Elektromagnetizam

1 **Zadatak:** Jednostavan elektroskop napravljen je s pomoću dvije metalne kuglice od kojih svaka ima masu $m = 10\,\mathrm{g}$ i koje su obješene jedna tik do druge o niti jednakih duljina $\ell = 1\,\mathrm{m}$. Dovedemo li na kuglice ukupan naboj $2q$ koji se među njima ravnomjerno rasporedi, zbog elektrostatskog odbijanja kuglice će se razmaknuti. Odredi naboj q ako razmak među kuglicama iznosi $2a = 20\,\mathrm{cm}$ i izrazi ga u jedinicama elementarnog naboja q_e. (Pretpostavljamo da su niti bezmasene, nerastezljive i nevodljive. Permitivnost vakuuma $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, elementarni naboj $q_\mathrm{e} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.)

Postupak: Napetost niti uravnotežuje elektrostatsku silu koja djeluje vodoravno jakošću

$$F_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{(2a)^2},$$

te težinu kuglice koja djeluje duž uspravnog pravca jakošću

$$G = mg.$$

Iz uvjeta ravnoteže (zbroj sila koje djeluju na kuglicu iščezava) imamo

$$\tan\alpha = \frac{a}{\sqrt{\ell^2 - a^2}} = \frac{F_\mathrm{e}}{G}$$

(gdje je α kut otklona niti od vertikale.) Slijedi

$$q^2 = 4\pi\epsilon_0\, mg\,\frac{4a^3}{\sqrt{\ell^2 - a^2}},$$

Rješenje: $q = 4\sqrt{\pi\epsilon_0\, mg\, a^3/\sqrt{\ell^2 - a^2}} \simeq 1.3 \times 10^{12}\, q_\mathrm{e}$

2 Zadatak: Čestica mase m i naboja q ulijeće brzinom iznosa v_0 među paralelne ploče nabijenog kondenzatora. Prvobitan smjer gibanja čestice paralelan je pločama, a duljina ploča u tom smjeru je ℓ. Odredi kut otklona smjera gibanja čestice nakon što ona izađe iz kondenzatora ako je jakost homogenog električnog polja među pločama E. (Pretpostavljamo da čestica nije udarila u ploču kondenzatora.)

Postupak: Postavimo pravokutni koordinatni sustav tako da je ishodište u točki u kojoj čestica ulazi u kondenzator, orijentacija x-osi neka je podudarna s prvobitnim smjerom gibanja čestice, a y-os neka ima smjer obrnut u odnosu na smjer električnog polja. Jednadžba gibanja nabijene čestice u električnom polju, $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = q\mathbf{E}$, ovdje glasi

$$m\big(\ddot{x}(t)\,\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\,\mathbf{j}\big) = -qE\,\mathbf{j},$$

Uz pokratu

$$\gamma = qE/m$$

jednadžba gibanja se svodi na

$$\ddot{x}(t) = 0, \qquad \ddot{y}(t) = -\gamma$$

(što je podudarno s uobičajenim opisom gibanja čestice u homogenom polju gravitacijske sile ubrzanja $g = \gamma$.) Integracijom jednadžbi gibanja uz početne uvjete u $t = 0$,

$$x(0) = y(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = v_0, \quad \dot{y}(0) = 0,$$

slijedi

$$x(t) = v_0 t, \qquad y(t) = -\frac{\gamma}{2}t^2$$

(što je podudarno s tzv. horizontalnim hicem u homogenom polju gravitacijske sile.) Čestica napušta kondenzator u trenutku $t = \tau$ u kojem vrijedi $x(\tau) = \ell$, odnosno

$$\tau = \ell/v_0.$$

Kut otkona slijedi iz

$$\tan\theta = -\frac{\dot{y}(\tau)}{\dot{x}(\tau)} = \frac{\gamma\tau}{v_0} = \frac{qE\ell}{mv_0^2}.$$

Rješenje: $\tan\theta = qE\ell/mv_0^2$

3 Zadatak: Unutar sfere polumjera R raspoređen je naboj Q. Gustoća naboja opisana je izrazom $\rho(r) = \rho_0(1 - r/R)$, gdje je $r \leq R$ udaljenost od središta sfere, a ρ_0 je konstanta. Odredi jakost električnog polja $E(r)$ unutar sfere i izrazi ju preko parametara R i Q.

Postupak: Naboj unutar sfere polumjera $r \leq R$ može se napisati kao

$$q(r) = \int_V \rho \, \mathrm{d}V = \int_0^r \rho(r') \, 4\pi r'^2 \mathrm{d}r'.$$

Za zadanu gustoću $\rho(r)$ integracijom gornjeg izraza dobivamo

$$q(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 \left(1 - \frac{3r}{4R}\right).$$

Obzirom da se unutar sfere polumjera $r = R$ nalazi naboj Q imamo uvjet $q(R) = Q$ iz čega slijedi

$$\rho_0 = 3Q/\pi R^3.$$

Naboj unutar sfere polumjera $r \leq R$ sada se može napisati kao

$$q(r) = Q \left(\frac{r}{R}\right)^3 \left(4 - \frac{3r}{R}\right).$$

Primjenom Gaussova zakona, $4r^2\pi \, E(r) = q(r)/\epsilon_0$, slijedi da je jakost električnog polja na udaljenosti r od središta sfere

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(r)}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \left(4 - \frac{3r}{R}\right).$$

Rješenje: $E(r) = (Q/4\pi\epsilon_0)(r/R^3)(4 - 3r/R)$

4 **Zadatak:** Naboj Q raspoređen je unutar sfere polumjera R pri čemu je jakost električnog polja za udaljenost od središta $r \leq R$ opisana izrazom $E(r) = E_0(r/R)^n$, $n > -2$. Izrazi konstantu E_0 (jakost električnog polja pri $r = R$) i gustoću naboja $\rho(r)$ za $r \leq R$ preko parametara Q i R.

Postupak: Gaussovim zakonom za električno polje naboj unutar sfere polumjera $r \leq R$ je

$$q(r) = 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r) = 4\pi\epsilon_0 r^2 E_0 \left(\frac{r}{R}\right)^n .$$

Obzirom da je unutar sfere polumjera $r = R$ sadržan sav naboj Q imamo uvjet $q(R) = Q$, iz čega slijedi

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2},$$

odnosno

$$q(r) = Q \left(\frac{r}{R}\right)^{n+2} .$$

Naboj unutar sfere polumjera r možemo također napisati kao

$$q(r) = \int_V \rho \, \mathrm{d}V = \int_0^r \rho(r') \, 4\pi r'^2 \mathrm{d}r'.$$

Deriviranjem gornjih izraza za $q(r)$ po r i izjednačavanjem derivacija slijedi

$$Q(n+2)\frac{r^{n+1}}{R^{n+2}} = \rho(r) 4\pi r^2,$$

odnosno

$$\rho(r) = \frac{Q(n+2)r^{n-1}}{4\pi R^{n+2}}.$$

Rješenje: $E_0 = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$, $\rho(r) = Q(n+2)r^{n-1}/4\pi R^{n+2}$

5 Zadatak: Električni naboj jednoliko je raspoređen duž tankog obruča polumjera R. Odredi udaljenost od središta obruča onih točaka na njegovoj osi u kojima je jakost električnog polja najveća.

Postupak: Neka je z-os podudarna s osi simetrije obruča i neka $z = 0$ odgovara njegovu središtu. Električno polje u točkama na na z-osi može zbog simetrije imati samo z-komponentu. Izrazimo li ju kao gradijent elektrostatskog potencijala U,

$$E_z = -\frac{\partial}{\partial z} U.$$

Vidimo da je dovoljno poznavati ovisnost potencijala o z-koordinati pa računamo potencijal za točke na z-osi,

$$U(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathrm{d}q}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + z^2}}.$$

Sada z-komponenta električnog polja na z-osi slijedi kao

$$E_z(z) = -\frac{\partial}{\partial z} U(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Ekstrem nalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} E_z(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(R^2 - 2z^2)}{(R^2 + z^2)^{5/2}},$$

koji je ispunjen za

$$z = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Očigledno se radi o maksimumu jakosti polja jer električno polje iščezava u središtu prstena (zbog simetrije), kao i u beskonačnosti.

Rješenje: $z = \pm R/\sqrt{2}$

6 Zadatak: Zadano je vektorsko polje

$$\mathbf{A} = A_0(-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})$$

gdje su $\mathbf{i}$ i $\mathbf{j}$ jedinični vektori pravokutnog koordinatnog sustava. Pokaži da je iznos polja razmjeran udaljenosti od z-osi te da je smjer polja tangenta na kružnicu koja leži u ravnini okomitoj na z-os, a sa središtem na z-osi. Izračunaj krivuljni integral polja $\mathbf{A}$ duž kružnice polumjera R, te površinski integral rotacije polja $\mathbf{A}$ na krugu omeđenom kružnicom.

Postupak: Iznos polja je

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = A_0\sqrt{x^2+y^2} = A_0\rho,$$

gdje je ρ udaljenost od z-osi. Činjenicu da je polje tangencijalno na kružnicu koja leži u ravnini okomitoj na z-os sa središtem na z-osi pokazujemo sljedećim razmatranjem: Najprije uočimo da je z-komponenta polja $\mathbf{A}$ jednaka nuli što znači da ono leži u ravnini okomitoj na z-os. Zatim uvedemo na vektor $\boldsymbol{\rho} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ koji je okomit na z-os i pokažemo da je polje $\mathbf{A}$ okomito na taj vektor (jer je $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\rho} = 0$.) Slijedi da polje $\mathbf{A}$ ima smjer tangente na kružnicu koja leži u ravnini okomitoj na z-os sa središtem na z-osi. Krivuljni integral polja stalnog iznosa i smjera tangente na kružnicu duž cijele kružnice svodi na produkt iznosa polja i opsega kružnice,

$$\oint_c \mathbf{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = (A_0R)(2R\pi) = 2A_0R^2\pi.$$

Rotacija polja $\mathbf{A}$ je

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} = 2A_0\mathbf{k},$$

što je homogeno vektorsko polje u smjeru z-osi. Integral rotacije polja $\mathbf{A}$ na krugu u ravnini okomitoj na z-os svodi se na produkt iznosa rotacije i površine kruga,

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot \mathrm{d}\mathbf{a} = \int_S (2A_0\mathbf{k})\cdot\mathbf{k}\mathrm{d}a = 2A_0\int_S \mathrm{d}a = (2A_0)(R^2\pi) = 2A_0R^2\pi.$$

(Jednakost dvaju integrala je očekivana na osnovu Stokesova teorema.)

Rješenje: $\oint_c \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_S(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = 2A_0R^2\pi$

7 Zadatak: Dva beskonačna paralelna ravna linijska vodiča vode u istom smjeru struje čije se jakosti odnose kao 1 : 2. U ravnini okomitoj na vodiče, osim na beskonačnoj udaljenosti od vodiča, nalazi se jedna točka u kojoj magnetsko polje iščezava. Pronađi tu točku i odredi njenu udaljenost od vodiča kojim teče slabija struja ako je udaljenost među vodičima d.

Postupak: Vodiče smjestimo u pravokutni koordinatni sustav tako da struja jakosti I teče duž z-osi u njenom pozitivnom smjeru, dok strija jakosti $2I$ teče duž pravca određenog s $x = d$, $y = 0$. Razmatrat ćemo magnetsko polje u ravnini $z = 0$ (okomitoj na vodiče), a na osnovu simetrije očekujemo da će se točka u kojoj jakost polja iščezava nalaziti na x-osi. Magnetsko polje prvog vodiča može se napisati kao

$$\mathbf{B}_1(x, y = 0, z = 0) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I}{x} \, \mathbf{j},$$

dok je magnetsko polje drugog vodiča

$$\mathbf{B}_2(x, y = 0, z = 0) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{(x - d)} \, \mathbf{j}.$$

Zbroj polja je

$$\mathbf{B}(x, y = 0, z = 0) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x - d} \right) I \, \mathbf{j},$$

što iščezava pri

$$x = d/3.$$

Rješenje: $x = d/3$

8 **Zadatak:** Vektorsko polje u ravnini $z = 0$ pravokutnog koordinatnog sustava dano je izrazom $\mathbf{A}(x, y, z = 0) = A_0\big(3\,\mathbf{i} + (x/a)^2\,\mathbf{j}\big)$, gdje su A_0 i a konstante. Izračunaj krivuljni integral $\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ duž stranica kvadrata duljine a koji leži u ravnini $z = 0$ ako se jedan njegov vrh nalazi u ishodištu koordinatnog sustava, a dvije stranice leže na pozitivnim dijelovima x i y-osi.

Postupak: Integral vektorskog polja $\mathbf{A}$ po zatvorenoj krivulji C, ovdje po stranicama kvadrata, ćemo, korištenjem Stokesova teorema, zbog jednostavnijeg računa zamijeniti površinskim integralom rotacije polja $\mathbf{A}$, po plohi S omeđenoj krivuljom C,

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a},$$

gdje je $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ element krivulje, a $\mathrm{d}\mathbf{a}$ je element plohe. Obzirom da je ploha dio x, y-ravnine element plohe imamo

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathbf{k}\,\mathrm{d}a = \mathbf{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

pa se površinski integral rotacije svodi na

$$\int_{y=0}^{a} \int_{x=0}^{a} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{a} \int_{x=0}^{a} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

gdje je z-komponenta rotacije polja $\mathbf{A}$

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{2A_0 x}{a^2}.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} &= \int_{y=0}^{a} \int_{x=0}^{a} \frac{2A_0 x}{a^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{2A_0}{a^2} \left(\int_0^a x\,\mathrm{d}x \right) \left(\int_0^a \mathrm{d}y \right) \\
&= A_0 a
\end{aligned}$$

(Zadatak se može riješiti i izravnim računom linijskog integrala.)

Rješenje: $\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = A_0 a$

9 Zadatak: Kružnom petljom polumjera R teče električna struja jakosti I. S pomoću Biot–Savartova pravila odredi jakost magnetskog polja na osi simetrije petlje na udaljenosti z od njezina središta.

Postupak: Prema Biot–Savartovu zakonu, element magnetskog polja d$\mathbf{B}$ u točki čiji je položaj u odnosu na element krivulje d$\boldsymbol{\ell}$ kojim teče struja I dan vektorom $\mathbf{r}$ dan je izrazom

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}) \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

gdje je $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ jedinični vektor. Smjestimo li kružnu petlju u $z = 0$ ravninu te računamo li nagnetsko polje na z-osi, z-komponenta elementa magnetskog polja je

$$\mathrm{d}B_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I\,\mathrm{d}\ell\,\sin\phi}{z^2 + R^2},$$

gdje je ϕ kut što ga zatvara vektor $\mathbf{r}$ sa z-osi. Koristeći $\sin\phi = R/\sqrt{R^2 + z^2}$ slijedi

$$\mathrm{d}B_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{IR}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\ell$$

te integracijom po čitavoj kružnici

$$B_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{IR}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\, 2R\pi = \frac{I}{2\epsilon_0 c^2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Komponenta magnetskog polja okomita na z-os iščezava zbog simetrije pa imamo

$$B = |\mathbf{B}| = |B_z|.$$

Rješenje: $B = |I|R^2/2\epsilon_0 c^2 (R^2 + z^2)^{3/2}$

10 Zadatak: Koaksijalni kabel sastoji se od dva tanka cilindrična (šuplja) vodiča kojima su polumjeri a i b (vodič polumjera a smješten je unutar vodiča polumjera $b > a$.) Kroz vodiče u suprotnim smjerovima teku struje jednake jakosti I. Odredi energiju magnetskog polja po jedinici duljine sadržanu u takvom kablu.

Postupak: Magnetsko polje iščezava unutar tanjeg vodiča jer kroz kružnu petlju polumjera $r < a$ ne teče struja, kao i izvan šireg vodiča jer se struje koje teku kroz kružnu petlju polumjera $r > b$ poništavaju. Jakost magnetskog polja pri udaljenosti od osi $r \in (a, b)$ (između dva vodiča) je prema Ampereovu zakonu

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}, \qquad (a < r < b)$$

jer joj doprinosi struja duž tanjeg vodiča. Gustoća energije magnetskog polja jakosti B je općenito $w_\mathrm{m} = B^2/2\mu_0$, ovdje imamo

$$w_\mathrm{m}(r) = \frac{1}{2\mu_0}B^2(r) = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}, \qquad (a < r < b).$$

Energija sadržana u dijelu kabla duljine ℓ je

$$E_\mathrm{m} = \int_V w_\mathrm{m}\,\mathrm{d}V = \int_a^b w_\mathrm{m}(r)\,2\pi r\ell\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0}{4\pi}I^2\ell\ln(b/a).$$

Linijska gustoća energije kabla je

$$\lambda_\mathrm{m} = \frac{E_\mathrm{m}}{\ell} = \frac{\mu_0}{4\pi}I^2\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Rješenje: $\lambda_\mathrm{m} = (\mu_0/4\pi)I^2\ln(b/a)$

11 Zadatak: Duž pravca je raspoređen naboj linijske gustoće λ. Odredi jakost struje I koja bi morala teći istim pravcem pa da iščezne elektromagnetska (Lorentzova) sila na nabijenu česticu koja se usporedno s pravcem giba brzinom v.

Postupak: Elektromagnetska sila koja djeluje na česticu naboja q i brzine $\mathbf{v}$ je

$$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Obzirom na naboj smješten na pravcu ovdje imamo električno polje koje je okomito na pravac, a na udaljenosti r od pravca jakosti mu je

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Kada tim pravcem teče struja ona stvara magnetsko polje koje je okomito i na pravac i na električno polje, a iznos mu je

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}.$$

Sada možemo u točki u kojoj se nalazi čestica postaviti koordinatni sustav u kojem se orijentacija x-osi podudara s nabijenim pravcem i sa smjerom gibanja čestice, orijentacija y-osi neka se podudara s električnim, a z-os s magnetskim poljem. Sada silu možemo napisati kao

$$\mathbf{F} = q\big(E(r)\,\mathbf{j} + (v\,\mathbf{i}) \times (B(r)\,\mathbf{k})\big) = q\big(E(r) - vB(r)\big)\,\mathbf{j}.$$

Sila iščezava ako $E(r) = vB(r)$, odnosno

$$I = \frac{\lambda c^2}{v}.$$

Rješenje: $I = \lambda c^2/v$

12 Zadatak: Vodljivi štap duljine ℓ okreće se oko svog kraja kutnom brzinom ω u ravnini okomitoj na homogeno magnetsko polje jakosti B. Odredi iznos (napon) inducirane elektromotorne sile na krajevima štapa.

Postupak: Elektromotorna sila je krivuljni integral sile koja djeluje na jedinični naboj, općenito

$$\mathcal{E} = \int_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}.$$

Električno polje $\mathbf{E}$ u ovom slučaju nije prisutno. Iznos brzine elementa štapa na udaljenosti r od njegova mirnog kraja je

$$v = \omega r,$$

a smjer brzine je okomit na magnetsko polje. Vektorski produkt $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ kolinearan je s elementom štapa $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$. Slijedi

$$\mathcal{E} = \int_0^{\ell} \omega r B \, \mathrm{d}r = \frac{\omega B \ell^2}{2}.$$

Rješenje: $\mathcal{E} = \omega B \ell^2 / 2$

13 Zadatak: Na napetoj vodljivoj žici duljine L s učvršćenim krajevima titra stojni val frekvencijom ω i amplitudom A. Titranje se odvija u ravnini koja je okomita na homogeno magnetsko polje jakosti B. Odredi amplitudu elektromotorne sile inducirane na krajevima žice za n-ti mod titranja stojnog vala.

Postupak: Elektromotorna sila je općenito dana izrazom

$$\mathcal{E} = \int_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

gje je $\mathbf{v}$ brzina elementa krivulje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, a $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ su električno i magnetsko polje. U zadanoj situaciji električno polje nije prisutno, a $\mathbf{v}$ je brzina kojom se žica giba pri titranju. Postavljamo pravokutni koordinatni sustav tako da žica leži na x-osi s krajevima pri $x = 0$ i $x = L$, te uzimamo da se titranje stojnog vala odvija u $z = 0$ ravnini. Elongaciju (otklon od ravnotežnog položaja) žice možemo napisati kao

$$\boldsymbol{\xi}(x,t) = A \sin(n\pi x/L) \sin(\omega t + \phi)\, \mathbf{j}$$

gdje $n = 1, 2, \ldots$ odgovara različitim modovima titranja, a ϕ je općenit pomak u fazi. Takvom titranju odgovara brzina

$$\mathbf{v}(x,t) = \dot{\boldsymbol{\xi}}(x,t) = A\omega \sin(n\pi x/L) \cos(\omega t + \phi)\, \mathbf{j}.$$

Homogeno magnetsko polje je okomito na ravninu titranja pa uzimamo

$$\mathbf{B} = B\, \mathbf{k}.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \int_{x=0}^{L} \big((A\omega \sin(n\pi x/L) \cos(\omega t + \phi)\, \mathbf{j}) \times (B\, \mathbf{k})\big) \cdot (\mathbf{i}\, \mathrm{d}x) \\
&= AB\omega \cos(\omega t + \phi) \int_0^L \sin(n\pi x/L)\, \mathrm{d}x \\
&= AB\omega\, \frac{L}{n\pi}(1 - \cos n\pi)\, \cos(\omega t + \phi).
\end{aligned}$$

Elektromotornu silu možemo napisati kao $\mathcal{E} = \mathcal{E}_n \cos(\omega t + \phi)$, gdje je

$$\mathcal{E}_n = \frac{AB\omega L}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \frac{AB\omega L}{n\pi}(1 - (-1)^n)$$

amplituda elektromotorne sile pri titranju n-tog moda, a važno je uočiti da ona iščezava za parne modove.

Rješenje: $\mathcal{E}_n = (AB\omega L/n\pi)(1 - (-1)^n)$

14 Zadatak: Kvadratičnom petljom stranice a teče struja I. Odredi iznos zakretnog momenta koji djeluje na petlju ako se ona nalazi u homogenom magnetskom polju jakosti B sa smjerom koji je paralelan dvjema stranicama kvadrata.

Postupak: Element sile koja djeluje na element vodiča $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ kojim teče struja I u magnetskom polju $\mathbf{B}$ je

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathrm{d}q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = (\mathrm{d}q/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}) = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}.$$

Za stranice kvadrata koje su paralelne s magnetskim poljem $\mathrm{d}F = 0$, dok za stranice koje su okomite na polje imamo $\mathrm{d}F = IB\,\mathrm{d}\ell$. Integracijom slijedi da je iznos sile na čitavu stranicu

$$F = IB\,a,$$

pri čemu je smjer sile okomit na ravninu kvadrata, a orijentacija je suprotna na dvjema stranicama. Element zakretnog momenta je

$$\mathrm{d}\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{F},$$

gdje je $\mathbf{r}$ vektor koji opisuje položaj elementa vodiča u odnosu na odabranu referentnu točku. (Obzirom da je zbroj sila na kvadrat jednak nuli, zakretni moment možemo računati u odnosu na bilo koju referentnu točku.) Odaberemo li središte kvadrata kao referentnu točku krakovi sila koje djeluju na stranice su jednakih duljina $a/2$, pa iznos ukupnog zakretnog momenta slijedi kao

$$M = 2\,\frac{a}{2}\,F = IBa^2.$$

Rješenje: $M = IBa^2$

15 Zadatak: Elektromagnetski monokromatski val prelazi iz vakuuma u sredstvo relativne permitivnosti $\epsilon_{\mathrm{r}} = 1.15$ i relativne permeabilnosti $\mu_{\mathrm{r}} = 1.05$. Odredi relativnu promjenu valne duljine tog vala.

Postupak: U vakuumu gdje je $\epsilon_{\mathrm{r}} = \mu_{\mathrm{r}} = 1$ vrijedi relacija

$$\lambda f = c,$$

gdje je f frekvencija titranja a c je brzina širenja vala (brzina svjetlosti). Kada val uđe u sredstvo frekvencija se ne mijenja, a mijenjaju se bezina širenja i valna duljina duljina,

$$\lambda' f = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}}.$$

Relativna promjena valne duljine je

$$\delta_\lambda = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}}} - 1.$$

Rješenje: $\delta_\lambda = 1/\sqrt{\epsilon_{\mathrm{r}}\mu_{\mathrm{r}}} - 1 \simeq -0.09$