Z3 (6 bodova): Foton valne duljine $\lambda = 0.1\,\text{nm}$ raspršuje se na mirnom elektronu. Odredi najveću energiju (u eV) koju elektron može dobiti u ovom Comptonovom raspršenju.

Z3 Energija koju elektron u raspršenju primi jednaka je energiji koju foton izgubi,

$$\Delta E = E_{\text{fot.}} - E'_{\text{fot.}} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = hc\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)},$$

gdje je

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta_{\text{fot.}})$$

promjena valne duljine fotona raspršenog pod kutem $\theta_{\text{fot.}}$ (poznata formula za Comptonovo raspršenje). Iz gornjih izraza se vidi da elektron prima najveću energiju kada je $\Delta\lambda$ najveće, a to je pri $\theta_{\text{fot.}} = \pi$, odnosno,

$$(\Delta E)_{\text{max}} = hc\,\frac{(\Delta\lambda)_{\text{max}}}{\lambda(\lambda + (\Delta\lambda)_{\text{max}})}, \qquad (\Delta\lambda)_{\text{max}} = \frac{2h}{m_e c}.$$

Konačno,

$$(\Delta E)_{\text{max}} = \frac{2h^2 c}{\lambda(\lambda m_e c + 2h)}.$$

Za zadanu vrijednost λ,

$$(\Delta E)_{\text{max}} \simeq 574.9\,\text{eV}.$$

Z4 (6 bodova): Pri prelasku elektrona iz stanja više u stanje niže energije u vodikovu atomu emitiran je foton valne duljine $\lambda \simeq 486\,\text{nm}$. Odredi glavne kvantne brojeve tih dvaju stanja.

Z4 Energija emitiranog fotona

$$E_{\text{fot.}} = \frac{hc}{\lambda} \simeq 2.55\,\text{eV}$$

jednaka je razlici energija elektrona u početnom i konačnom stanju atoma. Energija elektrona dana je izrazom

$$E_n = -\frac{1}{n^2}E_{\text{I}},$$

gdje je $n = 1, 2, \ldots$ glavni kvantni broj, a $E_{\text{I}} \simeq 13.6\,\text{eV}$ je energija ionizacije vodikova atoma. Za $n = 1, 2, 3, 4, 5$ dobivamo

$$E_n \simeq -13.6\,\text{eV}, -3.40\,\text{eV}, -1.51\,\text{eV}, -0.85\,\text{eV}, -0.54\,\text{eV}.$$

Uočavamo da je

$$E_4 - E_2 \simeq 2.55\,\text{eV} \simeq E_{\text{fot.}},$$

te zaključujemo

$$n = 4, \qquad n' = 2.$$

4. U Youngovu pokusu, plava svjetlost valne duljine 460 nm daje maksimum drugog reda na nekom mjestu na zastoru. Koja valna duljina vidljive svjetlosti (sadrži svjetlost valnih duljina od 400 nm do 700 nm) bi dala minimum na istom mjestu na zastoru?
(6 bodova)

Rješenje:

Uvjet da svjetlost valne duljine $\lambda_1 = 460\,\text{nm}$ daje maksimum drugog reda je:

$$d \sin\theta_1 = 2\lambda_1$$

Uvjet da za isti ogibni kut svjetlost valne duljine λ_2 daje minimum je:

$$d \sin\theta_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_2 \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

Slijedi:

$$2\lambda_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_2$$

$$\lambda_2 = \frac{4}{2m+1}\lambda_1$$

Za $m=0$	$\lambda_2 = 4\lambda_1$	$\lambda_2 = 4 \cdot 460\,\text{nm} = 1840\,\text{nm}$	Nije u vidljivom području.
Za $m=1$	$\lambda_2 = \frac{4}{3}\lambda_1$	$\lambda_2 = \frac{4}{3} \cdot 460\,\text{nm} = 613{,}3\,\text{nm}$	U vidljivom području.
Za $m=2$	$\lambda_2 = \frac{4}{5}\lambda_1$	$\lambda_2 = \frac{4}{5} \cdot 460\,\text{nm} = 368\,\text{nm}$	Nije u vidljivom području.

...

Vidi se da je:

$$\lambda_2 = 613{,}3\,\text{nm}$$

4. Elektron u trostruko ioniziranom atomu berilija Be^{3+} ($^{9}_{4}Be$)nalazi se u pobuđenom stanju sa radijusom putanje jednakom radijusu elektrona u osnovnom stanju vodikovog atoma. Koji je kvantni broj pobuđenog stanja Be^{3+} iona? Kolika je frekvencija fotona koji može izbaciti elektron iz ovog pobuđenog stanja i potpuno ionizirati berilijev atom? **(7 bodova)**

Rješenje:

$$r_n = a_0$$

$$\frac{a_0}{Z} n^2 = a_0$$

$$n^2 = Z$$

$$n^2 = 4$$

$$n = 2$$

$$hf = -E_2$$

$$hf = \frac{Z^2 E_0}{2^2}$$

$$f = \frac{Z^2 E_0}{4h}$$

$$f = \frac{16 \cdot 13{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 6{,}626 \cdot 10^{-34}}\ \text{Hz} = 1{,}314 \cdot 10^{16}\ \text{Hz}$$

Zadatak: Pri Comptonovu raspršenju fotona na elektronu, foton je raspršen pod kutem 60° a njegova energija nakon raspršenja iznosi 0.7 MeV. Odredi energiju fotona prije raspršenja. (masa elektrona $m_e = 0.511$ MeV$/c^2$)

Postupak: Koristeći poznat izraz za razliku valnih duljina fotona,

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}}),$$

te izraz za energiju fotona,

$$E_{\text{fot}} = hf = \frac{hc}{\lambda},$$

imamo

$$\frac{hc}{E'_{\text{fot.}}} - \frac{hc}{E_{\text{fot.}}} = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}}),$$

odnosno

$$E_{\text{fot.}} = \frac{E'_{\text{fot.}}}{1 - (E'_{\text{fot.}}/m_e c^2)(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}})}$$

Rješenje: $E_{\text{fot.}} = E'_{\text{fot.}} / \left(1 - (E'_{\text{fot.}}/m_e c^2)(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}})\right) \simeq 2.222$ MeV

(Željko Večenaj)

5. Pretpostavite da Sunce zrači kao crno tijelo temperature T_S = 5700 K. Na kojoj udaljenosti od Sunca bi trebala biti Zemlja u slučaju da zrači kao crno tijelo (sobne) temperature T_Z = 20° C. Uzmite da je polumjer Sunca jednak $R_S = 7\times10^5$ km, te rezultat usporedite sa stvarnom udaljenošću između Zemlje i Sunca $D = 150\times10^6$ km. **(6 bodova)**

Rješenje:

Sunce zrači kao crno tijelo:

$$P_S = \sigma T_S^4 4\pi R_S^2$$

a dio koji Zemlja apsorbira je jednak

$$P_A = P_S \frac{R_Z^2 \pi}{4D^2 \pi}$$

S obzirom da Zemlja također zrači kao crno tijelo, ona emitira upravo onoliko koliko apsorbira:

$$P_E = \sigma T_Z^4 4\pi R_Z^2 = P_S$$

iz čega slijedi

$$T_Z^4 = \frac{R_S^2}{4D^2} T_S^4 \rightarrow D = \frac{R_S}{2}\left(\frac{T_S}{T_Z}\right)^2 = 132,5 \times 10^6 km < D_0$$

4. Za koliko bi se vremena masa Sunca smanjila za $1\,\%$, ako Sunce zrači kao crno tijelo? Masa Sunca iznosi $2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$, polumjer Sunca je $7 \times 10^{8}\,\mathrm{m}$, a temperatura Sunca je $5700\,\mathrm{K}$.

Rješenje:

Iz Štefan-Boltzmannov zakona dobivamo snagu zračenja:

$$P = \sigma T^4 4\pi R^2 = 3.69 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W},$$

Sunce svake sekunda gubi masu:

$$E = Pt = mc^2 \Rightarrow \frac{m}{t(=1\mathrm{s})} = \frac{P}{c^2} = 4.09 \cdot 10^9\ \mathrm{kg/s},$$

konačno masa sunca će pasti za 1% nakon:

$$t = 0.01 M \frac{c^2}{P} = 4.88 \cdot 10^{18}\ \mathrm{s}.$$

4. Koliku snagu treba dobivati crna metalna kuglica radijusa $2\,\mathrm{cm}$ da bi joj temperatura bila 27 stupnjeva iznad temperature okoline koja je $20\,^{\circ}\mathrm{C}$? Toplina se gubi jedino zračenjem. (6 bodova)

Rješenje:

$$P = S\sigma(T^4 - T^4_{okoline})$$

$$P = 4\pi r^2 \sigma\,(T^4 - T^4_{okoline})$$

$$P = 4\pi\ 0.02^2\ 5.67\ 10^{-8}\ (320.15^4 - 293.15^4)\ \mathrm{W} = 0.889\ \mathrm{W}$$

3. Metalnu kuglu polumjera r = 0.5 m grijemo do temperature pri kojoj je maksimum jakosti zračenja pri valnoj duljini $\lambda = 9.66\cdot10^{-7}$ m, a zatim prestajemo s grijanjem. Uz pretpostavku da kugla zrači kao crno tijelo, kolika je masa kugle, ako se nakon 2s ona ohladi na 800 K. (Pretpostavlja se da je temperatura okoline pri 0K.) Specifični toplinski kapacitet metala kugle c = 155 J/(kg K).
(6 bodova)

Rješenje:

Rješenje:
Iz Wienovog zakona možemo izračunati temperaturu do koje je zagrijana kugla:

$$\lambda_m T_1 = 2.898\cdot10^{-3}\ \mathrm{mK} \Longrightarrow T_1 = 3000\ \mathrm{K}. \tag{18}$$

Iz Stefan-Boltzmannovog zakona jakost zračenja dana je:

$$I = \sigma T^4, \tag{19}$$

snaga je:

$$P = \sigma S T^4 = \sigma 4\pi r^2 T^4. \tag{20}$$

snaga je povezana s toplinom:

$$P = -\frac{dQ}{dt} = -mc\frac{dT}{dt}, \tag{21}$$

uvrstimo snagu natrag u Stefan-Boltzmannov zakon i dobivamo:

$$-mc\frac{dT}{dt} = \sigma 4\pi r^2 T^4, \tag{22}$$

prebacimo vrijeme na desnu strane, a temperaturu na lijevu te integriramo:

$$-\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T^4} = \frac{4\pi\sigma r^2}{mc}\int_0^t dt, \tag{23}$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{T_2^3}-\frac{1}{T_1^3}\right) = \frac{4\pi\sigma r^2}{mc}t, \tag{24}$$

sredimo i konačno masa je:

$$m = \frac{12\pi\sigma r^2 t}{c\left(\frac{1}{T_2^3}-\frac{1}{T_1^3}\right)} = 11.2\ \mathrm{kg}. \tag{25}$$

4. Koliku je energiju potrebno dodati elektronu da bi se njegova de Broglieva valna duljina smanjila sa 100 pm na 50 pm?

4. zadatak

Ukupna energija elektrona je:

$$E^2 = m^2c^4 + p^2c^2, \tag{12}$$

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}, \tag{13}$$

gdje je količina gibanja:

$$p = \frac{h}{\lambda_e}. \tag{14}$$

Energija koju je potrebno predati elektronu je razlika:

$$\Delta E = \sqrt{m_e^2c^4 + (\frac{h}{\lambda_{e2}})^2c^2} - \sqrt{m_e^2c^4 + (\frac{h}{\lambda_{e1}})^2c^2} = 449\ \mathrm{eV}. \tag{15}$$

Priznaje se i u nerelativističkom režimu:

$$\Delta E = \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} = 452\ \mathrm{eV}. \tag{16}$$

4. Elektron u vodikovom atomu se nalazi u trećem pobuđenom stanju (n=4). a) Ako atom apsorbira X-zraku valne duljine 50 nm, odredite maksimalnu brzinu izbačenog elektrona. b) Kolika je minimalna frekvencija X-zrake koja će ionizirati vodik u trećem pobuđenom stanju?
(5 bodova)

Rješenje:

a)

$$n = 4, \quad E_4 = -13.6/4^2 = -0.85eV$$

$$E_X = hc/\lambda = 24.84\,eV$$

b)

$$E_k = E_X - |E_4| = 1/2mv^2 = 23,99\,eV$$

$$v = 2.91 \times 10^6 m/s$$

$$\nu = |E_4|/h = 0.205 \times 10^{15} Hz$$

6. Odašiljač radio stanice ima snagu 150 kW na frekvenciji 101 MHz. Pronađite broj fotona u jedinici vremena i površine, na udaljenosti 1 km od radio stanice. (Pretpostavite da radiostanica zrači jednoliko u svim smjerovima.)
(6 bodova)

Rješenje:

-Snaga je rad (energija) u jedinici vremena:

$$P = W / t$$

Zračenje radio-valova je kvantizirano (fotoni) sa energijom $E = h\,f$

pa je $P = (N\,h\,f)/t$ gdje je N = *broj fotona,*

$$N/t = P/(h\,f)$$
$$N/t = 2.24 * 10^{30} \text{ fotona/s}$$

-Zračenje se mora podijeliti u površinu sfere radijusa 1 km pa je konačno
Broj fotona po jedinici vremena i površine jednak:

$$N/(t * 4\pi R^2) = \mathbf{1.78 * 10^{23}\ fotona/(s * m^2)}$$

3. Foton valne duljine λ = 50·10^{-12} m raspršuje se na mirnom elektronu tako da je promjena energije fotona maksimalna. Odredite količinu gibanja raspršenog elektrona u jedinicama eV /c.
(5 bodova)

Rješenje:

Iz Comptonove formule

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

slijedi da je promjena energije maksimalna za $\theta = \pi$, tj.

$$\lambda' = \lambda + 2\frac{h}{mc}$$

Iz zakona očuvanja količine gibanja dobijemo da je kut raspršenog elektrona $\phi = 0$ i količina gibanja

$$p_e = p_\gamma + p_{\gamma'} = h\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'}\right) = 48{,}5\,keV/c$$

Valna duljina fotona raspršenog na slobodnom elektronu dvaput je veća pri raspršenju pod kutom od 90° nego pod kutom od 30°. Odredite početnu valnu duljinu fotona.

Pri Comptonovon raspršenju vrijedi:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{h}{m_e c}(1 - \cos 90) + \lambda = 2\left(\frac{h}{m_e c}(1 - \cos 30) + \lambda\right)$$

$$\lambda = \frac{h}{m_e c}(2\cos 30 - 1)$$

$$\lambda = 1{,}779\ pm$$

4. Pri raspršenju fotona na mirnom elektronu kinetička energija raspršenog elektrona jednaka je T_e = 0.2 MeV. Ako se valna duljina izlaznog fotona promijenila za 25 %, odredite kut raspršenog fotona.
(8 bodova)

Rješenje:

Valna duljina raspršenog fotona jednaka je

$$\lambda_2 = 1.25\lambda_1$$

gdje je λ_1 valna duljina ulaznog fotona. Iz zakona očuvanja energije

$$E_1 = E_2 + T_e$$

slijedi da je $E_1 = 1\,\mathrm{MeV}$. Iz formule za Comptonovo raspršenje

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{hc}{m_e c^2}(1 - \cos\theta)$$

uz $E_{1,2} = hc/\lambda_{1,2}$ izlazi

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{0.25}{2}\frac{m_e c^2}{E_1}$$

odnosno

$$\theta = 29.3^o$$

6. Crno tijelo izzrači za jednu minutu energiju $5{,}7 \cdot 10^9$ J. Valna duljina koja odgovara maksimalnoj spektralnoj gustoći zračenja je 710 nm. Kolika je površina crnog tijela? **(6 bodova)**

Rješenje:

Iz Wienovog zakona dobijemo

$$T = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}}{710 \cdot 10^{-9}}\ \mathrm{K} = 4081{,}690\ \mathrm{K}$$

Iz Stefan-Boltzmannovog zakona slijedi:

$$E = \sigma\, S\, T^4\, t$$

pa je:

$$S = \frac{E}{\sigma\, T^4\, t}$$

$$S = \frac{5{,}7 \cdot 10^5}{5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 4081{,}690^4 \cdot 60}\ \mathrm{m}^2 = 6{,}036\ \mathrm{cm}^2$$

6. Izotop olova ^{209}Pb raspada se β-raspadom u izotop bizmuta ^{209}Bi koji je stabilan. Vrijeme poluraspada izotopa olova je 3,253 sata. Koliki će biti maseni udio bizmuta (postotak) nakon 12 sati, ako je u početnom trenutku uzorak sadržavao samo olovo? **(6 bodova)**

Rješenje:

Broj neraspadnutih jezgara ^{209}Pb nakon t_1=12 sati (uz λ=ln 2/$T_{1/2}$):

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-3{,}689 \ln 2} = N_0 2^{-3{,}689}$$

Broj jezgara ^{209}Bi jednak je broju raspadnutih jezgara ^{209}Pb:

N_2=N_1-N_0=N_0(1-$2^{-3{,}689}$)

Maseni udio ^{209}Bi jednak je ($m_{1,2}$=$N_{1,2}M_{1,2}/N_A$, M_1=M_2):

$$w(^{209}Bi) = \frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{N_2}{N_1+N_2} = 1-2^{-3{,}689} = 0{,}922 \ = 92{,}2\ \%$$

6. Koliki je kut raspršenja fotona energije 0,20 MeV na slobodnom elektronu ako foton u raspršenju izgubi 10% svoje energije? **(6 bodova)**

Rješenje:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{hc}{E'} - \frac{hc}{E} = 2\ \lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{hc}{0{,}9\ E} - \frac{hc}{E} = 2\ \lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{hc}{E}\left(\frac{1}{0{,}9} - 1\right) = 2\ \lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{hc}{E}\left(\frac{10}{9} - 1\right) = 2\ \lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{hc}{9E} = 2\ \lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{hc}{18\ E\ \lambda_c}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1240\ \text{eV nm}}{18 \cdot 0{,}20 \cdot 10^6 \cdot \text{eV} \cdot 2{,}426 \cdot 10^{-3}\ \text{nm}}} = 0{,}376803$$

$$\theta = 44{,}3°$$

5. Foton se raspršio na slobodnom elektronu tako da je promijenio smjer svog gibanja za 120°, a elektron je dobio kinetičku energiju 0,45 MeV. Kolika je energija fotona prije raspršenja? (4 boda)

Rješenje:

$\theta = 120°$

$E_e = 0{,}45\ \text{MeV}$

$E = ?$

$$E_e = E - E' = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}$$

$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda \qquad \Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2} \qquad \lambda_c = 2{,}4263\cdot 10^{-12}\ \text{m}$

$\Delta\lambda = 3{,}63945\cdot 10^{-12}\ \text{m}$

$$E_e = E - E' = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda}$$

$$\lambda^2 + \Delta\lambda\cdot\lambda - \frac{hc\Delta\lambda}{E_e} = 0$$

$$\lambda^2 + 3{,}63945\cdot 10^{-12}\lambda - 1{,}00479\cdot 10^{-23} = 0$$

Rezultat s +: $\lambda = 1{,}83531\cdot 10^{-12}\ \text{m}$

$$E = \frac{hc}{\lambda} = 1{,}083\cdot 10^{-13}\ \text{J} = 0{,}68\ \text{MeV}$$

5. Kada ultraljubičasta svjetlost valne duljine $254\,\text{nm}$ obasjava čistu površinu bakra, zaustavni potencijal za emitirane fotoelektrone iznosi $0.181\ \text{V}$. Odredite izlazni rad za bakar? (7 bodova)

Rješenje:

$$W_i = \frac{hc}{\lambda} - eU$$

$$W_i = \frac{1240\ \text{eV nm}}{254\ \text{nm}} - e\cdot 0.181\ \text{V} = 4.701\ \text{eV}$$

5. Pronađi maksimalnu kinetičku energiju elektrona emitiranih sa površine metala nastalih pri obasjavanju sa svjetlošću valne duljine od 400 nm, ako se zna da je granična valna duljina svjetlosti pri kojoj se događa fotoefekt 600 nm.
(6 bodova)

Rješenje:

Ek = h f - Wiz.

-Kinetička energije elektrona (*Ek*) jednaka je izlaznom radu (- *Wiz*) + energija fotona (*h f*), gdje je *h* Planckova konstanta i *f* je frekvencija fotona.

-Za graničnu valnu duljinu kinetička energija elektrona je nula:

Ek = 0 => *h f* = *Wiz.*

fekvencija i valna duljina povezane su preko relacije $c = f\lambda$ iz čega se dobije

$$Wiz. = 2.067 \text{ eV}$$

-Tada se može izračunati kinetička energija elektrona pri 400 nm koja iznosi:

$$Ek = hc/\lambda - 2.067$$
$$Ek = 3.01 - 2.076$$
$$\boldsymbol{Ek = 0.943 \text{ eV}}$$

3.5 Kada ultraljubičasto svjetlo valne duljine 400 nm padne na određenu metalnu površinu, izmjerena maksimalna kinetička energija emitiranih fotoelektrona iznosi 1.10 eV. Koja je maksimalna kinetička energija fotoelektrona kada svjetlost valne duljine 300 nm pada na istu površinu? Rješenje:

Kinetička energija fotoelektrona je razlika između početne energije fotona i radne funkcije metala.

$(1/2)mv^2_{max} = hf - \varphi$, $E = hc/\lambda$.

Izračunamo $\varphi = hc/\lambda - K_{max} = 3{,}1 \text{ eV} - 2{,}1 \text{ eV} = 2 \text{ eV}$.

Za 300 nm uvrštavanjem u formulu dobijemo

$K_{max} = 4{,}14 \text{ eV} - 2{,}00 \text{ eV} = 2{,}14 \text{ eV}$.

6. Dvostruko ionizirani atom litija Li^{2+} (Z=3) i trostruko ionizirani atom berilija Be^{3+} (Z=4) emitiraju linijski spektar. Za neku seriju linija u spektru litija najkraća valna duljina je 40,5 nm. Koja je najkraća valna duljina za istu seriju linija u spektru berilija?
(7 bodova)

Rješenje:

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \frac{1}{n^2}$$
$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\lambda_{Li} R Z_{Li}^2} = \frac{1}{\lambda_{Be} R Z_{Be}^2}$$

$$\lambda_{Be} = \lambda_{Li} \left(\frac{Z_{Li}}{Z_{Be}}\right)^2$$

$$\lambda_{Be} = 22{,}8 \text{ nm}$$

6. Elektron u plinu vodika prelazi iz stanja s energijom -0,85 eV u stanje energije -3,4 eV. Kolika je valna duljina emitiranog fotona? Odredi glavne kvantne brojeve početnog i konačnog stanja elektrona. **(6 bodova)**

Rješenje:

$$E_n = -\frac{13{,}6\,\text{eV}}{n^2}$$
$$E_n = -0{,}85\,\text{eV}$$
$$-0{,}85 = -\frac{13{,}6}{n^2}$$
$$n = 4$$

$$E_m = -3{,}4\,\text{eV}$$
$$m = 2$$

Prijelaz je između stanja s kvantnim brojevima $n=4$ i $m=2$
$n=4 \rightarrow m=2$

$$\frac{hc}{\lambda} = E_n - E_m$$
$$E_n - E_m = -0{,}85\,\text{eV} - (-3{,}4\,\text{eV}) = 2{,}55\,\text{eV}$$

6. Ako pretpostavite da Sunce zrači kao crno tijelo temperature T = 5700 K odredite kolika bi temperatura bila na Zemlji ako bi se ona takoder ponašala kao crno tijelo? Promjer Sunca se sa Zemlje vidi pod kutem od α = 0,5°.
(8 bodova)

Rješenje:

Neka je R_S radijus Sunca, a d udaljenost od središta Sunca do (središta) Zemlje. R_Z je radijus Zemlje.
Snaga Sunčevog zračenja je

$$P = \sigma S T^4 = \sigma 4\pi R_S^2 \cdot T^4$$

Intenzitet zračenja na udaljenosti d je :

$$I = \frac{P}{4\pi d^2}$$

Zemlja apsorbira :

$$P_A = I \cdot R_Z^2 \pi$$

a emitira

$$P_E = \sigma 4\pi R_Z^2 \cdot T'^4$$

Iz $P_A = P_E$ slijedi: $T'^4 = T^4 \frac{1}{4}\left(\frac{R_S}{d}\right)^2 \rightarrow T' = T\sqrt{\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{2}} = 266\,K$

2. Zaustavni potencijal za elektrone izbačene iz nekog metala svjetlošću frekvencije $2.2 \cdot 10^{15}$ Hz je 6.6 V. Odredite zaustavni potencijal za elektrone izbačene iz istog metala svjetlošću frekvencije $4.6 \cdot 10^{15}$ Hz.
(6 bodova)

Rješenje:

$$e\,U_1 = h\,f_1 - W_i$$
$$e\,U_2 = h\,f_2 - W_i$$

$$e\,U_2 - e\,U_1 = h\,f_2 - h\,f_1$$
$$U_2 = U_1 + \frac{h}{e}\,(f_2 - f_1)$$
$$U_2 = 6{,}6\ \mathrm{V} + \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}\,(4{,}6 - 2{,}2)\ 10^{15}\ \mathrm{V} = 16{,}5\ \mathrm{V}$$

6. U laboratoriju ima 1,49 μg čistog $^{13}_{7}\mathrm{N}$, koji ima vrijeme poluraspada 10,0 min. Nakon koliko vremena će aktivnost pasti na jedan raspad u sekundi?
(6 bodova)

Rješenje:

$$N_0 = \frac{N_A\,m}{M}$$
$$N_0 = 6{,}902 \cdot 10^{16}$$
$$A(t_1) = \lambda\,N_0\,e^{-\lambda t_1}$$
$$t_1 = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{\lambda\,N_0}{A(t_1)}$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$
$$\lambda = 1{,}155 \cdot 10^{-3}\ s^{-1}$$

$$t_1 = 2{,}771 \cdot 10^{4}\ s = 7{,}698\,h$$

3. Radioaktivni ugljik ^{14}C proizvodi se kozmičkim zračenjem tako da u atmosferi postoji stalan omjer ^{14}C i ^{12}C: na svakih 9.3×10^{11} atoma ^{12}C dolazi jedan ^{14}C. Živi organizmi kontinuirano izmjenjuju ugljik s okolinom pa se i u njima nalazi ugljik ^{14}C u navedenom omjeru. Smrću organizma, ^{14}C se u njemu prestaje "obnavljati" i njegova količina počinje opadati s vremenom poluraspada $T_{1/2} = 5730$ godina. Ako je za uzorak dobiven iz neke grobnice izmjereno 6.2 raspada u minuti po gramu uzorka, procijenite njegovu starost. **(5 bodova)**

Rješenje:

Jedan gram ugljika sadrži $N = N_A/M = 5.02 \times 10^{22}$ atoma, gdje je $M = 12$ g molarna masa ugljika, a $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ mol^{-1} Avogadrova konstanta. Slijedi da je broj jezgara ^{14}C u jednom gramu ugljika jednak

$$N(^{14}C) = N(^{12}C)/(9.3 \times 10^{11}) = 5.4 \times 10^{10} \,.$$

Broj raspada u jednoj sekundi u jednom gramu ugljika je

$$A_0 = dN/dt = \lambda N = N \times (\ln 2)/T_{1/2} = 0.2067 \text{ Bq} \,.$$

Aktivnost uzorka pada eksponencijalno u vremenu

$$A = A_0\, e^{-\lambda t} \,,$$

iz čega, uz $A = 6.2$ min^{-1} = 0.103 Bq slijedi

$$t = (T_{1/2}/\ln 2) \times \ln(A_0/A) = 5730 \text{ god.}$$

3.6 Jednodimenzionalna kvantnomehanička čestica opisana je valnom funkcijom:

$$\psi(x) = Axe^{-\alpha x^2}, \tag{15}$$

gdje je α poznata konstanta. Izračunajte energiju čestice E i silu koja djeluje na česticu.

Rješenje:
Iz Schrödingerove jednadžbe dobiti ćemo energiju i izraza za potencijal ako je ona zadovoljena, najprije tražimo drugu derivaciju valne funkcije:

$$\frac{d\psi}{dx} = Ae^{-\alpha x^2} - 2A\alpha x^2 e^{-\alpha x^2}, \tag{16}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = 4A\alpha^2 x^3 e^{-\alpha x^2} - 6A\alpha x e^{-\alpha x^2}, \tag{17}$$

Uvrstimo u Schrödingerovu jednadžbu:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(4A\alpha^2 x^3 e^{-\alpha x^2} - 6A\alpha x e^{-\alpha x^2}) + V(x)Axe^{-\alpha x^2} = EAxe^{-\alpha x^2}, \tag{18}$$

sredimo i dobivamo:

$$3\frac{\hbar^2\alpha}{m} - 2\frac{\hbar^2\alpha^2}{m}x^2 + V(x) - E = 0, \tag{19}$$

kako bi Schrödingerova jednadžba bila zadovoljena mora vrijediti:

$$E = 3\frac{\hbar^2\alpha}{m}, \tag{20}$$

$$V(x) = 2\frac{\hbar^2\alpha^2}{m}x^2, \tag{21}$$

dakle dobili smo energiju i potencijalnu energiju, nedostaje još sila:

$$\vec{F} = -gradV = -4\frac{\hbar^2\alpha^2}{m}x\hat{x}. \tag{22}$$

6. Kad ultraljubičasta svjetlost valne duljine 400,0 nm pada na metalnu površinu, maksimalna kinetička energija emitiranih fotoelektrona je 1,10 eV. Kolika je maksimalna kinetička energija fotoelektrona kad svjetlost valne duljine 300,0 nm pada na tu površinu?
(6 bodova)

Rješenje:

$$\Phi = \frac{hc}{\lambda_1} - K_{maks,1}$$

$$\Phi = \frac{4{,}14\ 10^{-15}\ \mathrm{eV\,s} \cdot 3\ 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{400{,}0\ 10^{-9}\ \mathrm{m}} - 1{,}10\ \mathrm{eV} = 2{,}005\ \mathrm{eV}$$

$$K_{maks,2} = \frac{hc}{\lambda_2} - \Phi$$

$$K_{maks,2} = \frac{4{,}14\ 10^{-15}\ \mathrm{eV\,s} \cdot 3\ 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{300{,}0\ 10^{-9}\ \mathrm{m}} - 2{,}005\ \mathrm{eV} = 2{,}135\ \mathrm{eV}$$

6. Masenom spektroskopijom uzorka stijene utvrđeno je da sadrži atome argona (stabilni ^{40}Ar) i radioaktivne atome kalija ^{40}K u omjeru $N(^{40}Ar)/N(^{40}K)=8.5$. Pretpostavite da su svi atomi argona u uzorku nastali radioaktivnim raspadom kalija od vremena nastanka stijene, i odredite starost te stijene. Vrijeme poluživota radioaktivnog kalija je $T_{1/2} = 1.3 \cdot 10^9$ godina. **(7 bodova)**

Rješenje:

U trenutku nastanka stijene ($t = 0$), bilo je prisutno N_0 atoma kalija, i nije bilo atoma argona. Broj atoma kalija opada po zakonu radioaktivnog raspada

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \ .$$

Ako danas ima N_K atoma kalija, onda u stijeni mora biti $N_0 - N_K$ atoma argona.

Iz prethodne dvije jednadžbe možemo eliminirati nepoznati N_0 i pisati

$$\lambda t = \ln\left(1 + \frac{N_A}{N_K}\right) \ .$$

Proteklo vrijeme za dani mjereni omjer N_A/N_K je:

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln(2)} \ln\left(1 + \frac{N_A}{N_K}\right) \ .$$

Za zadane brojeve $t = 4.22 \cdot 10^9$ godina.

Z4 Izolirana bakrena sfera radijusa $5\,\mathrm{cm}$, početno nenabijena, osvijetljena je ultraljubičastom svjetlošću valne duljine $200\,\mathrm{nm}$. Izlazni rad za bakar je $4.7\,\mathrm{eV}$. Koliki najveći naboj fotoelektrični efekt inducira na sferi (uzeti u obzir zaustavni napon)? (6 bodova)

Rješenje:

$$k\,\frac{e\,Q}{r} = E_k$$

$$E_k = \frac{h\,c}{\lambda} - W_i$$

$$E_k = \frac{1240\text{ eV nm}}{200\text{ nm}} - 4{,}7\text{ eV} = 1{,}5\text{ eV}$$

$$k\,\frac{Q}{r} = 1{,}5\text{ eV}$$

$$Q = \frac{1{,}5\;0{,}05}{9\;10^{9}}\text{ C} = 8{,}333\;10^{-12}\text{ C}$$

3.6 Dvije kvantnomehaničke čestice gibaju se u prostoru $x \in [0, \infty)$ te imaju zadanu gustoću vjerojatnosti:

$$\rho_1(x) = A_1^2 e^{-2bx},$$

$$\rho_2(x) = A_2^2 e^{-2cx},$$

gdje su A_1 i A_2 normalizacijske konstante, $b = 2\text{ m}^{-1}$. Odredite konstantu c i prostornu komponentu valne funkcije $\psi(x)$ za svaku česticu ako je utvrđeno da u intervalu od $[0, 1]$ česticu 1 nalazimo četiri puta češće od čestice 2. Rješenje:

a) Iz uvjeta normiranja dobivamo konstante A_1 i A_2:

$$\int_0^\infty \rho_1(x)dx = \int_0^\infty \rho_2(x)dx = 1, \tag{1}$$

$$\int_0^\infty \rho_1(x)dx = \frac{A_1^2}{2b} = 1 \Rightarrow A_1 = \sqrt{2b}, \tag{2}$$

$$\int_0^\infty \rho_2(x)dx = \frac{A_2^2}{2c} = 1 \Rightarrow A_2 = \sqrt{2c}, \tag{3}$$

iz uvjeta zadatka česticu 1 nalazimo 4 puta češće od čestice 2 pa onda vrijedi odnos vjerojatnosti u tom intervalu:

$$\int_0^1 \rho_1(x)dx = 4\int_0^1 \rho_2(x)dx, \tag{4}$$

$$-e^{-2bx}\Big|_0^1 = -4e^{-2cx}\Big|_0^1, \tag{5}$$

$$e^{-2b} - 1 = 4(e^{-2c} - 1) \Rightarrow c = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{-2b}+3}{4}\right) = 0.141\text{ m}^{-1}, \tag{6}$$

pripadne valne funkcije su:

$$\psi_1(x) = \sqrt{2b}e^{-bx}, \tag{7}$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{2c}e^{-cx}. \tag{8}$$

6. Kvantnomehanička čestica ima neiščezavajuću valnu funkciju po $+x$ osi (u nekom vremenski neovisnom potencijalu). Vjerojatnost nalaženja čestice u intervalu $[a,b]$ dana je s

$$P[a,b] = \mathrm{e}^{-2\alpha a} - \mathrm{e}^{-2\alpha b},$$

gdje je α pozitivna konstanta. Pronađite apsolutnu vrijednost prostorne komponente valne funkcije čestice te provjerite je li ona normirana. (8 bodova)

Rješenje:

Ako je vjerojatnost nalaženja čestice u intervalu $[a,b]$ dana integralom:

$$\int_a^b |\psi|^2 dx = e^{-2\alpha a} - e^{-2\alpha b}, \tag{17}$$

te ako iz Newton-Leibnizove formule vrijedi:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{18}$$

$$f(x) = \frac{dF}{dx}, \tag{19}$$

tada prepoznajemo $F(x) = -e^{-2\alpha x}$, te deriviranjem dobivamo:

$$f(x) = |\psi|^2 = \frac{dF}{dx} = 2\alpha e^{-2\alpha x}, \tag{20}$$

konačno valna funkcija je:

$$|\psi(x)| = \sqrt{2\alpha} e^{-\alpha x}. \tag{21}$$

Sada provjerimo normiranost valne funkcije:

$$\int_0^\infty |\psi|^2 dx = \int_0^\infty 2\alpha e^{-2\alpha x} dx = -e^{-2\alpha x}\Big|_0^\infty = 1, \tag{22}$$

vidimo da je valna fukcija normirana.

6. Valna funkcija čestice mase m koja ima potencijalnu energiju $U[x] = \frac{k}{2}x^2$ glasi $\psi[x] = Ae^{-\alpha x^2}$, gdje su k, A i α konstante. Pomoću Schrödingerove jednadžbe izračunajte konstantu α i energiju čestice E. (7 bodova)

Rješenje:

Trebamo ubaciti valnu funkciju u Shrödingerovu jednadžbu i pronaću uvjete uz koje je ona zadovoljena. Najprije tražimo:

$$\frac{d\psi}{dx} = Ae^{-\alpha x^2}(-2\alpha x), \tag{16}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = Ae^{-\alpha x^2}4\alpha^2 x^2 - 2A\alpha e^{-\alpha x^2}, \tag{17}$$

ubacimo valnu funkciju u Shrödingerovu jednadžbu:

$$Ae^{-\alpha x^2}4\alpha^2 x^2 - 2A\alpha e^{-\alpha x^2} + \left(\frac{2m}{\hbar^2}E - \frac{2m}{\hbar^2}\frac{kx^2}{2}\right)Ae^{-\alpha x^2} = 0, \tag{18}$$

sređivanjem dobivamo:

$$4\alpha^2 x^2 - 2\alpha + \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{mkx^2}{\hbar^2} = 0, \tag{19}$$

kako bi Shrödingerova jednadžba bila zadovoljena za svaki x, moraju vrijediti dva uvjeta:

$$4\alpha^2 x^2 - \frac{mkx^2}{\hbar^2} = 0, \tag{20}$$

$$-2\alpha + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0, \tag{21}$$

iz prvog uvjeta dobivamo:

$$\alpha = \frac{\sqrt{km}}{2\hbar}, \tag{22}$$

a iz drugog dobivamo energiju:

$$E = \frac{\alpha\hbar^2}{m} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{23}$$

3.4 U eksperimentu interferencije elektrona na dvije pukotine primijećeno je da je broj elektrona u jedinici vremena koji dolaze na zastor 16 puta veći u slučaju kad je prva pukotina otvorena, a druga zatvorena, u odnosu na slučaj kad je prva pukotina zatvorena, a druga otvorena. Izračunajte omjer vjerojatnosti nalaženja elektrona na mjestu interferencijskog maksimuma $P_{\max} = (|\psi_1| + |\psi_2|)^2$ i vjerojatnosti nalaženja elektrona na mjestu interferencijskog minimuma $P_{\min} = (|\psi_1| - |\psi_2|)^2$ kad su obje pukotine otvorene.

Rješenje:
Iz uvjeta zadatka vrijedi da je omjer vjerojatnosti prolaska kroz prvu i drugu pukotinu :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{|\psi_1|^2}{|\psi_2|^2} = 16, \tag{9}$$

pa je:

$$\frac{|\psi_1|}{|\psi_2|} = 4, \tag{10}$$

Traženi omjer je:

$$\frac{P_{max}}{P_{min}} = \frac{(|\psi_1|/|\psi_2| + 1)^2}{(|\psi_1|/|\psi_2| - 1)^2} = \frac{25}{9} = 2.78. \tag{11}$$

3.3 Jednodimenzionalna kvantnomehanička čestica opisana je valnom funkcijom:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax/a, & \text{ako } 0 \leq x \leq a, \\ A(b-x)/(b-a), & \text{ako } a < x \leq b, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

gdje su a i b poznate konstante.
a) Izračunajte konstantu A normiranjem valne funkcije.
b) Izračunajte vjerojatnost nalaženja čestice u intervalu $[0, a/2]$ u slučaju $b = 2a$.

Rješenje:
a) Uvjet normalizacije kaže da mora vrijediti:

$$\int_0^a \psi_1^2 dx + \int_a^b \psi_2^2 dx = 1, \tag{1}$$

gdje je $\psi_1 = Ax/a$, a $\psi_2 = A(b-x)/(b-a)$, te treba riješiti sljedeće integrale:

$$\int_0^a A^2 \frac{x^2}{a^2} dx + \int_a^b A^2 \frac{(b-x)^2}{(b-a)^2} dx = 1, \tag{2}$$

$$A^2 \Big[\int_0^a \frac{x^2}{a^2} dx + \int_a^b \frac{b^2}{(b-a)^2} dx - \int_a^b \frac{2bx}{(b-a)^2} dx + \int_a^b \frac{x^2}{(b-a)^2} dx \Big] = 1, \tag{3}$$

$$A^2 \left[\frac{x^3}{3a}\bigg|_0^a + \frac{b^2 x}{(b-a)^2}\bigg|_a^b - \frac{x^2 b}{(b-a)^2}\bigg|_a^b + \frac{x^3}{3(b-a)^2}\bigg|_a^b \right] = 1, \tag{4}$$

uvrštavanjem granica i sređivanjem dobivamo:

$$A^2 \left[\frac{a}{3} + \frac{-3b^2 a + 3ba^2 + b^3 - a^3}{3(b-a)^2} \right] = 1, \tag{5}$$

prepoznajemo kub razlike:

$$A^2 \left[\frac{a}{3} + \frac{(b-a)^3}{3(b-a)^2} \right] = A^2 \left[\frac{a}{3} + \frac{b}{3} - \frac{a}{3} \right] = A^2 \frac{b}{3} = 1, \tag{6}$$

slijedi konstanta normalizacije:

$$A = \sqrt{\frac{3}{b}}. \tag{7}$$

b) Vjerojatnost je dana:

$$\int_0^{a/2} \psi_1^2 dx = \int_0^{a/2} \frac{3}{b} \frac{x^2}{a^2} dx = \frac{3}{b} \frac{x^3}{3a^2}\bigg|_0^{a/2} = \frac{a}{8b} = \frac{1}{16}. \tag{8}$$

6. Jednodimenzionalna kvantnomehanička čestica opisana je valnom funkcijom

$$\psi[x] = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad x < 0, \\ A\sqrt{2}e^{-x/L} & \text{za} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

gdje je $L = 1\,\mathrm{nm}$.

(a) Normiranjem valne funkcije odredite konstantu A.

(b) Izračunajte vjerojatnost nalaženja čestice u području $x \geq L$.

Rješenje:

a) Konstantu A računamo iz uvjeta normiranja valne funkcije:

$$\int_0^{\infty} |\psi|^2 dx = 1, \tag{25}$$

$$\int_0^{\infty} 2A^2 e^{-2x/L} dx = A^2 L = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{L}}, \tag{26}$$

b) Vjerojatnost računamo integrirajući kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije od $x = L = 1$ nm do ∞:

$$\int_L^{\infty} |\psi|^2 dx = \int_L^{\infty} \frac{2}{L} e^{-2x/L} dx = \frac{2}{L}\Big(-\frac{L}{2}\Big) e^{-\frac{2x}{L}}\Big|_L^{\infty} = e^{-2} \approx 0.135. \tag{27}$$

4. Čestica se nalazi u jednodimenzionalnoj beskonačnoj jami širine a u prvom pobuđenom stanju (n=2). Izračunajte vjerojatnost nalaženja čestice P u "drugoj šestini jame" (tj. između $x = a/6$ i $x = 2a/6$, ako je lijevi kraj jame pri x=0). Valna funkcija je

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$.

(6 bodova)

Rješenje:

Rješenje Vjerojatnost nalaženja čestice u $n-$tom stanju u beskonačnoj potencijalnoj jami između x_1 i x_2 je

$$\mathcal{P}(x_1, x_2) = \frac{2}{a} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{n\pi}{a} x \, dx$$

Neodređeni integral je jednak (za $n = 2$)

$$I = \frac{1}{2}x - \frac{a}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{a}x\right)$$

pa je vjerojatnost za $x_1 = \frac{a}{6}$ i $x_2 = \frac{2a}{6}$ jednaka

$$\mathcal{P}_2(a/6, 2a/6) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi}\left(\sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0.167 + 0.138 = 0.304 \quad \text{ili} \quad 30.4\%.$$

3.2 Kad ultraljubičasta svjetlost valne duljine 400 nm pada na neku metalnu površinu, maksimalna kinetička energija emitiranih fotoelektrona iznosi 1,10 eV. Kolika je maksimalna kinetička energija fotoelektrona kada svjetlost valne duljine 300 nm pada na tu površinu?

Rješenje:

$$\frac{hc}{\lambda_1} = E_{k1} + W_i$$

$$\frac{hc}{\lambda_2} = E_{k2} + W_i$$

$$E_{k2} = E_{k1} + hc\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)$$

$$E_{k2} = 1.10 \text{ eV} + 1239.8 \text{ eV nm}\left(\frac{1}{300.0 \text{ nm}} - \frac{1}{400.0 \text{ nm}}\right) = 2.133 \text{ eV}$$

6. Valna funkcija čestice u jednoj dimenziji zadana je s

$$\Psi(x) = \begin{cases} Axe^{-ax} & \text{za} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{za} \quad x < 0, \end{cases}$$

gdje je a pozitivna konstanta.

(a) Odredite konstantu A.

(b) Skicirajte gustoću vjerojatnosti.

a) Konstantu A računamo iz uvjeta normiranja valne funkcije:

$$\int_0^\infty |\psi|^2 dx = 1, \tag{35}$$

uvrstimo valnu funkciju:

$$\int_0^\infty A^2 x^2 e^{-2ax} dx, \tag{36}$$

rješenje tog tipa neodređenog integrala je:

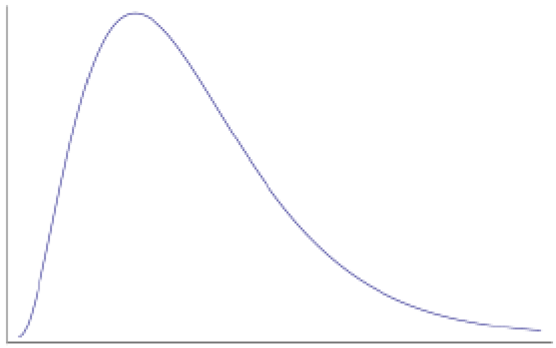
$$\int x^2 e^{bx} = e^{bx}\Big(\frac{x^2}{b} - \frac{2x}{b^2} + \frac{2}{b^3}\Big), \tag{37}$$

slijedi:

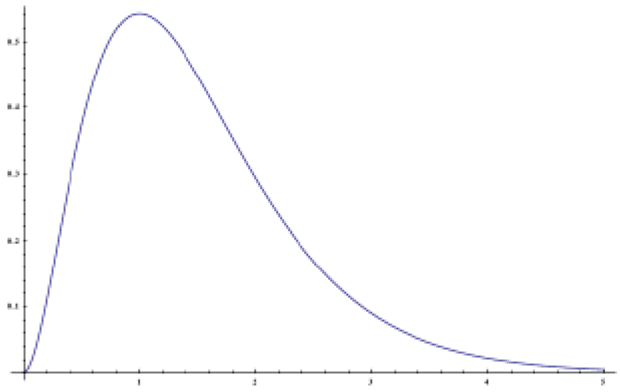
$$\int_0^\infty A^2 x^2 e^{-2ax} dx = A^2 e^{-2ax}\Big(- \frac{x^2}{2a} - \frac{2x}{4a^2} - \frac{2}{8a^3}\Big)\Big|_0^\infty = 1, \tag{38}$$

$$\frac{A^2}{4a^3} = 1 \Longrightarrow A = 2\sqrt{a^3}. \tag{39}$$

b) Skica gustoće valne funkcije: Izgled gustoće za $a = 1$:



Slika 1: Skica 1



Slika 2: Funkcija $|\psi|^2 = 4x^2e^{-2x}$