Fizika 2: Zadaci za vježbu 3/7 (mehanički valovi)

1 Zadatak: Gitarska žica 1E, promjera $2r = 0.01''$, načinjena od čelika Youngova modula elastičnosti $E = 2.2 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}$ i gustoće $\rho = 7700\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, razapeta je na rasponu duljine $\ell = 25.5''$. Odredi silu napetosti i odgovarajuće relativno produljenje žice ako ona u osnovnom modu titra frekvencijom $f = 330\,\mathrm{Hz}$. ($1'' = 1\,\mathrm{in} = 2.54 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$.)

Postupak: Pri titranju stojnog vala na žici duljine ℓ s učvršćenim krajevima, za osnovni mod titranja vrijedi

$$\ell = \frac{\lambda}{2},$$

gdje je λ valna duljina. Tome odgovara valni vektor

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\ell},$$

odnosno frekvencija

$$\omega = 2\pi f = kv,$$

gdje je

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

brzina širenja vala na žici, T je napetost, a

$$\mu = \rho S = \rho r^2 \pi$$

je linijska gustoća mase žice. Slijedi

$$T = \mu v^2 = \rho r^2 \pi \, (2\pi f/k)^2 = \rho r^2 \pi \, (2\pi \ell)^2 = 4 r^2 \pi \rho \ell^2 f^2.$$

Za zadane vrijednosti $T \simeq 71.3\,\mathrm{N}$. Relativno produljenje žice u odnosu na stanje bez naprezanja je

$$\delta_L = \frac{\sigma_L}{E} = \frac{T/S}{E} = \frac{T}{r^2 \pi E} = \frac{4\rho \ell^2 f^2}{E}.$$

Za zadane vrijednosti $\delta \simeq 6.40 \times 10^{-3}$

Rješenje: $T = 4r^2\pi\rho\ell^2 f^2 \simeq 71.3\,\mathrm{N}$, $\delta_L = 4\rho\ell^2 f^2/E \simeq 6.40 \times 10^{-3}$

2 Zadatak: Čelična žica promjera $d = 1\,\mathrm{mm}$ i duljine $\ell = 3\,\mathrm{m}$ s učvršćenim krajevima napeta je tako da joj frekvencija titranja transverzalnog stojnog vala u osnovnom modu iznosi $f = 200\,\mathrm{Hz}$. Odredi ukupnu energiju titranja te žice kada ona titra u osnovnom modu maksimalnom amplitudom $A = 2\,\mathrm{cm}$. (Gustoća čelika $\rho = 7800\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.)

Postupak: Titranje stojnog vala u osnovnom modu na napetoj žici s krajevima pri $x_1 = 0$ i $x_2 = \ell$ možemo opisati valnom funkcijom

$$y[x,t] = A\sin[kx]\cos[\omega t],$$

gdje vrijedi

$$\ell = \frac{\lambda}{2}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\ell}, \qquad \omega = 2\pi f.$$

Linijska gustoća kinetičke energije žice je

$$\frac{\Delta E_{\mathrm{kin.}}}{\Delta x} = \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta x}\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y[x,t]}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\sin^2[kx]\sin^2[\omega t],$$

gdje je

$$\mu = \rho S = r^2\pi\rho = \frac{d^2\pi\rho}{4}$$

linijska gustoća mase žice. Ukupnu kinetičku energiju dobivamo integracijom preko čitavog raspona žice,

$$E_{\mathrm{kin.}} = \int_{x=0}^{\ell}\frac{\Delta E_{\mathrm{kin.}}}{\Delta x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2\sin^2[\omega t]\int_0^{\ell}\sin^2[\pi x/\ell]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mu\omega^2A^2\ell\sin^2[\omega t]$$

(gornji je integral očigledan jer je srednja vrijednost kvadrata trigonometrijske funkcije na polovici perioda jednaka $1/2$). Vidimo da kinetička energija postiže maskimalnu vrijednost

$$(E_{\mathrm{kin.}})_{\max} = \frac{1}{4}\mu\omega^2A^2\ell$$

u trenucima kada vrijedi $\sin[\omega t] = \pm 1$. Primjećujemo da u tim trenucima vrijedi $\cos[\omega t] = 0$, odnosno $y[x,t] = 0$, što znači da u tim trenucima žica nije otklonjena te da je njena potencijalna energija jednaka nuli. Konačno, s obzirom da je ukupna energija zbroj kinetičke i potencijalne energije, te da je ukupna energija očuvana u vremenu, zaključujemo

$$E = E_{\mathrm{kin.}} + E_{\mathrm{pot.}} = (E_{\mathrm{kin.}})_{\max} = \frac{1}{4}\mu\omega^2A^2\ell = \frac{1}{4}\frac{d^2\pi\rho}{4}(2\pi f)^2A^2\ell = \frac{1}{4}d^2\pi^3\rho f^2A^2\ell.$$

Za zadane vrijednosti d, ℓ i f, A i ρ dobije se $E \simeq 2.90\,\mathrm{J}$.

Rješenje: $E = d^2\pi^3\rho f^2A^2\ell/4 \simeq 2.90\,\mathrm{J}$

3 Zadatak: Uteg mase $M = 2\,\mathrm{kg}$ mirno visi na užetu duljine $\ell = 10\,\mathrm{m}$ i mase $m = 0.5\,\mathrm{kg}$. Odredi trajanje putovanja transverzalnog valnog poremećaja s jednog na drugi kraj kraj užeta (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Brzina kretanja valnog poremećaja dana je izrazom

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

gdje je T napetost, a

$$\mu = \frac{m}{\ell}$$

je linijska gustoća mase užeta. Napetost užeta u točki na visini h iznad njegova donjeg kraja jednaka je zbroju težine utega i težine dijela užeta koje se nalazi ispod te točke,

$$T[h] = \left(M + \frac{h}{\ell} m\right) g.$$

Slijedi da je brzina kretanja vala na visini h iznad donjeg kraja

$$v[h] = \sqrt{\frac{T[h]}{\mu}} = \sqrt{\left(\frac{M\ell}{m} + h\right) g}.$$

Trajanje putovanja vala s jednog kraja na drugi je

$$\tau = \int \mathrm{d}t = \int_{h=0}^{\ell} \frac{\mathrm{d}h}{v[h]} = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^{\ell} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{M\ell/m + h}} = \frac{2}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{M\ell}{m} + h}\,\Bigg|_0^{\ell} = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(\sqrt{1 + \frac{M}{m}} - \sqrt{\frac{M}{m}}\right).$$

Za zadane vrijednosti M, ℓ i m dobivamo $\tau \simeq 0.477\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $\tau = 2\sqrt{\ell/g}\left(\sqrt{1 + M/m} - \sqrt{M/m}\right) \simeq 0.477\,\mathrm{s}$

4 Zadatak: Napetim užetom, brzinom iznosa $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, putuje transverzalni valni poremećaj oblika $y[x] = \alpha x \mathrm{e}^{-x^2/b^2}$, gdje su $\alpha = 0.1$ i b konstante. Odredi maksimalni iznos brzine kojom se gibaju čestice užeta.

Postupak: Valni poremećaj koji se brzinom iznosa v užetom giba na desno općenito opisujemo s

$$y[x,t] = f[x - vt],$$

gdje je f funkcija jedne varijable. U trenutku $t = 0$ imamo

$$y[x,0] = f[x].$$

Uzmemo li da se oblik valnog poremećaja opisan u zadatku funkcijom $y[x]$ odnosi na trenutak $t = 0$, mora vrijediti $f[x] = y[x]$, te funkciju f prepoznajemo kao

$$f[x] = \alpha x \mathrm{e}^{-x^2/b^2}.$$

Brzina kojom se gibaju čestice je

$$\dot{y}[x,t] = \frac{\partial}{\partial t} y[x,t] = \frac{\partial}{\partial t} f[x - vt] = -v f'[x - vt].$$

Najveći iznos te brzine možemo pronaći tako da se ograničimo na trenutak $t = 0$ te da razmotrimo brzine čestica duž čitave x-osi,

$$\dot{y}[x,0] = -v f'[x].$$

Ekstrem gornje brzine tražimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \dot{y}[x,0] = -v f''[x] = -\frac{2\alpha x \mathrm{e}^{-(x/b)^2}}{b^2} \left(3 - \frac{2x^2}{b^2} \right),$$

koji je ispunjen za

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\, b, \qquad x_3 = 0.$$

Brzine čestica za gornje vrijednosti x su

$$\dot{y}[x_{1,2},0] = \frac{2}{\mathrm{e}^{3/2}} \alpha v, \qquad \dot{y}[x_3,0] = -\alpha v.$$

S obzirom da je $2 < \mathrm{e}^{3/2}$ zaključujemo da je najveći iznos brzine koju postižu čestice pri gibanju zadanog valnog poremećaja

$$|\dot{y}|_{\max} = \alpha v.$$

Za zadane vrijednosti $|\dot{y}|_{\max} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Rješenje: $|\dot{y}|_{\max} = \alpha v = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

5 Zadatak: Beskonačnim užetom napetosti $T = 2\,\mathrm{kN}$ putuje transverzalni valni poremećaj čiji je oblik u trnutku $t = 0$ opisan s $y[x] = A\mathrm{e}^{-x^2/b^2}$, gdje su $A = 1\,\mathrm{cm}$ i $b = 10\,\mathrm{cm}$ konstante. Odredi ukupnu energiju valnog poremećaja. (Koristi se integral $\int_{-\infty}^{\infty} u^2\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}/2$.)

Postupak: Uzmemo li da valni poremećaj putuje na desno, opisujemo ga valnom funkcijom

$$y[x,t] = f[x - vt] = A\mathrm{e}^{-(x-vt)^2/b^2},$$

gdje je

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

brzina propagacije vala, T je napetost, a $\mu = \Delta m/\Delta x$ je linijska gustoća mase užeta. Linijska gustoća kinetičke energije užeta je

$$\frac{\Delta E_{\mathrm{kin.}}}{\Delta x} = \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta x}v_y^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y[x,t]}{\partial t}\right)^2 = \frac{2\mu v^2 A^2}{b^2}\left(\frac{x-vt}{b}\mathrm{e}^{-(x-vt)^2/b^2}\right)^2.$$

Linijska gustoća potencijalne energije je

$$\frac{\Delta E_{\mathrm{pot.}}}{\Delta x} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{T(\Delta x' - \Delta x)}{\Delta x},$$

gdje je $\Delta x' - \Delta x$ produljenje elementa užeta uslijed valnog gibanja. Pišući

$$\Delta x' = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x\sqrt{1 + (\Delta y/\Delta x)^2} \simeq \Delta x\left(1 + (\Delta y/\Delta x)^2/2\right),$$

gdje smo koristili $\sqrt{1+\epsilon} \simeq 1 + \epsilon/2$, slijedi

$$\frac{\Delta E_{\mathrm{pot.}}}{\Delta x} = \frac{T}{2}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = \frac{T}{2}\left(\frac{\partial y[x,t]}{\partial x}\right)^2 = \frac{2TA^2}{b^2}\left(\frac{x-vt}{b}\mathrm{e}^{-(x-vt)^2/b^2}\right)^2.$$

Linijsku gustoću ukupne energije u trenutku $t = 0$ možemo, koristeći $\mu v^2 = T$, napisati kao

$$\left.\frac{\Delta E}{\Delta x}\right|_{t=0} = \left.\left(\frac{\Delta E_{\mathrm{kin.}}}{\Delta x} + \frac{\Delta E_{\mathrm{pot.}}}{\Delta x}\right)\right|_{t=0} = \frac{4TA^2}{b^4}x^2\mathrm{e}^{-2x^2/b^2}.$$

Ukupna energija valnog poremećaja je

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta E}{\Delta x}\,\mathrm{d}x = \frac{4TA^2}{b^4}\frac{b^3}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}u^2\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{TA^2}{b}.$$

Za zadane vrijednosti $E \simeq 2.507\,\mathrm{J}$

Rješenje: $E = TA^2\sqrt{\pi}/b\sqrt{2} \simeq 2.507\,\mathrm{J}$

6 Zadatak: Stojni valovi zvuka titraju u dvije cijevi s otvorenim krajevima. Duljina prve cijevi je $\ell = 1\ \mathrm{m}$, a druga cijev je za $\Delta\ell = 1\,\mathrm{mm}$ dulja od prve. Odredi frekvenciju udara koji se čuju kada obje cijevi istovremeno proizvode zvuk u osnovnom modu titranja. (brzina zvuka $v_\mathrm{z} = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$)

Postupak: Titranje zraka u osnovnom modu u cijevi s otvorenim krajevima pri $x_1 = 0$ i $x_2 = \ell$ opisujemo funkcijom

$$\xi[x,t] = A\cos[kx]\cos[\omega t]$$

gdje vrijedi

$$\ell = \frac{\lambda}{2}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\ell}, \qquad \omega = kv_\mathrm{z} = \frac{\pi}{\ell}v_\mathrm{z}.$$

Kad dvije cijevi titraju istovremeno, ukupno titranje koje opažamo u nekoj točki izvan obiju cijevi možemo opisati s

$$\zeta[x,t] = a_1\cos[\omega_1 t + \phi_1] + a_2\cos[\omega_2 t + \phi_2].$$

Uzmemo li $a_1 = a_2 = a$, te zbog jednostavnosti $\phi_1 = \phi_2 = 0$, imamo

$$\zeta[x,t] = 2a\cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right]\cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right],$$

gdje prepoznajemo udare s kružnom frekvencijom

$$\omega_\mathrm{u} = \omega_1 - \omega_2 = \pi v_\mathrm{z}\left(\frac{1}{\ell_1} - \frac{1}{\ell_2}\right) = \pi v_\mathrm{z}\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1\ell_2} = \pi v_\mathrm{z}\frac{\Delta\ell}{\ell(\ell+\Delta\ell)} \simeq \pi v_\mathrm{z}\frac{\Delta\ell}{\ell^2}.$$

Tražena frekvencija je

$$f_\mathrm{u} = \frac{\omega_\mathrm{u}}{2\pi} = \frac{v_\mathrm{z}\Delta\ell}{2\ell^2}.$$

Za zadane vrijednosti $f_\mathrm{u} \simeq 0.170\,\mathrm{Hz}$.

Rješenje: $f_\mathrm{u} = v_\mathrm{z}\Delta\ell/2\ell(\ell+\Delta\ell) \simeq v_\mathrm{z}\Delta\ell/2\ell^2 \simeq 0.170\ \mathrm{Hz}$

7 Zadatak: Kada je omjer frekvencija dvaju tonova jednak $\sqrt[12]{2}$ glazbenici kažu da se oni razlikuju za "pola tona". (Jednu "oktavu" čini dvanaest uzastopnih "polutonova", dakle ona odgovara udvostručenju polazne frekvencije.) Odredi od koliko se "polutonova" sastoji prirast frekvencije koji nastupa kada titranje zraka u cijevi s jednim zatvorenim i jednim otvorenim krajem iz osnovnog moda pređe u prvi pobuđeni.

Postupak: Duljina cijevi ℓ s jednim zatvorenim i jednim otvorenim krajem i valna duljina zvuka λ, kad se radi o titranju u osnovnom modu (1) te u prvom pobuđenom modu (2), zadovoljavaju relacije

$$\ell = \frac{\lambda_1}{4}, \qquad \ell = \frac{3\lambda_2}{4}.$$

Nadalje vrijedi

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2\ell}, \qquad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{3\pi}{2\ell} = 3k_1,$$

te koristeći relaciju

$$\omega = kv$$

slijedi

$$\omega_2 = 3\omega_1.$$

Vidimo da prilikom prelaska u prvi pobuđeni mod titranja dolazi do utrostručenja polazne frekvencije zvuka. Odgovarajući broj polutonova m dobit ćemo s pomoću uvjeta

$$3 = \left(\sqrt[12]{2}\right)^m = 2^{m/12},$$

iz čega slijedi

$$m = 12 \times \frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 19.02.$$

Rješenje: $m = 12 \times \ln 3/\ln 2 \simeq 19.02$

8 Zadatak: Zvučnik se nalazi na vodoravnom tlu i emitira zvuk frekvencije $f = 1000\,\mathrm{Hz}$ ravnomjerno u svim smjerovima "gornjeg poluprostora". Odredi snagu zvučnika ako na udaljenosti $r = 30\,\mathrm{m}$ od njega jakost buke iznosi $L_{\mathrm{dB}} = 100\,\mathrm{dB}$. Zatim odredi amplitudu kojom osciliraju čestice zraka te amplitudu oscilacije tlaka zraka na udaljenosti r od izvora. (Za frekvenciju zvuka $f = 1000\,\mathrm{Hz}$ uzima se da granica čujnosti odgovara intenzitetu $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. Gustoća zraka $\rho_{\mathrm{z}} = 1.22\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, brzina zvuka u zraku $v_{\mathrm{z}} = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Na osnovu definicije jakosti buke, $L_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}[I/I_0]$, gdje je I_0 granica čujnosti, slijedi

$$I = I_0 \times 10^{L_{\mathrm{dB}}/10},$$

što za zadanu vrijednost daje $I = 10^{-2}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. S druge strane, intenzitet zvuka definiran je kao omjer srednje snage vala, odnosno njegova izvora, i površine na koju on pada, što je ovdje polusfera polumjera r. Možemo pisati

$$\langle P\rangle = IS = I2r^2\pi,$$

što za zadane vrijednosti daje $\langle P\rangle \simeq 56.5\,\mathrm{W}$. Nadalje, poznati izraz za intenzitet longitudinalnog vala glasi

$$I = \frac{\langle P\rangle}{S} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{z}}\omega^2 A^2 v_{\mathrm{z}} = \frac{(\Delta p)^2_{\mathrm{max}}}{2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}},$$

gdje je ρ_{z} gustoća zraka, v_{z} je brzina zvuka u zraku, $\omega = 2\pi f$ je kružna frekvencija vala, A je amplituda oscilacije čestica, a $(\Delta p)_{\mathrm{max}}$ je amplituda titranja tlaka. Slijedi

$$A = \frac{1}{\pi f}\sqrt{\frac{I}{2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}}},$$

što za zadane vrijednosti daje $A \simeq 1.10 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Za amplitudu oscilacije tlaka dobivamo

$$(\Delta p)_{\mathrm{max}} = \sqrt{2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}I},$$

što za zadane vrijednosti daje $(\Delta p)_{\mathrm{max}} \simeq 2.88\,\mathrm{Pa}$.

Rješenje: $I = I_0 \times 10^{L_{\mathrm{dB}}/10} = 10^{-2}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, $\langle P\rangle = 2r^2\pi I \simeq 56.5\,\mathrm{W}$, $A = (1/\pi f)\sqrt{I/2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}} \simeq 1.10 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$, $(\Delta p)_{\mathrm{max}} = \sqrt{2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}I} \simeq 2.88\,\mathrm{Pa}$

9 Zadatak: Prvi automobil vozi ravnom cestom prema reflektirajućem zidu brzinom iznosa $v_\mathrm{i} = 60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ svo vrijeme trubeći frekvencijom $f_\mathrm{i} = 250\,\mathrm{Hz}$. Drugi automobil vozi istom cestom ususret prvom automobilu brzinom iznosa $v_\mathrm{p} = 120\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Odredi frekvenciju koju čuje vozač drugog automobila kada se radi o zvuku trube koji do njega stiže izravno od prvog automobila (a) prije njihova mimoilaženja, (b) nakon mimoilaženja, te (c) kada se radi o zvuku trube koji do njega stiže nakon što se reflektirao od zida. (Brzina zvuka $v_\mathrm{z} = 1240\,\mathrm{km\,h^{-1}}$)

Postupak: Općenito, frekvencija izvora f_i i frekvencija f_p koju čuje prijamnik slijede relaciju

$$\frac{f_\mathrm{p}}{f_\mathrm{i}} = \frac{1 - \hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip} \cdot \mathbf{v}_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}}{1 - \hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip} \cdot \mathbf{v}_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}},$$

gdje je $\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}$ jedinični vektor usmjeren od izvora prema prijamniku, a $\mathbf{v}_\mathrm{i}$ i $\mathbf{v}_\mathrm{p}$ su njihove brzine. U slučaju prijema zvuka koji stiže izravno od prvog automobila ovdje imamo

$$f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,\frac{1 \pm v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}}{1 \mp v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}},$$

gdje gornji predznak odgovara slučaju (a), a donji predznak slučaju (b). U slučaju (c) radi se o zvuku koji stiže nakon reflektiranja od zida pa najprije računamo frekvenciju koju "čuje" zid,

$$f_\mathsf{zid} = \frac{f_\mathrm{i}}{1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}},$$

a zatim zid shvaćamo kao izvor frekvencije f_zid. Slijedi da je frekvencija koju čuje vozač drugog automobila

$$f_\mathrm{p} = f_\mathsf{zid}\,(1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}) = f_\mathrm{i}\,\frac{1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}}{1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}}.$$

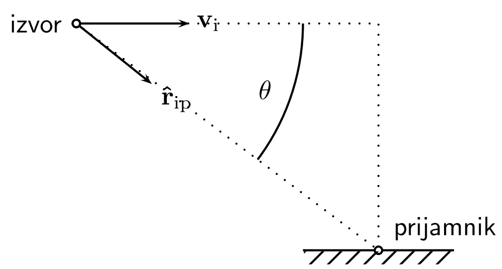
Rješenje: (a) $f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,(1 + v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z})/(1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}) \simeq 288\,\mathrm{Hz}$, (b) $f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,(1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z})/(1 + v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}) \simeq 215\,\mathrm{Hz}$, (c) $f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,(1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z})/(1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}) \simeq 237\,\mathrm{Hz}$

10 Zadatak: Avion leti duž vodoravnog pravca brzinom $v_\mathrm{i} = 0.8\,v_\mathrm{z}$, gdje je v_z brzina širenja zvuka, i odašilje zvuk frekvencije $f_\mathrm{i} = 100\,\mathrm{Hz}$. Izračunaj frekvenciju koju čuje mirni prijamnik na tlu u trenutku kada se avion nalazi točno iznad njega. (Potrebno je uzeti u obzir "kašnjenje" zvuka.)

Postupak: Frekvencija zvuka koju čuje mirni prijamnik dana je izrazom

$$f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,\frac{v_\mathrm{z}}{v_\mathrm{z} - \hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{i}},$$

gdje je $\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}$ je jedinični vektor koji pokazuje smjer od položaja izvora u trenutku emitiranja prema položaju prijamnika u trenutku prijama, $\mathbf{v}_\mathrm{i}$ je brzina izvora u trenutku emitiranja, a v_z je iznos brzine zvuka. Zadanu situaciju prikazujemo skicom:



U pravokutnom trokutu na skici, omjer duljine vodoravne katete i duljine hipotenuze jednak je $v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}$, jer u istom vremenu avion prevaljuje duljinu katete, dok zvuk prevaljuje duljinu hipotenuze. Možemo pisati

$$\cos\theta = v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z},$$

odnosno skalarni produkt $\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{i}$ možemo napisati kao

$$\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{i} = v_\mathrm{i}\cos\theta = v_\mathrm{i}^2/v_\mathrm{p}.$$

Slijedi

$$f_\mathrm{p} = \frac{f_\mathrm{i}}{1-(v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z})^2}.$$

Za zadani omjer $v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}$ dobivamo $f_\mathrm{p} \simeq 278\,\mathrm{Hz}$.

Rješenje: $f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}/(1-(v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z})^2) \simeq 278\,\mathrm{Hz}$

11 Zadatak: Izvor koji proizvodi zvuk frekvencije f i prijamnik se nalaze u istoj točki do trenutka $t = 0$ u kojem se izvor počninje gibati ubrzavajući duž pravca akceleracijom stalnog iznosa a, dok prijamnik i dalje miruje. Odredi frekvenciju koju čuje prijamnik u trenutku $t > 0$.

Postupak: Općenito, kada izvor koji se giba brzinom $\mathbf{v}_i$ odašilje frekvenciju f_i, frekvencija koju čuje mirni prijamnik je

$$f_{\rm p} = \frac{f_{\rm i}}{1 - (\hat{\mathbf{r}}_{\rm ip} \cdot \mathbf{v}_{\rm i})/v_{\rm z}},$$

gdje je $v_{\rm z}$ iznos brzine zvuka, a $\hat{\mathbf{r}}$ je jedinični vektor usmjeren od točke odašiljanja prema prijemniku. U ovom slučaju, u trenutku $t > 0$ prijamnik čuje zvuk emitiran u ranijem trenutku t' (vrijedi $0 < t' < t$) u kojem su brzina izvora i udaljenost izvora od prijamnika dani s

$$v(t') = at', \qquad x(t') = \frac{a}{2}t'^2.$$

Vrijeme t nakon kojeg odaslani zvuk stiže do prijamnika jest zbroj vremena t' koliko je izvor putovao i vremena $x(t')/v_{\rm z}$ koliko je zvuku trebalo da stigne do prijamnika, dakle vrijedi relacija

$$t = t' + x(t')/v_{\rm z}.$$

Rješavanjem po t' dobivamo

$$t'_{1,2} = \frac{v_{\rm z}}{a}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 2at/v_{\rm z}}\right),$$

gdje odabiremo pozitivno rješenje, tj. ono s pozitivnim predznakom ispred korijena. Brzina izvora u trenutku t' je

$$v(t') = v_{\rm z}\left(-1 + \sqrt{1 + 2at/v_{\rm z}}\right).$$

Konačno, frekvencija koju čuje mirni prijamnik u trenutku t je

$$f_{\rm p}(t) = \frac{f_{\rm i}}{1 - (\hat{\mathbf{r}}_{\rm ip} \cdot \mathbf{v}_{\rm i}(t'))/v_{\rm z}} = \frac{f_{\rm i}}{1 + v(t')/v_{\rm z}} = \frac{f_{\rm i}}{\sqrt{1 + 2at/v_{\rm z}}}.$$

Rješenje: $f_{\rm p}(t) = f_{\rm i}/\sqrt{1 + 2at/v_{\rm z}}$