# 2. TORZIONO, MATEMATIČKO I FIZIČKO NJIHALO

## 2.1. TORZIONO NJIHALO

Sastoji se od tijela obješenog na žicu tako da je objesište na vertikali koja prolazi kroz težište tijela T.

SLIKA: TORZIONO NJIHALO – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.20. STR.33

Tijelo iz ravnotežnog položaja zakrenemo za kut $\theta$, žica se tordira i djeluje na tijelo momentom sile koji je proporcionalan $\theta$, ali je suprotnog smjera: $M = -D\theta$

$M$ - zbog utjecaja tog momenta sile tijelo titra oko ravnotežnog položaja
$D$ - torziona konstanta – ovisi o materijalu i dimenzijama žice

Jednadžba gibanja:

$$M = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -D\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{I}\theta = 0$$

*I* – moment tromosti s obzirom na os OT

Jednadžba istog oblika kao: $\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{k}{m}s = 0$ pa zaključujemo da torziono njihalo harmonički titra.

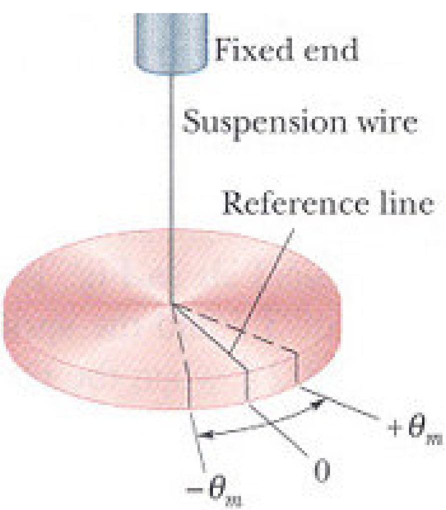
Rješenje je: $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$

$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}}$ kružna frekvencija

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$ period (ovisi o momentu tromosti tijela *I*, o elastičnim svojstvima žice (torziona konstanta *D*), ne ovisi o amplitudi)

Tiranje torzionog njihala je harmoničko <u>i za velike amplitude</u> što nije slučaj kod matematičkog i fizičkog njihala.

Pictures of Torsional Pendulum Clock (German Make)



# 2.2. MATEMATIČKO NJIHALO

To je sitno tijelo ili materijalna točka, koja njiše obješena o nerastezljivu, laganu nit duljine *l*, čiju masu zanemarimo.

SLIKA: MATEMATIČKO NJIHALO – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.15. STR.26

a) njihalo u mirovanju – napetost niti uravnotežuje silu težu: $N = G = mg$
b) njihalo izvučeno za neki kut $\theta$ iz položaja ravnoteže:
- normalnu komponentu sile teže uravnotežuje napetost niti: $N = mg\cos\theta$
- tangencijalna komponenta sile usmjerena prema ravnotežnom položaju: $F_t = -mg\sin\theta$ (zbog djelovanja te sile materijalna točka njiše oko položaja ravnoteže; predznak '–' jer sila djeluje u smjeru suprotnom od smjera povećanja kuta $\theta$)

Sila nije proporcionalna pomaku $\theta$, već $\sin\theta$ pa sila nije harmonička i gibanje njihala nije harmoničko.

No za male $\theta$ vrijedi $\sin\theta \approx \theta$ pa je $F = -mg\theta$ i sila je harmonička i gibanje njihala je analogno gibanju harmoničkog oscilatora (za male amplitude).

Za velike amplitude njihanje matematičkog njihala nije harmoničko.

Jednadžba gibanja matematičkog njihala:

$$ma_t = F_t = -mg\sin\theta$$

Za male amplitude: $ma_t = -mg\theta$, odn. $a_t = -g\theta$.

Uz $a_t = l\alpha$, gdje je:

| | |
|---|---|
| $a_t$ | tangencijalna akceleracija |
| $\alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ | kutna akceleracija |
| $l$ | polumjer putanje |

$$a_t = l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Rješenje: $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$

| | |
|---|---|
| $\theta_0$ | amplituda |
| $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ | kružna frekvencija |
| $\varphi_0$ | početna faza |
| $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ | period (ne ovisi o amplitudi i masi već samo o duljini njihala $l$ i akceleraciji sile teže $g$) |

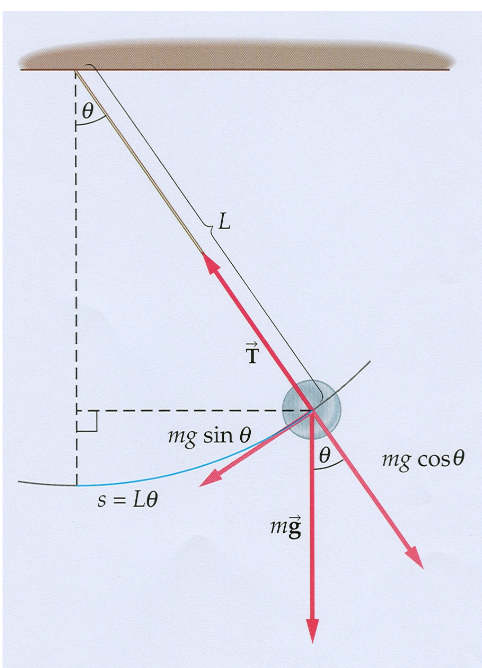
Za veće amplitude period njihala ovisi o amplitudi $\theta_0$ i raste s njom:

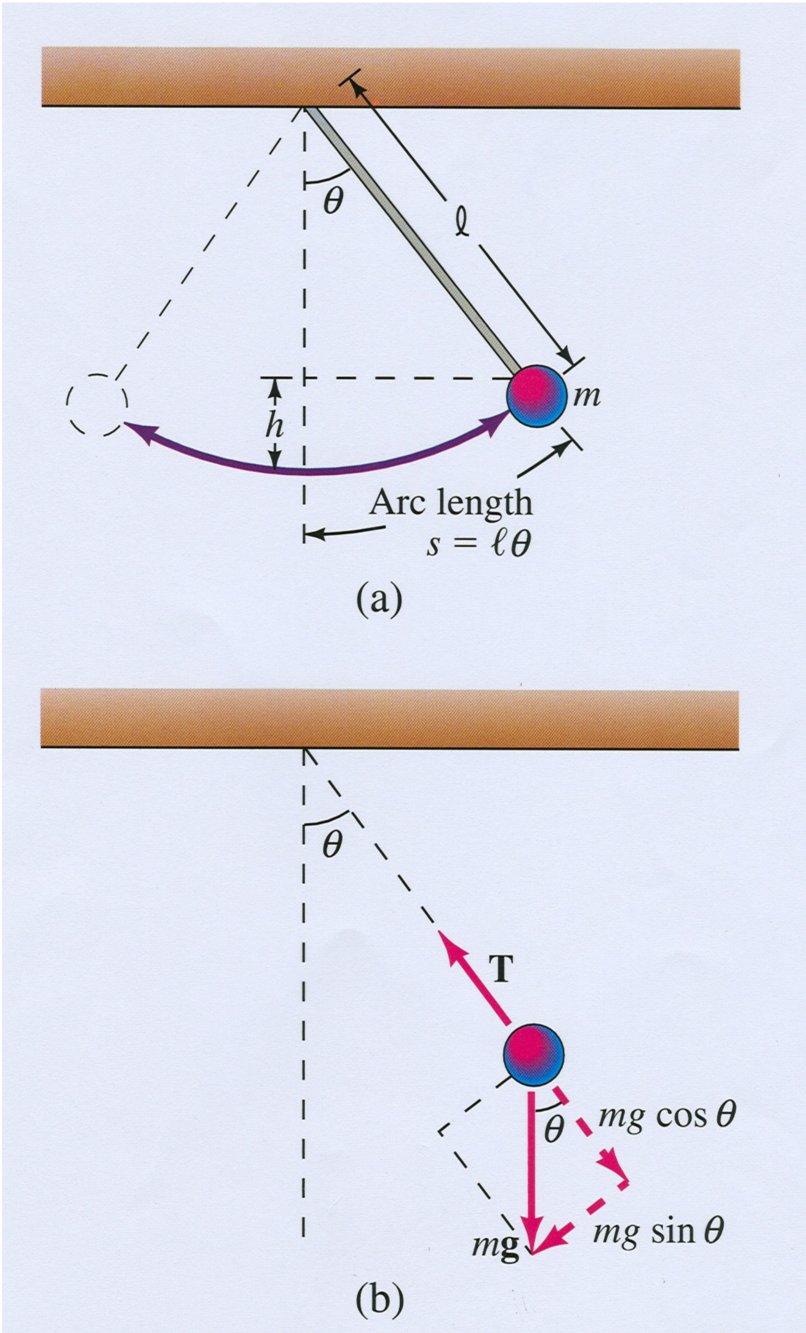
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}\sin^6\frac{\theta_0}{2} + \ldots\right]$$

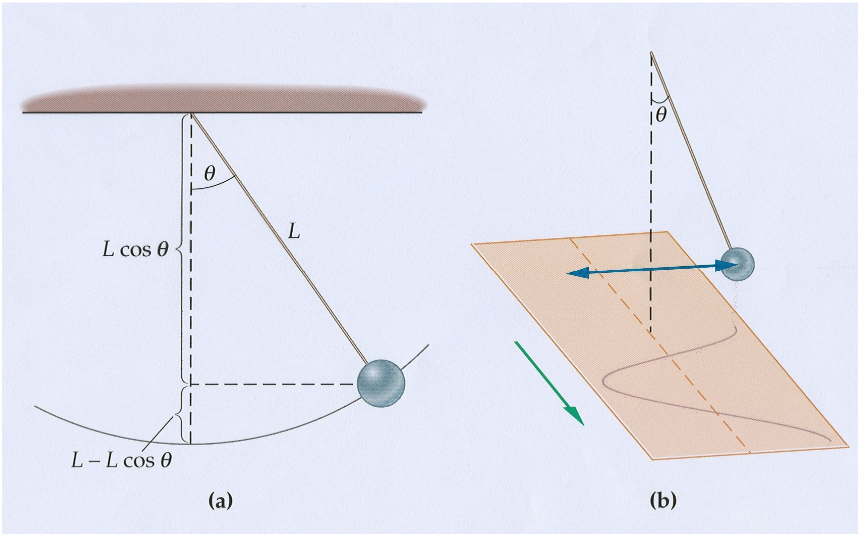
Članovi reda se brzo smanjuju pa je dovoljno uzeti prva 2-3 člana:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\theta_0}{2} + \ldots\right]$$

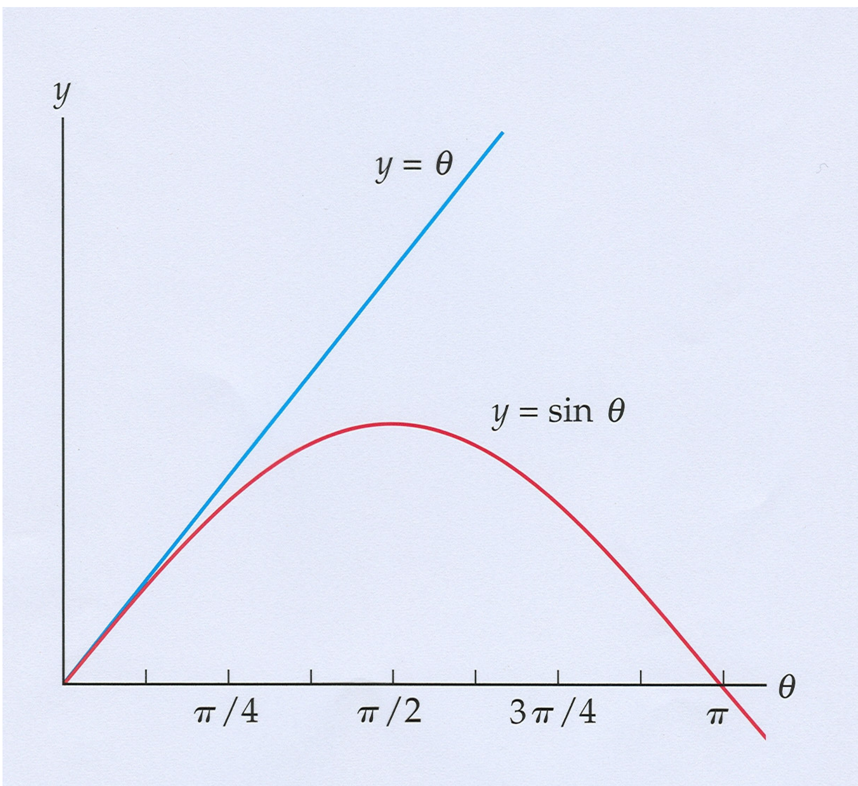
Ovisnost perioda matematičkog njihala o amplitudi se može pogledati u tablici u knjizi, ali time se nećemo baviti već ćemo razmatranja najčešće svesti na matematičko njihalo koje njiše malim amplitudama.




θ
ℓ
m
h
Arc length
s = ℓθ
(a)
θ
T
θ
mg cos θ
mg sin θ
mg
(b)



θ
L
L cos θ
L − L cos θ
(a)
θ
(b)

y
y = θ
y = sin θ
θ
π /4
π /2
3π /4
π

# 2.3. FIZIČKO NJIHALO

To je kruto tijelo koje zbog utjecaja sile teže njiše oko horizontalne osi koja ne prolazi kroz težište tijela.

SLIKA: FIZIČKO NJIHALO – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.16. STR.29

Moment sile koji uzorkuje titranje:

$$M = -mgL\sin\theta$$

$L$ udaljenost osi rotacije O od težišta tijela T

$\theta$ kut koji spojnica $\overline{OT}$ zatvara s vertikalom

Predznak '-' jer moment sile nastoji smanjiti kut $\theta$.

Za male amplitude: $\sin\theta \approx \theta$

$$M = -mgL\theta$$

Jednadžba gibanja fizičkog njihala (jednadžba rotacije krutog tijela oko nepomične osi za male amplitude):

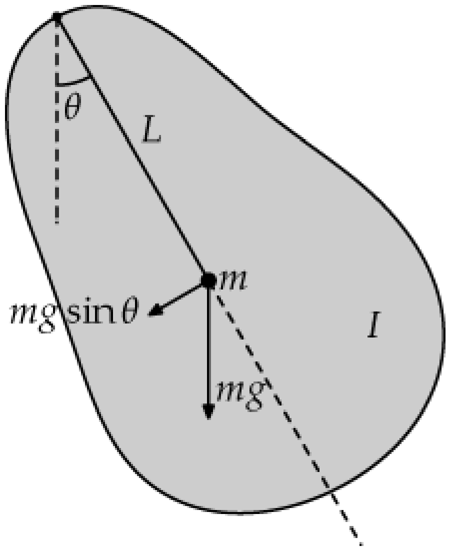
$$M = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\theta$$

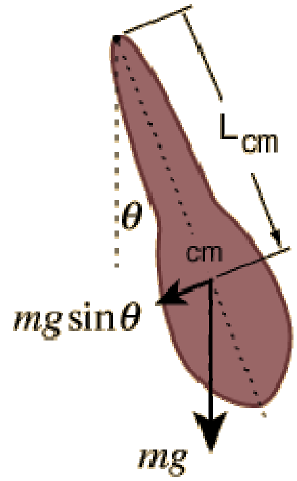
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgL}{I}\theta = 0$$ jednadžba harmoničkog titranja

$I$ moment tromosti tijela s obzirom na os rotacije

Rješenje: $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$ $\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$

Period fizičkog njihala za male amplitude: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$




Računamo koliku duljinu mora imati matematičko njihalo da bi imalo isti period kao fizičko njihalo:

$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ $\qquad$ $T_f = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$ $\qquad$ $T_m = T_f$

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

$l_r = \frac{I}{mL}$ $\qquad$ REDUCIRANA DULJINA FIZIČKOG NJIHALA

Promatrajmo fizičko njihalo u obliku štapa koje njiše oko osi koja prolazi jednim krajem štapa:

SLIKA: REDUCIRANA DULJINA FIZIČKOG NJIHALA U OBLIKU ŠTAPA – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.17. STR.30

| | |
|---|---|
| $d$ | duljina štapa |
| $I = md^2/3$ | moment tromosti štapa |

Reducirana duljina takvog njihala: $l_r = \frac{I}{mL}$, $I = md^2/3$, $L = d/2$

Slijedi: $l_r = \frac{md^2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{md}{2}} = \frac{2}{3}d$

Matematičko njihalo duljine $l_r = \frac{2}{3}d$ imat će isti period kao štap duljine $d$.

Točka C na štapu, koja je od osi udaljena za reduciranu duljinu $l_r$, zove se SREDIŠTE TITRANJA.

Može se dokazati da fizičko njihalo obješeno u središtu titranja (točka C) ima isto vrijeme titranja kao i kad njiše oko točke O.

Isti primjer štapa:

SLIKA: FIZIČKO NJIHALO OBJEŠENO U SREDIŠTU NJIHANJA – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.18. STR.31

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgL}}$ $\qquad I_0 = I_{CM} + mL^2$ prema Steinerovom poučku

b) $T' = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{mgL_1}}$ $\qquad I_1 = I_{CM} + mL_1^2$

$I_{CM}$ moment tromosti s obzirom na os kroz težište T

$L + L_1 = l_r = \frac{I_0}{mL}$ reducirana duljina

$$L_1 = l_r - L = \frac{I_0}{mL} - L = \frac{I_0 - mL^2}{mL} = \frac{I_{CM}}{mL}$$

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{mgL_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + mL_1^2}{mgL_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + \frac{mI_{CM}^2}{m^2L^2}}{mg\frac{I_{CM}}{mL}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1 + \frac{I_{CM}}{mL^2}}{\frac{g}{L}}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{\frac{mL^2 + I_{CM}}{mL^2}}{\frac{g}{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{CM} + mL^2}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgL}} = T$$

Njihalo koje se može objesiti tako da se njiše oko točke O i oko točke C (središta titranja) zove se REVERZIONO NJIHALO.

Za reverziono njihalo je lako odrediti reduciranu duljinu pa se mjerenjem perioda $T$ reverzionog njihala može izračunati akceleracija sile teže $g$.

## CENTAR UDARA

Promatrat ćemo gibanje krutog tijela kad na njega djeluje impulsna sila u kratkom vremenskom intervalu.

Promatrat ćemo fizičko njihalo u obliku štapa obješenog na jednom njegovom kraju.

Ako štap udarimo na udaljenosti $a$ od osi, u točku P, onda će impuls momenta sile biti:

$$M\Delta t = Fa\Delta t$$

$Fa$ - sila $F$ djeluje na kraju sile $a$

Impuls momenta sile će proizvesti promjenu kutne količine gibanja:

$$\Delta L = M\Delta t = I\omega - I\omega_0 = Fa\Delta t$$

Odatle je kutna brzina: $\omega = \omega_0 + Fa\Delta t / I$

Zbog impulsa sile CM će se početi gibati translatorno brzinom $v_{CM} = l\omega / 2$, gdje je $l/2$ udaljenost CM od objesišta.

$$v_{CM} = \frac{l}{2}(\omega_0 + \frac{Fa\Delta t}{I})$$

Pri djelovanju sile na štap doći će do gibanja štapa u smjeru sile, pa će objesište djelovati silom $\vec{R}$ (reakcijom prema 3. Newtonovom zakonu) na tijelo:

-skalarno pisano: $(F - R)\Delta t = m\Delta v_{CM} = mv_{CM} - mv_{CM0}$

$$v_{CM0} = l\omega_0 / 2$$

$$F\Delta t - R\Delta t = m\frac{l}{2}(\omega_0 + \frac{Fa\Delta t}{I} - \omega_0) = \frac{ml}{2}\frac{Fa\Delta t}{I}$$

$$R = F(1 - m\frac{l}{2}\frac{a}{I})$$

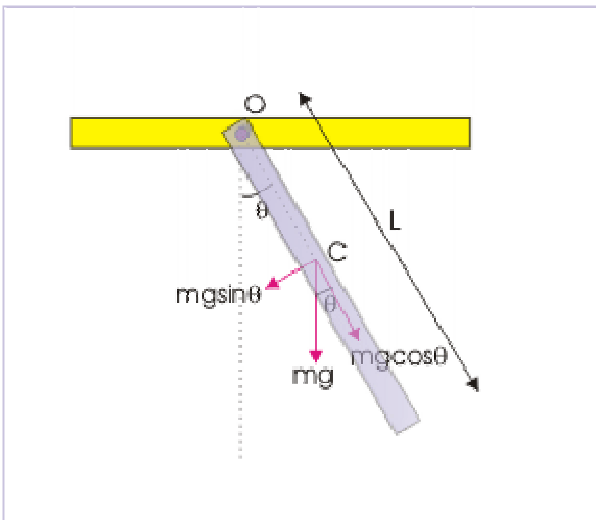
Ako želimo da os „ne osjeti“ da je tijelo udareno, moramo staviti da je sila reakcije $R = 0$:

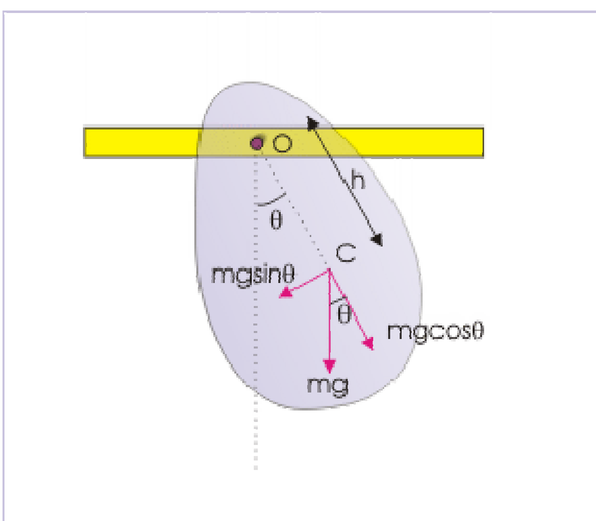
$$0 = F(1 - m\frac{l}{2}\frac{a}{I}) \qquad a = \frac{2I}{ml}$$

Za štap je $I = ml^2/3$ pa je: $a = \frac{2I}{ml} = \frac{2ml^2}{3ml} = \frac{2l}{3}$

Od prije znamo da je reducirana duljina fizičkog njihala za štap jednaka $l_r = \frac{2}{3}l$, što znači da je $a = l_r$.

Točku P zovemo CENTAR UDARA.



Zadatak: Fizičko njihalo

Od tanke žice načinjeno je tijelo mase 120 g u obliku jednakostraničnog trokuta sa stranicom 60 cm. Taj trokut je oslonjen na oštar brid jednim uglom. Izračunajte:

a) moment tromosti i frekvenciju njihanja $f$ za male otklone oko vodoravne osi koja ide osloncem i okomita je na ravninu trokuta,
b) moment tromosti i frekvenciju $f$ njihanja za male otklone oko vodoravne osi koja ide osloncem i leži u ravnini trokuta.