Rješenja međuispita iz Fizike 2
ponedjeljak, 24. 11. 2014.

<u>Teorijska pitanja</u>

1.

(a) *Reducirana duljina* štapa kao fizičkog njihala ovisi (zaokružite **dvije netočne** tvrdnje):
(1 bod)
a) O masi štapa koji njiše.
b) Isključivo o momentu tromosti štapa spram osi koja prolazi kroz centar mase štapa.
c) O međusobnoj udaljenosti između osi njihanja i težišta štapa.
d) O momentu tromosti štapa spram osi njihanja.
e) O težini štapa koji njiše.

Rješenje: a), b),e)

(b) Brzina širenja longitudinalnih valnih poremećaja u Kundtovoj cijevi ovisi o (zaokružite **netočnu** tvrdnju):
(1 bod)
a) tlaku plina.
b) gustoći plina.
c) kemijskoj vrsti plina.
d) adijabatskom koeficijentu plina.
e) vrsti sitne prašine koja oslikava položaje čvorova stojnog vala u uređaju.

Rješenje: e)

(c) Na opruzi konstante *k* visi uteg mase *m*. Kružna frekvencija titranja utega na toj opruzi je ω_1. Skinemo potom uteg s opruge i prerežemo oprugu na dva jednaka dijela. Od te „dvije polovice“ napravimo paralelan spoj opruga, ponovo objesimo isti uteg i pustimo ga da titra. Za ω_1 i ω_2 vrijedi relacija (zaokružite **točnu** tvrdnju):
(1 bod)
a) $\omega_1 = \frac{1}{2}\,\omega_2$
b) $\omega_1 = 2\,\omega_2$
c) $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega_2$
d) $\omega_1 = \sqrt{2}\,\omega_2$
e) Ništa od ponuđenog.

Rješenje: a)

(d) Izokrono njihalo je njihalo kojem titrajno vrijeme (period) ne ovisi o (početnoj) amplitudi. (Zaokružite **dvije točne** tvrdnje.)
(1 bod)

a) Torziono njihalo je izokrono samo za male amplitude (kutove).
b) Matematičko njihalo je izokrono.
c) Torziono njihalo je izokrono.
d) Fizičko njihalo je izokrono čak i za ekstremne amplitude.
e) Matematičko njihalo nije izokrono.

Rješenje: c), e)

(e) Kada fizičkom njihalu (štapu, primjerice) nije učvršćena os njihanja, tada će mali predani impuls sile (kratki udarac) (zaokružite **dvije točne** tvrdnje):
(1 bod)

a) u težište proizvesti rotaciju oko osi njihanja.
b) u centar udara proizvesti iskakanje osi i translaciju fizičkog njihala.
c) u težište proizvesti iskakanje osi i translaciju fizičkog njihala.
d) u centar udara proizvesti iskakanje osi i rotaciju oko težišta.
e) u centar udara proizvesti (samo) rotaciju oko osi.

Rješenje: c), e)

(f) Jedan kraj napetog užeta pobuđen je na vertikalno titranje te se užetom širi val oblika $y(x,t)=A\ \sin(\omega t+kx)$. Drugi kraj užeta je učvršćen tako da superpozicijom upadnog i reflektiranog vala na užetu nastaje stojni val. U kojem času će iznos brzine vertikalnih pomaka užeta biti naveći? (T je period vala.) (Zaokružite **točnu** tvrdnju.)
(1 bod)

a) $t= 0\ s$
b) $t=T/8$
c) $t=T/2$
d) $t=T/4$
e) $t=3T/8$

Rješenje: d)

(g) Torziono njihalo sastoji se od okrugle ploče obješene u središtu o žicu. Period titranja će postati dvostruko veći ako se (zaokružite točnu tvrdnju):
(1 bod)

a) masa ploče udvostruči, a polumjer ploče smanji četiri puta.
b) duljina žice poveća četiri puta.
c) kutni pomak ploče poveća dva puta.
d) modul smicanja žice poveća dva puta.
e) ništa od navedenog.

Rješenje: b)

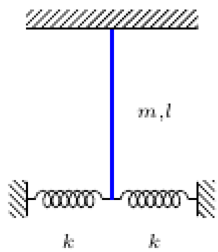
2.

(a) Izvedite izraz za amplitudu, razliku u fazi između vanjske sile i oscilatora, rezonantnu amplitudu i frekvenciju kod prisilnog titranja.
(5 bodova)

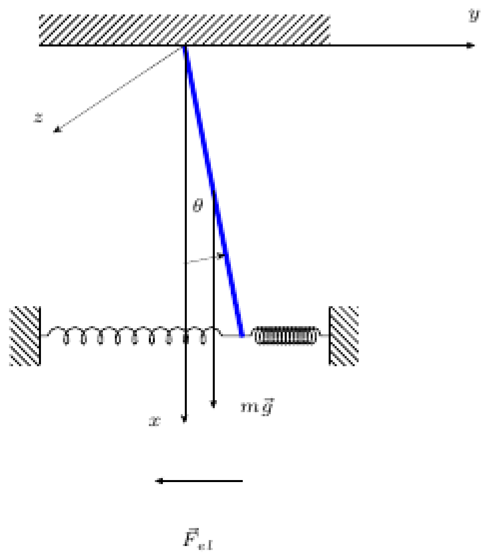
(b) Izvedite valnu jednadžbu za longitudinalne valove u plinu (ili u štapu). Nađite izraz za maksimalnu promjenu tlaka za harmonički val.
(4 boda)

<u>Zadaci</u>

1. Pronađite period titranja homogenog štapa duljine l = 1 m, mase m = 400 g, učvršćenog na stropu tako da može rotirati oko točke objesišta, a na donjem kraju privezanog za dvije identične opruge konstante elastičnosti k = 0.3 N/m, kao na slici. Štap malo otklonimo iz ravnoteže i pustimo.
(8 bodova)



Rješenje:



Otklonimo štap iz položaja ravnoteže za neki mali kut θ. Štap će početi rotirati oko objesišta O zbog momenta sila oko osi z. Momentu doprinose dvije sile: težina štapa i elastična sila opruga. Moment težine štapa možemo izračunati da integriramo infinitezimalne doprinose Δmg po duljini štapa, ili da uzmemo da je sva težina u centru mase štapa. Uz odabir koordinatnog sustava kao na slici, imamo:

$$\begin{aligned}
\vec{M}_z^{tez} &= \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} \\
&= \frac{l}{2}(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) \times mg\hat{x} \\
&= -\frac{mgl}{2}\sin\theta\hat{z} \quad \{\theta \ll,\ \sin\theta \approx \theta\} \\
&\approx -\frac{mgl}{2}\theta\hat{z}
\end{aligned}$$

Moment elastične sile opruga je

$$\begin{aligned}
\vec{M}_z^{opr} &= \vec{r}_{kraj} \times \vec{F}_{el} \\
&= l(\cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}) \times 2ky(-\hat{y}) \\
&= -2kly\cos\theta\hat{z} \ \ \{\theta \ll,\ \cos\theta \approx 1,\ y \approx l\theta\} \\
&\approx -2kl^2\theta\hat{z}
\end{aligned}$$

pa ukupno

$$\begin{aligned}
\vec{M}_z^{uk} &= \vec{M}_z^{tez} + \vec{M}_z^{opr} \\
&= -(\frac{mgl}{2} + 2kl^2)\theta\hat{z},
\end{aligned}$$

gdje su vektori $\vec{r}_{cm}$ i $\vec{r}_{kraj}$ radij vektori centra mase štapa (polovica duljine) odnosno donjeg kraja štapa, a y je y koordinata donjeg kraja štapa.
Moment sile daje rotaciju štapa oko objesišta O prema relaciji

$$\vec{M}_z^{uk} = I_z \ddot{\vec{\theta}}$$

Kut θ je prema slici

$$\vec{\theta} = \theta \hat{z}$$

Moment tromosti štapa oko jednog kraja je $I_z = \frac{m\,l^2}{3}$

Sad sve zajedno imamo:

$$-\left(\frac{mgl}{2} + 2kl^2\right)\theta\hat{z} = \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}\hat{z}$$

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{3g}{2l} + \frac{6k}{m}\right)\theta$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}\left(1 + \frac{4kl}{mg}\right)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 1.55 \text{ s}$$

2. Odredite gubitak energije ΔE utega mase m = 0.16 kg koji titra pričvršćen na oprugu konstante elastičnosti k = 0.6 N/m na horizontalnom stolu, u prve tri sekunde gibanja. Između utega i stola postoji trenje proporcionalno brzini utega, $\vec{F}_{tr} = -b\vec{v}$. Faktor proporcionalnosti b iznosi 0.04 Ns/m. Početna brzina utega je 3 cm/s nadesno, a početni položaj je 2 cm lijevo od ravnotežnog položaja. **(5 bodova)**

Rješenje:

Ukupna energija tijela koje titra jednaka je zbroju kinetičke

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

i elastične potencijalne

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

energije, gdje je x pomak od ravnotežnog položaja,

$$x(t) = e^{-\delta t}[A\cos(\omega t + \phi)],$$

uz pokratu

$$\delta = \frac{b}{2m} = 0.125 \text{ Hz}, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \approx 1.93 \text{ Hz},$$

a $\dot{x}$ brzina tijela,

$$\dot{x}(t) = e^{-\delta t}[-\delta A\cos(\omega t + \phi) - A\omega\sin(\omega t + \phi)]$$

Konstante A i ϕ određujemo iz početnih uvjeta:

$$\begin{aligned} x(0) &= A\cos\phi \\ \dot{x}(0) &= -A(\delta\cos\phi + \omega\sin\phi) \end{aligned}$$

Dijeljenjem donje s gornjom jednadžbom imamo

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}(0)}{x(0)} &= -\delta - \omega\tan\phi \\ \phi &= \arctan\left[\frac{-1}{\omega}\left(\delta + \frac{\dot{x}(0)}{x(0)}\right)\right] \approx 0.62 \\ A &= \frac{x(0)}{\cos\phi} \approx -2.46 \text{ cm} \end{aligned}$$

Gubitak energije u prve tri sekunde jednak je razlici energija u $t = 3$ s i $t = 0$ s.

$$E(t=0) = \frac{1}{2}m[\dot{x}(0)]^2 + \frac{1}{2}k[x(0)]^2 = 1.92 \times 10^{-4} \text{ J}$$

$$E(t=3) = \frac{1}{2}m[\dot{x}(3)]^2 + \frac{1}{2}k[x(3)]^2 \approx 0.877 \times 10^{-4} \text{ J}$$

$$\Delta E = E(t=3) - E(t=0) \approx -1.04 \times 10^{-4} \text{ J}$$

3. Na niti (užetu) duljine 120 cm formirao se stojni val. U točkama koje su međusobno udaljene 15 cm, amplituda je jednaka 20% maksimalne amplitude. Jednadžba vala je *y(t,x)=A sin(kx)cos(ωt)*. Kojem harmoniku odgovara ovo titranje niti?
(6 bodova)

Rješenje:

$$y(t,x) = A\ \sin(k\ x)\ \cos(\omega\ t)$$

$$A\ \sin(k\ x_1) = A\ \sin(k\ x_2) = 0{,}2\ A$$

$$x_2 - x_1 = d = 15\text{ cm}$$

$$\sin(k\ x_1) = \sin[k\ (x_1 + d)] = 0{,}2$$

$$\sin[k\ (x_1 + d)] = \sin(k\ x_1)\ \cos(k\ d) + \cos(k\ x_1)\ \sin(k\ d) = 0{,}2$$

$$\cos(k\ x_1) = \sqrt{1 - 0{,}04} = \sqrt{0{,}96}$$

$$0{,}2\ \cos(k\ d) + \sqrt{0{,}96}\ \sin(k\ d) = 0{,}2$$

$$\sqrt{0{,}96}\ \sin(k\ d) = 0{,}2\ (1 - \cos(k\ d))$$

$$\sqrt{96}\ 2\ \sin\frac{k\ d}{2}\ \cos\frac{k\ d}{2} = 4\ \sin^2\frac{k\ d}{2}$$

$$\sqrt{6}\ 2\ \cos\frac{k\ d}{2} = \sin\frac{k\ d}{2}$$

$$\tan\frac{k\ d}{2} = 2\ \sqrt{6}$$

$$\frac{k\ d}{2} = 1{,}369438$$

$$\frac{2\ \pi}{\lambda}\ \frac{d}{2} = 1{,}369438$$

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi\ d}{2\ 1{,}369438}$$

$$\frac{\lambda}{2} = 0{,}172056\text{ m}$$

$$\frac{1{,}2}{0{,}172056} = 6{,}97$$

$$\lambda = \frac{2\ l}{7}$$

$$n = 7\quad \text{sedmi harmonik}$$

4. Prijemnik koji miruje prima zvučne valove koje emitiraju dvije glazbene viljuške, jedna koja se približava, a druga koja se udaljava istom brzinom. Prijemnik registrira udare frekvencije 2,0 Hz. Nađite brzinu gibanja glazbenih viljuški ako je njihova frekvencija 680 Hz, a brzina zvuka u zraku 340 ms^{-1}.
(5 bodova)

Rješenje:

$$f = f_1 - f_2$$

$$f = \frac{v}{v - v_1} f_0 - \frac{v}{v + v_1} f_0$$

$$v_1^2 + 2v\frac{f_0}{f} v_1 - v^2 = 0$$

$$v_1 = \left[-\frac{f_0}{f} + \sqrt{\left(\frac{f_0}{f}\right)^2 + 1} \right] v$$

$$v_1 = \left[-\frac{680}{2} + \sqrt{\left(\frac{680}{2}\right)^2 + 1} \right] 340 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0{,}5 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$