Rješenja zadataka zimskog ispitnog roka iz Fizike 2
petak, 13. veljače 2015.

1. Masa m se nalazi na uspravnom štapu duljine L, na visini b od dna štapa. Štap može rotirati oko donjeg kraja, a na gornjem kraju je preko horizontalne opruge konstante elastičnosti k povezan s vertikalnim zidom. Štap se otkloni iz vertikalnog položaja i pusti da titra oko donjeg kraja štapa. Izračunajte kružnu frekvenciju malih titranja ovog sustava. Masu štapa i opruge te gravitaciju zanemariti. **(7 bodova)**

Rješenje:

$$-kxL = mb^2\ddot{\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{L}$$

$$\theta \simeq \frac{x}{L}$$

$$-kL\theta \cdot L = mb^2\ddot{\theta}$$

$$-kL^2\theta = mb^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{kL^2}{mb^2}\theta = 0$$

$$\omega = \frac{L}{b}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

2. Prigušeni oscilator se sastoji od tijela mase m=250g na opruzi konstante k=100 N/m te amortizera koji prigušuje titranje s konstantom prigušenja b=10 kg/s. Ako je takav oscilator izmaknut 3 cm iz ravnotežnog položaja pušten, koliko daleko od ravnotežnog položaja se nalazi 0.05 s kasnije?
(7 bodova)

Rješenje:

Usporedimo prvo slobodnu frekvenciju ω_0 za oscilator zadane mase i konstante opruge i faktor prigušenja δ:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20\,\mathrm{s}^{-1}\ .$$

$$\delta = \frac{b}{2m} = 20\,\mathrm{s}^{-1}\ .$$

Budući da vrijedi $\delta = \omega_0$, radi se o kritično gušenom oscilatoru, za kojega je opće rješenje jednadžbe gibanja

$$x(t) = e^{-\delta t}\left\{x(0) + [v(0) + x(0)\delta]\,t\right\}\ .$$

Početna brzina je nula, pa je rješenje jednadžbe gibanja

$$x(t) = e^{-\delta t}x(0)\,(1 + \delta t)\ .$$

Za zadane brojeve, $x(t = 0.05\,\mathrm{s}) = 2.21$ cm.

3. Nit je pričvršćena na oba kraja, a dva susjedna moda titranja imaju valne duljine 0,55 m i 0,44 m. Kolika je duljina niti? **(5 bodova)**

Rješenje:

$\lambda_n = 0{,}55 \text{ m}$

$\lambda_{n+1} = 0{,}44 \text{ m}$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{4}{5}$$

$n = 4$

$$L = \frac{4}{2}\,0{,}55 \text{ m} = 1{,}1 \text{ m}$$

4. Konkavno sferno zrcalo žarišne duljine 12 cm nalazi se na udaljenosti 60 cm ispred divergentne leće. Predmet se nalazi na udaljenosti 16 cm od konkavnog zrcala na optičkoj osi između zrcala i leće. Zrake svjetlosti padaju prvo na zrcalo, a zatim na leću. Dobivena slika ima ukupno povećanje -0,9. Kolika je žarišna duljina divergentne leće? **(7 bodova)**

Rješenje:

$a_1 = 16 \text{ cm}$

$f_1 = 12 \text{ cm}$

$d = 60 \text{ cm}$

$m = -0{,}9$

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{a_1}$$

$$\frac{1}{b_1} = \frac{1}{12 \text{ cm}} - \frac{1}{16 \text{ cm}} = \frac{1}{48 \text{ cm}}$$

$b_1 = 48 \text{ cm}$

$$m_1 = -\frac{b_1}{a_1}$$

$$m_1 = -\frac{48}{16} = -3$$

$a_2 = d - b_1$

$a_2 = 12 \text{ cm}$

$m = m_1 m_2$

$m_2 = \frac{-0{,}9}{-3} = 0{,}3$

$m_2 = -\frac{b_2}{a_2}$

$b_2 = -0{,}3 \cdot 12 \text{ cm} = -3{,}6 \text{ cm}$

$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2}$

$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{12 \text{ cm}} + \frac{1}{-3{,}6 \text{ cm}} = -\frac{7}{36 \text{ cm}}$

$f_2 = -5{,}143 \text{ cm}$

5. Plankonveksna leća promjera *d*=4 cm i polumjera zakrivljenosti *R*=30 m, položena je izbočenom stranom na vodoravnoj podlozi načinjenoj od iste vrste stakla. Sustav se nalazi u zraku i osvijetljen je odozgo svjetlošću valne duljine 590 nm. Promatrajući odozgo, koliko se svijetlih prstenova vidi? **(7 bodova)**

Rješenje:

Radi se o Newtonovim kolobarima, promatranim, tj. mjerenim u refleksiji.

Za svjetlost koja upada okomito odozgora na sustav, razlika fizičkih puteva između dvije zrake svjetlosti koje interferiraju je $\Delta x = 2h = 2r^2/(2R) = r^2/R$, gdje je r horizontalna udaljenost zraka koje razmatramo od optičke osi. Zraka koja se reflektira na donjoj plohi, reflektira se na optički gušćem sredstvu, pa joj se faza promijeni za dodatnih π:

$$\delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x + \pi = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{r^2}{R} \ .$$

Ako je leća promjera d, onda se mogu opažati prstenovi najvećeg polumjera $r_{\max} = d/2$.

Za interferencijski maksimum, zrake svjetlosti moraju imati razliku faza $\delta\phi = 2\pi \cdot m$, $m = 1, 2...$, a m će biti redni broj svijetlog prstena.

Iz prethodna dva izraza slijedi da će broj prstenova biti

$$m \leq \frac{r_{\max}}{\lambda R} + \frac{1}{2} \ .$$

Za zadane brojeve $m \leq 23.1$, dakle vidi se 23 svijetla prstena.

6. Masenom spektroskopijom uzorka stijene utvrdeno je da sadrži atome argona (stabilni ^{40}Ar) i radioaktivne atome kalija ^{40}K u omjeru $N(^{40}Ar)/N(^{40}K)=8.5$. Pretpostavite da su svi atomi argona u uzorku nastali radioaktivnim raspadom kalija od vremena nastanka stijene, i odredite starost te stijene. Vrijeme poluživota radioaktivnog kalija je $T_{1/2} = 1.3 \cdot 10^9$ godina. **(7 bodova)**

Rješenje:

U trenutku nastanka stijene ($t = 0$), bilo je prisutno N_0 atoma kalija, i nije bilo atoma argona. Broj atoma kalija opada po zakonu radioaktivnog raspada

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \ .$$

Ako danas ima N_K atoma kalija, onda u stijeni mora biti $N_0 - N_K$ atoma argona.

Iz prethodne dvije jednadžbe možemo eliminirati nepoznati N_0 i pisati

$$\lambda t = \ln\left(1 + \frac{N_A}{N_K}\right) \ .$$

Proteklo vrijeme za dani mjereni omjer N_A/N_K je:

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln(2)} \ln\left(1 + \frac{N_A}{N_K}\right) \ .$$

Za zadane brojeve $t = 4.22 \cdot 10^9$ godina.