مذكّرة حول

ألغوريتمات الأريثماطيقي في أنظمة عد متعددة

تروزين عبد الرزاق

A Note about

Arithmetic algorithms in different numeral systems

TROUZINE Abderrezak

First revision المراجعة الأولى

2020/04/14

First revision المراجعة الثانية

2021/07/17

بسم الله الرحمن الرحيم [1]

[1] In the name of Allah, the Entirely Merciful, the Especially Merciful.

Introduction

In the name of Allah, praise be to Allah, and prayers and peace be upon Muhammad, the unlettered prophet.

The beginning was that I wanted to program a file compression algorithm, and I started from the premise of changing the basis of the calculation. Because I use JavaScript, I found it difficult to divide, so I decided first to program basic arithmetic algorithms in this programming language. After implementing it, I decided to move to the algorithms for roots and exponents, but before programming that, some mathematical questions had to be answered, such as how to find the unreal square roots without a calculator, and what about the rest of the roots? Most of this has been done - thanks to Allah - and translated programmatically.

I thought to put aside the file compression project and to collect some of what Allah has bestowed on me in these notes, perhaps they will be useful by the grace of Allah.

This work shares answers to mathematical questions, and shares suggested proofs for famous mathematical laws, most of which raised while writing the code of file compression project.

And thank Allah the god of everything.

مقدمة

بسم الله والحمد لله والصلاة والسلام على محمد النبي الأمي.

كانت البداية أني أردت برمجة خوارزمية ضغط ملفات، وانطلقت من فرضية تغيير أساس الحساب. ولأني أستعمل الجافاسكريبت، وجدت صعوبة في عملية القسمة، فقررت أولا برمجة خوارزميات الحساب الأساسية بلغة البرمجة هذه. وبعد تنفيذها أحببت الانتقال إلى خوارزميات الجذور والأسس، لكن قبل برمجة ذلك، كان يتوجب حل بعض الإشكاليات الرياضية، مثل كيف أجد الجذور التربيعية الغير حقيقية بدون آلة حاسبة وماذا عن بقية الجذور؟ وقد تم معظم ذلك – بفضل الله – وترجمته برمجيا.

ارتأيت أن أضع مشروع ضغط الملفات جانبا وأجمع بعض ما تفضل الله به علي في هذه المذكرات، لعلها تكون نافعة بفضل الله.

إن هذا العمل مشاركة لإجابات عن تساؤلات رياضية، ومشاركة براهين مقترحة لقوانين رياضية شهيرة، وردت معظمها أثناء كتابة الكود البرمجي لمشروع ضغط الملفات.

والحمد لله رب العالمين.

`NRoot(1024, 16)` (*177778 Ms*)

$$\sqrt[16]{1024} = 1.5422108254079408$$

`Q('ABCD',16)` (*1809 Ms*)

$$\sqrt[3]{ABCD_{b16}} = 23.4C6403084A398696$$

`P('125',12)` (*16 Ms*)

$$125^{12} = 14551915228366851806640625$$

`div('125',13)` (*52 Ms*)

$$\frac{125}{13} = 9.6153846153846153$$

`div('125',13,8)` (*25 Ms*)

$$\frac{125_{b8}}{13_{b8}} = 7.5642721350564272$$

`div('125',13,16)` (*51 Ms*)

$$\frac{125_{b16}}{13_{b16}} = F.6BCA1AF286BCA1AF$$

`R('2',10,125)` (*57542 Ms*)

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785$$

$$696718753769480731766797379907324784621070388 5$$

$$0387534327641572735013846230912297024924 83$$

`R('A',11,5)` (*31 Ms*)

$$\sqrt{\mathrm{A_{b11}}} = 3.186\mathrm{A}9$$

1- Quadratic equations:

1- المعادلات من الدرجة الثانية:

A quadratic equation is the linear representation of the multiplication of (a static number x plus or minus another number) by (the same static number x plus or minus another number).

المقصود بمعادلة من الدرجة الثانية هو الكتابة الخطية لمضروب (عدد ثابت x نضيفه أو ننقص منه عددا) في (نفس العدد الثابت x نضيفه أو ننقص منه عددا).

We consider this form a basis of quadratic equation:

نعتبر هذه الكتابة أصلا لمعادلة من الدرجة الثانية:

$$(x-3)(x+2)$$

It's quadratic equation is :

معادلتها من الدرجة الثانية هي:

$$x^2-x-6$$

It could be observed that substituting x by a number gives the same result in both forms.

يمكن ملاحظة أن تعويض x بعدد ما سيعطي نفس النتيجة في الكتابتين.

The first form is:

الكتابة الأولى هي:

$$(x-3)(x+2)$$

The second form is:

والكتابة الثانية هي:

$$x^2-x-6$$

E.g.

مثال:

$$(5-3)(5+2)=(2)(7)=14=5^2-5-6=25-5-6=14$$

$$(3.17-3)(3.17+2)=(0.17)(5.17)=0.8789=3.17^2-3.17-6=10.0489-3.17-6=0.8789$$

2- Solving quadratic equations:

2- حل المعادلات من الدرجة الثانية:

Solving a quadratic equation is to find the two numbers (or the number) which when substituted with x results zero.

المقصود بحل معادلة من الدرجة الثانية هو إيجاد العددين (أو العدد) الذي من أجل تعويضه بـ x تكون نتيجة المعادلة تساوي الصفر.

I.e. to find the same known numbers with an opposite sign, so that the sum in one bracket equals zero.

أي هو إيجاد نفس العددين المعلومين بإشارة مختلفة من أجل أن يكون أحد الحدين يساوي الصفر.

These two numbers (or number) is/are called the root(s) of the equation.

يسمى هذين العددين (أو هذا العدد) بجذري المعادلة (أو جذر المعادلة).

The two roots of this equation

جذري هذه المعادلة

$$x^2 - x - 6$$

Are 3 and -2 , because its original form is

هما العددان 3 و-2 لأن أصلها

$$(x-3)(x+2)$$

Where

بحيث

$$(3-3)(x+2) = 0 \times (x+2) = 3^2 - 3 - 6 = 0$$

And

و

$$(x-3)(-2+2) = (x-3) \times 0 = (-2)^2 - (-2) - 6 = 0$$

To find the two roots of a quadratic equation, the discriminant law is used

لإيجاد حلي معادلة من الدرجة الثانية يُستعمل قانون المميز الشهير

$$(x_1 > x_2): x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Where the form of the equation is:

بحيث أن شكل المعادلة هو:

$$ax^2 + bx + c$$

Where:

بحيث:

$$b = -a(x_1 + x_2),$$
$$c = a(x_1 x_2)$$

3- A remark about the discriminant law:

3- ملاحظة حول استعمال قانون المميز:

These two representations are considered quadratic equations:

تُعتَبر هاتين الكتابتين معادلتين من الدرجة الثانية:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 \ldots (I)$$

$$a_2x^2 + b_2x + c_2 \ldots (II)$$

This representation is also considered a quadratic equation that is the sum of the two previous representations:

وتُعتَبر هذه الكتابة أيضا معادلةً من الدرجة الثانية، أصلها الكتابة الأولى زائد الكتابة الثانية:

$$(a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2) \ldots (III)$$

These representations are also considered quadratic equations:

وهذه الكتابات أيضا معادلات من الدرجة الثانية:

$$(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1) \dots (IV)$$
$$(a_1+a_2)x^2+(b_1)x+(c_1+c_2) \dots (V)$$
$$(a_1)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2) \dots (VI)$$

The law of the discriminant is productive in the first and the second representation (I) and (II), where a_1 and a_2 are a number multiplied by all the terms of the equation.

يكون قانون المميز مُنتِجًا في الكتابتين الأولى والثانية (I) و (II)، بحيث a_1 و a_2 هما عدد مضروب في جميع حدود المعادلة.

The law of the discriminant is not productive in real numbers in the majority of representations that are the addition or subtraction of all or some of the terms of one or many quadratic equations.

لا يكون قانون المميز منتجا في مجموعة الأعداد الحقيقية في معظم الكتابات التي أصلها جمع أو طرح كل أو بعض حدود معادلة أو عدة معادلات من الدرجة الثانية.

E.g.

مثال:

$$2x^2-4x+14$$

It is the sum of the two equations:

هي مجموع المعادلتين:

$$(x^2-7x+12)+(x^2+3x+2)$$

It can be written:

ويمكن كتابتها بالشكل:

$$(x-3)(x-4)+(x+2)(x+1)$$

The law of the discriminant is not productive, here, n real numbers.

قانون المميز فيها ليس منتجا في مجموعة الأعداد الحقيقة.

$$\frac{4\pm\sqrt{-96}}{4}$$

4- A suggested proof of the discriminant law:

4- برهنة مُقترَحَة على قانون المميز:

$$\alpha(x-x_1)(x-x_2)$$
$$=\alpha(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)$$
$$=\alpha x^2-(x_1+x_2)\alpha x+x_1x_2\alpha$$
$$\mathrm{A}=\alpha$$
$$\mathrm{B}=-(x_1+x_2)\alpha \dots (1)$$
$$\Gamma=x_1x_2\alpha \dots (2)$$
$$(1)\rightarrow\ x_1=\frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}-x_2\ ;\ x_2=\frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}-x_1\ ;\ (x_1+x_2)=\frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$$
$$(2)\rightarrow x_1x_2=\frac{\Gamma}{\mathrm{A}}$$
$$(1)\rightarrow\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}+x_1+x_2=0 \dots (3)$$
$$(3)\rightarrow\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}+x_1+x_2\right)\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}+x_1+x_2\right)=0\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}+x_1+x_2\right)$$

$$(3) \rightarrow \frac{B^2}{A^2} + {x_1}^2 + {x_2}^2 + \frac{2\mathrm{B}}{\mathrm{A}}(x_1 + x_2) + 2(x_1 x_2) = 0$$
$$(3) \rightarrow \frac{B^2}{A^2} + {x_1}^2 + {x_2}^2 + \frac{2\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\left(\frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right) + 2\left(\frac{\Gamma}{\mathrm{A}}\right) = 0$$
$$(3) \rightarrow \frac{-B^2}{A^2} + {x_1}^2 + {x_2}^2 + \frac{2\Gamma}{\mathrm{A}} = 0$$
$$(3) \rightarrow {x_1}^2 + {x_2}^2 = \frac{B^2}{A^2} - \frac{2\Gamma}{\mathrm{A}}$$
$$(3) \rightarrow {x_1}^2 + {x_2}^2 = \frac{B^2 - 2\mathrm{A}\Gamma}{A^2}$$
$$x_1 = x_1 \ldots (4)$$
$$(4) \rightarrow 2x_1 = [x_1] + x_1$$
$$(4) \rightarrow 2x_1 = \left[\frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} - x_2\right] + x_1 \left(from\ (1)\ \text{من}\right)$$
$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$
$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1 x_2}$$
$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 - \frac{2\Gamma}{\mathrm{A}}} \left(from\ (2)\text{من}\right)$$
$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{\frac{B^2 - 2\mathrm{A}\Gamma}{A^2} - \frac{2\Gamma}{\mathrm{A}}} \left(from\ (3)\text{من}\right)$$
$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{\frac{B^2 - 2\mathrm{A}\Gamma}{A^2} - \frac{2\mathrm{A}\Gamma}{A^2}}$$
$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \sqrt{\frac{B^2 - 4\mathrm{A}\Gamma}{A^2}}$$
$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \frac{\sqrt{B^2 - 4\mathrm{A}\Gamma}}{\mathrm{A}}$$
$$(4) \rightarrow 2x_1 = \frac{-\mathrm{B} + \sqrt{B^2 - 4\mathrm{A}\Gamma}}{\mathrm{A}}$$
$$(4) \rightarrow x_1 = \frac{-\mathrm{B} + \sqrt{B^2 - 4\mathrm{A}\Gamma}}{2\mathrm{A}}$$

We have — لدينا

$$x_2 = \frac{-B}{A} - x_1$$

So — إذن

$$x_2 = \frac{-B}{A} - \left(\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2A}\right)$$
$$x_2 = \frac{-B}{A} + \frac{B - \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2A}$$
$$x_2 = \frac{-2B}{2A} + \frac{B - \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2A}$$
$$x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4A\Gamma}}{2A}$$

We have, also

لدينا، أيضا

$$x_1 x_2 = \frac{\Gamma}{A}$$
$$x_2 = \frac{\Gamma}{A x_1}$$

So

إذن

$$x_2 = \frac{\Gamma}{A\left(\frac{-B+\sqrt{B^2-4A\Gamma}}{2A}\right)}$$
$$x_2 = \frac{\Gamma}{\frac{-B+\sqrt{B^2-4A\Gamma}}{2}}$$
$$x_2 = \frac{2\Gamma}{-B+\sqrt{B^2-4A\Gamma}}$$

By substituting x_2

بتعويضx_2

$$\frac{-B}{A} - x_1 = \frac{2\Gamma}{-B+\sqrt{B^2-4A\Gamma}}$$
$$x_1 = \frac{-B}{A} - \frac{2\Gamma}{-B+\sqrt{B^2-4A\Gamma}}$$

And also

وأيضا

$$x_1 = \frac{2\Gamma}{-B-\sqrt{B^2-4A\Gamma}}$$

Or we can substitute the value of x_1 found in (4) in either (1) or (2)

أو بإمكاننا تعويض قيمة x_1 التي وجدناها في (4) إما في (1) أو في (2)

5- The nature of the discriminant:

5- طبيعة المميز:

Considering the quadratic equations, the discriminant Δ is the square of one root minus the other root

بالنسبة للمعادلات من الدرجة الثانية، المميز Δ هو مربع أحد الجذرين ناقص الجذر الآخر

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$$

6- Substituting by the middle term:

6- التعويض بالحد الأوسط:

In quadratic equations of the form

في معادلات الدرجة الثانية من الشكل

$$x^2 + \beta x + \gamma$$

If x_1, H, x_2 are considered consecutive numbers by r, where x_1 and x_2 are the roots of the equation, and $H = \frac{x_1+x_2}{2}$ or $H = \frac{-\beta}{2}$, and $r = x_2 - H = H - x_1$: substituting x by the middle term H results $-r^2$.

إذا اعتبرنا x_1, H, x_2 أعداد متتالية بـ r، حيث x_1 و x_2 جذرا المعادلة، و $H = \frac{x_1+x_2}{2}$ أو $H = \frac{-\beta}{2}$، و $r = x_2 - H = H - x_1$، فإن تعويض x بالحد الأوسط H يعطي $-r^2$.

$$x^2 + \beta x + \gamma$$
$$H^2 + \beta H + (H - r)(H + r)$$
$$H^2 - 2H^2 + H^2 - r^2$$

The following two balancing can be placed:

يمكن وضع المقابلتين التاليتين:

$$(x_1 + x_2)^2 := ([H - r] + [H + r])^2$$
$$({x_1}^2 + {x_2}^2 + 2x_1x_2) := (4H^2) \dots (I)$$

And:

و:

$$(x_1 - x_2)^2 := ([H - r] - [H + r])^2$$
$$({x_1}^2 + {x_2}^2 - 2x_1x_2) := (4r^2) \dots (II)$$

Adding (I) to (II):

بجمع (I) و (II):

$$(2{x_1}^2 + 2{x_2}^2) = (4H^2 + 4r^2)$$
$$2({x_1}^2 + {x_2}^2) - 4H^2 = 4r^2$$
$$r^2 = \frac{2\left(({x_1}^2 + {x_2}^2) - 2H^2\right)}{4}$$
$$r = \sqrt{\frac{\left(({x_1}^2 + {x_2}^2) - 2H^2\right)}{2}}$$
$$r = \sqrt{\frac{(\beta^2 - 2\gamma) - 2H^2}{2}} = \sqrt{\frac{((2H)^2 - 2\gamma) - 2H^2}{2}} = \sqrt{H^2 - \gamma} \dots (A)$$

Subtracting (I) and (II):

وبطرح (I) و (II):

$$(4x_1x_2) = (4H^2 - 4r^2)$$
$$(x_1x_2) = (H^2 - r^2)$$
$$r^2 = -(x_1x_2) + H^2$$
$$r = \sqrt{-(x_1x_2) + H^2}$$
$$r = \sqrt{-\gamma + H^2} \dots (A)$$

Starting from the above, we can find both x_1 and x_2 in terms of H and r, where r is A.

انطلاقا مما سبق يمكن إيجاد كل من x_1 و x_2 بدليل H و r، بحيث r تساوي A.

$$x_1 = H - r$$
$$x_2 = H + r$$
$$r = \sqrt{-\gamma + H^2}$$
$$H = \frac{-\beta}{2}$$

7- Solving polynomial equations:

7- حل المعادلات كثيرة الحدود:

- It is known that the roots of a polynomial equation are the known terms before distributing them, with a different sign (the known terms in this example are -1, -2 and -3 and the roots of the equation are 1, 2 and -3):

- معلوم أن جذور معادلة كثيرة حدود، هو الحدود المعلومة قبل نشرها بإشارة مختلفة (الحدود المعلومة في هذا المثال هي -1 و -2 و -3 وجذور المعادلة هي 1 و 2 و 3):

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$
$$= x^3 - 6x^2 + 11x^1 + -6x^0$$
$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

- It is known that substituting the unknown x with one of the roots of the equation produces 0.

- معلوم أن تعويض المجهول x بأحد جذور المعادلة ينتج 0.

$$(3-1)(3-2)(3-3) = 3^3 - 6(3)^2 + 11(3) - 6 = 0$$

- It is known that the last term of a polynomial equation (i.e. the term multiplied by x^0) is the multiplication of all the roots of the equation (taking into account the note in Title 3, and taking into account the sign, that is, negative if the number of negative roots is odd).

- معلوم أن الحد الأخير من معادلة كثيرة حدود (أي الحد المضروب في x^0) هو مضروب جميع جذور المعادلة (مع مراعاة الملاحظة المذكورة في العنوان 3، ومع مراعاة الإشارة، أي سالبة إذا كان عدد الجذور السالبة فرديا).

Based on the foregoing, the following non-algebraic algorithm, which can be translated programmatically, can be used to solve polynomial equations:

يمكن – انطلاقا مما سبق – استعمال الخوارزمية – الغير جبرية – التالية – التي يمكن ترجمتها برمجيا – لحل المعادلات كثيرة الحدود:

- Decompose the last term (i.e. the term multiplied by x^0) into a product of prime factors.
- Substitute the unknown x with the factors [and their sum [and their roots]] with different signs.

- تحليل الحد الأخير (أي الحد المضروب في x^0) إلى جداء عوامل أولية.
- تعويض المجهول x بالعوامل [ومجموعها [وجذورها]] بإشارات مختلفة.

- If the last term (i.e. the term multiplied by x^0) is zero, we take 0 as one of the roots of the equation, and continue the algorithm with the penultimate term.

- إذا كان الحد الأخير (أي الحد المضروب في x^0) معدوما، نحتسب 0 أحد جذور المعادلة، ونواصل الخوارزمية بالحد ما قبل الأخير.

8- Sequence of power two:

8- متتالية الأعداد ذات الأس اثنين:

Representing the number two with squares gives this form □□ and representing the number four gives this form □□□□

رسم العدد اثنان بمربعات يعطي هذا الشكل □□
ورسم العدد أربعة يعطي هذا الشكل □□□□

- Representing the number two raised to power two 2^2 gives

- رسم العدد اثنان أس اثنان 2^2 هو

□□
□□

Where the sum of squares is 4, i.e. 2×2

حيث مجموع المربعات هو 4 أي 2×2

- Representing the number four raised to power two 4^2 gives

- رسم العدد أربعة أس اثنان 4^2 هو

□□□□
□□□□
□□□□
□□□□

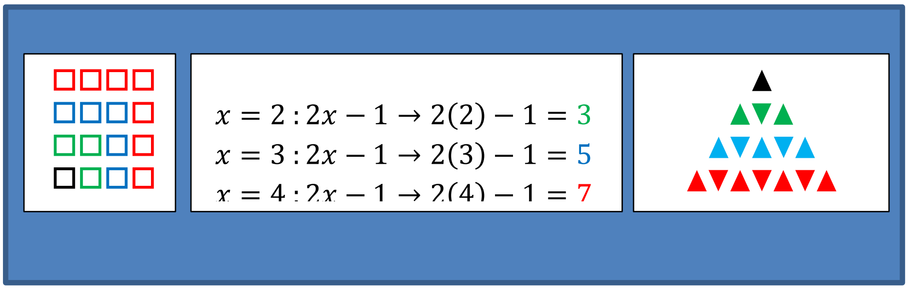
Where the sum of squares is 16, i.e. 4×4

حيث مجموع المربعات هو 16 أي 4×4

It can be stated that the sum of squares increases with the function:

يُلاحَظ أن عدد المربعات يتزايد في كل مرة بالدالة:

$$2x - 1$$



$$x = 1 \to x^2 = 2(1) - 1 = 1 \to 1^2 = 1$$

$$x = 2 \to 2(2) - 1 = 3 \to 2^2 = 1 + 3 = 4$$

$$x = 3 \to 2(3) - 1 = 5 \to 3^2 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$x = 4 \to 2(4) - 1 = 7 \to 4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

…

$$x = n \to 2(n) - 1 \to n^2 = 1 + \cdots + 2(n-1) - 1 + 2(n) - 1$$

Whereas for negative numbers[3] the sum of squares increases with the opposite sign of the function:

بينما بالنسبة للأعداد السالبة[2] يتزايد أس اثنين في كل مرة بعكس إشارة الدالة:

$$2x + 1$$

$$x = -1 \rightarrow 2(-1) + 1 = -1 \rightarrow (-1)^2 = -(-1) = 1$$
$$x = -2 \rightarrow 2(-2) + 1 = -3 \rightarrow (-2)^2 = -(-1 - 3) = 4$$
$$x = -3 \rightarrow 2(-3) + 1 = -5 \rightarrow (-3)^2 = -(-1 - 3 - 5) = 9$$
$$x = -4 \rightarrow 2(-4) + 1 = -7 \rightarrow (-4)^2 = -(-1 - 3 - 5 - 7) = 16$$

It can be stated that power two is a sequence that first's term is one and the sum of terms is the last term raised to power two, because the difference between the contained terms is static, it equals 2.

يمكن القول أن أس اثنين هي متتالية حدّها الأول هو واحد ومجموع حدودها هو الحد الأخير أس اثنين، لأن الفرق بين الحدود المجموعة ثابت، يساوي 2.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$$
$$x_n = 2n - 1$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2$$

9- Square root:

9- الجذر التربيعي:

To find the square root of a number, we represent the number as squares, then we divide up the squares as a square shape.

لإيجاد الجذر التربيعي لعدد نمثّل العدد على شكل مربّعات، ثم نقسّم المربّعات على شكل مربّع.

E.g. 1:

مثال 1:

Representation of number 4 as squares:

العدد 4 على شكل مربّعات:

□□□□

Dividing up the squares as square shape:

تقسيم المربّعات الأربعة على شكل مربّع:

□□
□□

The square root of 4 is 2 because we have two rows.

جذر العدد 4 هو 2 لأن لدينا صفّين.

E.g. 2:

مثال 2:

Representation of number 2 as squares

العدد 2 على شكل مربّعات:

□□

[2] يعتبر هذا تصورا أوليا، وقد يكون خاطئا، لقد تم بناء النسخة الأولى من الكود البرمجي على أساس هذا التصور، وهو مثبت في المراجعة الأولى من هذا الكتاب. انظر العنوان 11

[3] This is a preliminary conception, and it may be wrong, the first version of the code was built upon it, it is included in the first revision of the book. c.f. title 11

Dividing up the two squares as square shape:

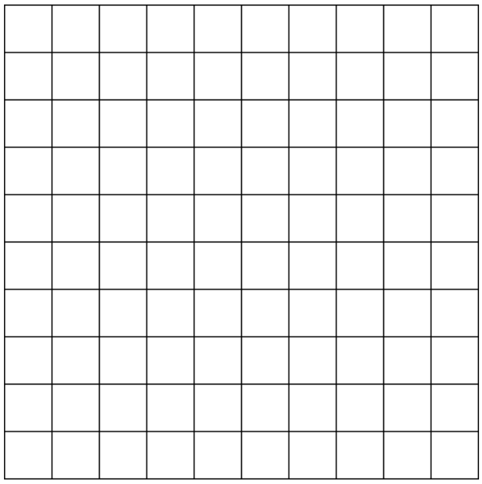
تقسيم المربّعين الاثنين على شكل مربّع:

One square remains

يبقى مربّع واحد

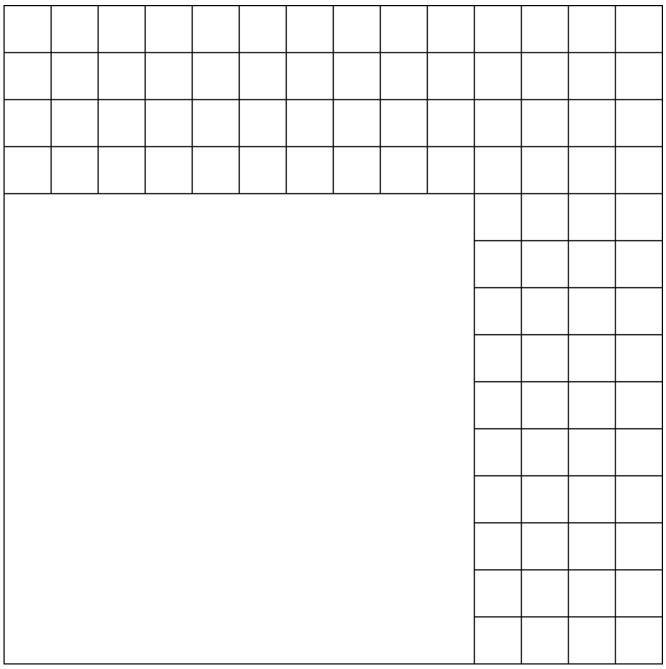
We divide it up to 100 squares

نقسّمه على مئة مربّع



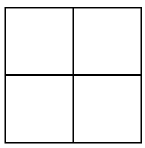
We divide up the 100 squares by the first square

نوزّع المربعات المئة على المربع الأول



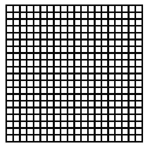
Four squares remain

يبقى أربع مربعات



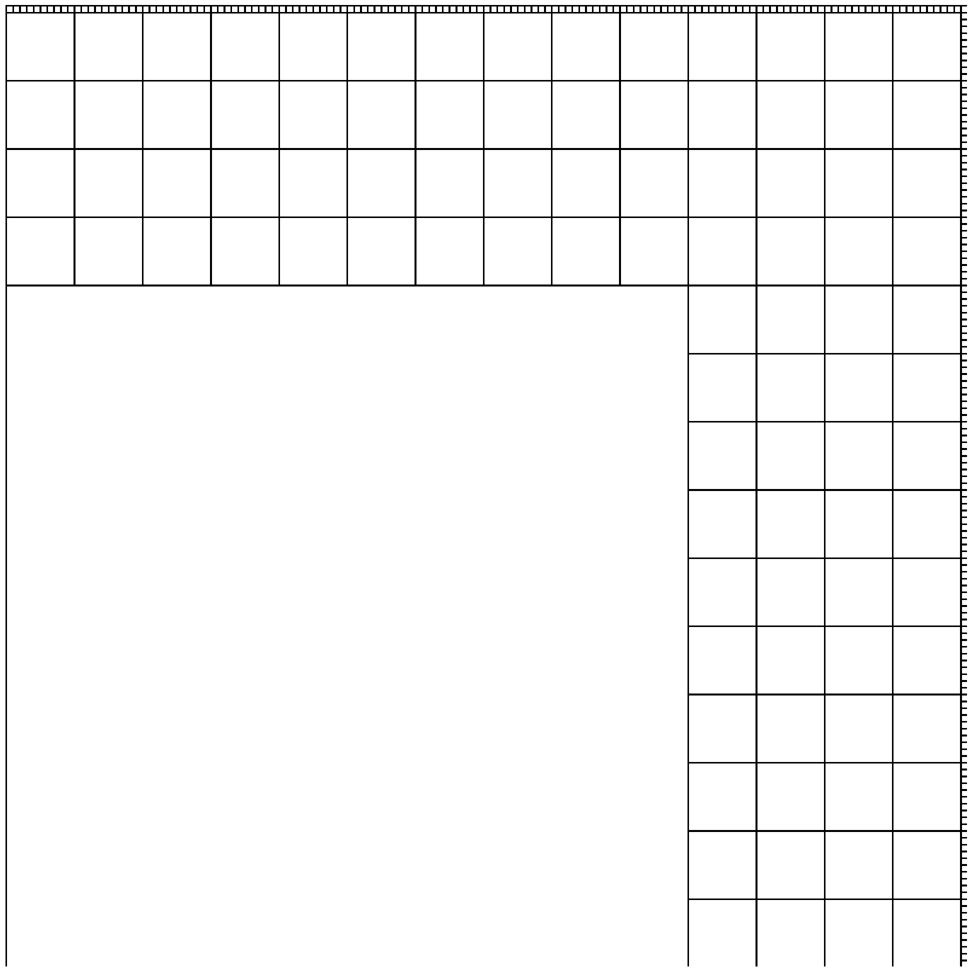
We divide each square to 100 squares

نقسّم كل مربّع على مئة مربّع



We divide the 400 square by the first square

نوزّع المربعات الأربع مئة على المربع الأول



The square root of 2 with two digits after the decimal point is 1.41 according to the numbers of rows.

الجذر التربيعي لـ2 بعددين بعد الفاصلة هو 1.41 حسب عدد الصفوف.

We may proceed similarly to find more numbers after the decimal point.

يمكن مواصلة العملية لإيجاد المزيد من الأعداد بعد الفاصلة.

10- Theories on square root :

10- نظريات حول الجذر التربيعي:

Theory 1:

نظرية 1:

All natural numbers that have a decimal point in their square roots, have an infinite number of digits after the decimal point, as there is no number from 1 to 9 [in decimal base, or from 1 to $10-1$ in other bases] that

جميع الأعداد الطبيعية التي تحتوي جذورها التربيعية على فاصلة، لديها عدد غير منته من الأعداد بعد الفاصلة، لأنه لا يوجد عدد من 1 إلى 9 [في نظام العد العشري، أو من

wen multiplied by itself gives 0 on the right.

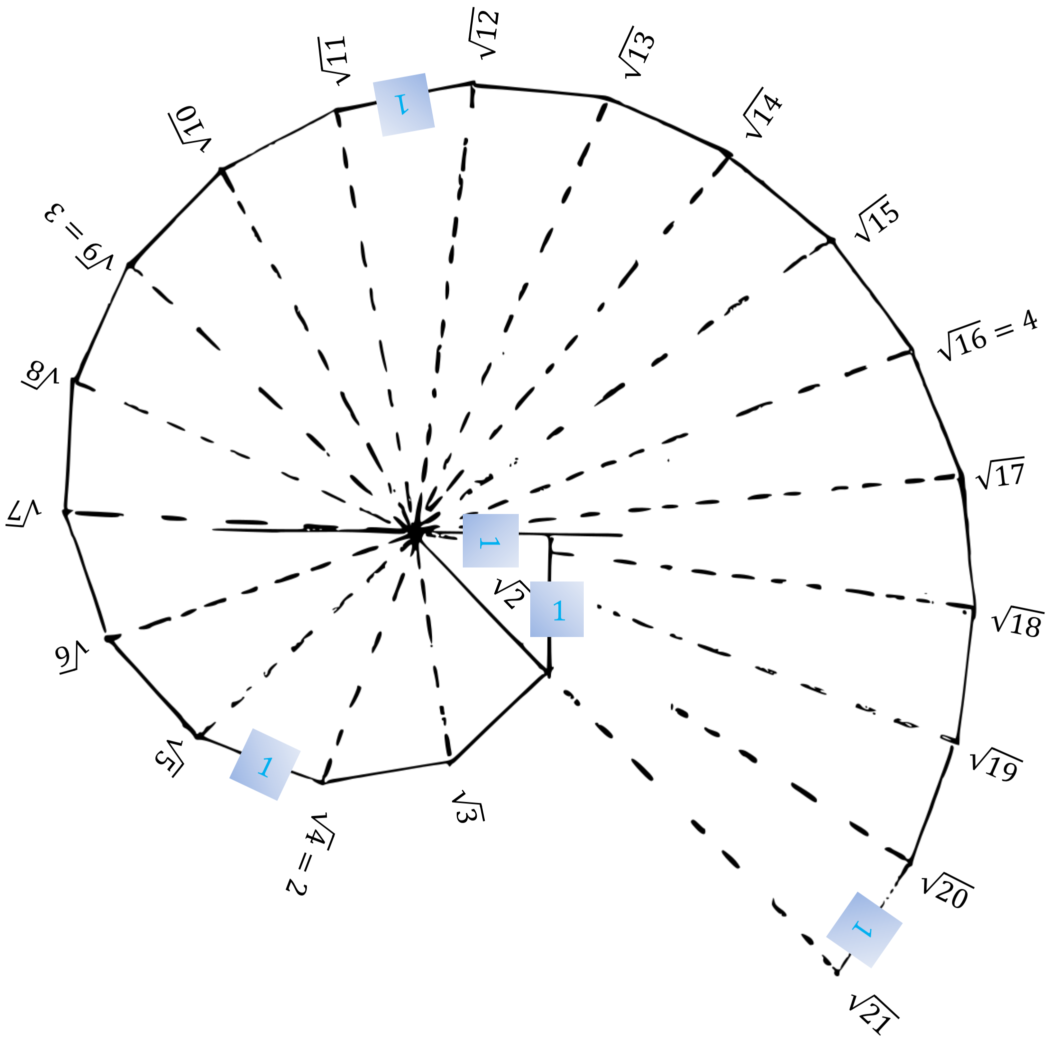
1 إلى $1 - 10$ في أنظمة العد الأخرى] مَضروبه في نفسه يعطي 0 على اليمين.

Theory 2:

نظرية 2:

According to the above, square roots that contain an infinite number of digits after the comma are unreal roots, because in fact they can be represented geometrically according to the Pythagorean theorem, and in their representation they are finite.

حسب ما تقدم، الجذور التربيعية التي تحتوي عدد غير منته من الأرقام بعد الفاصلة هي جذور غير حقيقة، لأنه في الحقيقة يمكن تمثيلها هندسيا بحسب نظرية فيثاغورس، وهي في تمثيلها منتهية.



Theory 3:

نظرية 3:

The most efficient representation of an unreal square root is $\sqrt{x}$, that is, by avoiding the approximate values.

التمثيل الأكثر فعالية للجذر التربيعي غير الحقيقي هو $\sqrt{x}$ أي باجتناب القيم التقريبية.

11- Finding the next real square of a real square:

11- إيجاد المربع الحقيقي الموالي لمربع حقيقي:

A real square is a square whose root does not contain an infinite number of digits after the comma. (See theory 1 in title 10).

المقصود بمربع حقيقي هو المربع الذي جذره لا يحتوي عدد غير منته من الأرقام بعد الفاصلة. (انظر نظرية 1 في العنوان 10).

The real square y that follows the real square x can be found with the following function:

يمكن إيجاد المربع الحقيقي y الموالي للمربع الحقيقي x بالدالة التالية:

$$y = x + [2(\sqrt{x}) + 1]$$

E.g.

مثال:

$$x = 81, (\sqrt{x} = 9)$$
$$y = 81 + [2(\sqrt{81}) + 1]$$
$$y = 81 + [2(9) + 1]$$
$$y = 81 + [18 + 1]$$
$$y = 81 + [19]$$
$$y = 100$$
$$\sqrt{y} = 10$$

12- Finding the next real square of a real square:

12- إيجاد المربع الحقيقي السابق لمربع حقيقي:

The real square y that preceeds the real square x can be found with the following function:

يمكن إيجاد المربع الحقيقي y السابق للمربع الحقيقي x بالدالة التالية:

$$y = x - [2(\sqrt{x}) - 1]$$

E.g.

مثال:

$$x = 81, (\sqrt{x} = 9)$$
$$y = 81 - [2(\sqrt{81}) - 1]$$
$$y = 81 - [2(9) - 1]$$
$$y = 81 - [18 - 1]$$
$$y = 81 - [17]$$
$$y = 64$$
$$\sqrt{y} = 8$$

13- Terms of power three:

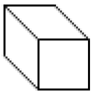
13- حدود الأعداد ذات الأس ثلاثة:

Power three numbers can be represented as cubes.

الأعداد ذات الأس ثلاثة يمكن تمثيلها على شكل مكعبات.

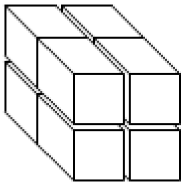
The number 1 raised to power 3 = 1 (1 cube)

العدد 1 أس 3 = 1 (مكعب واحد)



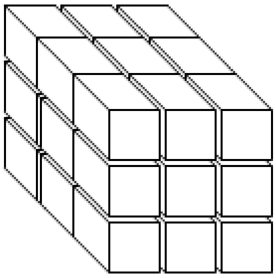
2 raised to power 3 = 8 (8 cubes)

العدد 2 أس 3 = 8 (8 مكعبات)



3 raised to power 3 = 27 (27 cubes)

العدد 3 أس 3 = 27 (27 مكعب)



The sum of power 3 increases with the function:

يتزايد أس 3 كل مرة بالدالة:

$$3x^2 - 3x + 1$$

This can be remarked the same way as power 2.

يمكن أن يلاحظ هذا بنفس طريقة أس 2.

$$x = 1 \to 3(1) - 3(1) + 1 = {\color{red}1} \to 1^3 = {\color{red}1}$$
$$x = 2 \to 3(4) - 3(2) + 1 = {\color{red}7} \to 2^3 = 1 + {\color{red}7} = 8$$
$$x = 3 \to 3(9) - 3(3) + 1 = {\color{red}19} \to 3^3 = 1 + 7 + +{\color{red}19} = 27$$
$$x = 4 \to 3(16) - 3(4) + 1 = {\color{red}37} \to 4^3 = 1 + 7 + 19 + {\color{red}37} = 64$$
$$\dots$$
$$x = n \to 3(n^2) - 3(n) + 1 \to n^3 = 1 + \dots + 3(n^2) - 3(n) + 1$$

Whereas for <u>negative numbers</u>[5] the sum of power 3 increases with the opposite sign of the function:

بينما بالنسبة <u>للأعداد السالبة</u>[4] يتزايد أس 3 في كل مرة بعكس إشارة الدالة

$$3x^2 + 3x + 1$$

$$x = -1 \to 3(-1^2) + 3(-1) + 1 = {\color{red}1} \to (-1)^3 = -({\color{red}1}) = -1$$

$$x = -2 \to 3(-2^2) + 3(-2) + 1 = {\color{red}7} \to (-2)^3 = -({\color{red}1 + 7}) = -8$$

---

[4] يعتبر هذا تصورا أوليا، وقد يكون خاطئا، لقد تم بناء النسخة الأولى من الكود البرمجي على أساس هذا التصور، وهو مثبت في المراجعة الأولى من هذا الكتاب. انظر العنوان 14

[5] This is a preliminary conception, and it may be wrong, the first version of the code was built upon it, it is included in the first revision of the book. c.f. title 14

$$x = -3 \rightarrow 3(-3^2) + 3(-3) + 1 = 19 \rightarrow (-3)^3 = -(1 + 7 + 19) = -27$$
$$x = -4 \rightarrow 3(-4^2) + 3(-4) + 1 = 37 \rightarrow (-4)^3 = -(1 + 7 + 19 + 37) = -64$$

14- Finding the next real cube of a real cube:

14- إيجاد المكعب الحقيقي الموالي لمكعب حقيقي:

The real cube y that follows the real cube x can be found with the following function:

يمكن إيجاد المكعب الحقيقي y الموالي للمكعب الحقيقي x بالدالة التالية:

$$y = x + \left[3(\sqrt[3]{x})^2 + 3(\sqrt[3]{x}) + 1\right]$$

E.g.

مثال:

$$x = 64, (\sqrt[3]{x} = 4)$$
$$y = 64 + \left[3(\sqrt[3]{64})^2 + 3(\sqrt[3]{64}) + 1\right]$$
$$y = 64 + [3(4)^2 + 3(4) + 1]$$
$$y = 64 + [48 + 12 + 1]$$
$$y = 64 + [61]$$
$$y = 125$$
$$\sqrt[3]{y} = 5$$

15- Finding the next real cube of a real cube:

15- إيجاد المكعب الحقيقي السابق لمكعب حقيقي:

The real cube y that precedes the real cube x can be found with the following function:

يمكن إيجاد المكعب الحقيقي y السابق للمكعب الحقيقي x بالدالة التالية:

$$y = x - \left[3(\sqrt[3]{x})^2 - 3(\sqrt[3]{x}) + 1\right]$$

E.g.

مثال:

$$x = 64, (\sqrt[3]{x} = 4)$$
$$y = 64 - \left[3(\sqrt[3]{64})^2 - 3(\sqrt[3]{64}) + 1\right]$$
$$y = 64 - [3(4)^2 - 3(4) + 1]$$
$$y = 64 - [48 - 12 + 1]$$
$$y = 64 - [37]$$
$$y = 27$$
$$\sqrt[3]{y} = 3$$

16- Generalization of nth power terms increase:

16- تعميم تزايد حدود الأعداد ذات الأس ن:

Power 2 increases with the function:

يتزايد أس 2 في كل مرة بـ

$$(x-1)+x$$
$$2x-1$$

Power 3 increases with the function:

يتزايد أس 3 في كل مرة بـ

$$(2x-1)(x-1)+x^2$$
$$3x^2-3x+1$$

Power 4 increases with the function:

يتزايد أس 4 في كل مرة بـ

$$(3x^2-3x+1)(x-1)+x^3$$
$$4x^3-6x^2+4x-1$$

Power 5 increases with the function:

يتزايد أس 5 في كل مرة بـ

$$(4x^3-6x^2+4x-1)(x-1)+x^4$$
$$5x^4-10x^3+10x^2-5x+1$$

Power 6 increases with the function:

يتزايد أس 16 في كل مرة بـ

$$16x^{15}-120x^{14}+560x^{13}-1820x^{12}+4368x^{11}-8008x^{10}+11440x^9-12870x^8+11440x^7-8008x^6+4368x^5-1820x^4+560x^3-120x^2+16x-1$$

17- Generalization of nth power terms decrease:

17- تعميم تناقص حدود الأعداد ذات الأس ن:

Power 2 decreases with the function:

يتناقص أس 2 في كل مرة بـ

$$(x+1)+x$$
$$2x+1$$

Power 3 decreases with the function:

يتناقص أس 3 في كل مرة بـ

$$(2x+1)(x+1)+x^2$$
$$3x^2+3x+1$$

Power 4 decreases with the function:

يتناقص أس 4 في كل مرة بـ

$$(3x^2+3x+1)(x+1)+x^3$$
$$4x^3+6x^2+4x+1$$

Contents المحتويات

مقدمة.. I

Introduction I

1- المعادلات من الدرجة الثانية:.. 1

1- Quadratic equations: 1

2- حل المعادلات من الدرجة الثانية:.. 1

2- Solving quadratic equations:.. 1

3- ملاحظة حول استعمال قانون المميز : 2

3- A remark about the discriminant law:.. 2

4- برهنة مُقترَحَة على قانون المميز:.. 3

4- A suggested proof of the discriminant law: 3

5- طبيعة المميز: 5

5- The nature of the discriminant:.. 5

6- التعويض بالحد الأوسط:.. 5

6- Substituting by the middle term: 5

7- حل المعادلات كثيرة الحدود:.. 7

7- Solving polynomial equations: 7

8- متتالية الأعداد ذات الأس اثنين:.. 8

8- Sequence of power two: 8

9- الجذر التربيعي: 9

9- Square root:.. 9

10- نظريات حول الجذر التربيعي:.. 11

10- Theories on square root : 11

11- إيجاد المربع الحقيقي الموالي لمربع حقيقي:.. 13

11- Finding the next real square of a real square: 13

12- إيجاد المربع الحقيقي السابق لمربع حقيقي: 13
12- Finding the next real square of a real square: 13
13- حدود الأعداد ذات الأس ثلاثة: 13
13- Terms of power three: 13
14- إيجاد المكعب الحقيقي الموالي لمكعب حقيقي: 15
14- Finding the next real cube of a real cube: 15
15- إيجاد المكعب الحقيقي السابق لمكعب حقيقي: 15
15- Finding the next real cube of a real cube: 15
16- تعميم تزايد حدود الأعداد ذات الأس ن: 16
16- Generalization of nth power terms increase: 16
17- تعميم تناقص حدود الأعداد ذات الأس ن: 16
17- Generalization of nth power terms decrease: 16
المحتويات 17
Contents 17