2. Električno polje ravnog elektromagnetskog vala u vakuumu opisano je izrazom:

$$\vec{E} = 10^{-4} Vm^{-1} \sin\left[(z+y)\cdot 10^{7} m^{-1} - \omega t\right]\vec{i}$$

Nađite izraz za magnetsku indukciju i izračunajte srednju gustoću energije zračenja preko srednje vrijednosti Poyntingovog vektora.). **(3 boda)**

Postupak:

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{c}\times\vec{E}_0}{c^2}, \quad \vec{c} = \frac{c}{\sqrt{2}}(\hat{y}+\hat{z})$$

$$\overline{S} = \frac{1}{2}E_0H_0 = \frac{1}{2c\mu_0}E_0^2$$

$$\overline{w} = \frac{\overline{S}}{c}$$

2. Ravni elektromagnetski val koji se širi u vakuumu u pozitivnom smjeru *z*-osi ima električno polje koje titra u smjeru *x*-osi. Ako je amplituda magnetskog polja 350 nT te frekvencija vala 10 GHz, odredite Poyntingov vektor elektromagnetskog vala.
(6 bodova)

Rješenje:

Budući se val giba u smjeru z-osi električno i magnetsko polje su:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t), \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 \sin(kz - \omega t),$$

Za ravni elektromagnetski val odnos amplituda dan je izrazom:

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{c}\times\vec{E}_0}{c^2},$$

pri čemu je $\vec{c} = c\vec{k}$ i $\vec{E}_0 = E_0\vec{i}$.
Poyntingov vektor jednak je:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{B_0^2 c}{\mu_0}\sin^2(kz - \omega t)\vec{k},$$

odnosno

$$\vec{S} = 29.25\frac{W}{m^2}\sin^2(209m^{-1}z - 6.28\times 10^{10}s^{-1}t)\vec{k},$$

gdje je $\omega = 2\pi f = 6.28\times 10^{10}\ s^{-1}$ i $k = \omega/c = 2.09\times 10^2 m^{-1}$.

3.5 Poyntingov vektor monokromatskog elektromagnetskog vala dan je:

$$\vec{S} = S_0 \cos^2(\omega t - kz)\hat{z}, \tag{10}$$

gdje je $S_0 = 30$ W/m^2, $\omega = 5 \cdot 10^8$ s^{-1} je kružna frekvencija, a k valni vektor elektromagnetskog vala.
a) Izračunajte amplitudu električnog polja ako električno polje titra paralelno s $x-$osi.
b) Izračunajte rotaciju magnetskog polja za ovakav elektromagnetski val.

Rješenje:
a) Amplituda Pyntingovog vektora je vezana uz amplitudu električnog polja:

$$S_0 = \varepsilon_0 c E_0^2 \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{S_0}{\varepsilon_0 c}} = 106.3 \text{ V/m}. \tag{11}$$

b) Jedina neiščezavajuća komponenta magnetskog polja mora biti y komponenta, s obzirom da je ono okomito s električnim poljem i Poyntingovim vektorom pa slijedi:

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t - kz)\hat{y}, \tag{12}$$

gdje je $B_0 = E_0/c$, rotacija magnetskog polja je:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial B_y}{\partial z}\hat{x} = k\frac{E_0}{c}\sin(\omega t - kz)\hat{x}, \tag{13}$$

gdje je:

$$k\frac{E_0}{c} = \frac{\omega}{c}\frac{E_0}{c} = 5.9 \cdot 10^{-7} \text{ T/m}. \tag{14}$$

Z1 Vodič kružnog poprečnog presjeka i polumjera $R = 3\,\mathrm{cm}$ vodi struju čija gustoća linearno raste od osi vodiča, $j(r) = ar$, gdje je $a = 2 \times 10^6\,\mathrm{A\,m^{-3}}$. Koliki je iznos magnetskog polja u točki koja se nalazi unutar vodiča, na udaljenosti $r = 2\,\mathrm{cm}$ od osi vodiča? (6 bodova)

Rješenje:

Struja koja je sadržana unutar polumjera $r = b = 2$ cm dana je integralom:

$$i_b = \int_0^b J(r)\, 2\pi r dr = \frac{2\pi a b^3}{3} \ .$$

Prema Ampéreovom zakonu, kružni integral magnetskog polja određen je strujom sadržanom unutar integracijske krivulje:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 i_b \ .$$

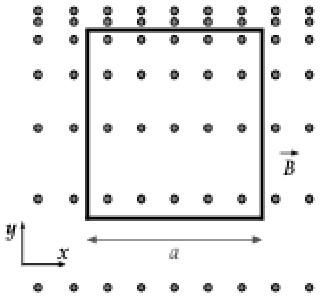
Za integracijsku krivulju biramo kružnicu polumjera b

$$B(r = b) \cdot 2\pi b = \mu_0 i_b = \mu_0 \frac{2\pi a b^3}{3} \ .$$

Slijedi da je magnetsko polje

$$B(r = b) = \frac{\mu_0 a b^2}{3} = 1.005 \cdot 10^{-3} \text{ T} \ .$$

1. U dijelu prostora omeđenog vodičem kvadratnog oblika (vidi sliku), magnetsko polje usmjereno je okomito na stranicu, u smjeru +z-osi (iz ravnine crtnje). Jakost mu je dana s $B = Ayt^2$, gdje konstanta iznosi $A = 0.5\ \mathrm{Tm^{-1}s^{-2}}$. Odredite iznos elektromotorne sile inducirane u petlji u trenutku $t = 4$ s i na slici označite njezin smjer. Duljina stranice vodiča je $a = 120$ cm.
(8 bodova)



Rješenje:

Magnetsko polje nije homogeno u oba smjera, već ovisi o koordinati y. Inducirana elektromotorna sila je u tom slučaju

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int \vec{B}\, d\vec{S}\right)$$

Tok magnetskog polja nalazimo integracijom preko cijele površine petlje:

$$\int \vec{B}\, d\vec{S} = \int_0^a (Ayt^2\hat{k})(a\,dy\,\hat{k}) = Aat^2 \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^2 = \frac{Aa^3t^2}{2}.$$

Konačno, promjena toka magnetskog polja daje elektromotornu silu

$$\mathscr{E} = \frac{-d}{dt}\left(\frac{Aa^3t^2}{2}\right) = -Aa^3t$$

U trenutku t=4 s, za zadane brojeve iznosi $\mathscr{E}$ = -3.46 V.

3. Magnetska komponenta polariziranog elektromagnetskog vala u vakuumu dana je izrazom:

$$B_x = (4 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T}) \sin[(1{,}57 \cdot 10^7\ \mathrm{m^{-1}})y + \omega t]\ .$$

Napišite: a) koji je smjer širenja vala, b) koja je valna duljina vala, c) koja je frekvencija vala, d) puni izraz za neiščezavajuće komponente električnog polja (svi brojevi trebaju biti izračunati).
(6 bodova)

Rješenje:

Iz danog izraza odmah možemo očitati smjer propagacije, amplitudu magnetskog polja i valnu duljinu: smjer je negativna y-os, $B_0 = 4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}$, $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/(1.57 \cdot 10^7\,\mathrm{m^{-1}}) = 400$ nm. (a) i (b)

Valni vektor i kružna frekvencija vezani su preko brzine propagacije: $\omega = ck = 4.71 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s^{-1}}$, ili ako želimo napisati linearnu frekvenciju $\nu = \omega/2\pi = 7.40 \cdot 10^{14}$ Hz (c).

Amplitude električnog i magnetskog polja vezane su preko brzine svjetlosti: $E_0 = cB_0 = 120$ V/m, a električno polje mora biti okomito i na smjer propagacije vala i na smjer magnetskog polja. Konačno pišemo izraz za jedinu neiščezavajuću komponentu električnog polja (d):

$$E_z = -(120\,\mathrm{V/m})\sin[(1.57 \cdot 10^7\,\mathrm{m^{-1}})y + (4.71 \cdot 10^{15}\,\mathrm{s^{-1}})t]\ .$$

3. Elektron se giba u pozitivnom smjeru x−osi brzinom $3.5 \cdot 10^{6}$ ms^{-1} i ulijeće u dio prostora u kojem se nalazi homogeno magenetsko polje s komponentama $\vec{B}$ = (*Bx*, *By*, *Bz*) = (14.5, 2.7, 5.5) · 10^{-4} T. Koliki je iznos sile koja djeluje na elektron u dijelu prostora s magnetskim poljem? **(6 bodova)**

Rješenje:

Na elektron djeluje Lorentzova sila:

$$\vec{F}_{\mathrm{L}} = e\,\vec{v} \times \vec{B}\ ,$$

gdje je e naboj elektrona, a $\vec{v}$ i $\vec{B}$ vektori brzine elektrona i magnetskog polja.

Raspisano po komponentama:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mathrm{L}} &= e\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ v_x & 0 & 0\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}\\ &= \hat{i}\cdot 0 - \hat{j}(v_x B_z - 0) + \hat{k}(v_x B_y - 0)\\ &= e\,v_x(\hat{k}B_y - \hat{j}B_z)\ .\end{aligned}$$

Iznos tražene sile je

$$F_{\mathrm{L}} = e\,v_x\sqrt{B_z^2 + B_y^2}\ .$$

Za zadane brojeve $F_{\mathrm{L}} = 3.43 \cdot 10^{-16}$ N.

2. Ravni elektromagnetski val koji se širi u vakuumu u pozitivnom smjeru z-osi ima električno polje koje titra u smjeru x-osi. Ako je amplituda magnetskog polja 350 nT te frekvencija vala 10 GHz, odredite Poyntingov vektor elektromagnetskog vala i vektorski zapis električnog i magnetskog polja.
(6 bodova)

Rješenje:

Budući se val giba u smjeru z-osi električno i magnetsko polje su:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(kz - \omega t), \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 \sin(kz - \omega t),$$

Za ravni elektromagnetski val odnos amplituda dan je izrazom:

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{c} \times \vec{E}_0}{c^2},$$

pri čemu je $\vec{c} = c\vec{k}$ i $\vec{E}_0 = E_0\vec{i}$.
Poyntingov vektor jednak je:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{B_0^2 c}{\mu_0}\sin^2(kz - \omega t)\vec{k},$$

odnosno

$$\vec{S} = 29.25\frac{W}{m^2}\sin^2(209m^{-1}z - 6.28 \times 10^{10}s^{-1}t)\vec{k},$$

gdje je $\omega = 2\pi f = 6.28 \times 10^{10}\,s^{-1}$ i $k = \omega/c = 2.09 \times 10^2 m^{-1}$.
Vektori električnog i magnetskog polja su

$$\begin{aligned}\vec{E} &= 105\,\frac{V}{m}\sin(209m^{-1}z - 6.28 \times 10^{10}s^{-1}t)\vec{i},\\ \vec{B} &= 350\,nT\,\sin(209m^{-1}z - 6.28 \times 10^{10}s^{-1}t)\vec{j}.\end{aligned}$$

2. Elektromagnetski val se širi u vakuumu u smjeru osi z i ima amplitudu električnog polja $E0=220\ Vm^{-1}$. Vektor električnog polja leži u ravnini y=z. Odredi amplitudu i smjer pripadajućeg magnetskog polja. *3 boda*

u,i,j,k,z,E,B su vektori!
u=i
B=1/c +(uxE)
E=(j+k)/(korijen2)*Eosin(wt-kz)
i+j=k
i+k=-j
Bo=Eo/(ckorijen2)=5.185*10^(-7)T
B=1/(c+korijen2)*(k-j)*Eosin(wt-kz)=5.185*10^(-7)*(k-j)sin(wt-kz) T

3. Kružna petlja promjera $17\,\mathrm{cm}$, namotana s 3 namotaja žice, početno je u položaju u kojem je okomita na stalno i homogeno magnetsko polje iznosa $3.8 \times 10^{-2}\,\mathrm{T}$. Tijekom intervala u trajanju $0.27\,\mathrm{s}$ petlja se jednolikom kružnom brzinom zakrene za 90° oko svog promjera. Skicirajte ovisnost elektromotorne sile o vremenu tijekom tog intervala te odredite najveći iznos koji ona postiže. (7 bodova)

Rješenje:

$$U = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$
$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = BS\cos\omega t$$
$$U = NBS\omega\sin\omega t$$
$$U_{maks.} = NBS\omega = NB\frac{d^2\pi}{4}\,\omega$$
$$U_{maks.} = 3\cdot 3.8\cdot 10^{-2}\cdot\frac{0.17^2\,\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{2\cdot 0.27}\ \mathrm{V}=0.015\ \mathrm{V}$$

3. Dvjema dugim tankim žicama teku struje koje proizvode magnetsko polje. Prva žica je položena duž z-osi i provodi struju od $4.4\,\mathrm{A}$ u pozitivnom smjeru. Druga žica je paralelna s prvom žicom i ima koordinate $x = 2.5\,\mathrm{cm}$ i $y = 0$, a provodi struju od $3.3\,\mathrm{A}$ u suprotnom smjeru u odnosu na prvu žicu. Odredite vektor ukupnog magnetskog polja $\mathbf{B}$ u točki P s koordinatama $x_P = 2.5\,\mathrm{cm}$ i $y_P = 3.5\,\mathrm{cm}$.

$r_1 = \sqrt{2{,}5^2 + 3{,}5^2}$ cm=4,3 cm
$r_2 = 3{,}5$ cm

$$B_i = \frac{\mu_0 I_i}{2\pi\ r_i}$$
$$B_1 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4{,}4}{2\pi \cdot 4{,}3 \cdot 10^{-2}}\ \text{T=20,5 µT}$$
$$B_2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3{,}3}{2\pi \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-2}}\ \text{T=18,9 µT}$$

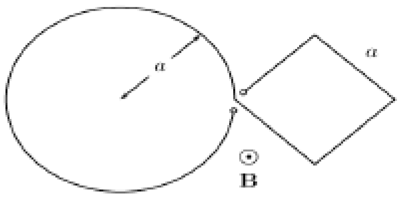
$$\tan\theta = \frac{2{,}5}{3{,}5} = 0{,}714286$$
$\theta = 35{,}538°$

$B_{1x} = -20{,}5\ \mu\text{T} \cos 35{,}538° = -16{,}7\ \mu$
$B_{1y} = 20{,}5\ \mu\text{T} \sin 35{,}538° = 11{,}9\ \mu\text{T}$
$B_{2x} = 18{,}9\ \mu\text{T}$
$B_{2y} = 0$

$B_x = -16{,}7$ µT+18,9 µT=2,2 µT
$B_y = 11{,}9$ µT+0=11,9 µT

Iznos magnetskog polja:
$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$
$B = \sqrt{2{,}2^2 + 11{,}9^2}$ µT=12,1 µT
Smjer magnetskog polja:
$$\tan\theta_B = \frac{B_y}{B_x}$$
$$\tan\theta_B = \frac{11{,}9}{2{,}2} = 5{,}409$$
$\theta_B = 79{,}526°$

3. Vodljiva petlja se sastoji od kvadrata stranice a spojenog s kružnicom polumjera a kao što prikazuje slika. Homogeno magnetsko polje je okomito na ravninu petlje, a njegov iznos se mijenja u skladu s izrazom $B[t] = B_0 e^{-\alpha t}$, gdje su B_0 i α pozitivne konstante. Izračunajte induciranu elektromotornu silu u petlji u trenucima $t = 0$ i $t = +\infty$. (7 bodova)



Rješenje:

Najprije tražimo izraz za EMS kao funkciju vremena:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt}, \tag{12}$$

bitno je uočiti da je inducirana struja suprotnog smjera u kvadratu u odnosu na kružnici pa se tokovi oduzimaju:

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\Phi_1 - \Phi_2) = -\frac{d}{dt}\Big(B_0 e^{-\alpha t}(a^2\pi - a^2)\Big), \tag{13}$$

EMS je:

$$\varepsilon(t) = B_0 \alpha a^2 e^{-\alpha t}(\pi - 1). \tag{14}$$

sad uvrstimo vrijeme $t = 0$:

$$\varepsilon(0) = B_0 \alpha a^2 (\pi - 1), \tag{15}$$

a u $t = +\infty$:

$$\varepsilon(\infty) = 0. \tag{16}$$

3.4 Vodič kružnog poprečnog presjeka i polumjera R vodi struju čija gustoća se mijenja po zakonu:

$$j(r) = j_0(2 - \alpha r)e^{-\alpha r}, \tag{1}$$

gdje su j_0 i α zadane pozitivne konstante. Izračunajte na kojoj udaljenosti r od središta vodiča magnetsko polje poprima maksimalnu vrijednost unutar vodiča.

Rješenje:
Iz Amperovog zakona vrijedi:

$$\oint B dl = \mu_0 I, \tag{2}$$

pa je:

$$2\pi r B = \mu_0 \int_0^r j(r) r dr \int_0^{2\pi} d\varphi, \tag{3}$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 j_0}{2\pi r} 2\pi \int_0^r (2 - \alpha r)e^{-\alpha r} r dr, \tag{4}$$

integral možemo odvojiti na dva:

$$I_1 = \int_0^r 2re^{-\alpha r} dr = -\frac{2\alpha r + 2}{\alpha^2} e^{-\alpha r}\Big|_0^r = -\frac{2\alpha r + 2}{\alpha^2} e^{-\alpha r} + 2/\alpha^2, \tag{5}$$

$$I_2 = -\int_0^r \alpha r^2 e^{-\alpha r} dr = \frac{\alpha^2 r^2 + 2\alpha r + 2}{\alpha^2} e^{-\alpha r}\Big|_0^r = \frac{\alpha^2 r^2 + 2\alpha r + 2}{\alpha^2} e^{-\alpha r} - 2/\alpha^2, \tag{6}$$

vidljivo je da:

$$I_1 + I_2 = r^2 e^{-\alpha r}, \tag{7}$$

što se moglo vidjeti i odmah nakon prvog pokušaja parcijalne integracije I_2. Konačno je magnetsko polje:

$$B(r) = \mu_0 j_0 r e^{-\alpha r}, \tag{8}$$

tražimo maksimum deriviranjem i izjednačavanjem s nulom:

$$\frac{dB}{dr} = \mu_0 j_0 (e^{-\alpha r} - \alpha r e^{-\alpha r}) = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{\alpha}. \tag{9}$$

4. Električno polje ravnog elektromagnetskog vala u vakuumu opisano je izrazima:

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = 0.3\frac{V}{m}\sin(2\pi \cdot 10^{14}\,s^{-1}t - kx).$$

Pronađite izraz za magnetsku komponentu tog polja, smjer širenja elektromagnetskog vala, frekvenciju vala, iznos valnog vektora te valnu duljinu. Je li taj elektromagnetski val vidljiv prosječnom ljudskom oku ako ono vidi svjetlost u rasponu valnih duljina od 390 nm do 750 nm?
(6 bodova)

Iz jednadžbe titranja električne komponente elektromagnetskog vala se može iščitati da je smjer propagacije $+x$ os.
Frekvencija vala se isto može iščitati:

$$\omega = 2\pi \cdot 10^{14} s^{-1} \Longrightarrow \nu = 10^{14} Hz. \tag{21}$$

Valni vektor k:

$$k = \frac{\omega}{c} = 2.09 \cdot 10^{6} m^{-1}, \tag{22}$$

Valna duljina je:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 3 \cdot 10^{-6} m = 3\mu m. \tag{23}$$

Jedina neiščezavajuća komponenta magnetskog polja mora biti B_y koja je okomita na električnu komponentu i na smjer širenja vala. Amplituda električnog polja je:

$$E_0 = 0.3\frac{V}{m}, \tag{24}$$

Veza amplituda električne i magnetske komponente je:

$$E_0 = cB_0 \Longrightarrow B_0 = \frac{E_0}{c} = 10^{-9} T. \tag{25}$$

Konačno:

$$B_y = -10^{-9} T \sin\left(2\pi \cdot 10^{14} s^{-1} t - 2.09 \cdot 10^{6} m^{-1} x\right). \tag{26}$$

Valna duljina od $3\mu m$ nije vidljiva ljudskom oku.

3. Uniformno električno polje nalazi se unutar kružnice polumjera R = 3 cm i usmjereno je okomito na ravninu kružnice. Iznos električnog polja je ovisan o vremenu prema relaciji $E(t) = A \cdot t$, gdje je $A = 9 \cdot 10^{-3}$ Vm^{-1}s^{-1}. Koliki je iznos induciranog magnetskog polja na udeljenosti r = 5 cm od središta kružnice? **(7 bodova)**

Rješenje:

Prema Maxwell-Ampéreovom zakonu veza vremenske promjene toka električnog polja i cirkulacije magnetskog polja je

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \ .$$

Tok električnog polja kroz kružnicu polumjera $r = 5$ cm je $\Phi_E = E \cdot R^2 \pi$, gdje je R polumjer kružnice unutar koje postoji električno polje ($R < r$).

Uvrstimo sve veličine u Maxwell-Ampéreov zakon:

$$B \cdot 2r\pi = \mu_0 \epsilon_0 A \cdot R^2 \pi \ .$$

Konačno, magnetsko polje na udaljenosti $r = 5$ cm od središta kružnice je

$$B = \frac{A}{2c^2} \frac{R^2}{r} = 9 \cdot 10^{-22} \text{ T}.$$

Zadatak: Elektromagnetski val se širi u vakuumu u smjeru osi x i ima amplitudu električnog polja $E_0 = 220 \text{ V m}^{-1}$. Vektor električnog polja leži u ravnini $y = z$. Odredi amplitudu i smjer pripadajućeg magnetskog polja $\mathbf{B}$.

Postupak: Električno polje možemo napisati kao

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}, t] = \mathbf{E}_0 \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi],$$

gdje je

$$\mathbf{k} = k\,\hat{\mathbf{x}}$$

valni vektor, a

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \frac{\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{2}}$$

je amplituda polja (vrijedi $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$). Koristeći izraz

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}} \times (\mathbf{E}/c)$$

slijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{B}[\mathbf{r}, t] &= \frac{E_0}{c} \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi] \frac{\hat{\mathbf{x}} \times (\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{E_0}{c} \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi] \frac{\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}} \\ &= \mathbf{B}_0 \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi], \end{aligned}$$

gdje kao amplitudu magnetskog polja prepoznajemo

$$\mathbf{B}_0 = \frac{E_0}{c} \frac{\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}.$$

Rješenje: $\mathbf{B}_0 = (E_0/c)(\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$, $B_0 = 7.338 \times 10^{-7}$ T

(Davor Čapeta)

3.4 Dana su četiri polja:

$$\vec{E} = (0,\, 0,\, E_0 \cos[k(y - ct)]) \tag{25}$$

$$\vec{E} = (0,\, 0,\, E_0 \cos[k(x - ct)]) \tag{26}$$

$$\vec{B} = \left(\frac{E_0}{c} \cos[k(y - ct)],\, 0,\, 0\right) \tag{27}$$

$$\vec{B} = \left(0,\, \frac{E_0}{c} \cos[k(y - ct)],\, 0\right) \tag{28}$$

Koja od ovih polja zajedno opisuju elektromagnetski val u vakuumu? Pokažite eksplicitno da ta polja (koja opisuju elektromagnetski val) zadovoljavaju Maxwellove jednadžbe.

Rješenje:
S obzirom da su sva polja u y smjeru osim $E = (0, 0, E_0 \cos[k(x - ct)])$ koje je u x smjeru tada ono neće imati svog para magnetskog polja i to polje otpada. Polje $B = (0, \frac{E_0}{c} \cos[k(y - ct)], 0)$ ima komponentu y i istovremeno se giba u y smjeru, tada će rotacija tog polja biti 0, to polje neće zadovoljiti Maxwellove jednadžbe. Ostaju polja:

$$E = (0, 0, E_0 \cos[k(y - ct)]), \tag{29}$$

$$B = (\frac{E_0}{c} \cos[k(y - ct)], 0, 0), \tag{30}$$

koje imaju sve preduvjete da zadovolje Maxwellove jednadžbe u vakuumu. Prva Maxwellova jednadžba:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \tag{31}$$

Druga Maxwellova jednadžba:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0, \tag{32}$$

Treća Maxwellova jednadžba:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \hat{x} = -E_0 k \sin[k(y - ct)] \hat{x}, \tag{33}$$

desna strana:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -E_0 k \sin[k(y - ct)] \hat{x}, \tag{34}$$

vidimo da je zadovoljena.

Četvrta Maxwellova jednadžba:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{\partial B_x}{\partial y} \hat{z} = \frac{E_0}{c} k \sin[k(y - ct)] \hat{z}, \tag{35}$$

desna strana:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{E_0}{c} k \sin[k(y - ct)] \hat{z}, \tag{36}$$

također je zadovoljena, polja opisuju elektromagnetski val u vakuumu.

3.3 Kružna petlja od žice ima radijus 7.5 cm. Sinusoidalni elektromagnetski ravni val putujući zrakom dolazi do petlje, sa smjerom magnetskog polja vala okomitim na ravninu petlje. Intenzitet vala na mjestu petlje je 0.0195 W/m^2, a valna duljina je 6.9 m. Kolika je maksimalna elektromotorna sila (napon) inducirana u petlji? Rješenje:

Promjena magnetskog polja u EM valu uzrokuje promjenu toka kroz petlju, što inducira elektromotornu silu u petlji.

$\varphi_B = B\pi r^2 = \pi r^2 B_{max} \cos(kx - \omega t)$

Faradayev zakon:

$|\varepsilon| = |d\varphi_B/dt|$.

Intenzitet vala je

$I = E_{max}B_{max}/2\mu_0 = (c/2\mu_0)B^2_{max}$, pa je za zadani intenzitet

$B_{max} = 1{,}278 \times 10^{-8}$ T te je

$f = c/\lambda = 4{,}348 \times 10^7$ Hz

$|\varepsilon| = |d\varphi_B/dt| = = \omega\pi r^2 B_{max} \sin(kx - \omega t)$, pa je

$|\varepsilon|_{max} = 2\pi f\, \pi r^2 B_{max}$

$|\varepsilon|_{max} = 6{,}17 \times 10^{-2}$ V = 61,7 mV.

4. Proton se giba jednoliko pravocrtno brzinom (stalnog) iznosa v =100 m/s u pozitivnom smjeru y-osi, u prostoru u kojem postoje električno i magnetsko polje. Ako je vektor magnetskog polja $\vec{B}$ = (0.01 T) $\hat{k}$, odredite vektor električnog polja $\vec{E}$.
(6 bodova)

Rješenje:

Proton se giba stalnom brzinom, dakle rezultatntna sila na njega je nula. Na nabijenu česticu u električnom i/ili magnetskom polju djeluje Lorentzova sila:

$$\vec{F_L} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0 \ .$$

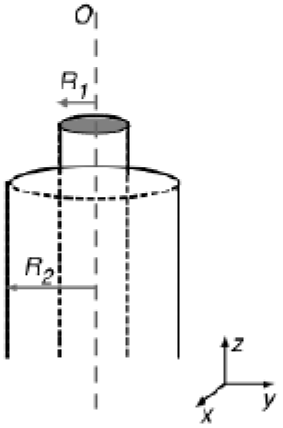
Slijedi da je električno polje:

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} \ ,$$

$$\vec{E} = -\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} = -\hat{i} v_y B_z \ .$$

Za zadane brojeve $\vec{E} = -(1\,\mathrm{V/m})\,\hat{i}$.

3. Dva beskonačna vodiča, jedan u obliku valjka polumjera R_1 , a drugi plašta valjka polumjera R_2 ($R_2 > R_1$), postavljeni su tako da imaju zajedničku os O (vidi sliku). Izmedu njih je vakuum. Unutrašnjim vodičem teče ukupna struja I u smjeru z−osi koja je homogeno raspodijeljena po poprečnom presjeku (krug). Vanjskim vodičem teče ukupna struja istog iznosa, ali suprotnog smjera, homogeno raspodijeljena po njegovom presjeku (kružnica). Napišite izraz za iznos magnetskog polja $B(r)$ u ovisnosti o udaljenosti r od osi sustava, i to za $0 \leq r \leq R_1$, zatim za $R_1 < r \leq R_2$, te za $r > R_2$. **(8 bodova)**



Rješenje:

Prema Ampereovom zakonu, integral magnetskog polja po nekoj krivulji C dan je integralom površinske raspodjele struja koje teku kroz plohu koju omeđuje krivulja C.

Ovdje imamo tri područja koja zasebno razmatramo: unutar unutrašnjeg vodiča ($r \leq R_1$), između dva vodiča ($R_1 < r \leq R_2$) i izvan vanjskog vodiča ($r > R_2$). Obzirom na simetriju sustava, za svako od tih područja za integraciju je primjeren odabir kružne krivulje polumjera r u $x - y$ ravnini, s ishodištem na osi O.

Za $0 \leq r \leq R_1$:

$$(2r\pi)B(r) = \mu_0 \int_0^r \sigma 2r\pi dr = \mu_0 \sigma r^2 \pi = \mu_0 \frac{Ir^2}{R_1^2},$$

gdje je $\sigma = I/(R_1^2\pi)$ površinska gustoća struje po presjeku unutrašnjeg vodiča.

$$B(r) = \mu_0 \frac{Ir}{2\pi R_1^2}.$$

Za $R_1 < r \leq R_2$:

Unutrašnji vodič je potpuno sadržan unutar integracijske krivulje, pa je magnetsko polje jednostavno

$$(2r\pi)B(r) = \mu_0 I,$$

$$B(r) = \mu_0 \frac{I}{2r\pi}.$$

Za $r > R_2$:

Izvan drugog vodiča, ukupna struja obuhvaćena kružnicom polumjera $r > R_2$ je nula (zbroj dvije struje istih iznosa i suprotnog smjera), pa je

$$B(r) = 0.$$

Konačno, traženi iznos magnetskog polja za bilo koju udaljenost od osi sustava je:

$$B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2} & , r \leq R_1 \\ \frac{\mu_0 I}{2r\pi} & , R_1 < r \leq R_2 \\ 0 & , r > R_2. \end{cases}$$