2H^2 + H^2 - r^2$$

The following two balancing can be placed:

يمكن وضع المقابلتين التاليتين:

$$(x_1 + x_2)^2 := ([H - r] + [H + r])^2$$
$$({x_1}^2 + {x_2}^2 + 2x_1x_2) := (4H^2) \dots (I)$$

And:

و:

$$(x_1 - x_2)^2 := ([H - r] - [H + r])^2$$
$$({x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1x_2) := (4r^2) \dots (II)$$

Adding $(I)$ to $(II)$:

بجمع $(I)$ و $(II)$:

$$(2{x_1}^2 + 2{x_2}^2) = (4H^2 + 4r^2)$$
$$2({x_1}^2 + {x_2}^2) - 4H^2 = 4r^2$$
$$r^2 = \frac{2\left(({x_1}^2 + {x_2}^2) - 2H^2\right)}{4}$$
$$r = \sqrt{\frac{\left(({x_1}^2 + {x_2}^2) - 2H^2\right)}{2}}$$
$$r = \sqrt{\frac{(\beta^2 - 2\gamma) - 2H^2}{2}} = \sqrt{\frac{((2H)^2 - 2\gamma) - 2H^2}{2}} = \sqrt{H^2 - \gamma} \dots (A)$$

Subtracting $(I)$ and $(II)$:

وبطرح $(I)$ و$(II)$:

$$(4x_1x_2) = (4H^2 - 4r^2)$$
$$(x_1x_2) = (H^2 - r^2)$$
$$r^2 = -(x_1x_2) + H^2$$
$$r = \sqrt{-(x_1x_2) + H^2}$$
$$r = \sqrt{-\gamma + H^2} \dots (A)$$

Starting from the above, we can find both $x_1$ and $x_2$ in terms of $H$ and $r$, where $r$ is $A$.

انطلاقا مما سبق يمكن إيجاد كل من $x_1$ و $x_2$ بدليل $H$ و $r$، بحيث $r$ تساوي $A$.

$$x_1 = H - r$$
$$x_2 = H + r$$
$$r = \sqrt{-\gamma + H^2}$$
$$H = \frac{-\beta}{2}$$

## 7- Solving polynomial equations:

## 7- حل المعادلات كثيرة الحدود:

- It is known that the roots of a polynomial equation are the known terms before distributing them, with a different sign (the known terms in this example are $-1$, $-2$ and $-3$ and the roots of the equation are 1, 2 and $-3$):

- معلوم أن جذور معادلة كثيرة حدود، هو الحدود المعلومة قبل نشرها بإشارة مختلفة (الحدود المعلومة في هذا المثال هي $-1$ و $-2$ و $-3$ وجذور المعادلة هي 1 و 2 و 3):

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$= x^3 - 6x^2 + 11x^1 + -6x^0$$
$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

- It is known that substituting the unknown $x$ with one of the roots of the equation produces 0.

- معلوم أن تعويض المجهول $x$ بأحد جذور المعادلة ينتج 0.

$$(3-1)(3-2)(3-3) = 3^3 - 6(3)^2 + 11(3) - 6 = 0$$

- It is known that the last term of a polynomial equation (i.e. the term multiplied by $x^0$) is the multiplication of all the roots of the equation (taking into account the note in Title 3, and taking into account the sign, that is, negative if the number of negative roots is odd).

- معلوم أن الحد الأخير من معادلة كثيرة حدود (أي الحد المضروب في $x^0$) هو مضروب جميع جذور المعادلة (مع مراعاة الملاحظة المذكورة في العنوان 3، ومع مراعاة الإشارة، أي سالبة إذا كان عدد الجذور السالبة فرديا).

Based on the foregoing, the following non-algebraic algorithm, which can be translated programmatically, can be used to solve polynomial equations:[3]

يمكن – انطلاقا مما سبق – استعمال الخوارزمية – الغير جبرية – التالية – التي يمكن ترجمتها برمجيا – لحل المعادلات كثيرة الحدود:[2]

- Finding the divisors of the last term (i.e. the term multiplied by $x^0$).

- إيجاد قواسم الحد الأخير (أي الحد المضروب في $x^0$).

[2] ترجمة برمجية لهذه الخوارزمية لحل معادلات الدرجة الثالثة: https://codepen.io/am_trouzine/full/WNaVwPy

[3] A programmatically translated version of this algorithm to solve cubic equations: https://codepen.io/am_trouzine/full/WNaVwPy

- Substitute the unknown $x$ with the divisors with different signs.

- تعويض المجهول $x$ بالقواسم بإشارات مختلفة.

- If the last term (i.e. the term multiplied by $x^0$) is zero, we take $0$ as one of the roots of the equation, and continue the algorithm with the penultimate term.

- إذا كان الحد الأخير (أي الحد المضروب في $x^0$) معدوما، نحتسب $0$ أحد جذور المعادلة، ونواصل الخوارزمية بالحد ما قبل الأخير.

### 8- Sequence of power two:

### 8- متتالية الأعداد ذات الأس اثنين:

Representing the number two with squares gives this form □□ and representing the number four gives this form □□□□

رسم العدد اثنان بمربعات يعطي هذا الشكل □□ ورسم العدد أربعة يعطي هذا الشكل □□□□

- Representing the number two raised to power two $2^2$ gives

- رسم العدد اثنان أس اثنان $2^2$ هو

□□
□□

Where the sum of squares is $4$, i.e. $2 \times 2$

حيث مجموع المربعات هو $4$ أي $2 \times 2$

- Representing the number four raised to power two $4^2$ gives

- رسم العدد أربعة أس اثنان $4^2$ هو

□□□□
□□□□
□□□□
□□□□

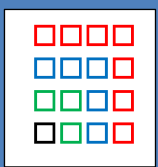
Where the sum of squares is $16$, i.e. $4 \times 4$

حيث مجموع المربعات هو $16$ أي $4 \times 4$

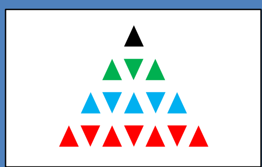
It can be stated that the sum of squares increases with the function:

يُلاحَظ أن عدد المربعات يتزايد في كل مرة بالدالة:

$$2x - 1$$



$$x = 2 : 2x - 1 \rightarrow 2(2) - 1 = 3$$
$$x = 3 : 2x - 1 \rightarrow 2(3) - 1 = 5$$
$$x = 4 : 2x - 1 \rightarrow 2(4) - 1 = 7$$



$$x = 1 \rightarrow x^2 = 2(1) - 1 = 1 \rightarrow 1^2 = 1$$
$$x = 2 \rightarrow 2(2) - 1 = 3 \rightarrow 2^2 = 1 + 3 = 4$$
$$x = 3 \rightarrow 2(3) - 1 = 5 \rightarrow 3^2 = 1 + 3 + 5 = 9$$
$$x = 4 \rightarrow 2(4) - 1 = 7 \rightarrow 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$
$$\ldots$$
$$x = n \rightarrow 2(n) - 1 \rightarrow n^2 = 1 + \cdots + 2(n-1) - 1 + 2(n) - 1$$

Whereas for negative numbers[5] the sum of squares increases with the opposite sign of the function:

بينما بالنسبة للأعداد السالبة[4] يتزايد أس اثنين في كل مرة بعكس إشارة الدالة:

$$2x + 1$$

$$x = -1 \rightarrow 2(-1) + 1 = -1 \rightarrow (-1)^2 = -(-1) = 1$$
$$x = -2 \rightarrow 2(-2) + 1 = -3 \rightarrow (-2)^2 = -(-1 - 3) = 4$$
$$x = -3 \rightarrow 2(-3) + 1 = -5 \rightarrow (-3)^2 = -(-1 - 3 - 5) = 9$$
$$x = -4 \rightarrow 2(-4) + 1 = -7 \rightarrow (-4)^2 = -(-1 - 3 - 5 - 7) = 16$$

It can be stated that power two is a sequence that first's term is one and the sum of terms is the last term raised to power two, because the difference between the contained terms is static, it equals 2.

يمكن القول أن أس اثنين هي متتالية حدّها الأول هو واحد ومجموع حدودها هو الحد الأخير أس اثنين، لأن الفرق بين الحدود المجموعة ثابت، يساوي 2.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$$
$$x_n = 2n - 1$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2$$

## 9- Square root:

## 9- الجذر التربيعي:

C.f.

انظر

https://codepen.io/am_trouzine/full/mdzQprx

https://youtube.com/watch?v=aqDXhK3-j6c

To find the square root of a number, we represent the number as squares, then we divide up the squares as a square shape.

لإيجاد الجذر التربيعي لعدد نمثّل العدد على شكل مربّعات، ثم نقسّم المربّعات على شكل مربّع.

E.g. 1: Calculating the square root of 4

مثال 1: حساب الجذر التربيعي للعدد 4

Representation of number 4 as squares:

العدد 4 على شكل مربّعات:

□□□□

Dividing up the squares as square shape:

تقسيم المربّعات الأربعة على شكل مربّع:

□□
□□

The square root of 4 is 2 because we have two rows.

جذر العدد 4 هو 2 لأن لدينا صفّين.

[4] يعتبر هذا تصورا أوليا، وقد يكون خاطئا، لقد تم بناء النسخة الأولى من الكود البرمجي على أساس هذا التصور، وهو مثبت في المراجعة الأولى من هذا الكتاب. انظر العنوان 11

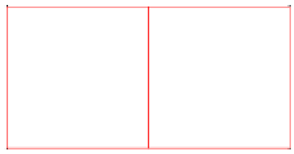
[5] This is a preliminary conception, and it may be wrong, the first version of the code was built upon it, it is included in the first revision of the book. c.f. title 11

E.g. 2: Calculating the square root of 2

مثال 2: حساب الجذر التربيعي للعدد 2

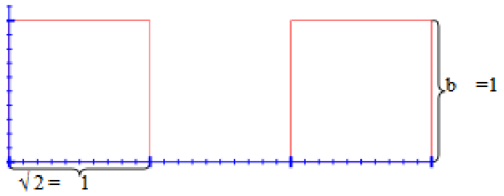
Representation of number 2 as squares

العدد 2 على شكل مربّعات:



Dividing up the two squares as square shape:

تقسيم المربّعين الاثنين على شكل مربّع:

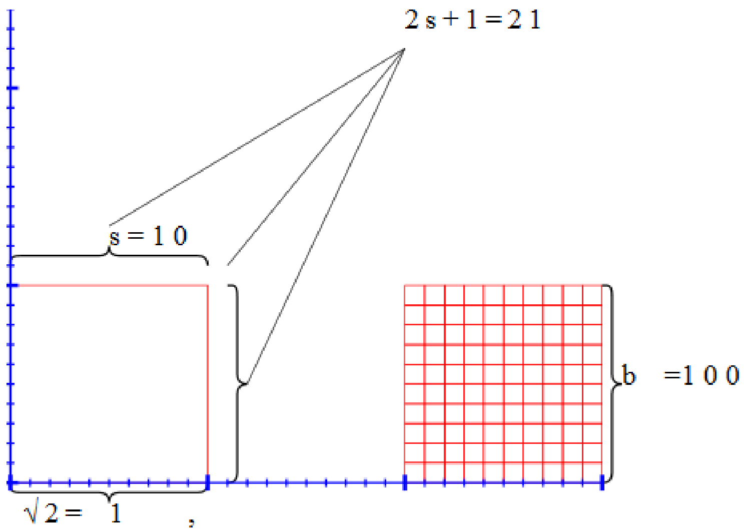



One square remains

يبقى مربّع واحد

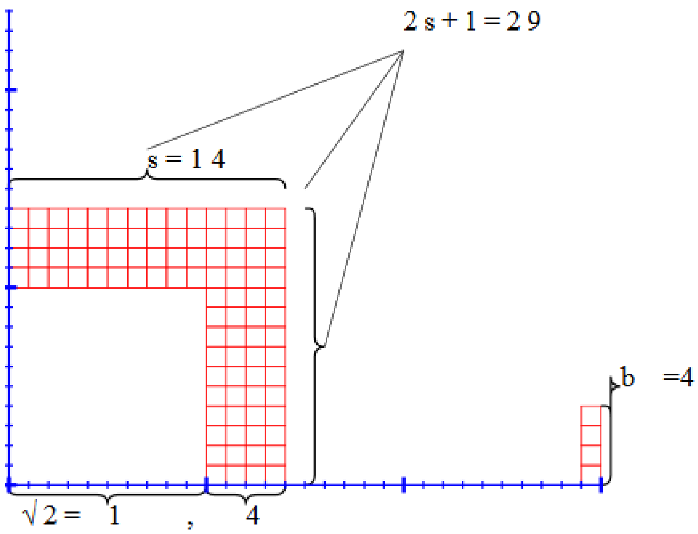
We divide it up to 100 squares

نقسّمه على مئة مربّع




We divide up the 100 squares by the first square

نوزّع المربعات المئة على المربع الأول

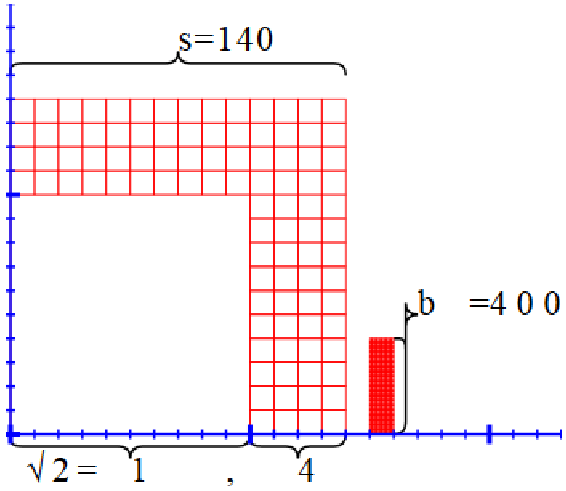


Four squares remain

يبقى أربع مربعات

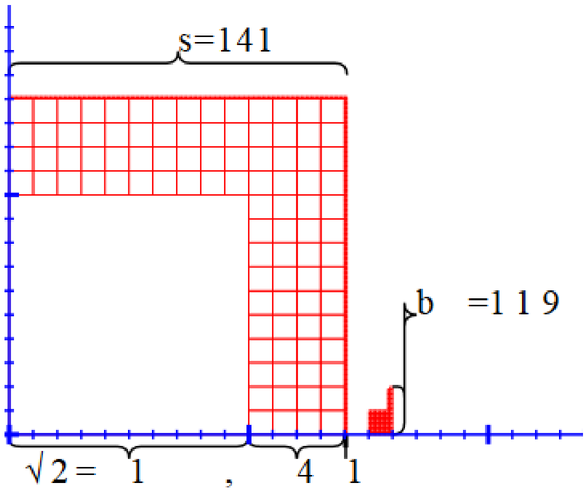
We divide each square to 100 squares

نقسّم كل مربّع على مئة مربّع




We divide the 400 square by the first square

نوزّع المربعات الأربع مئة على المربع الأول




The square root of 2 with two digits after the decimal point is 1.41 according to the numbers of rows.

الجذر التربيعي لـ2 بعددين بعد الفاصلة هو 1.41 حسب عدد الصفوف.

We may proceed similarly to find more numbers after the decimal point.

يمكن مواصلة العملية لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.

C.f. appendix 1 for the algorithmic representation of this method.

انظر الملحق 1 للكتابة الخوارزمية لهذه الطريقة.

## 10- Theories on square root :

## 10- نظريات حول الجذر التربيعي:

Theory 1:

نظرية 1:

All natural numbers that have a decimal point in their square roots, have an infinite number of digits after the decimal point, ~~as there~~

جميع الأعداد الطبيعية التي تحتوي جذورها التربيعية على فاصلة، لديها عدد غير منته من الأعداد بعد الفاصلة،

~~is no number from 1 to 9 that when multiplied by itself gives 0 on the right~~[7].

~~لأنه لا يوجد عدد من 1 إلى 9 مَضروبه في نفسه يعطي 0 على اليمين~~[6].

$\sqrt[2]{2}$

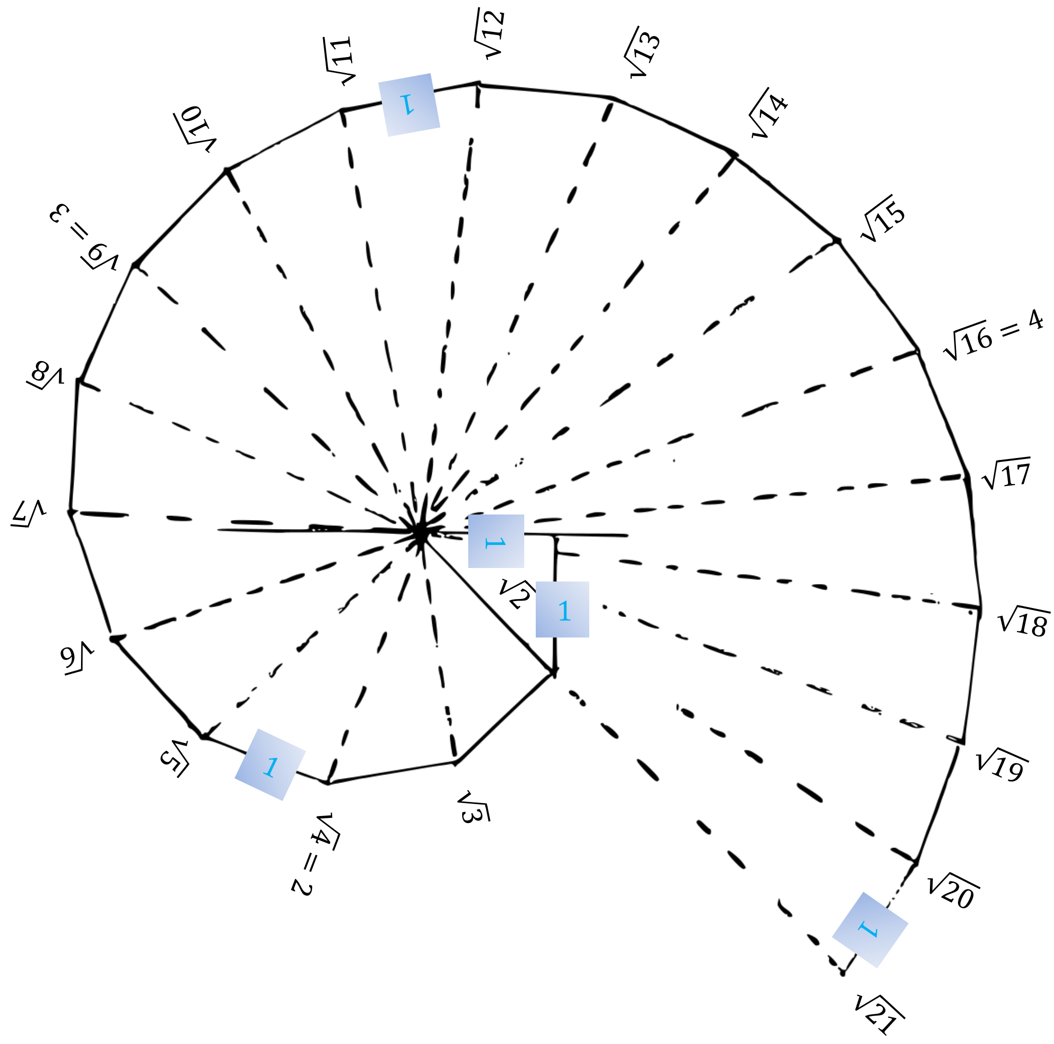
$= 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784621070388$

Theory 2:

نظرية 2:

According to the above, square roots that contain an infinite number of digits after the comma are unreal roots, because in fact they can be represented geometrically according to the Pythagorean theorem, and in their representation they are finite.

حسب ما تقدم، الجذور التربيعية التي تحتوي عدد غير منته من الأرقام بعد الفاصلة هي جذور غير حقيقة، لأنه في الحقيقة يمكن تمثيلها هندسيا بحسب نظرية فيثاغورس، وهي في تمثيلها منتهية.




[6] كانت هذه فرضية أولية، تم إلغاؤها لأنه يوجد أعداد – في أنظمة عد أخرى – مضروبها في نفسها يعطي 0 على اليمين.

[7] This was the initial hypotheses and it's cancelled, as there exist – in other numeral systems – numbers whose multiplication by themselves yields 0 on the left.

Theory 3:

نظرية 3:

The most efficient representation of an unreal square root is $\sqrt{x}$, that is, by avoiding the approximate values.

التمثيل الأكثر فعالية للجذر التربيعي غير الحقيقي هو $\sqrt{x}$ أي باجتناب القيم التقريبية.

## 11- Finding the next real square of a real square:

## 11- إيجاد المربع الحقيقي الموالي لمربع حقيقي:

A real square is a square whose root does not contain an infinite number of digits after the comma. (See theory 1 in title 10).

المقصود بمربع حقيقي هو المربع الذي جذره لا يحتوي عدد غير منته من الأرقام بعد الفاصلة. (انظر نظرية 1 في العنوان 10).

The real square $y$ that follows the real square $x$ can be found with the following function:

يمكن إيجاد المربع الحقيقي $y$ الموالي للمربع الحقيقي $x$ بالدالة التالية:

$$y = x + [2(\sqrt{x}) + 1]$$

E.g.

مثال:

$$x = 81, (\sqrt{x} = 9)$$
$$y = 81 + [2(\sqrt{81}) + 1]$$
$$y = 81 + [2(9) + 1]$$
$$y = 81 + [18 + 1]$$
$$y = 81 + [19]$$
$$y = 100$$
$$\sqrt{y} = 10$$

## 12- Finding the next real square of a real square:

## 12- إيجاد المربع الحقيقي السابق لمربع حقيقي:

The real square $y$ that preceeds the real square $x$ can be found with the following function:

يمكن إيجاد المربع الحقيقي $y$ السابق للمربع الحقيقي $x$ بالدالة التالية:

$$y = x - [2(\sqrt{x}) - 1]$$

E.g.

مثال:

$$x = 81, (\sqrt{x} = 9)$$
$$y = 81 - [2(\sqrt{81}) - 1]$$
$$y = 81 - [2(9) - 1]$$
$$y = 81 - [18 - 1]$$
$$y = 81 - [17]$$
$$y = 64$$
$$\sqrt{y} = 8$$

## 13- Terms of power three:

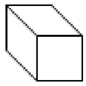
## 13- حدود الأعداد ذات الأس ثلاثة:

Power three numbers can be represented as cubes.

الأعداد ذات الأس ثلاثة يمكن تمثيلها على شكل مكعبات.

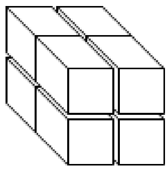
The number 1 raised to power 3 = 1 (1 cube)

العدد 1 أس 3 = 1 (مكعب واحد)



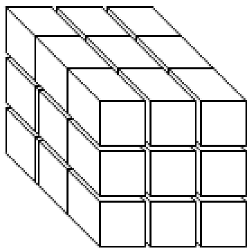
2 raised to power 3 = 8 (8 cubes)

العدد 2 أس 3 = 8 (8 مكعبات)



3 raised to power 3 = 27 (27 cubes)

العدد 3 أس 3 = 27 (27 مكعب)



The sum of power 3 increases with the function:

يتزايد أس 3 كل مرة بالدالة:

$$3x^2 - 3x + 1$$

This can be remarked the same way as power 2.

يمكن أن يلاحظ هذا بنفس طريقة أس 2.

$$x = 1 \rightarrow 3(1) - 3(1) + 1 = 1 \rightarrow 1^3 = 1$$
$$x = 2 \rightarrow 3(4) - 3(2) + 1 = 7 \rightarrow 2^3 = 1 + 7 = 8$$
$$x = 3 \rightarrow 3(9) - 3(3) + 1 = 19 \rightarrow 3^3 = 1 + 7 + +19 = 27$$
$$x = 4 \rightarrow 3(16) - 3(4) + 1 = 37 \rightarrow 4^3 = 1 + 7 + 19 + 37 = 64$$
$$\dots$$
$$x = n \rightarrow 3(n^2) - 3(n) + 1 \rightarrow n^3 = 1 + \dots + 3(n^2) - 3(n) + 1$$

Whereas for negative numbers[9] the sum of power 3 increases with the opposite sign of the function:

بينما بالنسبة للأعداد السالبة[8] يتزايد أس 3 في كل مرة بعكس إشارة الدالة:

---

[8] يعتبر هذا تصورا أوليا، وقد يكون خاطئا، لقد تم بناء النسخة الأولى من الكود البرمجي على أساس هذا التصور، وهو مثبت في المراجعة الأولى من هذا الكتاب. انظر العنوان 14

[9] This is a preliminary conception, and it may be wrong, the first version of the code was built upon it, it is included in the first revision of the book. c.f. title 14

$$3x^2 + 3x + 1$$

$$x = -1 \rightarrow 3(-1^2) + 3(-1) + 1 = 1 \rightarrow (-1)^3 = -(1) = -1$$
$$x = -2 \rightarrow 3(-2^2) + 3(-2) + 1 = 7 \rightarrow (-2)^3 = -(1 + 7) = -8$$
$$x = -3 \rightarrow 3(-3^2) + 3(-3) + 1 = 19 \rightarrow (-3)^3 = -(1 + 7 + 19) = -27$$
$$x = -4 \rightarrow 3(-4^2) + 3(-4) + 1 = 37 \rightarrow (-4)^3 = -(1 + 7 + 19 + 37) = -64$$

## 14- Finding the next real cube of a real cube:

## 14- إيجاد المكعب الحقيقي الموالي لمكعب حقيقي:

The real cube $y$ that follows the real cube $x$ can be found with the following function:

يمكن إيجاد المكعب الحقيقي $y$ الموالي للمكعب الحقيقي $x$ بالدالة التالية:

$$y = x + \left[3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 + 3\left(\sqrt[3]{x}\right) + 1\right]$$

E.g.

مثال:

$$x = 64, \left(\sqrt[3]{x} = 4\right)$$
$$y = 64 + \left[3\left(\sqrt[3]{64}\right)^2 + 3\left(\sqrt[3]{64}\right) + 1\right]$$
$$y = 64 + [3(4)^2 + 3(4) + 1]$$
$$y = 64 + [48 + 12 + 1]$$
$$y = 64 + [61]$$
$$y = 125$$
$$\sqrt[3]{y} = 5$$

## 15- Finding the next real cube of a real cube:

## 15- إيجاد المكعب الحقيقي السابق لمكعب حقيقي:

The real cube $y$ that precedes the real cube $x$ can be found with the following function:

يمكن إيجاد المكعب الحقيقي $y$ السابق للمكعب الحقيقي $x$ بالدالة التالية:

$$y = x - \left[3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 3\left(\sqrt[3]{x}\right) + 1\right]$$

E.g.

مثال:

$$x = 64, \left(\sqrt[3]{x} = 4\right)$$
$$y = 64 - \left[3\left(\sqrt[3]{64}\right)^2 - 3\left(\sqrt[3]{64}\right) + 1\right]$$
$$y = 64 - [3(4)^2 - 3(4) + 1]$$
$$y = 64 - [48 - 12 + 1]$$
$$y = 64 - [37]$$
$$y = 27$$
$$\sqrt[3]{y} = 3$$

## 16- Generalization of nth power terms increase:

## 16- تعميم تزايد حدود الأعداد ذات الأس ن:

Power 2 increases with the function:

يتزايد أس 2 في كل مرة بـ

$$(x-1)+x$$
$$2x-1$$

Power 3 increases with the function:

يتزايد أس 3 في كل مرة بـ

$$(2x-1)(x-1)+x^2$$
$$3x^2-3x+1$$

Power 4 increases with the function:

يتزايد أس 4 في كل مرة بـ

$$(3x^2-3x+1)(x-1)+x^3$$
$$4x^3-6x^2+4x-1$$

Power 5 increases with the function:

يتزايد أس 5 في كل مرة بـ

$$(4x^3-6x^2+4x-1)(x-1)+x^4$$
$$5x^4-10x^3+10x^2-5x+1$$

Power 16 increases with the function:

يتزايد أس 16 في كل مرة بـ

$$16x^{15}-120x^{14}+560x^{13}-1820x^{12}+4368x^{11}-8008x^{10}+11440x^9-12870x^8+11440x^7-8008x^6+4368x^5-1820x^4+560x^3-120x^2+16x-1$$

## 17- Generalization of nth power terms decrease:

## 17- تعميم تناقص حدود الأعداد ذات الأس ن:

Power 2 decreases with the function:

يتناقص أس 2 في كل مرة بـ

$$(x+1)+x$$
$$2x+1$$

Power 3 decreases with the function:

يتناقص أس 3 في كل مرة بـ

$$(2x+1)(x+1)+x^2$$
$$3x^2+3x+1$$

Power 4 decreases with the function:

يتناقص أس 4 في كل مرة بـ

$$(3x^2+3x+1)(x+1)+x^3$$
$$4x^3+6x^2+4x+1$$

## 18- Theoretical generalizations about n<sup>th</sup> roots:

Whatever $x$, from 1 to 9, there is no $x^n$ that yields 0 on the right, because only 5 multiplied by an even number gives 0 on the right, and 5 times 5 is odd.

Based on the above:

1- All natural numbers whose $n^{th}$ roots contain a comma have an infinite number of digits after the comma.

2- The $n^{th}$ roots that contain a finite number of digits after the comma are real $n^{th}$ roots for dividing a number with a real $n^{th}$ root by another number with a real $n^{th}$ root such as $\sqrt[2]{\frac{16}{25}}$ or $\sqrt[2]{\frac{25}{16}}$.

2-1- It is known that a number divided by a multiple of three (after reduction) gives a recurring number after the comma, so the $n^{th}$ root of the product of a number with a real $n^{th}$ root over a multiple of three with a real $n^{th}$ root (after reduction) will give a number with infinite recurring digits after the comma with – according to the above – being a real $n^{th}$ root, such as $\sqrt[2]{\frac{16}{9}}$ and $\sqrt[2]{\frac{25}{81}}$.

## 18- تعميمات نظرية حول الجذور النونية:

مهما يكن $x$ من 1 إلى 9، فإنه لا يوجد عدد $x^n$ يُنتِج 0 على اليمين، لأنه فقط 5 مضروب في عدد زوجي يعطي 0 على اليمين، وحاصل 5 في 5 عددٌ فردي.

انطلاقا مما سبق:

1- جميع الأعداد الطبيعية التي تحتوي جذورها النونية على فاصلة، لديها عدد غير منته من الأرقام بعد الفاصلة، وتعتبر هذه جذورا نونية غير حقيقية، تمثيلها الأمثل هو $\sqrt[n]{x}$.

2- الجذور النونية التي تحتوي على عدد منته من الأرقام بعد الفاصلة، هي جذور نونية حقيقية لحاصل قسمة عدد ذو جذر نوني حقيقي على عدد ذو جذر نوني حقيقي آخر مثل $\sqrt[2]{\frac{16}{25}}$ أو $\sqrt[2]{\frac{25}{16}}$.

2-1- معلوم أن عدد مقسوم على عدد مضاعف لثلاثة (بعد الاختزال) يعطي عددا متكررا بعد الفاصلة، من ذلك سيعطي الجذر النوني لحاصل عدد ذو جذر نوني حقيقي على عدد مضاعف لثلاثة ذو جذر نوني حقيقي (بعد الاختزال) عددا بأرقام متكررة غير منتهية بعد الفاصلة مع كونه – حسب ما سبق – جذرا نونيا حقيقيا، مثل $\sqrt[2]{\frac{16}{9}}$ و$\sqrt[2]{\frac{25}{81}}$.

<table>
<tr><td>Appendix 1: TROUZINE's natural algorithm to calculate the square root of a number (The natural algorithm)</td><td dir="rtl">ملحق 1: خوارزمية تروزين الطبيعية لحساب الجذر التربيعي لعدد (الخوارزمية الطبيعية)</td></tr>
<tr><td>The algorithm may be tested on this link:</td><td dir="rtl">بإمكانك تجربة الخوارزمية على هذا الرابط:</td></tr>
<tr><td colspan="2">https://codepen.io/am_trouzine/full/ExoPmmy</td></tr>
<tr><td>Let $N$ be the number that we want to calculate its square root<br><br>The square root of $N$ is calculated in two stages:</td><td dir="rtl">نفترض $N$ العدد الذي نريد حساب جذره التربيعي<br><br>يتم حساب الجذر التربيعي للعدد $N$ في مرحلتين:</td></tr>
<tr><td><u>The first stage: finding the nearest real root of $N$:</u><br><br>We make $n = N$<br><br>- We subtract from $n$ the terms $2x - 1$ starting from $x = 1$<br>○ While $n > 0$, we make $x = x + 1$, and we proceed the substraction.<br>○ When $n = 0$, this stage stops and the number $N$ has a real square root of $x$.<br>○ When $n < 0$, this stage stops, the nearest real square root is $x - 1$, and we continue the second stage to find the numbers after the comma.</td><td dir="rtl"><u>المرحلة الأولى: إيجاد الجذر الحقيقي القريب للعدد $N$:</u><br><br>نضع $n = N$<br><br>- نطرح من العدد $n$ حدود $2x - 1$ ابتداء من $x = 1$<br>○ ما دام $n > 0$ نجعل $x = x + 1$ ونواصل عملية الطرح.<br>○ إذا صار $n = 0$، تتوقف هذه المرحلة وللعدد $N$ جذر تربيعي حقيقي هو $x$.<br>○ إذا صار $n < 0$، تتوقف هذه المرحلة، الجذر التربيعي الحقيقي القريب للعدد $N$ هو $x - 1$، ونواصل المرحلة الثانية لإيجاد الأعداد بعد الفاصلة.</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| **<u>The second stage: Finding the numbers after the comma:</u>**<br>Let $x$ be the nearest square root of $N$<br>Let $b = N - x^2$<br>The following process is repeated for the number of digits we want to find after the comma:<br>We divide this process into 3 steps<br>**Step 1:** We multiply the number $x$ by ten, and we multiply the number $b$ by a hundred<br>**Step 2:** We assume $s = x$,<br>**Step 3:** We subtract $2s + 1$ from $b$<br>- If the result of $b$ is greater than zero:<br>  ○ we add to $s$ one, and continue from step 3<br>- <u>If the result of $b$ equals zero</u>: then $N$ is a decimal number with a real square root, its square root should be calculated without a comma starting from the first stage.<br>- If the result of $b$ is less than zero:<br>  ○ We make $i$ the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$<br>  ○ In the space after the comma, we write the number $i$<br>  ○ We get to $b$ the quotient of $2s + 1$,<br>  ○ We add to $x$ the number of substractions $i$,<br>  ○ We continue with the values of $x$ and $b$ from step 1 to find more numbers after the comma. | **<u>المرحلة الثانية: إيجاد الأعداد بعد الفاصلة:</u>**<br>نفترض $x$ الجذر التربيعي القريب للعدد $N$<br>نفترض $b = N - x^2$<br>نكرر العملية التالية بعدد الأرقام التي نريد إيجادها بعد الفاصلة:<br>نقسم هذه العملية إلى 3 خطوات<br>**الخطوة 1:** نضرب العدد $x$ في عشرة، ونضرب العدد $b$ في مئة<br>**الخطوة 2:** نفترض $s = x$ ،<br>**الخطوة 3:** نطرح من العدد $b$ حاصل $2s + 1$<br>- إذا كانت نتيجة $b$ أكبر تماما من الصفر:<br>  ○ نضيف إلى $s$ واحد، ونواصل من الخطوة 3<br>- <u>إذا كانت نتيجة $b$ تساوي الصفر</u>: فالعدد $N$ عدد عشري لديه جذر تربيعي حقيقي، نحسب جذره التربيعي بدون فاصلة ابتداء من المرحلة الأولى.<br>- إذا كانت نتيجة $b$ أصغر من الصفر:<br>  ○ نجعل $i$ عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$<br>  ○ نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العدد$i$<br>  ○ نرد إلى $b$ حاصل$2s + 1$،<br>  ○ نضيف إلى $x$ عدد مرات الطرح $i$،<br>  ○ ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ $x$ و $b$ من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة. |
| **<u>E.g.</u>**<br>A number with a real square root | **<u>مثال:</u>**<br>عدد بجذر تربيعي حقيقي |
| $N = 64;\ \sqrt{N} = ?$ | |
| We make $n = N$<br>- We subtract from $n$ the terms $2x - 1$ starting from $x = 1$ | نضع $n = N$<br>- نطرح من العدد $n$ حدود $2x - 1$ ابتداء من $x = 1$ |

| | |
|---|---|
| $x = 1: n = 64 - (2x - 1) = 64 - 1 = 63$<br>$x = 2: n = 63 - (4 - 1) = 63 - 3 = 60$<br>$x = 3: n = 60 - 5 = 55$<br>$x = 4: n = 55 - 7 = 48$<br>$x = 5: n = 48 - 9 = 39$<br>$x = 6: n = 39 - 11 = 28$<br>$x = 7: n = 28 - 13 = 15$<br>$x = 8: n = 15 - 15 = 0$ | |
| This stage stops and the number $N$ has a real square root of $x$. | تتوقف هذه المرحلة وللعدد $N$ جذر تربيعي حقيقي هو $x$. |
| $\sqrt{N} = x;\ \sqrt{64} = 8$ | |
| **E.g.**<br>A number with an unreal square root | **مثال:**<br>عدد بجذر تربيعي غير حقيقي |
| $N = 122$<br>$\sqrt{N} = ?$ | |
| We make $n = N$<br>- We subtract from $n$ the terms $2x - 1$ starting from $x = 1$ | نضع $n = N$<br>- نطرح من العدد $n$ حدود $2x - 1$ ابتداء من $x = 1$ |
| $x = 1: n = 122 - (2x - 1) = 122 - 1 = 121$<br>$x = 2: n = 121 - (4 - 1) = 121 - 3 = 118$<br>$x = 3: n = 118 - 5 = 113$<br>...<br>$x = 10: n = 41 - 19 = 22$<br>$x = 11: n = 22 - 21 = 1$<br>$x = 12: n = 1 - 23 = -22$ | |
| This stage stops, the nearest real square root is $x - 1$, and we continue the second stage to find the numbers after the comma. | تتوقف هذه المرحلة، الجذر التربيعي الحقيقي القريب للعدد $N$ هو $x - 1$، ونواصل المرحلة الثانية لإيجاد الأعداد بعد الفاصلة. |
| $\sqrt{N} = x - 1$<br>$\sqrt{122} \approx 12 - 1 \approx 11$ | |
| Let $x$ be the nearest square root of $N$<br>Let $b = N - x^2$ | نفترض $x$ الجذر التربيعي القريب للعدد $N$<br>نفترض $b = N - x^2$ |
| $x = 11$<br>$b = N - x^2 = 122 - 121 = 1$ | |
| **Step 1:** We multiply the number $x$ by ten, and we multiply the number $b$ by a hundred | **الخطوة 1:** نضرب العدد $x$ في عشرة، ونضرب العدد $b$ في مئة |
| $x = x \times 10 = 110$<br>$b = b \times 100 = 100$ | |
| **Step 2:** We assume $s = x$, | **الخطوة 2:** نفترض $s = x$ ، |

<table>
<tr><td colspan="2">$s = 110$</td></tr>
<tr><td>Step 3: We subtract $2s + 1$ from $b$</td><td>الخطوة 3: نطرح من العدد $b$ حاصل $2s + 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b = b - (2s + 1) = 100 - 221 = -121$</td></tr>
<tr><td>- As the result of $b$ is less than zero:<br>○ We make $i$ the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$</td><td>- بما أن نتيجة $b$ أصغر من الصفر:<br>○ نجعل $i$ عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$i = 0$</td></tr>
<tr><td>○ In the space after the comma, we write the number $i$</td><td>○ نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العدد$i$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sqrt{122} \approx 11.0$</td></tr>
<tr><td>○ We get to $b$ the quotient of $2s + 1$,<br>○ We add to $x$ the number of subtractions $i$,</td><td>○ نرد إلى $b$ حاصل$2s + 1$،<br>○ نضيف إلى $x$ عدد مرات الطرح $i$،</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = x + 0 = 110$<br>$b = 100$</td></tr>
<tr><td>We continue with the values of $x$ and $b$ from step 1 to find more numbers after the comma.</td><td>ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ $x$ و $b$ من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.</td></tr>
<tr><td>Step 1: We multiply the number $x$ by ten, and we multiply the number $b$ by a hundred</td><td>الخطوة 1: نضرب العدد $x$ في عشرة، ونضرب العدد $b$ في مئة</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = x \times 10 = 1100$<br>$b = b \times 100 = 10000$</td></tr>
<tr><td>Step 2: We assume $s = x$,</td><td>الخطوة 2: نفترض $s = x$ ،</td></tr>
<tr><td colspan="2">$s = 1100$</td></tr>
<tr><td>Step 3: We subtract $2s + 1$ from $b$</td><td>الخطوة 3: نطرح من العدد $b$ حاصل $2s + 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b = b - (2s + 1) = 10000 - 2201 = 7799 \ldots (i = 1)$</td></tr>
<tr><td>- If the result of $b$ is greater than zero:<br>○ we add to $s$ one, and continue from step 3</td><td>- إذا كانت نتيجة $b$ أكبر تماما من الصفر:<br>○ نضيف إلى $s$ واحد، ونواصل من الخطوة 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">$s = s + 1 = 1101: b = b - (2s + 1) = 7799 - 2203 = 5596 \ldots (i = 2)$<br>$s = 1102: b = b - (2s + 1) = 5596 - 2205 = 3391 \ldots (i = 3)$<br>$s = 1103: b = b - (2s + 1) = 3391 - 2207 = 1184 \ldots (i = 4)$<br>$s = 1104: b = b - (2s + 1) = 1184 - 2209 = -1025$</td></tr>
<tr><td>- As the result of $b$ is less than zero:<br>○ We make $i$ the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$</td><td>- بما أن نتيجة $b$ أصغر من الصفر:<br>○ نجعل $i$ عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$i = 4$</td></tr>
<tr><td>○ In the space after the comma, we write the number $i$</td><td>○ نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العدد$i$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">$\sqrt{122} \approx 11.04$</td></tr>
<tr><td>○ We get to $b$ the quotient of $2s + 1$,<br>○ We add to $x$ the number of substractions $i$,</td><td>○ نرد إلى $b$ حاصل$2s + 1$،<br>○ نضيف إلى $x$ عدد مرات الطرح $i$،</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = x + 4 = 1104$<br>$b = 1184$</td></tr>
<tr><td>We continue with the values of $x$ and $b$ from step 1 to find more numbers after the comma.</td><td>ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ $x$ و $b$ من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.</td></tr>
<tr><td>Step 1: We multiply the number $x$ by ten, and we multiply the number $b$ by a hundred</td><td>الخطوة 1: نضرب العدد $x$ في عشرة، ونضرب العدد $b$ في مئة</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = x \times 10 = 11040$<br>$b = b \times 100 = 118400$</td></tr>
<tr><td>Step 2: We assume $s = x$,</td><td>الخطوة 2: نفترض $s = x$ ،</td></tr>
<tr><td colspan="2">$s = 11040$</td></tr>
<tr><td>Step 3: We subtract $2s + 1$ from $b$</td><td>الخطوة 3: نطرح من العدد $b$ حاصل $2s + 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b = b - (2s + 1) = 118400 - 22081 = 96319 \ldots (i = 1)$</td></tr>
<tr><td>– If the result of $b$ is greater than zero:<br>○ we add to $s$ one, and continue from step 3</td><td>- إذا كانت نتيجة $b$ أكبر تماما من الصفر:<br>○ نضيف إلى $s$ واحد، ونواصل من الخطوة 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">$s = s + 1 = 11041: b = b - (2s + 1) = 96319 - 22083 = 74236 \ldots (i = 2)$<br>$s = 11042: b = b - (2s + 1) = 74236 - 22085 = 52151 \ldots (i = 3)$<br>$s = 11043: b = b - (2s + 1) = 52151 - 22087 = 30064 \ldots (i = 4)$<br>$s = 11044: b = b - (2s + 1) = 30064 - 22089 = 7975 \ldots (i = 5)$<br>$s = 11045: b = b - (2s + 1) = 7975 - 22091 = -14116$</td></tr>
<tr><td>– As the result of $b$ is less than zero:<br>○ We make $i$ the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$</td><td>- بما أن نتيجة $b$ أصغر من الصفر:<br>○ نجعل $i$ عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$i = 5$</td></tr>
<tr><td>○ In the space after the comma, we write the number $i$</td><td>○ نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العدد $i$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sqrt{122} \approx 11.045$</td></tr>
<tr><td>○ We get to $b$ the quotient of $2s + 1$,<br>○ We add to $x$ the number of substractions $i$,</td><td>○ نرد إلى $b$ حاصل$2s + 1$،<br>○ نضيف إلى $x$ عدد مرات الطرح $i$،</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = x + 5 = 11045$<br>$b = 7975$</td></tr>
<tr><td>We continue with the values of $x$ and $b$ from step 1 to find more numbers after the comma.</td><td>ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ $x$ و $b$ من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.</td></tr>
<tr><td colspan="2">…</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| Computational representation of the algorithm in JavaScript. | الكتابة البرمجية للخوارزمية بلغة البرمجة جافاسكريبت. |

```
function sqrt(N){
      if(N<0) {return NaN;}
      var fn1 = function (x){
            var a=x;
            for(var i=1;i<=x;i++){
                  a-=2*i-1;
                  if(a==0) return i;
                  if(a<0) return i-1;
            }
            return i-1;
      }
      var f2= function (s, b){
            for(var i=0; i<10; i++){
                  b-=s*2 +1;
                  if(b<0){b+=s*2+1;break}
                  if(b==0){return [i, b];}
                  s++;
             }
             return [i, b];
       }
       var dec=20; // numbers after comma
       var x=fn1(N), b= N-x*x, r=[], S=x;
       if(b)
            for(var i=0; i<dec; i++){
                  b*=100;
                  x*=10 ;
                  var q=f2( x, b);
                  if(q[1]==0){
                        console.log('a decimal number with a real square root');
                        var d=N.toString().split('.')[1].length;
                        for(var j=1; j<10;j++) if(j*2>=d) break;
                        return sqrt(N*Math.pow(10, d*2)) /Math.pow(10,d)
                  }
                  r.push(q[0]);
                  x=x+q[0]; b=q[1];
            }
      return S+(b? '.'+r.join('')  : '' ) ;
}

var n= 13;
console.log(Math.sqrt(n), sqrt(n) ) ;
// 3.605551275463989
// 3.60555127546398929311
```

| **Appendix 2: TROUZINE's natural algorithm to calculate the cubic root of a number (The natural algorithm)** | **ملحق 2: خوارزمية تروزين الطبيعية لحساب الجذر التكعيبي لعدد (الخوارزمية الطبيعية)** |
|---|---|
| The algorithm may be tested on this link: | بإمكانك تجربة الخوارزمية على هذا الرابط: |
| https://codepen.io/am_trouzine/full/GRyoWbM | |
| Let $N$ be the number that we want to calculate its cubic root<br>The cubic root of $N$ is calculated in two stages: | نفترض $N$ العدد الذي نريد حساب جذره التكعيبي<br>يتم حساب الجذر التكعيبي للعدد $N$ في مرحلتين: |
| **The first stage: finding the nearest real root of $N$:**<br>We make $n = N$<br>- We subtract from $n$ the terms $3x^2 - 3x + 1$ starting from $x = 1$<br>○ While $n > 0$, we make $x = x + 1$, and we proceed the substraction.<br>○ When $n = 0$, this stage stops and the number $N$ has a real cubic root of $x$.<br>○ When $n < 0$, this stage stops, the nearest real cubic root is $x - 1$, and we continue the second stage to find the numbers after the comma. | **المرحلة الأولى: إيجاد الجذر الحقيقي القريب للعدد $N$:**<br>نضع $n = N$<br>- نطرح من العدد $n$ حدود $3x^2 - 3x + 1$ ابتداء من $x = 1$<br>○ ما دام $n > 0$ نجعل $x = x + 1$ ونواصل عملية الطرح.<br>○ إذا صار $n = 0$، تتوقف هذه المرحلة وللعدد $N$ جذر تكعيبي حقيقي هو $x$.<br>○ إذا صار $n < 0$، تتوقف هذه المرحلة، الجذر التكعيبي الحقيقي القريب للعدد هو $x - 1$، ونواصل المرحلة الثانية لإيجاد الأعداد بعد الفاصلة. |

| | |
|---|---|
| **The second stage: Finding the numbers after the comma:**<br>Let $x$ be the nearest cubic root of $N$<br>Let $b = N - x^3$<br>The following process is repeated for the number of digits we want to find after the comma:<br>We divide this process into 3 steps<br>**Step 1:** We multiply the number $x$ by ten, and we multiply the number $b$ by a thousand<br>**Step 2:** We assume $s = x$,<br>**Step 3:** We subtract $3s^2 + 3s + 1$ from $b$<br>- If the result of $b$ is greater than zero:<br>  o we add to $s$ one, and continue from step 3<br>- If the result of $b$ equals zero: then $N$ is a decimal number with a real cubic root, its cubic root should be calculated without a comma starting from the first stage.<br>- If the result of $b$ is less than zero:<br>  o We make $i$ the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$<br>  o In the space after the comma, we write the number $i$<br>  o We get to $b$ the quotient of $3s^2 + 3s + 1$<br>  o We add to $x$ the number of subtractions $i$,<br>  o We continue with the values of $x$ and $b$ from step 1 to find more numbers after the comma. | **المرحلة الثانية: إيجاد الأعداد بعد الفاصلة:**<br>نفترض $x$ الجذر التكعيبي القريب للعدد $N$<br>نفترض $b = N - x^3$<br>نكرر العملية التالية بعدد الأرقام التي نريد إيجادها بعد الفاصلة:<br>نقسم هذه العملية إلى 3 خطوات<br>**الخطوة 1:** نضرب العدد $x$ في عشرة، ونضرب العدد $b$ في ألف<br>**الخطوة 2:** نفترض $s = x$ ،<br>**الخطوة 3:** نطرح من العدد $b$ حاصل $3s^2 + 3s + 1$<br>- إذا كانت نتيجة $b$ أكبر تماما من الصفر:<br>  o نضيف إلى $s$ واحد، ونواصل من الخطوة 3<br>- إذا كانت نتيجة $b$ تساوي الصفر: فالعدد $N$ عدد عشري لديه جذر تكعيبي حقيقي، نحسب جذره التكعيبي بدون فاصلة ابتداء من المرحلة الأولى.<br>- إذا كانت نتيجة $b$ أصغر من الصفر:<br>  o نجعل $i$ عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$<br>  o نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العدد$i$<br>  o نرد إلى $b$ حاصل$3s^2 + 3s + 1$،<br>  o نضيف إلى $x$ عدد مرات الطرح $i$،<br>  o ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ $x$ و $b$ من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة. |
| **E.g.**<br>A number with a real cubic root | **مثال:**<br>عدد بجذر تكعيبي حقيقي |
| $N = 64;\ \sqrt[3]{N} = ?$ | |
| We make $n = N$<br>- We subtract from $n$ the terms $3x^2 - 3x + 1$ starting from $x = 1$ | نضع $n = N$<br>- نطرح من العدد $n$ حدود $3x^2 - 3x + 1$ ابتداء من $x = 1$ |
| $x = 1: n = 64 - (3x^2 - 3x + 1\ ) = 64 - 1 = 63$<br>$x = 2: n = 63 - (12 - 6 + 1) = 63 - 7 = 56$<br>$x = 3: n = 56 - 19 = 37$<br>$x = 4: n = 37 - 37 = 0$ | |
| this stage stops and the number $N$ has a real cubic root of $x$. | تتوقف هذه المرحلة وللعدد $N$ جذر تكعيبي حقيقي هو $x$. |

$$\sqrt[3]{N} = x;\ \sqrt[3]{64} = 4$$

| | |
|---|---|
| **E.g.**<br>A number with an unreal cubic root | **مثال:**<br>عدد بجذر تكعيبي غير حقيقي |

$$N = 66$$

$$\sqrt[3]{N} = ?$$

| | |
|---|---|
| We make $n = N$<br>- We subtract from $n$ the terms $3x^2 - 3x + 1$ starting from $x = 1$ | نضع $n = N$<br>- نطرح من العدد $n$ حدود $3x^2 - 3x + 1$ ابتداء من $x = 1$ |

$$x = 1: n = 66 - (3x^2 - 3x + 1\ ) = 66 - 1 = 65$$
$$x = 2: n = 65 - (12 - 6 + 1) = 65 - 7 = 58$$
$$x = 3: n = 58 - 19 = 39$$
$$x = 4: n = 39 - 37 = 2$$
$$x = 5: n = 2 - 61 = -59$$

| | |
|---|---|
| This stage stops, the nearest real cubic root is $x - 1$, and we continue the second stage to find the numbers after the comma. | تتوقف هذه المرحلة، الجذر التكعيبي الحقيقي القريب للعدد هو $x - 1$، ونواصل المرحلة الثانية لإيجاد الأعداد بعد الفاصلة. |

$$\sqrt[3]{N} = x - 1$$
$$\sqrt[3]{66} \approx 5 - 1 \approx 4$$

| | |
|---|---|
| Let $x$ be the nearest cubic root of $N$<br>Let $b = N - x^3$ | نفترض $x$ الجذر التكعيبي القريب للعدد $N$<br>نفترض $b = N - x^3$ |

$$x = 4$$
$$b = N - x^3 = 66 - 64 = 2$$

| | |
|---|---|
| **Step 1:** We multiply the number $x$ by ten, and we multiply the number $b$ by a thousand | **الخطوة 1:** نضرب العدد $x$ في عشرة، ونضرب العدد $b$ في ألف |

$$x = x \times 10 = 40$$
$$b = b \times 1000 = 2000$$

| | |
|---|---|
| **Step 2:** We assume $s = x$, | **الخطوة 2:** نفترض $s = x$ ، |

$$s = 40$$

| | |
|---|---|
| **Step 3:** We subtract $3s^2 + 3s + 1$ from $b$ | **الخطوة 3:** نطرح من العدد $b$ حاصل $3s^2 + 3s + 1$ |

$$b = b - \left(3s^2 + 3s + 1\right) = 2000 - 4921 = -2921$$

| | |
|---|---|
| - As the result of $b$ is less than zero:<br>○ We make $i$ the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$ | - بما أن نتيجة $b$ أصغر من الصفر:<br>○ نجعل $i$ عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$ |

$$i = 0$$

| | |
|---|---|
| ○ In the space after the comma, we write the number $i$ | ○ نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العدد$i$ |

| | |
|---|---|
| $\sqrt[3]{66} \approx 4.0$ | |
| ○ We get to $b$ the quotient of $3s^2 + 3s + 1$ ,<br>○ We add to $x$ the number of substractions $i$, | ○ نرد إلى $b$ حاصل $3s^2 + 3s + 1$،<br>○ نضيف إلى $x$ عدد مرات الطرح $i$، |
| $x = x + 0 = 40, b = 2000$ | |
| We continue with the values of $x$ and $b$ from step 1 to find more numbers after the comma. | ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ $x$ و $b$ من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة. |
| **Step 1:** We multiply the number $x$ by ten, and we multiply the number $b$ by a thousand | **الخطوة 1:** نضرب العدد $x$ في عشرة، ونضرب العدد $b$ في ألف |
| $x = x \times 10 = 400, b = b \times 1000 = 2000000$ | |
| **Step 2:** We assume $s = x$, | **الخطوة 2:** نفترض $s = x$ ، |
| $s = 400$ | |
| **Step 3:** We subtract $3s^2 + 3s + 1$ from $b$ | **الخطوة 3:** نطرح من العدد $b$ حاصل $3s^2 + 3s + 1$ |
| $b = b - (3s^2 + 3s + 1) = 2000000 - 481201 = 1518799 \dots (i = 1)$ | |
| - If the result of $b$ is greater than zero:<br>○ we add to $s$ one, and continue from step 3 | - إذا كانت نتيجة $b$ أكبر تماما من الصفر:<br>○ نضيف إلى $s$ واحد، ونواصل من الخطوة 3 |
| $s = s + 1 = 401: b = b - \left(3s^2 + 3s + 1\right) = 1518799 - 483607 = 1035192 \dots (i = 2)$<br>$s = 402: b = 1035192 - 486019 = 549173 \dots (i = 3)$<br>$s = 403: b = 549173 - 488437 = 60736 \dots (i = 4)$<br>$s = 404: b = 60736 - 490861 = -430125$ | |
| - As the result of $b$ is less than zero:<br>○ We make $i$ the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$ | - بما أن نتيجة $b$ أصغر من الصفر:<br>○ نجعل $i$ عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$ |
| $i = 4$ | |
| ○ In the space after the comma, we write the number $i$ | ○ نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العدد $i$ |
| $\sqrt[3]{66} \approx 4.04$ | |
| ○ We get to $b$ the quotient of $3s^2 + 3s + 1$ ,<br>○ We add to $x$ the number of substractions $i$, | ○ نرد إلى $b$ حاصل $3s^2 + 3s + 1$،<br>○ نضيف إلى $x$ عدد مرات الطرح $i$، |
| $x = x + 4 = 404$<br>$b = 60736$ | |
| We continue with the values of $x$ and $b$ from step 1 to find more numbers after the comma. | ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ $x$ و $b$ من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة. |
| **Step 1:** We multiply the number $x$ by ten, and we multiply the number $b$ by a thousand | **الخطوة 1:** نضرب العدد $x$ في عشرة، ونضرب العدد $b$ في ألف |

<table>
<tr><td colspan="2">$x = x \times 10 = 4040, b = b \times 1000 = 60736000$</td></tr>
<tr><td>Step 2: We assume $s = x$,</td><td dir="rtl">الخطوة 2: نفترض $s = x$ ،</td></tr>
<tr><td colspan="2">$s = 4040$</td></tr>
<tr><td>Step 3: We subtract $3s^2 + 3s + 1$ from $b$</td><td dir="rtl">الخطوة 3: نطرح من العدد $b$ حاصل $3s^2 + 3s + 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$b = b - (3s^2 + 3s + 1) = 60736000 - 48976921 = 11759079 \ldots (i = 1)$</td></tr>
<tr><td>- If the result of $b$ is greater than zero:<br>○ we add to $s$ one, and continue from step 3</td><td dir="rtl">- إذا كانت نتيجة $b$ أكبر تماما من الصفر:<br>○ نضيف إلى $s$ واحد، ونواصل من الخطوة 3</td></tr>
<tr><td colspan="2">$s = s + 1 = 4041: b = b - (3s^2 + 3s + 1) = 11759079 - 49001167 = -37242088$</td></tr>
<tr><td>- As the result of $b$ is less than zero:<br>○ We make $i$ the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$</td><td dir="rtl">- بما أن نتيجة $b$ أصغر من الصفر:<br>○ نجعل $i$ عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$i = 1$</td></tr>
<tr><td>○ In the space after the comma, we write the number $i$</td><td dir="rtl">○ نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العدد $i$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sqrt[3]{66} \approx 4.041$</td></tr>
<tr><td>○ We get to $b$ the quotient of $3s^2 + 3s + 1$,<br>○ We add to $x$ the number of substractions $i$,</td><td dir="rtl">○ نرد إلى $b$ حاصل $3s^2 + 3s + 1$،<br>○ نضيف إلى $x$ عدد مرات الطرح $i$،</td></tr>
<tr><td colspan="2">$x = x + 1 = 4041$<br>$b = 11759079$</td></tr>
<tr><td>We continue with the values of $x$ and $b$ from step 1 to find more numbers after the comma.</td><td dir="rtl">ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ $x$ و $b$ من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.</td></tr>
<tr><td colspan="2">...</td></tr>
</table>

| Computational representation of the algorithm in JavaScript. | الكتابة البرمجية للخوارزمية بلغة البرمجة جافاسكريبت. |
|---|---|

```
function cbrt(N){
      var ss='';
      if(N<0) {N*=-1;  ss='-';}
      var fn1 = function (x){
            var a=x;
            for(var i=1;i<=x;i++){
                  a-=3*i*i -3*i +1;
                  if(a==0) return i;
                  if(a<0) return i-1;
            }
            return i-1;
      }

      var f2= function (s, b){
            for(var i=0; i<10; i++){
                  b-=3*s*s +3*s +1;
                  if(b<0){b+=3*s*s +3*s +1;break}
                  if(b==0){return [i, b];}
                  s++;
             }
             return [i, b];
       }

       var dec=20; // numbers after comma
       var x=fn1(N), b, r=[], S=x;
       b= N-x*x*x;
       if(b)
            for(var i=0; i<dec; i++){
                  b*=1000;
                  x*=10 ;
                  var q=f2( x, b);
                  if(q[1]==0){
                        console.log('a decimal number with a real cubic root');
                        var d=N.toString().split('.')[1].length;
                        for(var j=1; j<10;j++) if(j*3>=d) break;
                        return cbrt((ss=='-'?-1:1)*N*Math.pow(10, d*3))
/Math.pow(10,d)
                  }
                  r.push(q[0]);
                  x=x+q[0]; b=q[1];
            }
      return ss+S+(b? '.'+r.join('')  : '' ) ;
}

var n= 13;
console.log(Math.cbrt(n), cbrt(n) ) ;
// 2.3513346877207573
// 2.35133468772075748950
```

| **Appendix 3: TROUZINE's natural algorithm to calculate the $n^{th}$ root of a number (The natural algorithm)** | **ملحق 3: خوارزمية تروزين الطبيعية لحساب الجذر النوني لعدد (الخوارزمية الطبيعية)** |
|---|---|
| The algorithm may be tested on this link: | بإمكانك تجربة الخوارزمية على هذا الرابط: |
| https://codepen.io/am_trouzine/full/XWVdwMv | |
| C.f. Generalization of $n^{th}$ power terms increase and Generalization of $n^{th}$ power terms decrease | انظر تعميم تزايد حدود الأعداد ذات الأس ن وتعميم تناقص حدود الأعداد ذات الأس ن |
| Before starting the calculation of the $n^{th}$ root, we find the function of increase and the function of decrease from the abovementioned method.<br><br>The first function is used to find the real or the nearest real root, and the second is used to find the digits after comma. | قبل البدء في حساب الجذر النوني، نقوم بإيجاد دالتي التزايد والتناقص من الطريقة أعلاه.<br><br>نستعمل الدالة الأولى لإيجاد الجذر الحقيقي أو الجذر الحقيقي القريب، ونستعمل الدالة الثانية لإيجاد الأعداد بعد الفاصلة. |
| **E.g. Calculating the $5^{th}$ root of a number** | **مثال: حساب الجذر الخامس لعدد** |

Power 5 increases with the function:

يتزايد أس 5 في كل مرة بـ

$$5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1$$

Power 5 decreases with the function:

يتناقص أس 5 في كل مرة بـ

$$5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

| | |
|---|---|
| Let $N$ be the number that we want to calculate its $5^{th}$ root<br><br>Let $n^{th} = 5$ because we want to calculate the $5^{th}$ root<br><br>The $5^{th}$ root of $N$ is calculated in two stages: | نفترض $N$ العدد الذي نريد حساب جذره الخامس<br><br>نفترض $n^{th} = 5$ لأننا نريد حساب الجذر الخامس<br><br>يتم حساب الجذر الخامس للعدد $N$ في مرحلتين: |
| **The first stage: finding the nearest real root of $N$:**<br><br>We make $n = N$<br><br>- Starting from $x = 1$, we subtract from $n$ the terms of: | **المرحلة الأولى: إيجاد الجذر الحقيقي القريب للعدد $N$:**<br><br>نضع $n = N$<br><br>- ابتداء من $x = 1$، نطرح من العدد $n$ حدود: |
| $5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1$ | |
| ○ While $n > 0$, we make $x = x + 1$, and we proceed the substraction.<br>○ When $n = 0$, this stage stops and the number $N$ has a real $5^{th}$ root of $x$.<br>○ When $n < 0$, this stage stops, the nearest real $5^{th}$ root is $x - 1$, and we continue the second stage to find the numbers after the comma. | ○ ما دام $n > 0$ نجعل $x = x + 1$ ونواصل عملية الطرح.<br>○ إذا صار $n = 0$، تتوقف هذه المرحلة وللعدد $N$ جذر نوني خامس حقيقي هو $x$.<br>○ إذا صار $n < 0$، تتوقف هذه المرحلة، الجذر الخامس الحقيقي القريب للعدد هو $x - 1$، ونواصل المرحلة الثانية لإيجاد الأعداد بعد الفاصلة. |

<table>
<tr>
<td><u>The second stage: Finding the numbers after the comma:</u><br>Let $x$ be the nearest 5th root of $N$<br>Let $b = N - x^{(n^{th})}$ i.e. $b = N - x^5$<br>The following process is repeated for the number of digits we want to find after the comma:<br>We divide this process into 3 steps<br>Step 1: We multiply the number $x$ by ten, and we multiply the number $b$ by $10^{(n^{th})}$ i.e. $10^5$<br>Step 2: We assume $s = x$,<br>Step 3: We subtract from $b$</td>
<td dir="rtl"><u>المرحلة الثانية: إيجاد الأعداد بعد الفاصلة:</u><br>نفترض $x$ الجذر الخامس القريب للعدد $N$<br>نفترض $b = N - x^{(n^{th})}$ أي $b = N - x^5$<br>نكرر العملية التالية بعدد الأرقام التي نريد إيجادها بعد الفاصلة:<br>نقسم هذه العملية إلى 3 خطوات<br>الخطوة 1: نضرب العدد $x$ في عشرة، ونضرب العدد $b$ في $10^{(n^{th})}$ أي $10^5$<br>الخطوة 2: نفترض $s = x$ ،<br>الخطوة 3: نطرح من العدد $b$ حاصل</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2" align="center">$5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$</td>
</tr>
<tr>
<td>- If the result of $b$ is greater than zero:<br>  o we add to $s$ one, and continue from step 3<br>- <u>If the result of $b$ equals zero</u>: then $N$ is a decimal number with a real nth root, its nth root should be calculated without a comma starting from the first stage.<br>- If the result of $b$ is less than zero:<br>  o We make $i$ the number of subtractions in step 3, not counting the time that produced $b < 0$<br>  o In the space after the comma, we write the number $i$<br>  o We get to $b$ the quotient of:</td>
<td dir="rtl">- إذا كانت نتيجة $b$ أكبر تماما من الصفر:<br>  o نضيف إلى $s$ واحد، ونواصل من الخطوة 3<br>- <u>إذا كانت نتيجة $b$ تساوي الصفر</u>: فالعدد $N$ عدد عشري لديه جذر نوني حقيقي، نحسب جذره النوني بدون فاصلة ابتداء من المرحلة الأولى.<br>- إذا كانت نتيجة $b$ أصغر من الصفر:<br>  o نجعل $i$ عدد مرات الطرح في الخطوة 3، دون احتساب المرة التي أنتجت $b < 0$<br>  o نكتب في الخانة بعد الفاصلة: العدد $i$<br>  o نرد إلى $b$ حاصل:</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2" align="center">$5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$</td>
</tr>
<tr>
<td>  o We add to $x$ the number of subtractions $i$,<br>  o We continue with the values of $x$ and $b$ from step 1 to find more numbers after the comma.</td>
<td dir="rtl">  o نضيف إلى $x$ عدد مرات الطرح $i$،<br>  o ونواصل العملية بهتين القيمتين لـ $x$ و $b$ من الخطوة 1 لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.</td>
</tr>
<tr>
<td>Computational representation of the algorithm in JavaScript.</td>
<td dir="rtl">الكتابة البرمجية للخوارزمية بلغة البرمجة جافاسكريبت.</td>
</tr>
</table>

```
function PowSeq(x){
  var a= [[[1,0]]]
  for(var i=1; i<x; i++){
    for(var j=0; j<a.length; j++){
      a[j]=PolyMul(a[j], [[1,1],[-1,0]])
    }
    a.push([[1,i]])
  }
  var b=[[0,0]];
  for(var i=0; i<a.length; i++){
    b=PolyAdd(b, a[i])
  }
```

```
  return b.sort(function(x,y){return x[1]<y[1]?1:-1})
}
function RSeq(x){
  var a= [[[1,0]]]
  for(var i=1; i<x; i++){
    for(var j=0; j<a.length; j++){
      a[j]=PolyMul(a[j], [[1,1],[+1,0]])
    }
    a.push([[1,i]])
  }
  var b=[[0,0]];
  for(var i=0; i<a.length; i++){
    b=PolyAdd(b, a[i])
  }
  return b.sort(function(x,y){return x[1]<y[1]?1:-1})
}
function PolyAdd(a, y){
  for(var i=0; i<y.length; i++){
    a.push(y[i])
  }
  for(var i=0; i<a.length-1; i++){
    for(var j=i+1; j<a.length; j++){
      if(a[i][1]==a[j][1]){
        a[i][0]+=a[j][0]; a.splice(j, 1);  j--
      }
    }
  }
  return a.sort(function(x,y){return x[1]>y[1]?1:0})

}
function PolyMul(x, y){
  var a=[]
  for(var i=0; i<x.length; i++){
    for(var j=0; j<y.length; j++){
      a.push([x[i][0]*y[j][0], x[i][1]+y[j][1]])
    }
  }
  for(var i=0; i<a.length-1; i++){
    for(var j=i+1; j<a.length; j++){
      if(a[i][1]==a[j][1]){
        a[i][0]+=a[j][0]; a.splice(j, 1);  j--
      }
    }
  }
  return a.sort(function(x,y){return x[1]>y[1]?1:0})
}
function nroot(N, nth, dec){
     if(nth==0) return NaN;
     if(nth==1) return N;
     if(nth<0) return 1/ nroot(N, nth*-1, dec);
     //negative number
     if(!(nth%2) && N<0) {return NaN;}
     var ss='';
     if(N<0) {N*=-1;  ss='-';}

     var fn1 = function (x){
          var a=x, j;
          var seq=PowSeq(nth);
          for(var i=1;i<=x;i++){
               j=0;
               seq.forEach(function(e){
```

```
                    j+=e[0]*Math.pow(i,e[1])
                });
                a=a-j;
                if(a==0) return i;
                if(a<0) return i-1;
            }
            return i-1;
        }

        var f2= function (s, b){
            var j;
            var seq=RSeq(nth);
            for(var i=0; i<10; i++){
                j=0;
                seq.forEach(function(e){
                    j+=e[0]*Math.pow(s,e[1])
                });

                b-= j;
                if(b<0){b+=j;break}
                if(b==0){
                    return [i, b]
                }
                s++;
             }
             return [i, b];
         }

         var dec=dec?dec:16; // numbers after comma
         var x=S=fn1(N), b=N-Math.pow(x,nth) , r=[], q;
         if(b)
            for(var i=0; i<dec; i++){
                b*=Math.pow(10,nth);
                x*=10 ;
                q=f2( x, b);
                if(q[1]==0){
                    //a decimal number with a real nth root
                    console.log('a decimal number with a real nth root');
                    var d=N.toString().split('.')[1].length;
                    for(var j=1; j<10;j++){
                        if(j*nth>=d)break;
                    }
                    return nroot((ss=='-'?-1:1)*N*Math.pow(10, d*nth), nth,
dec) / Math.pow(10,d)
                }
                r.push(q[0]);
                x=x+q[0]; b=q[1];
            }
         return ss+S+(b? '.'+r.join('')  : '' ) ;
}

var n= 524288 , nth=19;
console.log( nroot(n,nth,6), Math.pow(n, 1/nth) );
// 2
// 2

var n= 52411288 , nth=11;
console.log( nroot(n,nth,6), Math.pow(n, 1/nth) );
// 5.032292
// 5.032292702825373
```

# Contents المحتويات

**تروزين عبد الرزاق**

مهتم باللغات، وأنظمة الكتابة، والعلوم البحتة، والرياضيات الكلاسيكية، وبرمجة الحواسيب.

**TROUZINE Abderrezzaq**

Interested in languages, writing systems, pure sciences, classical mathematics, and computers programming.

am.trouzine@gmail.com