Fizika 2
Domaća zadaća 1

grupa P5, prof. V. Borjanović

19. studenog 2014.

1. Titranje tijela općenito možemo opisati u tri oblika:

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$
$$x(t) = C\cos(\omega t + \phi_c)$$
$$x(t) = D\sin(\omega t + \phi_s)$$

Izrazite sve konstante jedne preko drugih (tj. A i B izrazite prvo preko C i ϕ_c, zatim preko D i ϕ_s, itd., ukupno 12 izraza). Jesu li sve konstante jedinstveno zadane zadanim početnim uvjetima (položajem i brzinom)? Obrazložite.

2. Sa stropa visi opruga konstante $k = 1$ N/m. Imamo uteg mase $m = 2$ kg, kojeg držeći u ruci objesimo za oprugu, tako da se ona ne rastegne. Zatim izmaknemo ruku. Napišite jednadžbu gibanja utega, $x(t)$, ako je x os okrenuta prema gore i ima ishodište na slobodnom kraju nerastegnute opruge.

3. Imamo oprugu konstante k na kojoj visi uteg mase m. Kojom će frekvencijom uteg titrati ako ga malo pomaknemo i pustimo?
Zatim skinemo uteg, prerežemo oprugu na pola, a od dvije polovice napravimo paralelni spoj opruga. Objesimo uteg i pustimo ga da titra. Kojom će frekvencijom uteg sad titrati?

4. Žica konstante torzije $D = 10$ mNm visi sa zida. Na donji kraj žice učvršćen je štap duljine $l = 1$ m i mase $m = 0.16$ kg, i to na sredini njegove dužine, tako da štap stoji horizontalno. Pronadjite period malih torzionih oscilacija sustava. Koliki će biti period ovog sustava ako na svaki kraj štapa stavimo točkastu masu $m' = 0.05$ kg?

5. Odredite omjer perioda oscilacija fizičkog njihala kojeg čini željezni valjkasti štap duljine $l = 1$ m radijusa baze $r = 1$ cm na kraju kojeg je učvršćen drugi željezni valjkasti štap duljine $L = 2$ m radijusa $R = 2$ mm, kad je takvo njihalo obješeno za jedan, odnosno drugi kraj spojenih štapova. Gustoća željeza je 7870kgm^{-3}.

6. a) Napišite stojni val

$$\psi(x,t) = A\cos\omega t \cos kx$$

kao superpoziciju dva putujuća vala $\Psi_1(x,t)$ i $\Psi_2(x,t)$.
b) Napišite putujući val

$$\Psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$

kao superpoziciju dva stojna vala $\psi_1(x,t)$ i $\psi_2(x,t)$.

7. Na sredini plitkog bazena nalazi se točkasti izvor kružnih valova. Koliki je intenzitet valovlja na udaljenosti 10 m od izvora, ako je u na udaljenosti 30 m od izvora intenzitet $100\mathrm{W/m}^2$?

8. Longitudinalni val opisan jednadžbom

$$\xi(x,t) = 3\mathrm{mm}\cos(2\mathrm{s}^{-1}\ t - 4.3\mathrm{m}^{-1}\ x)$$

širi se sredstvom. Opišite jednadžbu gibanja vala iz sustava koji se giba brzinom $v = 1.1$ m/s u odnosu na sredstvo, u smjeru širenja vala.

9. Dva zrcala gibaju se jedno prema drugom brzinom 0.05 c. Pošaljemo laserski snop crvene svjetlosti valne duljine 700 nm s jednog zrcala prema drugom. Nakon koliko odbijanja će se na jednom od zrcala pojaviti plava svjetlost (plavom percipiramo svjetlost valnih duljina izmedju 450 i 495 nm)? Na kojem od zrcala će se prvo pojaviti?

1. zadatak
Prvo gledamo prva dva izraza:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ &= C\left(\cos\omega t\cos\phi_c - \sin\omega t\sin\phi_c\right) \end{aligned}$$

Iz linearne nezavisnosti funkcija sinus i kosinus slijedi da posebno koeficijenti uz $\cos\omega t$, a posebno koeficijenti uz $\sin\omega t$, moraju biti međusobno jednaki u gornja dva izraza:

$$\begin{aligned} B &= -C\sin\phi_c \\ A &= C\cos\phi_c \end{aligned}$$

Inverzne relacije dobijemo dijeljenjem gornjih relacija:

$$\tan\phi_c = -\frac{B}{A},$$

odnosno njihovim kvadriranjem i zbrajanjem:

$$C = \pm\sqrt{A^2 + B^2}$$

Za uobičajenu definiciju kuta na intervalu od 0 do 2π, konstanta ϕ_c nije jedinstveno određena preko A i B (dva rješenja). Niti C nije jedinstveno određen. Konstante C i ϕ_c nisu jedinstveno određene ni iz početnih uvjeta. To je zato što uvijek možemo napraviti transformaciju

$$x(t) \xrightarrow{\phi_c \to \phi_c \pm \pi, \quad C \to -C} x'(t) = x(t)$$

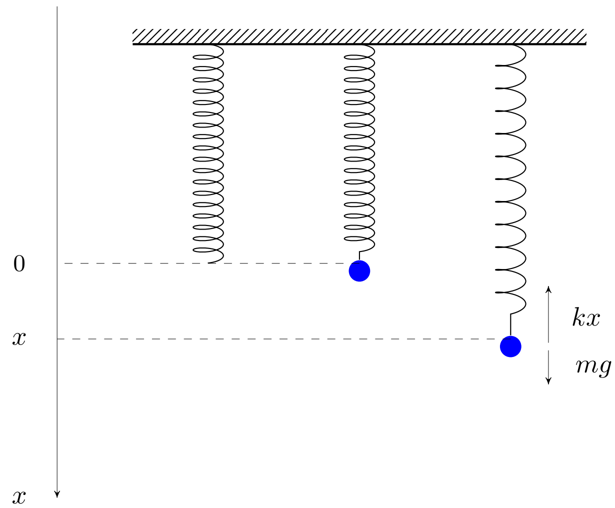
Jedinstvenost možemo postići tako da nametnemo restrikciju na fazu ϕ_c na interval duljine π, ili da nametnemo restrikciju na konstantu C na samo jedan predznak.
Sličnim rezoniranjem dobijemo i vezu prvog i trećeg, te drugog i trećeg oblika

$$\begin{aligned} B &= D\cos\phi_s \\ A &= D\sin\phi_s \\ \tan\phi_s &= \frac{A}{B} \\ D &= \pm\sqrt{A^2 + B^2} \\ \phi_c &= \phi_s \pm \pi \\ C &= \pm D. \end{aligned}$$

Za treći oblik opet se javlja dvostruko rješenje koje treba ograničiti. Prvi oblik ima jedinstvene vrijednosti $A, B \in \mathbb{R}$ za dani set početnih uvjeta,

$$A = \frac{\dot{x}(0)}{\omega}, \quad B = x(0)$$

2. zadatak



$$F = mg - kx = -k\left(x - \frac{mg}{k}\right) = m\ddot{x}$$

$$y \equiv x - \frac{mg}{k}, \quad \ddot{x} = \ddot{y}$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = -\frac{k}{m}y$$

$$\Rightarrow y = A\cos(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow x = A\cos(\omega t + \phi) + \frac{mg}{k}$$

Amplitudu i fazu određujemo iz početnih uvjeta:

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= 0 = -A\omega\sin\phi & \Rightarrow& \phi = 0 \\ x(0) &= 0 = A\cos\phi + \frac{mg}{k} & \Rightarrow& A = -\frac{mg}{k} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow x(t) = \frac{mg}{k}(1 - \cos\omega t) = 19.62\left(1 - \cos\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \text{ m.}$$

U zadatku se tražilo za okrenutost osi prema gore,

$$x_{zad}(t) = -19.62\left(1 - \cos\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \text{ m.}$$

3. zadatak

a)

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

b)

Kad oprugu konstante elastičnosti k presječemo na pola, svaka polovica imati će konstantu elastičnosti k', takvu da će vrijedit

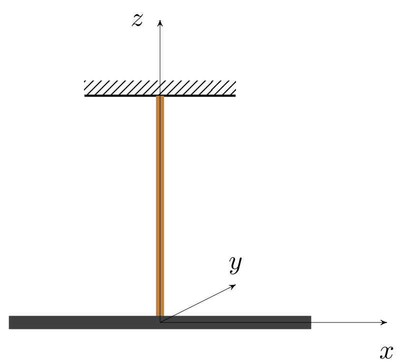
$$\frac{1}{k'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{k} \qquad \{\text{kad ih spojimo u seriju daju opet prvotnu oprugu}\}$$

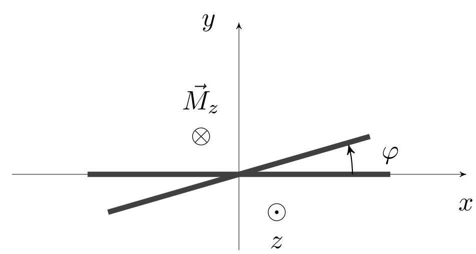
$$k' = 2k$$

Kad sad dvije opruge konstante k' spojimo u paralelu, dobijemo oprugu konstante $k'' = 2k'$, pa

$$\omega_b = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

4. zadatak





Kada zakrenemo štap za neki kut φ u xy ravnini kao na slici, za isti kut se zakrene i donji kraj žice, dok gornji ostaje nepomičan. To stvara moment sile oko objesišta, koji je u donjem kraju žice jednak

$$\vec{M}_z = -D\vec{\varphi},$$

gdje je D konstanta torzije žice, a smjer kuta φ određen je pravilom desne ruke: prsti pokazuju u smjeru porasta kuta, a palac je smjer vektora. Za koord. sustav kao na slici,

$$\vec{\varphi} = \varphi\hat{z},$$

pa

$$\vec{M}_z = -D\varphi\hat{z}$$

Moment sile $\vec{M}_z$ daje štapu kutno ubrzanje prema

$$\vec{M}_z = I_z\ddot{\vec{\varphi}},$$

gdje je I_z moment tromosti štapa oko osi z. Moment tromosti štapa oko osi z je

$$I_z = \int_m x^2 dm = \{dm = \frac{dm}{dx}dx\} = \frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{ml^2}{12}.$$

Slijedi

$$-D\varphi\hat{z} = \frac{ml^2}{12}\ddot{\varphi}\hat{z}$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{12D}{ml^2}\varphi$$

$$\Longrightarrow T = \pi l \sqrt{\frac{m}{3D}} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \text{ s}$$

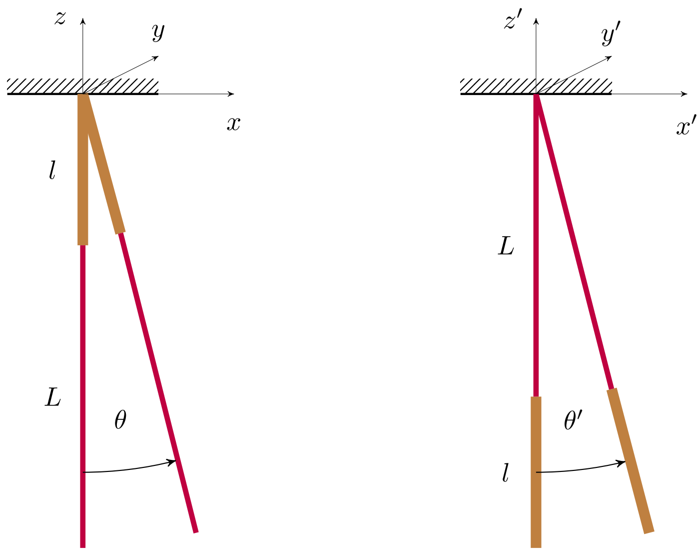
Ako sad na oba kraja štapa stavimo točkaste mase m', moment tromosti postaje

$$I_z' = I_z + 2m' \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{12} \left(m + 6m'\right),$$

pa je novi period

$$T' = \pi l \sqrt{\frac{m + 6m'}{3D}} = \sqrt{\frac{46}{3}} \pi \text{ s}$$

5. zadatak



Otklonimo li štapove za neki kut θ (ili θ'), javlja se moment sile oko objesišta zbog težine štapova. Možemo integrirati doprinose Δmg po duljini štapova, ili uzeti da su težine štapova u njihovim centrima mase. Gledamo lijevi slučaj

$$\vec{M}_g = \vec{r}^{\,l}_{cm} \times m\vec{g} + \vec{r}^{\,L}_{cm} \times M\vec{g},$$

Gdje je m masa kraćeg, a M masa duljeg štapa. Uz

$$\begin{aligned}
\vec{r}^{\,l}_{cm} &= \frac{l}{2}\sin\theta\hat{x} - \frac{l}{2}\cos\theta\hat{z} \\
\vec{r}^{\,L}_{cm} &= \left(l + \frac{L}{2}\right)\sin\theta\hat{x} - \left(l + \frac{L}{2}\right)\cos\theta\hat{z} \\
\vec{g} &= -g\hat{z}
\end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned}
\vec{M}_g &= \left(m\frac{l}{2} + M\left(l + \frac{L}{2}\right)\right) g\sin\theta\hat{y} \qquad \{\theta \ll\} \\
&\approx \frac{gml}{2}\left(1 + \mu_m(2 + \mu_l)\right)\theta\hat{y},
\end{aligned}$$

gdje su uvedene pokrate

$$\mu_l \equiv \frac{L}{l}, \qquad \mu_m \equiv \frac{M}{m} = \frac{LR^2}{lr^2}.$$

Taj moment daje kutno ubrzanje štapovima oko objesišta

$$\vec{M}_g = I_y\ddot{\vec{\theta}},$$

gdje je I_y moment tromosti sustava štapova oko osi y,

$$\begin{aligned}I_y &= \frac{m}{l}\int_{-l}^{0} z^2 dz + \frac{M}{L}\int_{-L-l}^{-l} z^2 dz = \\ &= \frac{ml^2}{3} + \frac{M}{3L}[(L+l)^3 - l^3] \\ &= \frac{ml^2}{3}\left(1+\mu_m(\mu_l^2+3\mu_l+3)\right)\end{aligned}$$

Smjer kuta θ je prema crtežu

$$\vec{\theta} = -\theta\hat{y}.$$

Sve zajedno,

$$\begin{aligned}\frac{gml}{2}\left(1+\mu_m(2+\mu_l)\right)\theta\hat{y} &= -I_y\ddot{\theta}\hat{y} \\ \ddot{\theta} &= -\frac{gml\left(1+\mu_m(2+\mu_l)\right)}{2I_y}\theta\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g\left(1+\mu_m(2+\mu_l)\right)}{2l\left(1+\mu_m(\mu_l^2+3\mu_l+3)\right)}}$$

Za desni slučaj dobijemo analognim postupkom

$$\omega' = \sqrt{\frac{3g\left(1+\mu_M(2+\mu_L)\right)}{2L\left(1+\mu_M(\mu_L^2+3\mu_L+3)\right)}}$$

gdje su sad pokrate

$$\mu_L \equiv \frac{l}{L}, \qquad \mu_M \equiv \frac{m}{M} = \frac{lr^2}{LR^2}.$$

Napomena: ponovite postupak za drugi (desni) slučaj. To je uvijek dobra provjera. Također, kad dobijete komplicirane izraze kao što su gornji, sjetite se napraviti dimenzionalnu analizu. Dobra mj. jedinica ne mora značiti i točan izraz, no ako vam se potkrade m pod korijenom gornjeg izraza, ili ne skratite l do kraja pa ostane u nazivniku l^2, možete to otkriti ako gledate mjernu jedinicu.

Traženi omjer je

$$\frac{T}{T'} = \sqrt{\mu_L\frac{\left(1+\mu_m(\mu_l^2+3\mu_l+3)\right)\left(1+\mu_M(2+\mu_L)\right)}{\left(1+\mu_M(\mu_L^2+3\mu_L+3)\right)\left(1+\mu_m(2+\mu_l)\right)}} = \sqrt{\frac{731}{1771}} \approx 0.64\ .$$

Uočimo kako on ovisi samo o omjerima duljina i radijusa štapova.

6. zadatak

a)

$$\psi(x,t) = A\cos\omega t\cos kx = \frac{A}{2}\left(\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)\right),$$

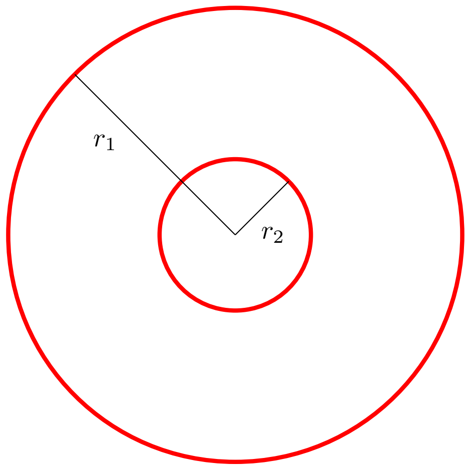
$$\Rightarrow \Psi_1(x,t) = \frac{A}{2}\cos(\omega t - kx), \qquad \Psi_2(x,t) = \frac{A}{2}\cos(\omega t + kx)$$

b)

$$\Psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx) = A\left(\cos\omega t\cos kx + \sin\omega t\sin kx\right)$$

$$\Rightarrow \psi_1(x,t) = A\cos\omega t\cos kx, \qquad \psi_2(x,t) = A\sin\omega t\sin kx$$

7. zadatak
Bazen je plitak zato da ne nastaju kuglasti, nego kružni valovi. Intenzitet kružnih valova opada linearno s radijusom udaljenosti od izvora.



$$P = I_1 2\pi r_1 h = I_2 2\pi r_2 h,$$

gdje je P snaga izvora, I_1 i I_2 su intenziteti na udaljenosti r_1, odnosno r_2, a h je dubina bazena.

$$\Rightarrow I_2 = \frac{I_1 r_1}{r_2} = 300 \text{ Wm}^{-2}$$

8. zadatak
Iz jednadžbe gibanja vala vidimo da se val giba u desno,

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx) = \cos\left(k(x - ct)\right),$$

pa je točka konstantne faze (npr. nula, što u ovom slučaju odgovara vrhu vala) dana s $x - ct = \text{const}$, što opisuje gibanje u desno brzinom $c = \omega/k$.
Sustav koji se giba u desno brzinom v ima svoju koordinatnu os x', a koordinatu x vidi kao

$$x = x_0 + x' + vt,$$

gdje je x_0 položaj (na x-osi) ishodišta sustava koji se giba, u trenutku $t = 0$. Slijedi

$$\xi(x',t) = A\cos\left(k(x' + x_0 - (c - v)t)\right) = A\cos(kx' - \omega' t + \phi'),$$

gdje je

$$\omega' = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\right), \qquad \phi' = kx_0.$$

Uvrštavanjem vidimo da dobijemo negativnu vrijednost za ω'. To je zato što se promatrač giba brže od vala. On zapravo vidi val koji putuje u suprotnom smjeru.

$$\Longrightarrow \xi(x',t) = 3\text{mm}\cos(2.73\text{s}^{-1}\ t + 4.3\text{m}^{-1}\ (x' + x_0))$$

9. zadatak
Pokažimo da u limesu malih brzina izvora i prijamnika u odnosu na brzinu širenja vala, promjena frekvencije ovisi samo o relativnoj brzini izvora i prijamnika.

$$\begin{aligned}
f_P &= f_I \frac{c - \vec{r}_0 \vec{v}_P}{c - \vec{r}_0 \vec{v}_I} \\
&= f_I \frac{c - \vec{r}_0 \vec{v}_P}{c\left(1 - \vec{r}_0 \frac{\vec{v}_I}{c}\right)} \\
&= f_I \left(1 - \vec{r}_0 \frac{\vec{v}_P}{c}\right)\left(1 + \vec{r}_0 \frac{\vec{v}_I}{c} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\vec{v}_i}{c}\right)^2\right)\right) \\
&= f_I \left(1 - \vec{r}_0 \frac{\vec{v}_P}{c} + \vec{r}_0 \frac{\vec{v}_I}{c} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{\vec{v}_{I,P}}{c}\right)^2\right)\right) \\
&\approx f_I \left(1 - \vec{r}_0 \frac{\vec{v}_P - \vec{v}_I}{c}\right)
\end{aligned}$$

Ovdje su f_P i f_I frekvencija koju prima prijamnik, odnosno frekvencija koju odašilje izvor, c je brzina širenja vala (u ovom slučaju svjetlosti) u mediju, $\vec{r}_0$ je jedinični vektor od izvora ka prijamniku, a $\vec{v}_P$ i $\vec{v}_I$ su brzine prijamnika i izvora. Vidimo da je promjena valne duljine kod svakog odbijanja

$$\Delta f = f_P - f_I = f_I \frac{v}{c},$$

pa je promjena valne duljine pri odbijanju (pokažite)

$$\Delta\lambda = \lambda_P - \lambda_I = -\lambda_I \left(\frac{v}{c} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)\right) = -0.05\lambda_I,$$

odnosno valna duljina pri svakom odbijanju padne na 95% upadne vrijednosti. Kako valna duljina treba pasti na 495 nm, što je $495/700 = 99/140$ dio početne vrijednosti, slijedi da je broj odbijanja n dan kao najmanji cijeli broj za koji

$$0.95^n \leq \frac{99}{140}$$

$$\Rightarrow n = 7$$

Prvi put će se plava svjetlost javiti na zrcalu koje nije poslalo prvi signal.
Napomena: zanemarivši kvadratne članove u razvoju, u ovom zadatku napravili smo pogrešku od

$$\epsilon = \frac{v^2}{c^2} = 0.0025,$$

što daje odstupanje od 0.25%.