

4. PRISILNO TITRANJE. REZONANCIJA. SLAGANJE TITRANJA

4.2. ANALOGIJA S ELEKTRIČNIM TITRAJNIM KRUGOM

4.2.1. TITRAJNI LC-KRUG

Elektromagnetski titraji nastaju u električnom titrajnom krugu koji se sastoji od:

- kondenzatora kapaciteta C
- zavojnice induktiviteta L
- otpornika otpora R

Takav krug se zove RLC -krug ili LC -krug u idealnom slučaju kad se zanemari omski otpor kruga.

SLIKA: TITRAJNI KRUG – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 4.1. STR. 159

Nabijanje kondenzatora u LC -krugu:

SLIKA: NABIJANJE KONDENZATORA U LC -KRUGU – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 4.2. STR. 159

SLIKA: USPOREDBA ELEKTRIČNO I MEHANIČKOG TITRAJNOG SUSTAVA – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 4.3. STR. 160

Titranje u LC -krugu se uspostavlja dovođenjem početnog naboja na kondenzator tako da je u $t = 0$ naboj na kondenzatoru Q_0 . Pomoću prekidača P u strujnom krugu odvojimo kondenzator od zavojnice i iz nekog vanjskog izvora kondenzator nabijemo nabojem Q_0

tako da je napon na njemu U_0 , a energija električnog polja u kondenzatoru $E_C = \frac{Q_0^2}{2C}$.

Zatim prekidačem P isključimo izvor napona U i zatvorimo LC -krug tako da se kondenzator izbija kroz zavojnicu. Zbog samoindukcije zavojnice struja kroz LC -krug eksponencijalno raste i kad se kondenzator izbije, dostigne maksimalnu vrijednost

I_0 . Energija električnog polja kondenzatora $E_C = \frac{Q_0^2}{2C}$ se pri tome pretvara u energiju

magnetskog polja zavojnice $E_L = \frac{LI_0^2}{2}$. Kad se kondenzator isprazni, struja ne prestaje

teći kroz krug jer zbog samoindukcije zadržava isti smjer i postupno se smanjuje do 0. Pri tome ponovo nabija kondenzator, ali suprotnim polaritetom. Tada ponovo počinje izbijanje kondenzatora i proces teče u suprotnom smjeru. Nakon vremena T sustav se nađe u početnom stanju i proces se ponavlja. Rezultat je periodično nabijanje i izbijanje

kondenzatora, odnosno pretvaranje energije električnog polja u energiju magnetskog polja i obrnuto.

U titrajnom krugu imamo elektromagnetske titraje perioda T .

U idealnom LC -krugu (omski otpor $R=0$) zbroj električne i magnetske energije u svakom trenutku je konstantan (zakon očuvanja elektromagnetske energije):

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = konst \quad \Bigg/ \quad \frac{d}{dt} \quad \text{deriviramo po vremenu}$$

$$\frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = 0$$

Uz $I = \frac{dQ}{dt}$ slijedi:

$$L \frac{dQ}{dt} \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = 0 \quad \Bigg/ \quad \div \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad (*)$$

Analogno jednadžbi gibanja harmoničkog oscilatora:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0$$

Rješenje (*) možemo pisati u obliku:

$$Q = Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

THOMSONOVA FORMULA za frekvenciju i period električnog titrajnog kruga:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{kružna frekvencija slobodnih elektromagnetskih titraja}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \quad \text{period}$$

4.2.2. PRIGUŠENI ELEKTROMAGNETSKI TITRAJI

U idealnom titrajnom krugu nema gubitaka ($R = 0$).

U realnom titrajnom krugu ($R \neq 0$) dio energije se pretvara u toplinu pa se titranje priguši kao u mehaničkim sustavima.

Energija u RLC -krugu $E = \frac{Q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}$ nije očuvana.

Derivacija po vremenu:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + LI \frac{dI}{dt} = -RI^2 = \text{snaga koja se utroši u omskom otporu}$$

Predznak '-' jer se energija u krugu smanjuje.

Uz $I = \frac{dQ}{dt}$ slijedi:

$$L \frac{dQ}{dt} \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} + R \left(\frac{dQ}{dt} \right)^2 = 0 \quad \bigg/ \div \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Analogno jednadžbi za prigušeno mehaničko titranje: $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$

Uz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ i $\frac{R}{L} = 2\delta$ imamo rješenje: $Q = Q_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$

Omski otpor u električnom krugu ima istu ulogu kao i koeficijent trenja b u mehaničkom titrajnom sustavu.

Q_0 amplituda naboja u $t = 0$

$\delta = \frac{R}{2L}$ faktor prigušenja

φ_0 početna faza titranja

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ kružna frekvencija titranja

4.2.2. PRISILNI ELEKTROMAGNETSKI TITRAJI

Ako titrajni RLC -krug spojimo na vanjsku sinusoidalnu (izmjeničnu) elektromotornu silu (napon) $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$, onda nastaju prisilni elektromagnetski titraji.

ε_0 amplituda izmjenične elektromotorne sile

ω njena kružna frekvencija

Uz analogiju mehaničkog i električnog sustava $m \frac{d^2 s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + ks = F_0 \sin \omega t$ imamo jednadžbu za prisilno elektromagnetsko titranje:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} + R \left(\frac{dQ}{dt} \right) = \varepsilon_0 \sin \omega t : L$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = \frac{\varepsilon_0}{L} \sin \omega t$$

Uz $\delta = \frac{R}{2L}$ i $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ slijedi:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\delta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = \frac{\varepsilon_0}{L} \sin \omega t$$

Rješenje: $Q = Q(\omega) \sin(\omega t + \varphi_0)$

$$Q(\omega) = \frac{\varepsilon_0 / L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} = \frac{U_0}{\omega \sqrt{(L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 + R^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}}$$

ANALOGIJA VELIČINA

MEHANIČKI SUSTAV

Pomak s

Masa m

Brzina $v = ds / dt$

Konstanta opruge k

Sila F

Vlastita frekvencija $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Koeficijent otpora b

Koeficijent prigušenja $\delta = \frac{b}{2m}$

ELEKTRIČNI SUSTAV

Naboj Q

Induktivitet L

Struja $I = \frac{dQ}{dt}$

Recipročni kapacitet $1/C$

Elektromotorna sila \mathcal{E}

Vlastita frekvencija $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Otpor R

Koeficijent prigušenja $\delta = \frac{R}{2L}$