Fizika 2: Zadaci za vježbu 7/7 (moderna fizika)

1 Zadatak: Snaga zračenja točkastog izotropnog izvora monokromatske svjetlosti valne duljine $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$ je $P = 10\,\mathrm{W}$. Odredi najveću udaljenost na kojoj čovjek može primijetiti taj izvor ako njegovo oko reagira na svjetlosni tok od najmanje 60 fotona u sekundi, a promjer širom otvorene zjenice oka je $2r = 5\,\mathrm{mm}$. (Planckova konstanta $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Jakost točkastog izvora je

$$I = \frac{P}{4\pi},$$

a snagu koju zahvaća ljudsko oko na udaljenosti d od tog izvora je

$$P' = I\,\Omega',$$

gdje je

$$\Omega' = \frac{r^2\pi}{d^2}$$

prostorni kut koji otvor zjenice površine $r^2\pi$ zauzima u odnosu na izvor. Slijedi

$$P' = \frac{Pr^2}{4d^2}.$$

(Gornji rezultat možemo izravno napisati primijetimo li da se snaga koju zahvaća oko, P' i ukupna znaga izvora, P, odnose kao što se odnose površina otvora oka, $r^2\pi$, i površina sfere polumjera jednakog udaljenosti oka od izvora, $4d^2\pi$.) S obzirom da se svjetlost sastoji od fotona čija je energija

$$E_{\mathrm{fot.}} = \frac{hc}{\lambda},$$

snagu koju oko zahvaća također možemo napisati kao produkt frekvencije f' kojom fotoni ulaze u oko i energije fotona,

$$P' = fE_{\mathrm{fot.}} = f\frac{hc}{\lambda}.$$

Izjednačavanjem gornjih izraza za snagu P' slijedi

$$d^2 = \frac{Pr^2\lambda}{4fhc}.$$

Pragu osjetljivosti oka $f_{\min}$ odgovara maksimalna udaljenost s koje vidimo izvor,

$$d_{\max} = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{P\lambda}{hcf_{\min}}}.$$

Za zadane vrijednosti P, $f_{\min} = 60\,\mathrm{s^{-1}}$ i r dobivamo $d_{\max} \simeq 809\,\mathrm{km}$.

Rješenje: $d_{\max} = (r/2)\sqrt{P\lambda/hcf_{\min}} \simeq 809\,\mathrm{km}$

2 Zadatak: Žica duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$ i promjera $2r = 1\,\mathrm{mm}$ priključena je na napon $U = 6\,\mathrm{V}$ te njome teče struja $I = 0.2\,\mathrm{A}$, a nalazi se u okolini temperature $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. Odredi temperaturu žice pretpostavljajući da ona apsorbira i emitira termalno zračenje kao crno tijelo. (Štefan–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.)

Postupak: U stacionarnom stanju, tj. kada je temperatura žice stalna, količina energije koju u jedinici vremena žica prima jednaka je količini energije koju ona predaje. Pišemo

$$0 = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = UI + S\sigma T_0^4 - S\sigma T^4,$$

gdje je UI snaga kojom električna struja zagrijava (pozitivni predznak) žicu, $S\sigma T_0^4$ je snaga kojom žica apsorbira (pozitivni predznak) termalno zračenje iz okoline, a $S\sigma T^4$ je snaga termalne emisije (negativni predznak) žice. Ploha koja istovremeno apsorbira i emitira zračenje je plašt cilindra polumjera r i duljine ℓ čija je površina

$$S = 2r\pi\ell.$$

Slijedi

$$T^4 = T_0^4 + \frac{UI}{S\sigma} = T_0^4 + \frac{UI}{2r\pi\ell\sigma},$$

a za zadane vrijednosti parametara ℓ, r, U, I i T_0 dobivamo $T \simeq 349\,\mathrm{K}$.

Rješenje: $T = \left(T_0^4 + UI/2r\pi\ell\sigma\right)^{1/4} \simeq 349\,\mathrm{K}$

3 Zadatak: Čelična kuglica promjera $2r = 1\,\mathrm{cm}$ zagrijana je do temperature $T_0 = 1000\,\mathrm{K}$ i ostavljena je da se hladi termalnim zračenjem. Pretpostavljajući da kuglica zrači kao crno tijelo te zanemarujući apsorpciju zračenja iz okoline odredi za koliko vremena se temperatura kuglice spusti na $T_1 = 900\,\mathrm{K}$. (Toplinski kapacitet čelika $c = 466\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, gustoća čelika $\rho = 7800\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, Štefan–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.)

Postupak: Toplinska energija sadržana u čeličnoj kuglici pri temperaturi T je

$$Q = mcT.$$

Ta se toplina u vremenu smanjuje zbog termičkog zračenja opisanog Štefan–Boltzmannovim zakonom,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q = mc\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T = -S\sigma T^4.$$

Gornja diferencijalna jednadžba dopušta separaciju varijabli te ju možemo napisati u obliku

$$-\frac{mc}{S\sigma}\frac{\mathrm{d}T}{T^4} = \mathrm{d}t,$$

a integracijom dobivamo

$$\frac{mc}{3S\sigma T^3} = t + C,$$

gdje je C integracijska konstanta. S obzirom da je u trenutku $t = t_0$ kuglica pri temperaturi $T = T_0$, a u trenutku t_1 je pri temperaturi T_2, imamo sustav

$$\frac{mc}{3S\sigma T_0^3} = t_0 + C, \qquad \frac{mc}{3S\sigma T_1^3} = t_1 + C.$$

Oduzimanjem lijeve od desne jednadžbe slijedi traženo vrijeme hlađenja,

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{mc}{3S\sigma}\left(\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_0^3}\right).$$

Kako bismo gornji izraz napisali s pomoću zadanih parametara, površinu kuglice i njenu masu pišemo kao

$$S = 4r^2\pi, \qquad m = \rho V = \rho\,\frac{4}{3}r^3\pi,$$

te za vrijeme hlađenja dobivamo

$$\Delta t = \frac{\rho c r}{9\sigma}\left(\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_0^3}\right).$$

Za zadane vrijednosti parametara r, T_{12} i konstanti ρ, c i σ dobivamo $\Delta t = 13.3\,\mathrm{s}$

Rješenje: $\Delta t = (\rho c r/9\sigma)(T_1^{-3} - T_0^{-3}) \simeq 13.3\,\mathrm{s}$

4 **Zadatak:** Srednja udaljenosti Zemlje od Sunca (tzv. astronomska jedinica) iznosi $a = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$, a ukupna snaga Sunčeva zračenja (tzv. luminozitet Sunca) je $P = L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$. Procijeni srednju temperaturu Zemlje na osnovu pretpostavke da ona apsorbira i emitira zračenje kao crno tijelo. (Štefan–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.)

Postupak: Sunce možemo shvatiti kao izotropni izvor jakosti

$$I = \frac{P}{4\pi} = \frac{L_\odot}{4\pi},$$

a snagu zračenja koja pada na Zemlju i koje ona apsorbira možemo napisati kao

$$P_\mathrm{a} = I\Omega,$$

gdje je

$$\Omega = \frac{R_\mathrm{Z}^2\pi}{a^2}$$

prostorni kut koji Zemlja zauzuma u odnosu na Sunce, R_Z je polumjer Zemlje. Slijedi da snagu zračenja koju Zemlja apsorbira možemo napisati kao

$$P_\mathrm{a} = \frac{L_\odot R_\mathrm{Z}^2}{4a^2}.$$

Snagu zračenja koje Zemlja emitira opisujemo Štefan–Boltzmannovim zakonom,

$$P_\mathrm{e} = S\sigma T^4 = 4R_\mathrm{Z}^2\pi\sigma T^4,$$

gdje je $S = 4R_\mathrm{Z}^2\pi$ površina Zemlje, a T je njena srednja temperatura. S obzirom da nema drugih mehanizama grijanja i hlađenja te dvije snage moraju biti u ravnoteži,

$$P_\mathrm{a} = P_\mathrm{e}.$$

Slijedi

$$T^4 = \frac{L_\odot}{16\pi\sigma a^2},$$

što daje $T \simeq 278.7\,\mathrm{K}$.

Rješenje: $T = (L_\odot/16\pi\sigma a^2)^{1/4} \simeq 278.7\,\mathrm{K} \simeq 5.5^\circ\mathrm{C}$

5 Zadatak: Odredi silu kojom Sunčevo zračenje djeluje na Zemlju pretpostavljajući da Zemlja apsorbira svo zračenje koje na nju pada te koristeći podatke o ukupnoj snazi Sunčeva zračenja (luminozitet Sunca) $P = L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$, polumjeru Zemlje $R = 6371\,\mathrm{km}$ te srednjoj udaljenosti Zemlje od Sunca (astronomska jedinica) $a = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$. (Brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Na osnovu očuvanja količine gibanja mora vrijediti

$$\Delta\mathbf{p}_\mathrm{Z} + \Delta\mathbf{p}_\mathrm{aps.} = 0,$$

gdje je $\Delta\mathbf{p}_\mathrm{Z}$ promjena količine gibanja Zemlje, a $\Delta\mathbf{p}_\mathrm{aps.}$ je promjena količine gibanja zračenja uslijed apsorpcije. Promjenu količine gibanja Zemlje koja nastupa u vremenskom intervalu Δt možemo napisati kao

$$\Delta\mathbf{p}_\mathrm{Z} = \mathbf{F}\,\Delta t,$$

gdje je $\mathbf{F}$ sila koja djeluje na Zemlju. Promjenu količine gibanja zračenja u istom vremenskom intervalu možemo napisati kao zbroj promjena količina gibanja svih apsorbiranih fotona,

$$\Delta\mathbf{p}_\mathrm{aps.} = \sum_{i\in\Delta t} (\mathbf{p}_i' - \mathbf{p}_i) = -\sum_{i\in\Delta t} \mathbf{p}_i$$

(s obzirom da je riječ o apsorpciji imamo $\mathbf{p}_i' = 0$). S obzirom da je udaljenost Zemlja–Sunce znatno veća od polumjera Zemlje i Sunca vektori $\mathbf{p}_i$ su gotovo paralelni pa možemo računati s modulima vektora. Slijedi

$$F = \frac{\Delta p_\mathrm{Z}}{\Delta t} = \frac{\Delta p_\mathrm{aps.}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{i\in\Delta t} p_i.$$

Iznos količine gibanja fotona p_i povezan je s njegovom energijom E_i relativističkom relacijom

$$E_i = p_i c$$

s pomoću koje silu možemo napisati kao

$$F = \frac{1}{\Delta t}\sum_{i\in\Delta t}\frac{E_i}{c} = \frac{1}{c}\frac{\Delta E_\mathrm{a}}{\Delta t} = \frac{1}{c}P_\mathrm{a}$$

gdje je ΔE_a ukupna energija apsorbiranog zračenja u vremenskom intervalu Δt, a P_a snaga apsorbiranog zračenja. S obzirom da je polumjer Zemlje mnogo manji od udaljenosti Zemlja–Sunce omjer apsorbirane snage P_a i ukupne snage Sunčevog zračenja $L_\odot$ odgovara omjeru površine kruga polumjera R i površine sfere polumjera a,

$$\frac{P_\mathrm{a}}{L_\odot} = \frac{R^2\pi}{4a^2\pi} = \frac{R^2}{4a^2}$$

(detaljniji izvor gornje relacije vidi u ranijem zadatku). Konačno

$$F = \frac{R^2 L_\odot}{4a^2 c} \simeq 5.817 \times 10^{8}\,\mathrm{N}.$$

Rješenje: $F = R^2 L_\odot / 4a^2 c \simeq 5.817 \times 10^{8}\,\mathrm{N}.$

6 Zadatak: Pri raspršenju fotona na mirnom elektronu (Comptonovo raspršenje), energija fotona raspršenih pod kutem $\theta'_{\text{fot.}} = 60^\circ$ je $E'_{\text{fot.}} = 0.7\ \text{MeV}$. Odredi energiju fotona prije raspršenja. (Masa elektrona $m_e = 0.511\ \text{MeV}/c^2$.)

Postupak: Koristeći poznat izraz za razliku valnih duljina fotona pri Comptonovu raspršenju,

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}\big(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}}\big),$$

te izraz za energiju fotona frekvencije f, odn. valne duljine λ,

$$E_{\text{fot.}} = hf = \frac{hc}{\lambda},$$

imamo

$$\frac{hc}{E'_{\text{fot.}}} - \frac{hc}{E_{\text{fot.}}} = \frac{h}{m_e c}\big(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}}\big),$$

iz čega dobivamo

$$E_{\text{fot.}} = \frac{E'_{\text{fot.}}}{1 - (E'_{\text{fot.}}/m_e c^2)(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}})}.$$

Za zadane vrijednosti $E_{\text{fot.}} \simeq 2.222\ \text{MeV}$.

Rješenje: $E_{\text{fot.}} = E'_{\text{fot.}}/\big(1 - (E'_{\text{fot.}}/m_e c^2)(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}})\big) \simeq 2.222\ \text{MeV}$

7 Zadatak: Odredi najveću energiju koju elektron može primiti u Comptonovu raspršenju ako je valna duljina fotona prije raspršenja $\lambda = 0.1\,\mathrm{nm}$. (Planckova konstanta $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}$, masa elektrona $m_e = 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, elementarni naboj $e = 1.602 \times 10^{-19}$.)

Postupak: Energija koju elektron u raspršenju primi jednaka je energiji koju foton izgubi,

$$\Delta E = E_{\mathrm{fot.}} - E'_{\mathrm{fot.}} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = hc\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)},$$

gdje je

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta'_{\mathrm{fot.}})$$

razlika valne duljine fotona nakon i prije raspršenja pod kutem $\theta'_{\mathrm{fot.}}$ (poznata formula za Comptonovo raspršenje). Iz gornjih izraza se vidi da je ΔE najveće kada je $\Delta\lambda$ najveće, pa pišemo

$$(\Delta E)_{\max} = hc\,\frac{(\Delta\lambda)_{\max}}{\lambda(\lambda + (\Delta\lambda)_{\max})},$$

a također se vidi da je $\Delta\lambda$ najveće pri $\theta'_{\mathrm{fot.}} = \pi$ (raspršenje izravno unazad), odnosno,

$$(\Delta\lambda)_{\max} = \frac{2h}{m_e c}.$$

Slijedi

$$(\Delta E)_{\max} = \frac{2h^2 c}{\lambda(\lambda m_e c + 2h)}.$$

Za zadanu vrijednost λ,

$$(\Delta E)_{\max} \simeq 573.9\,\mathrm{eV}.$$

Rješenje: $(\Delta E)_{\max} = 2h^2 c/\lambda(\lambda m_e c + 2h) \simeq 573.9\,\mathrm{eV}$

8 **Zadatak:** Proučavanjem fotoelektričnog efekta na uzorku nekog metala uočeno je da svjetlost valne duljine $\lambda_1 = 410\,\mathrm{nm}$ s njegove površine izbacuje elektrone koji savladavaju zaustavni potencijal do $\Delta U_1 = 1\,\mathrm{V}$. Odredi gornju granicu na valnu duljinu svjetlosti koja bi proizvela fotone koji savladavaju zaustavni potencijal $\Delta U_2 = 2\,\mathrm{V}$. (Planckova konstanta $h = 6.626\times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$, brzina svjetlosti $c = 2.998\times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, elementarni naboj $e = 1.602\times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.)

Postupak: Kako bi elektron izbačen s površine metala fotoelektričnim efektom savladao zaustavni potencijal ΔU energija fotona $E_{\mathrm{fot.}} = hf = hc/\lambda$ mora biti veća od, ili u graničnom slučaju jednaka zbroju izlaznog rada $W_{\mathrm{izl.}}$ za dani metal i rada $e\,\Delta U$ potrebnog za savladavanje zaustavnog potencijala,

$$E_{\mathrm{fot.}} = \frac{hc}{\lambda} \geq W_{\mathrm{izl.}} + e\,\Delta U.$$

Ovdje imamo granični slučaj

$$\frac{hc}{\lambda_1} = W_{\mathrm{izl.}} + e\,\Delta U_1$$

te zahtjev

$$\frac{hc}{\lambda_2} \geq W_{\mathrm{izl.}} + e\,\Delta U_2.$$

Eliminacijom $W_{\mathrm{izl.}}$ slijedi

$$\frac{hc}{\lambda_2} \geq \frac{hc}{\lambda_1} + e(\Delta U_2 - \Delta U_1),$$

odnosno,

$$\lambda_2 \leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{e}{hc}(\Delta U_2 - \Delta U_1)\right)^{-1}.$$

Za zadane vrijednosti $\lambda_2 \leq 308.1\,\mathrm{nm}$.

Rješenje: $\lambda_2 \leq (1/\lambda_1 + (e/hc)(\Delta U_2 - \Delta U_1))^{-1} \simeq 308.1\,\mathrm{nm}$

9 Zadatak: Pri prelasku elektrona iz stanja više u stanje niže energije u vodikovu atomu emitiran je foton valne duljine $\lambda \simeq 486\,\mathrm{nm}$. Odredi glavne kvantne brojeve tih dvaju stanja. (Energija ionizacije vodika $E_\mathrm{I} = 13.6\,\mathrm{eV}$)

Postupak: Energija emitiranog fotona

$$E_{\mathrm{fot.}} = \frac{hc}{\lambda} \simeq 2.55\,\mathrm{eV}$$

jednaka je razlici energija elektrona u početnom i konačnom stanju atoma. Energija elektrona dana je izrazom

$$E_n = -\frac{1}{n^2} E_\mathrm{I},$$

gdje je $n = 1, 2, \ldots$ glavni kvantni broj, a $E_\mathrm{I} \simeq 13.6\,\mathrm{eV}$ je energija ionizacije vodikova atoma. Za $n = 1, 2, 3, 4, 5$ dobivamo

$$E_n \simeq -13.6\,\mathrm{eV}, -3.40\,\mathrm{eV}, -1.51\,\mathrm{eV}, -0.85\,\mathrm{eV}, -0.54\,\mathrm{eV}.$$

Uočavamo da je

$$E_4 - E_2 \simeq 2.55\,\mathrm{eV} \simeq E_{\mathrm{fot.}},$$

te zaključujemo

$$n = 4, \qquad n' = 2.$$

Rješenje: $n = 4$, $n' = 2$

10 Zadatak: Čestica μ^- (mion) i proton mogu činiti vezano stanje nalik vodikovu atomu. Koristeći Bohrov model atoma procijeni energiju fotona emitiranog prilikom prelaska miona iz prvog pobuđenog u osnovno energijsko stanje na osnovu podataka da energija ionizacije vodikova atoma iznosi približno $13.6\,\mathrm{eV}$ te da je masa miona približno 207 puta veća od mase elektrona.

Postupak: U Bohrovom modelu vodikova atoma energija fotona emitiranog pri prelasku iz m-tog u n-to pobuđeno stanje dana je izrazom

$$E_{mn} = |E_m - E_n| = \left|\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right| E_\mathrm{I} \ ,$$

gdje je E_I energija ionizacije vodikova atoma,

$$E_\mathrm{I} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \simeq 13.6\,\mathrm{eV}.$$

Ovdje imamo $m = 2$ i $n = 1$, dakle

$$E_{21} = |E_2 - E_1| = \left|\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right| E_\mathrm{I} = \frac{3}{4} E_\mathrm{I} \ .$$

U vezanom stanju miona i protona u gornjim izrazima potrebno je masu elektrona m_e zamijeniti masom miona,

$$m_e \ \longrightarrow \ m_\mu \simeq 207\, m_e.$$

Iz gornjih izraza je očigledno da je i energija ionizacije "mionskog H-atoma" približno 207 puta veća od energije ionizacije "običnog" vodikovog atoma te isto vrijedi i za energije fotona

$$E_{21}^{(\mu)} = \frac{3}{4} E_\mathrm{I}^{(\mu)} \simeq \frac{3}{4}\, 207\, E_\mathrm{I} \simeq 2.1\,\mathrm{keV}.$$

(Napomena: Stroži račun uzeo bi u obzir da na mjestu m_e u izrazu za E_I stoji tzv. reducirana masa elektrona, definirana izrazom $\mu_e = m_e m_p/(m_e + m_p)$. Zamjenom $\mu_e \to \mu_\mu$ dobili bismo $E_\mathrm{I}^{(\mu)} \simeq 186\, E_\mathrm{I}$, odnosno $E_{21}^{(\mu)} \simeq 1.9\,\mathrm{keV}$.)

Rješenje: $E_{21}^{(\mu)} \simeq 2.1\,\mathrm{keV}$

11 Zadatak: Pretpostavimo da se čestica mase m giba u kružnim orbitama pod djelovanjem privlačne centralne sile kojoj odgovara potencijalna energija čestice opisana izrazom

$$E_{\text{pot.}}[r] = \frac{1}{2}kr^2,$$

gdje je k konstanta, a r je udaljenost čestice od središta. U skladu s postulatom o kvantizaciji kutne količine gibanja, $L_n = n\hbar$, $n = 1, 2, \ldots$, izvedi izraz za energijske nivoe čestice.

Postupak: Najprije prepoznajemo da zadana potencijalna energija odgovara harmoničkoj sili (sili opruge) čija jakost je

$$F = kr.$$

Ako se elektron giba u kružnoj orbiti polumjera r brzinom v, odnosno kutnom brzinom $\omega = v/r$, ta sila ima ulogu centripetalne sile i njena jakost mora biti

$$F = F_{\text{CP}} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r.$$

Slijedi relacija

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

gdje uočavamo da kutna brzina ne ovisi o polumjeru orbite (slično kao što frekvencija titranja harmoničkog oscilatora ne ovisi o amplitudi). Energija čestice sastoji se od kinetičke i od potencijalne energije te imamo

$$E = E_{\text{kin.}} + E_{\text{pot.}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}(m\omega^2 + k)r^2 = kr^2.$$

Iznos kutne količine gibanja čestice u kružnoj orbiti je

$$L = pr = mvr = m\omega r^2$$

($p = mv$ je iznos linearne količine gibanja), a u skladu s postulatom o kvantizaciji ovdje stavljamo

$$L = L_n = m\omega_n r_n^2 = n\hbar, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

gdje su ω_n i r_n kutna brzina vrtnje i polumjer orbite za dani kvantni broj n. S obzirom da smo pokazali da kutna brzina ω ne ovisi o n stavljamo $\omega_n = \omega$ te slijedi izraz za polumjer orbite,

$$r_n^2 = \frac{n\hbar}{m\omega} = \frac{n\hbar}{\sqrt{mk}}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Energija čestice za kvantni broj n slijedi kao

$$E_n = kr_n^2 = n\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Rješenje: $E_n = n\hbar\sqrt{k/m}$, $n = 1, 2, \ldots$

12 Zadatak: Pretpostavljajući da sva energija Sunčeva zračenja potiče iz pretvorbe vodika ${}^{1}_{1}\mathrm{H}$ u helij ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$, pritom zanemarujući energiju nastalih neutrina, procijeni masu vodika koju Sunce troši u jedinici vremena. (Ukupna snaga Sunčeva zračenja (tzv. luminozitet sunca) $P = L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$, masa vodikova atoma $m^*[{}^{1}_{1}\mathrm{H}] = 1.007825\,\mathrm{u}$, masa helijeva atoma $m^*[{}^{2}_{4}\mathrm{He}] = 4.002603\,\mathrm{u}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Reakciju možemo sažeti kao

$$4\,{}^{1}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + 2\nu_e + \text{fotoni}.$$

Zanemarujući energiju neutrina nastalih u reakciji, energija zračenja (fotona) koja se oslobodi po jednom utrošenom vodikovu atomu je

$$E_\mathrm{H} = \Big(m^*[{}^{1}_{1}\mathrm{H}] - \frac{1}{4}\,m^*[{}^{4}_{2}\mathrm{He}]\Big)c^2,$$

odnosno, količina energije koja se oslobađa po jedinici mase potrošenog vodika je

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m} = \frac{E_\mathrm{H}}{m^*[{}^{1}_{1}\mathrm{H}]} = \left(1 - \frac{m^*[{}^{4}_{2}\mathrm{He}]}{4\,m^*[{}^{1}_{1}\mathrm{H}]}\right)c^2.$$

Masa vodika koju Sunce troši u jedinici vremena je

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}E}\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m}\right)^{-1} L_\odot = \left(1 - \frac{m^*[{}^{4}_{2}\mathrm{He}]}{4\,m^*[{}^{1}_{1}\mathrm{H}]}\right)^{-1}\frac{L_\odot}{c^2}.$$

Za zadane vrijednosti

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \simeq 6.01 \times 10^{11}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}.$$

Rješenje: $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = (1 - m^*[{}^{4}_{2}\mathrm{He}]/4m^*[{}^{1}_{1}\mathrm{H}])^{-1} L_\odot/c^2 \simeq 6.01 \times 10^{11}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$

13 Zadatak: Nekim fizikalnim procesom čija aktivnost A_1 je stalna u vremenu nastaju jezgre aktivnog izotopa 2 s konstantom raspada λ_2. Odredi ovisnost aktivnosti izotopa 2 o vremenu ako je ona u početnom trenutku bila jednaka nuli.

Postupak: Populacija jezgara izotopa 2 podložna je raspadu, a doprinosi joj stalna aktivnost A_1, dakle

$$\mathrm{d}N_2 = -\lambda_2 N_2 \,\mathrm{d}t + A_1 \,\mathrm{d}t.$$

Separacijom varijabli,

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{-N_2 + A_1/\lambda_2} = \lambda_2 \,\mathrm{d}t,$$

te integracijom slijedi

$$-\ln[-N_2 + A_1/\lambda_2] = \lambda_2 t + C,$$

odnosno,

$$N_2[t] = \frac{A_1}{\lambda_2} - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t - C},$$

gdje je C integracijska konstanta. Njenu vrijednost određujemo iz početnog uvjeta $A_2[0] = \lambda_2 N_2[0] = 0$ što daje

$$\mathrm{e}^{-C} = \frac{A_1}{\lambda_2}.$$

Sada možemo napisati aktivnost izotopa 2 kao

$$A_2[t] = \lambda_2 N_2[t] = \cdots = A_1 \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right).$$

Rješenje: $A_2[t] = A_1 \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right)$

14 Zadatak: Pri raspadu jezgre aktivnog izotopa 1 nastaje jezgra aktivnog izotopa 2. Odgovarajuće konstante raspada su λ_1 i λ_2. Ako je u početnom trenutku aktivnost izotopa 1 u nekom uzorku različita od nule, a aktivnost izotopa 2 je jednaka nuli, odredi vrijeme nakon kojeg će aktivnost izotopa 2 doseći svoj maksimum.

Postupak: Populacije izotopa 1 i 2 ponašaju se u skladu sa zakonom radioaktivnog raspada pri čemu svaki raspad u populaciji izotopa 1 doprinosi populaciji izotopa 2. Možemo pisati

$$\begin{aligned}\mathrm{d}N_1 &= -\lambda_1 N_1\,\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}N_2 &= -\lambda_2 N_2\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}N_1,\end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_1[t] + \lambda_1 N_1[t] &= 0,\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_2[t] + \lambda_2 N_2[t] &= \lambda_1 N_1[t],\end{aligned}$$

što su linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Jednadžba za populaciju N_1 je homogena i ima (dobro poznato) rješenje koje možemo napisati kao

$$N_1[t] = N_{10}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t},$$

gdje konstanta $N_{10} = N_1[0]$ opisuje populaciju izotopa 1 u početnom trenutku $t = 0$. Uvrštavanjem tog rješenja u diferencijalnu jednadžbu za N_2 imamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_2[t] + \lambda_2 N_2[t] = \lambda_1 N_{10}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}.$$

Gornja jednadžba je nehomogena i njeno opće rješenje je zbroj rješenja njoj odgovarajuće homogene jednadžbe koje glasi $A\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$, gdje je A konstanta, i partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe do kojeg dolazimo s pomoću probnog rješenja $B\mathrm{e}^{\beta t}$, gdje su B i β konstante. Uvrštavanjem slijedi

$$\beta B\mathrm{e}^{\beta t} + \lambda_2 B\mathrm{e}^{\beta t} = \lambda_1 N_{10}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t},$$

što je ispunjeno za $\beta = -\lambda_1$ i $B = \lambda_1 N_{10}/(\lambda_2 - \lambda_1)$. Opće rješenje je dakle

$$N_2[t] = A\mathrm{e}^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}.$$

Konstanta A određena je početnim uvjetom $N_2[0] = 0$. Slijedi

$$N_2[t] = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right).$$

Maksimum populacije 2 pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N_2[t] = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(-\lambda_1\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \lambda_2\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right),$$

koji je ispunjen u trenutku

$$t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Rješenje: $t = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1}\ln[\lambda_1/\lambda_2]$.

15 Zadatak: U Zemljinoj atmosferi, a time i u svim živim organizmima, udio aktivnog izotopa $^{14}\mathrm{C}$ u ukupnoj populaciji ugljikovih atoma iznosi $\epsilon = (1.0 \pm 0.1) \times 10^{-12}$. Prestankom života organizma, izotop $^{14}\mathrm{C}$ se raspada s vremenom poluraspada $T_{1/2} = (5730 \pm 40)\,\mathrm{god}$, dok su preostali izotopi ugljika stabilni. Izvedi izraz s pomoću kojeg se, na osnovu mjerenja specifične aktivnosti uzorka čistog ugljika, $a = A/m$, gdje je A aktivnost, a m je masa uzorka, može odrediti vrijeme koje je proteklo nakon prestanka života organizma. Zatim procijeni standardnu pogrešku pri određivanju "starosti uzorka" ako je standardna relativna pogreška pri određivanju specifične aktivnosti $\sigma_a/a = 0.001$, a očekivana starost je približno $T_{1/2}/\ln 2$.

Postupak: Uzimamo da uzorak čistog ugljika mase m sadrži

$$N = \frac{m}{m^*[\mathrm{C}]}$$

atoma ugljika, gdje $m^*[\mathrm{C}]$ označava srednju masu ugljikova atoma. Kako je početna zastupljenost aktivnog izotopa $^{14}\mathrm{C}$ u uzorku jednaka atmosferskoj, početna aktivnost uzorka je

$$A_0 = \lambda\epsilon N = \frac{\lambda\epsilon m}{m^*[\mathrm{C}]},$$

gdje je

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

konstanta raspada. Aktivnost uzorka opada u vremenu u skladu sa zakonom o radioaktivnom raspadu; Ako je t vrijeme koje je proteklo nakon prestanka života organizma, aktivnost uzorka je

$$A[t] = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{\lambda\epsilon m}{m^*[\mathrm{C}]} = \frac{\lambda\epsilon m}{m^*[\mathrm{C}]}\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Specifična aktivnost slijedi kao

$$a[t] = \frac{A[t]}{m} = \frac{\lambda\epsilon}{m^*[\mathrm{C}]}\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

iz čega dobivamo starost uzorka,

$$t = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{\lambda\epsilon}{am^*[\mathrm{C}]}\right].$$

Standardnu pogrešku starosti računamo propagacijom pogrešaka koje se odnose na veličine ϵ, $T_{1/2}$, i a. Uobičajenim postupkom dobivamo

$$\begin{aligned}
\sigma_t &= \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial \epsilon}\right)^2 \sigma_\epsilon^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial \lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T_{1/2}}\right)^2 \sigma_{T_{1/2}}^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda\epsilon}\right)^2 \sigma_\epsilon^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{t}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{T_{1/2}}\right)^2 \sigma_{T_{1/2}}^2 + \left(\frac{1}{\lambda a}\right)^2 \sigma_a^2} \\
&= \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon}\right)^2 + (1 - t\lambda)^2 \left(\frac{\sigma_{T_{1/2}}}{T_{1/2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2} \\
&= \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon}\right)^2 + \left(1 - \frac{t\ln 2}{T_{1/2}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{T_{1/2}}}{T_{1/2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Uočavamo da za $t \sim T_{1/2}/\ln 2 \sim 8000\,\mathrm{god}$ srednji član pod korijenom iščezava te da za zadane vrijednosti doprinos prvog člana dominira nad doprinosom trećeg. Stoga standardnu pogrešku procijenjujemo na

$$\sigma_t \sim \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon} \sim 800\,\mathrm{god}.$$

Rješenje: $t = \lambda^{-1}\ln[\lambda\epsilon/am^*[\mathrm{C}]]$, $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$, $\sigma_t \sim T_{1/2}\sigma_\epsilon/(\ln 2)\epsilon \sim 800\,\mathrm{god}$