Fizika 2: Zadaci za vježbu 2/7 (prigušeni i tjerani oscilator)

1 Zadatak: Čestica mase m se giba u x,y-ravnini pod djelovanjem sile $\mathbf{F} = -k\,(x\,\mathbf{i} + 4y\,\mathbf{j})$, a puštena u gibanje iz mirovanja u točki $\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j}$. Napiši putanju čestice u obliku $y[x]$ te ju skiciraj. Zatim odredi najveću vrijednost iznosa brzine koju čestica postiže tokom gibanja.

Postupak: Jednadžba gibanja $m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, rastavljena na komponente u x,y-ravnini, daje dvije nevezane jednadžbe gibanja,

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \text{i} \qquad m\ddot{y} + 4ky = 0.$$

Prepoznajemo da je riječ o harmoničkom titranju u x-smjeru frekvencijom

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

te o harmoničkom titranju u y-smjeru dvostruko većom većom frekvencijom. Opća rješenja možemo napisati kao

$$x[t] = A_x \cos[\omega_0 t + \phi_x] \qquad \text{i} \qquad y[t] = A_y \cos[2\omega_0 t + \phi_y],$$

gdje su A_x i A_y amplitude titranja, a ϕ_x i ϕ_y su fazni pomaci. Za komponente brzine dobivamo

$$v_x[t] = \dot{x}[t] = -\omega_0 A_x \sin[\omega_0 t + \phi_x] \qquad \text{i} \qquad v_y[t] = \dot{y}[t] = -2\omega_0 A_y \sin[2\omega_0 t + \phi_y].$$

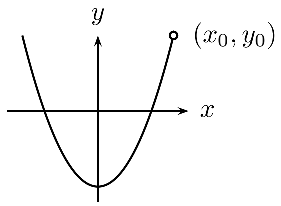
Uzmemo li $t = 0$ kao početni trenutak, na osnovu početnog uvjeta $\mathbf{v}[0] = 0$ zaključujemo da fazni pomaci moraju biti jednaki 0 ili π. Nakon toga na osnovu početnog uvjeta $\mathbf{r}[0] = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j}$ slijedi $A_x = |x_0|$ i $A_y = |y_0|$, gdje za $x_0 > 0$ uzimamo $\phi_x = 0$ dok za $x_0 < 0$ uzimamo $\phi_x = \pi$ te isto tako za y-smjer. Konačno, položaj možemo napisati kao

$$x[t] = x_0 \cos[\omega_0 t] \qquad \text{i} \qquad y[t] = y_0 \cos[2\omega_0 t] = y_0(2\cos^2[\omega_0 t] - 1).$$

Eliminacijom $\cos\omega_0 t$ iz gornjih izraza slijedi jednadžba putanje čestice u x,y ravnini,

$$y[x] = y_0\left(2x^2/x_0^2 - 1\right),$$

gdje prepoznajemo parabolu s tjemenom pri $x = 0$ i $y = -y_0$. Skica za $x_0 > 0$ i $y_0 > 0$:



Komponente brzine su $v_x[t] = -\omega_0 x_0 \sin[\omega_0 t]$ i $v_y[t] = -4\omega_0 y_0 \cos[\omega_0 t]\sin[\omega_0 t]$ te za kvadrat njena iznosa dobivamo

$$v^2[t] = v_x^2[t] + v_y^2[t] = \omega_0^2 \sin^2[\omega_0 t]\,(x_0^2 + 16y_0^2\cos^2[\omega_0 t]).$$

Zbog lakšeg računa uvodimo varijablu $u = \cos^2[\omega_0 t]$ koja poprima vrijednosti iz intervala $[0,1]$. Gornji izraz za kvadrat iznosa brzine sada možemo napisati kao

$$v^2 = \omega^2(1-u)(x_0^2 + 16y_0^2 u) = -16y_0^2\omega^2(u-1)\left(u + x_0^2/16y_0^2\right), \qquad u \in [0,1],$$

što je parabola s negativnim vodećim koeficijentom, s nultočkama pri $u_1 = -x_0^2/16y_0^2$ i $u_2 = 1$, te s tjemenom pri

$$u_0 = (u_1 + u_2)/2 = \left(1 - x_0^2/16y_0^2\right)/2.$$

Naš je cilj pronaći maksimum te parabole na intervalu $u \in [0,1]$. Uočavamo da za sve x_0 i y_0 vrijedi $u_0 \le 1/2$. Za $u_0 \ge 0$ tjeme se nalazi unutar intervala $[0,1]$ te odgovara maksimumu kvadrata iznosa brzine. Zaključujemo

$$v_{\max} = \sqrt{v^2\big|_{u=u_0}} = \omega_0(x_0^2 + 16y_0^2)/8y_0 \qquad \text{za} \qquad x_0^2/16y_0^2 \le 1.$$

Ako je $u_0 < 0$, maksimum vrijednosti v^2 se za $u \in [0,1]$ nalazi pri lijevom rubu intervala, odnosno pri $u = 0$, te imamo

$$v_{\max} = \sqrt{v^2\big|_{u=0}} = \omega_0 x_0 \qquad \text{za} \qquad x_0^2/16y_0^2 > 1.$$

Rješenje: $y[x] = y_0\left(2x^2/x_0^2 - 1\right)$, $v_{\max} = \omega_0(x_0^2 + 16y_0^2)/8y_0$ za $x_0^2/16y_0^2 \le 1$, $v_{\max} = \omega_0 x_0$ za $x_0^2/16y_0^2 > 1$

2 Zadatak: Otklon čestice koja prigušeno titra opisujemo izrazom $x[t] = A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t+\phi]$. Odredi konstante $A > 0$ (amplitudu u $t = 0$) i ϕ (fazu) ako u trenutku $t = 0$ čestica ima brzinu $\dot{x} = v_0 > 0$ pri otklonu $x = x_0 > 0$.

Postupak: Ako je položaj opisan izrazom

$$x[t] = A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t + \phi],$$

onda brzinu možemo napisati kao

$$\dot{x}[t] = -(\delta + \omega \tan[\omega t + \phi])\, x[t].$$

Najprije razmotrimo početni uvjet za brzinu,

$$\dot{x}[0] = -(\delta + \omega \tan\phi)\, x_0 = v_0.$$

On je ispunjen za

$$\tan\phi = -\frac{\delta}{\omega} - \frac{v_0}{x_0\omega},$$

gdje valja voditi računa o dvoznačnosti pri određivanju samog ϕ. S obzirom da je zadano $v_0 > 0$ i $x_0 > 0$, tangens faze ϕ je negativan što dopušta fazu (kut) iz II ili iz IV kvadranta. Zatim razmatramo početni uvjet za otklon,

$$x[0] = A\cos\phi = x_0,$$

S obzirom da zahtijevamo $A > 0$ te da je ovdje zadano $x_0 > 0$, slijedi $\cos\phi > 0$ što znači da faza ϕ pripada I ili IV kvadrantu, od čega je samo IV kvadrant dopušten ranije dobivenim uvjetom. Konačno, iz početnog uvjeta za elongaciju slijedi

$$A = \frac{x_0}{\cos\phi} = x_0\sqrt{1+\tan^2\phi} = x_0\sqrt{1+\left(\frac{\delta + v_0/x_0}{\omega}\right)^2}.$$

Rješenje: $\phi = \arctan[-(\delta + v_0/x_0)/\omega] \in [-\pi/2, 0]$, $A = x_0\sqrt{1 + ((\delta + v_0/x_0)/\omega)^2}$

3 Zadatak: Čestica prigušeno titra duž x-osi. Koordinate triju uzastopnih krajnjih položaja čestice (položaji pri kojima brzina čestice iščezava) su $x_1 = 20\,\mathrm{cm}$, $x_2 = 5.6\,\mathrm{cm}$ i $x_3 = 12.8\,\mathrm{cm}$. Odredi koordinatu ravnotežnog položaja.

Postupak: Položaj čestice koja prigušeno titra duž x-osi možemo općenito napisati kao

$$x[t] = x_\infty + A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t + \phi],$$

gdje je x_∞ koordinata ravnotežnog položaja, a

$$\omega = 2\pi/T$$

je period prigušenog titranja. Napišemo li brzinu čestice kao

$$\dot{x}[t] = -A\mathrm{e}^{-\delta t}(\delta\cos[\omega t + \phi] + \omega\sin[\omega t + \phi]),$$

lako je uočiti da ona miruje, tj. nalazi se u krajnjem položaju, u trenucima koji su u vremenu razmaknuti polovicu perioda prigušenog titranja. Označimo li s x_n koordinatu krajnjeg položaja čestice, slijedi da za koordinate dvaju uzastopnih krajnjih položaja vrijedi relacija

$$\frac{x_{n+1} - x_\infty}{x_n - x_\infty} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}$$

(negativan predznak na desnoj strani je prisutan jer se dva uzastopna krajnja položaja nalaze sa suprotnih strana ravnotežnog položaja). U našem slučaju imamo dva para uzastopnih krajnjih položaja za koje pišemo

$$\frac{x_2 - x_\infty}{x_1 - x_\infty} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}, \qquad \frac{x_3 - x_\infty}{x_2 - x_\infty} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}.$$

Eliminacijom $\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}$ iz gornjeg sustava dobivamo

$$(x_1 - x_\infty)(x_3 - x_\infty) = (x_2 - x_\infty)^2,$$

iz čega slijedi

$$x_\infty = \frac{x_1 x_3 - x_2^2}{x_1 - 2x_2 + x_3}.$$

Rješenje: $x_\infty = (x_1 x_3 - x_2^2)/(x_1 - 2x_2 + x_3) = 10.4\,\mathrm{cm}$

4 Zadatak: Čestica koja prigušeno titra s logaritamskim dekrementom prigušenja $\lambda = 0.002$ puštena je u gibanje iz mirovanja pri otklonu $x_0 = 1\,\mathrm{cm}$ u odnosu na ravnotežni položaj. Odredi ukupni put koji će čestica preći do "konačnog zaustavljanja".

Postupak: Ako $x = 0$ odgovara ranvotežnom položaju, uzastopni krajnji položaji čestice koja prigušeno titra zadovoljavaju relaciju

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)} = -\mathrm{e}^{-\lambda/2},$$

gdje je x_n položaj n-tog krajnjeg položaja, δ je koeficijent prigušenja, T je period prigušenog titranja, a $\lambda = \delta T$ je logaritamski dekrement prigušenja. Ukupan put koji čestica pravaljuje titrajući, krene li iz mirovanja pri otklonu x_0, možemo napisati kao

$$\begin{aligned} s &= |x_0| + 2|x_1| + 2|x_2| + 2|x_3| + \cdots \\ &= x_0 + 2x_0\mathrm{e}^{-\lambda/2} + 2x_0\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^2 + 2x_0\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^3 + \cdots \\ &= x_0\Big(-1 + 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^k\Big). \end{aligned}$$

Sumu prepoznajemo kao geometrijski red,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^k = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda/2}},$$

te je prevaljeni put

$$s = x_0\left(-1 + \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-\lambda/2}}\right).$$

Rješenje: $s = x_0\left(-1 + 2/(1-\mathrm{e}^{-\lambda/2})\right) \simeq 4x_0/\lambda \simeq 20\,\mathrm{m}$

5 Zadatak: Homogeni disk polumjera $R = 0.5\,\mathrm{m}$ prigušeno njiše oko vodoravne osi koja je okomita na njegovu površinu i prolazi njegovim rubom. Otklonimo li disk iz ravnotežnog položaja za kut $\vartheta_0 = 4^\circ$ i pustimo li ga u gibanje, njegov se krajnji otklon nakon $n = 6$ punih titraja smanji na vrijednost $\vartheta_6 = 1^\circ$. Odredi period prigušenog titranja diska te razliku između tog perioda i perioda kojim bi on titrao kada prigušenje ne bi bilo prisutno. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Kut otklona pri prigušenom titranju ovog njihala možemo napisati kao

$$\vartheta[t] = \theta\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t + \phi]$$

gdje su θ i ϕ konstante, parametar δ opisuje prigušenje,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

je frekvencija prigušenog titranja, dok je

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{mgb}{I}} = \sqrt{\frac{mgb}{mb^2 + I_{\mathrm{cm}}}} = \sqrt{\frac{mgR}{mR^2 + \frac{1}{2}mR^2}} = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$$

vlastita frekvencija, odnosno frekvencija kojom bi sustav titrao kada prigušenje ne bi bilo prisutno. Ako je $\vartheta_0 = \vartheta[0]$ otklon oscilatora u nekom trenutku $t = 0$, onda njegov otklon nakon n punih titraja možemo napisati kao

$$\vartheta_n = \vartheta[nT] = \vartheta[0]\mathrm{e}^{-n\delta T} = \vartheta_0\mathrm{e}^{-n\delta T},$$

iz čega slijedi

$$\delta = \frac{1}{nT}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta_n}.$$

Uvrštavanjem gornjih izraza za ω_0 i δ u izraz za ω dobivamo

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{2g}{3R} - \left(\frac{1}{nT}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta_n}\right)^2,$$

iz čega izlučujemo period prigušenog titranja

$$T^2 = (2\pi)^2\frac{3R}{2g}\left(1 + \left(\frac{1}{2\pi n}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta_n}\right)^2\right) = T_0^2\left(1 + \left(\frac{1}{2\pi n}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta_n}\right)^2\right).$$

Uz zadane vrijednosti parametara n, ϑ_0, ϑ_n, R i g dobivamo $T_0 \simeq 1.737\,\mathrm{s}$, a vrlo blisku vrijednost dobivamo i za period prigušenog titranja T. Kako bismo odredili razliku između ta dva perioda možemo pisati

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{T^2 - T_0^2}{T + T_0} \simeq \frac{T^2 - T_0^2}{2T_0} = \cdots = \frac{T_0}{2}\left(\frac{1}{2\pi n}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta_n}\right)^2,$$

što uz zadane vrijednosti parametara daje $\Delta T \simeq 1.17\times 10^{-3}\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $T_0 = 2\pi\sqrt{3R/2g} \simeq 1.737\,\mathrm{s}$, $T = T_0\sqrt{1 + (\ln[\vartheta_0/\vartheta_n]/2\pi n)^2} \simeq 1.738\,\mathrm{s}$, $\Delta T = T - T_0 \simeq (T_0/2)\big(\ln[\vartheta_0/\vartheta_n]/2\pi n\big)^2 \simeq 1.17\times 10^{-3}\,\mathrm{s}$

6 Zadatak: Muzička vilica u zraku titra frekvencijom $f = 440\,\mathrm{Hz}$, a amplituda titranja joj se smanji na jednu polovinu početne vrijednosti u vremenu $\tau_{1/2} = 4\,\mathrm{s}$. Odredi koliko bi se smanjila frekvencija titranja iste vilice kada bi ona titrala u sredstvu zbog kojeg bi se amplituda smanjila na jednu polovinu u vremenu $\tau'_{1/2} = 3\,\mathrm{s}$.

Postupak: Amplituda prigušenog titranja se smanjuje u vremenu razmjerno s $\exp(-\delta t)$ pa vrijedi $\exp(-\delta\tau_{1/2}) = 1/2$, odnosno

$$\delta\tau_{1/2} = \ln 2,$$

gdje je δ koeficijent prigušenja. U zraku vilica titra frekvencijom

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2, \qquad \delta = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}},$$

dok u sredstvu s jačim prigušenjem imamo

$$\omega'^2 = \omega_0^2 - \delta'^2, \qquad \delta' = \frac{\ln 2}{\tau'_{1/2}},$$

gdje je ω_0 vlastita frekvencija vilice. Eliminacijom ω_0 iz gornjeg sustava slijedi

$$\omega'^2 = \omega^2 - (\delta'^2 - \delta^2)$$

Razlika frekvencija je

$$\Delta\omega = \omega' - \omega = \omega\left(\sqrt{1 - \frac{\delta'^2 - \delta^2}{\omega^2}} - 1\right).$$

Uzmemo li u obzir $\delta < \delta' \ll \omega$ možemo koristiti razvoj $\sqrt{1 \pm \epsilon} \simeq 1 + \frac{1}{2}\epsilon$ te dobivamo

$$\Delta\omega \simeq -\frac{\delta'^2 - \delta^2}{2\omega} = \frac{(\ln 2)^2}{2\omega}\left(\tau_{1/2}{}^{-2} - \tau'_{1/2}{}^{-2}\right).$$

Konačno uz $\omega = 2\pi f$,

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{(\ln 2)^2}{8\pi^2 f}\left(\tau_{1/2}{}^{-2} - \tau'_{1/2}{}^{-2}\right).$$

Rješenje: $\Delta f = f' - f = (\ln 2)^2\big(\tau_{1/2}^{-2} - \tau'_{1/2}{}^{-2}\big)/8\pi^2 f \simeq -6.72 \times 10^{-7}\,\mathrm{Hz}$

7 Zadatak: Kritično prigušeni oscilator vlastite frekvencije ω_0 pokrenut je u gibanje iz ravnotežnog položaja početnom brzinom iznosa v_0. Odredi najveći otklon koji će ovaj oscilator postići. Zatim odredi najveći iznos brzine koji će oscilator postići tokom povratka iz najjače otklonjenog u ravnotežni položaj.

Postupak: Opće rješenje jednadžbe gibanja kritično prigušenog oscilatora (koeficijent prigušenja δ jednak je vlastitoj frekvenciji ω_0) ima oblik

$$x[t] = (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{-\omega_0 t},$$

gdje su c_1 i c_2 konstante. Tomu odgovara brzina

$$\dot{x}[t] = (c_2 - \omega_0(c_1 + c_2 t))\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.$$

Početni uvjet za položaj daje

$$x[0] = c_1 = 0,$$

s pomoću čega početni uvjet za brzinu daje

$$\dot{x}[0] = c_2 = v_0.$$

Konačno, otklon, brzinu i akceleraciju oscilatora pišemo kao

$$x[t] = v_0 t\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}, \qquad \dot{x}[t] = v_0(1 - \omega t)\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t}, \qquad \ddot{x}[t] = -v_0\omega_0(2 - \omega_0 t)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.$$

Najveći otklon dobivamo iz uvjeta $\dot{x}[t] = 0$ koji je ispunjen u trenutku $t = 1/\omega_0$ te

$$x_{\max} = x[1/\omega_0] = \frac{v_0}{\mathrm{e}\omega_0}.$$

Najveći iznos brzine slijedi iz uvjeta $\ddot{x}[t] = 0$ koji je ispunjen u trenutku $t = 2/\omega_0$. Možemo pisati

$$v_{\max} = |\dot{x}[2/\omega_0]| = \frac{v_0}{\mathrm{e}^2}.$$

Rješenje: $x_{\max} = v_0/\mathrm{e}\omega_0$, $v_{\max} = v_0/\mathrm{e}^2$

8 Zadatak: Mornarički top (16"/50 Mk VII) čija je masa $M = 120\,\mathrm{t}$ ispaljuje projektil mase $m_\mathrm{p} = 1\,\mathrm{t}$ brzinom iznosa $v_\mathrm{p} = 800\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Ovjes topa dopušta topu da se on po ispaljenju projektila pomakne unazad čime se ublaži djelovanje povratnog udarca na konstrukciju broda. Ovjes je podešen je tako da se top ponaša kao kritično prigušeni oscilator. Odredi vrijeme koje protječe od ispaljenja projektila do trenutka u kojem se top nalazi u najjače otklonjenom položaju ako udaljenost tog položaja od ravnotežnog položaja topa iznosi $x_\mathrm{max} = 1.5\,\mathrm{m}$. Zatim odredi najveći iznos sile kojom top nakon ispaljenja projektila djeluje na brod.

Postupak: S obzirom da je top kritično prigušeni oscilator njegovo gibanje u odnosu na brod opisujemo izrazom

$$x[t] = \mathrm{e}^{-\delta t}(x_0 + (v_0 + x_0\delta)t),$$

gdje su x_0 i v_0 početni položaj i brzina u trenutku $t = 0$. Ovdje $t = 0$ odgovara trenutku ispaljenja projektila pa imamo $x_0 = 0$, dok početnu brzinu određujemo na osnovu očuvanja količine gibanja pri ispaljenju projektila. Količina gibanja projektila $m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}$ mora po iznosu biti jednaka količini gibanja topa Mv_0, pa imamo

$$v_0 = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{M},$$

odnosno,

$$x[t] = v_0 t\mathrm{e}^{-\delta t} = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{M}\, t\mathrm{e}^{-\delta t}.$$

Funkcija $t\mathrm{e}^{-\delta t}$ ima maksimum pri $t = \delta^{-1}$ gdje je njena vrijednost $1/e\delta$, pa imamo

$$x_\mathrm{max} = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{\mathrm{e}\delta M}.$$

Iz gornjeg izraza određujemo

$$\delta = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{\mathrm{e}Mx_\mathrm{max}},$$

te za trenutak u kojem top doseže x_max dobivamo

$$t = \frac{1}{\delta} = \frac{\mathrm{e}Mx_\mathrm{max}}{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}.$$

Za zadane vrijdnosti $t \simeq 0.612\,\mathrm{s}$. Iznos sile kojom top djeluje na brod računamo na osnovu mase i akceleracije samog topa,

$$F[t] = M\ddot{x}[t] = m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}\delta\mathrm{e}^{-\delta t}(-2 + \delta t).$$

Može se pokazati da funkcija $\mathrm{e}^{-\delta t}(-2 + \delta t)$ za $t \geq 0$ ima najveću apsolutnu vrijednost upravo u trenutku $t = 0$, dakle netom nakon ispaljenja projektila (a ne pri maksimalnom otklonu topa gdje je sila povratne opruge najveća, kao niti u još kasnijem trenutku u kojem je ispunjen uvjet $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t = 0$). Slijedi

$$F_\mathrm{max} = |F[0]| = 2m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}\delta = \frac{2(m_\mathrm{p}v_\mathrm{p})^2}{\mathrm{e}Mx_\mathrm{max}}.$$

Za zadane vrijednosti $F_\mathrm{max} \simeq 2.61 \times 10^6\,\mathrm{N}$.

Rješenje: $t = \mathrm{e}Mx_\mathrm{max}/m_\mathrm{p}v_\mathrm{p} \simeq 0.612\,\mathrm{s}$, $F_\mathrm{max} = 2(m_\mathrm{p}v_\mathrm{p})^2/\mathrm{e}Mx_\mathrm{max} \simeq 2.61 \times 10^6\,\mathrm{N}$

9 Zadatak: Kuglica mase $m = 12\,\mathrm{g}$ i polumjra $r = 1\,\mathrm{cm}$ vezana je oprugom za čvrsto uporište tako da kružna frekvencija njenog neprigušenog titranja iznosi $\omega_0 = 2\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Odredi logaritamski dekrement prigušenja, frekvenciju prigušenog titranja te rezonantnu frekvenciju tog oscilatora kada je on uronjen u ulje viskoznosti $\eta = 0.4\,\mathrm{Pa\,s}$. (Silu otpora pri gibanju kuglice kroz ulje opisati Stokesovim zakonom.)

Postupak: Prema Stokesovu zakonu, jakost sile koja koči gibanje kugle polumjera r i brzine iznosa v pri njenu gibanju kroz fluid koeficijenta viskoznosti η opisana je izrazom

$$F_\eta = 6\pi\eta r v.$$

Prema tome, jednadžbu gibanja aluminijske kuglice možemo napisati kao

$$m\ddot{x} = -6\pi\eta r\dot{x} - kx,$$

gdje je k konstanta opruge. Podijelimo li gornju jednadžbu s m možemo ju napisati u poznatom obliku,

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

gdje je $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ zadana frekvencija neprigušenog titranja, dok parametar

$$\delta = 3\pi\eta r/m$$

opisuje jakost prigušenja. Za $\delta < \omega_0$, što je za vrijednosti ovdje zadanih parametara ispunjeno (dobiva se $\delta/\omega_0 = 0.5$), rješenje jednadžbe gibanja je prigušeno titranje frekvencijom

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - (3\pi\eta r/m)^2} \simeq 5.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}.$$

Logaritamski dekrement prigušenja ovdje je

$$\lambda = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega} = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = 2\pi\left(\frac{\omega_0^2}{\delta^2} - 1\right)^{-1/2} = 2\pi\left(\left(\frac{\omega_0 m}{3\pi\eta r}\right)^2 - 1\right)^{-1/2} \simeq 3.63.$$

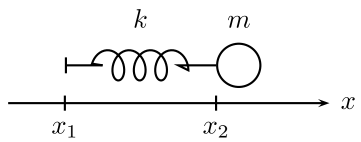
Rezonantna frekvencija dana je izrazom

$$\omega_{\mathrm{rez.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2(3\pi\eta r/m)^2} \simeq 4.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}.$$

Rješenje: $\lambda = 2\pi\big((\omega_0 m/3\pi\eta r)^2 - 1\big)^{-1/2} \simeq 3.63$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (3\pi\eta r/m)^2} \simeq 5.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $\omega_{\mathrm{rez.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2(3\pi\eta r/m)^2} \simeq 4.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

10 Zadatak: Na jednom kraju opruge konstante k pričvršćeno je tijelo mase m. Drugi kraj opruge, pod utjecajem vanjske sile, titra duž osi opruge amplitudom R i frekvencijom ω_p. Odredi amplitudu titranja mase m te najveći iznos produljenja opruge do kojeg dolazi tokom gibanja ovog sustava.

Postupak: Neka je x_1 položaj kraja opruge koji titra amplitudom R i frekvencijom ω_p, a x_2 neka je položaj suprotnog kraja na kojem je pričvršćena masa m.



Jednadžbu gibanja mase m možemo napisati kao

$$m\ddot{x}_2 = -k\,\Delta\ell = -k(\ell - \ell_0) = -k(x_2 - x_1 - \ell_0),$$

gdje je $\Delta\ell$ produljenje opruge, ℓ je njena trenutna duljina, a konstanta ℓ_0 je ravnotežna duljina opruge. Titranje x_1 možemo opisati izrazom

$$x_1[t] = R\cos[\omega_\mathrm{p} t].$$

Nadalje, s obzirom da ravnotežnu duljinu opruge ℓ_0 možemo odabrati po volji, zbog jednostavnosti uzimamo $\ell_0 = 0$. Dijeleći jednadžbu gibanja s m možemo ju napisati u obliku

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = R\omega_0^2 \cos[\omega_\mathrm{p} t],$$

gdje je

$$\omega_0^2 = k/m, \qquad f_\mathrm{p} = kR/m = R\omega_0^2.$$

Prepoznajemo da se radi o neprigušenom oscilatoru vlastite frekvencije ω_0, ali s vanjskom silom. Općenit izraz za amplitudu prisilnog titranja,

$$A = \frac{f_\mathrm{p}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_\mathrm{p}^2)^2 + (2\delta\omega_\mathrm{p})^2}},$$

uz $\delta = 0$ jer nema prigušenja te uz gornji izraz za f_p poprima oblik

$$A = \frac{f_\mathrm{p}}{|\omega_0^2 - \omega_\mathrm{p}^2|} = \frac{R\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \omega_\mathrm{p}^2|} = \frac{R}{\left|1 - (\omega_\mathrm{p}/\omega_0)^2\right|}.$$

Najveće produljenje opruge može se odrediti iz najvećeg iznosa akceleracije mase m koji pri harmoničkom titranju amplitudom A i frekvencijom ω_p iznosi

$$a_\mathrm{max} = \omega_\mathrm{p}^2 A.$$

Najveće produljenje je

$$(\Delta\ell)_\mathrm{max} = \frac{F_\mathrm{max}}{k} = \frac{m a_\mathrm{max}}{k} = \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega_0^2} A = \frac{R}{\left|1 - (\omega_0/\omega_\mathrm{p})^2\right|}.$$

Rješenje: $\omega_0^2 = k/m$, $A = R/|1 - (\omega_\mathrm{p}/\omega_0)^2|$, $(\Delta\ell)_\mathrm{max} = R/|1 - (\omega_0/\omega_\mathrm{p})^2|$

11 Zadatak: Kada na prigušeni oscilator djeluje vanjska harmonička sila amplitude F_p i frekvencije jednake rezonantnoj frekvenciji oscilatora, on titra amplitudom $A_\mathrm{rez.}$. Kada na isti oscilator djeluje vanjska sila nepromijenjene amplitude F_p, ali frekvencije koja je znatno niža od rezonantne frekvencije (teži u nulu), oscilator titra amplitudom A_0. Izrazi logaritamski dekrement prigušenja oscilatora s pomoću omjera $q = A_\mathrm{rez.}/A_0$.

Postupak: Logaritamski dekrement prigušenja oscilatora opisanog s ω_0 i δ definiran je s $\lambda = \delta T$, gdje je $T = 2\pi/\omega$ period prigušenog titranja (bez vanjske sile), a $\omega = \omega_0\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}$ je frekvencija. Možemo pisati

$$\lambda = 2\pi\frac{\delta/\omega_0}{\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}}.$$

Amplituda prisilnog titranja tog oscilatora uz vanjsku silu amplitude F_p i frekvencije ω_p dana je izrazom

$$A[\omega_\mathrm{p}] = \frac{F_\mathrm{p}/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_\mathrm{p}^2)^2+(2\delta\omega_\mathrm{p})^2}}.$$

U rezonanciji gdje je $\omega_\mathrm{p} = \omega_\mathrm{rez.} = \omega_0\sqrt{1-2(\delta/\omega_0)^2}$, te kada $\omega_\mathrm{p}\to 0$, imamo

$$A_\mathrm{rez.} = A[\omega_\mathrm{rez.}] = \frac{F_\mathrm{p}/m}{2\delta\omega_0\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}}, \qquad \text{i} \qquad A_0 = A[0] = \frac{F_\mathrm{p}/m}{\omega_0^2}.$$

Slijedi

$$q = \frac{A_\mathrm{rez.}}{A_0} = \frac{1}{2(\delta/\omega_0)\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}}.$$

Iz gornjeg izraza računamo omjer δ/ω_0,

$$\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{1}{q^2}}\right).$$

Odabiremo rješenje s negativnim predznakom ispred korijena jer za $(\delta/\omega_0)^2 > 1/2$ pojava rezonancije ne postoji te računamo logaritamski dekrement prigušenja,

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-q^{-2}}}{1+\sqrt{1-q^{-2}}}}.$$

Rješenje: $\lambda = 2\pi\sqrt{\left(1-\sqrt{1-q^{-2}}\right)/\left(1+\sqrt{1-q^{-2}}\right)}$

12 Zadatak: Ovjes (opruge i amortizeri) automobilske prikolice mase $m = 200\,\mathrm{kg}$ podešen je tako da se ona, kad nije opterećena, ponaša kao kritično prigušeni oscilator. Odredi rezonantnu frekvenciju prikolice opterećene teretom mase $M = 400\,\mathrm{kg}$ ako je opaženo da se ona pod tim opterećenjem spusti za $H = 10\,\mathrm{cm}$. (Prikolicu s teretom shvaćamo kao masu $m + M$ oslonjenu na oprugu s prigušenjem. Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Rezonantna frekvencija oscilatora dana je poznatim izrazom

$$\omega_{\mathrm{rez.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

gdje je ω_0 vlastita frekvencija oscilatora, a δ je parametar koji opisuje prigušenje. S obzirom da prikolicu s teretom shvaćamo kao masu $m + M$ oslonjenu na oprugu konstante k s trenjem b, vlastita frekvencija je

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m+M}},$$

a koeficijent prigušenja je

$$\delta = \frac{b}{2(M+m)}.$$

Na osnovu podatka da se neopterećena prilkolica ponaša kao kritično prigušeni oscilator, što znači da je za $M = 0$ vrijedi $\omega_0 = \delta$, ovdje imamo

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{b}{2m}.$$

Nadalje, na osnovu opažanja da se pod teretom težine Mg prikolica spusti (sabije oprugu) za visinu H, slijedi jenakost sila $kH = Mg$, odnosno

$$k = Mg/H.$$

Konačno, rezonantnu frekvenciju s pomoću gornjih izraza možemo napisati kao

$$\omega_{\mathrm{rez.}}^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 = \frac{k}{m+M} - 2\left(\frac{b}{2(M+m)}\right)^2 = \frac{k}{m+M} - \frac{2km}{(M+m)^2} = \frac{k(M-m)}{(M+m)^2} = \frac{M(M-m)}{(M+m)^2}\,\frac{g}{H},$$

odnosno

$$\omega_{\mathrm{rez.}} = \frac{M}{M+m}\sqrt{\frac{g}{H}\left(1-\frac{m}{M}\right)}.$$

(Zanimljivo je uočiti da se kod ovako podešenog ovjesa pojava rezonancije pojavljuje tek za $M \geq m$, jer u protivnom je izraz pod korijenom negativan.) Za zadane vrijednosti parametara m, M i H dobije se $\omega_{\mathrm{rez.}} \simeq 4.67\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Rješenje: $\omega_{\mathrm{rez.}} = (M/(M+m))\sqrt{(g/H)(1-m/M)} \simeq 4.67\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

13 Zadatak: Automobil se kreće po neravninama koje možemo opisati visinom $y[x] = H\cos[2\pi x/\lambda]$, gdje je x vodoravna koordinata položaja, $H = 2\,\mathrm{cm}$ je "amplituda", a λ je "valna duljina" neravnina. Ovjes automobila ima $q = 5$ puta slabije prigušenje od onog koji bi odgovarao kritičnom prigušenju. Odredi amplitudu titranja automobila duž uspravne osi kada se on kreće brzinom pri kojoj dolazi do rezonancije. (Automobil shvaćamo kao masu oslonjenu na oprugu s prigušenjem. Prijelazne pojave ne razmatramo.)

Postupak: Automobil shvaćamo kao oscilator koji se sastoji od mase m oslonjene na oprugu konstante k uz koeficijent trenja b, čemu odgovaraja vlastita frekvencija

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

i koeficijent gušenja $\delta = b/2m$. Pri kritičnom prigušenju vrijedi $\delta = \omega_0$, pa s obzirom da je ovdje prigušenje q puta slabije od kritičnog, imamo

$$\delta = \frac{\omega_0}{q}.$$

Pri gibanju automobila donji kraj opruge titra s amplitudom H, a to znači da amplitudu vanjske sile koja na njega djeluje možemo napisati kao

$$F_{\mathrm{p}} = kH = m\omega_0^2 H.$$

Amplituda titranja u rezonanciji dana je poznatim izrazom

$$A_{\mathrm{rez.}} = \frac{F_{\mathrm{p}}/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Uvrštavanjem gornjih izraza za F_{p} i δ slijedi

$$A_{\mathrm{rez.}} = \frac{Hq^2}{2\sqrt{q^2 - 1}}.$$

Rješenje: $A_{\mathrm{r}} = (H/2)\left(q^2/\sqrt{q^2-1}\right) \simeq 5.103\,\mathrm{cm}$