Fizika 2: Zadaci za vježbu 6/7 (valna optika)

1 Zadatak: Bijela svjetlost pada okomito na tanku opnu od sapunice ineksa loma $n = 4/3$. Odredi najmanju debljinu opne pri kojoj istovremeno dolazi do najslabije moguće refleksije plave svjetlosti (valna duljina u vakuumu $\lambda_\mathrm{B} = 480\,\mathrm{nm}$) i do najjače moguće refleksije crvene svjetlosti ($\lambda_\mathrm{R} = 640\,\mathrm{nm}$).

Postupak: Razlika u fazi svjetlosti valne duljine λ reflektirane na prednjoj i one reflektirane na stražnjoj strani opne debljine d i indeksa loma n je

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = 2\pi\,\frac{2nd}{\lambda} + \pi,$$

gdje je $\Delta s = s_2 - s_1 = 2nd$ razlika u duljini optičkih putova koje prevaljuju dvije zrake, dok je član π je prisutan zbog toga što se jedna od dvije zrake reflektira od optički gušćeg sredstva. Uvjet destruktivne interferencije za plavu svjetlost glasi

$$\Delta\phi_\mathrm{B} = 2\pi\,\frac{2nd}{\lambda_\mathrm{B}} + \pi = (2k+1)\pi, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

iz čega slijedi

$$d = \frac{\lambda_\mathrm{B}}{2n}k = 180\,\mathrm{nm}, 360\,\mathrm{nm}, 540\,\mathrm{nm}, 720\,\mathrm{nm}, \ldots$$

Uvjet konstruktivne interferencije za crvenu svjetlost glasi

$$\Delta\phi_\mathrm{R} = 2\pi\,\frac{2nd}{\lambda_\mathrm{R}} + \pi = 2k'\pi, \qquad k' = 1, 2, \ldots$$

što daje

$$d = \frac{\lambda_\mathrm{R}}{4n}\,(2k'-1) = 120\,\mathrm{nm}, 360\,\mathrm{nm}, 600\,\mathrm{nm}, \ldots$$

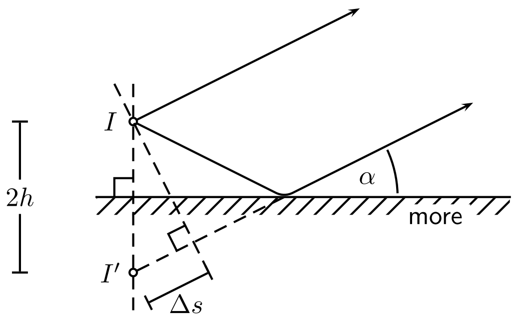
Usporedbom dobivenih vrijednosti pronalazimo da je najmanja debljina opne koja zadovoljava oba uvjeta

$$d_\mathrm{min} = 360\,\mathrm{nm}.$$

Rješenje: $d_\mathrm{min} = 360\,\mathrm{nm}$

2 Zadatak: Odašiljač radio-valova valne duljine $\lambda = 10\,\mathrm{m}$ nalazi se na visini $h = 8\,\mathrm{m}$ iznad mirne površine mora. Uzimajući u obzir da površina mora reflektira radio-valove, odredi kuteve u odnosu nju pod kojima se, s velike udaljenosti, opaža maksimume i minimume jakosti radio-signala.

Postupak: Razlika u fazi vala koji do prijamnika na udaljenosti $r \gg h$ stiže izravno od odašiljača i vala koja do njega stiže nakon refleksije na površini mora prisutna je zbog razlike u duljini optičkih putova dvaju valova te zbog pomaka u fazi π (polovica punog ciklusa titranja) koja nastupa pri refleksiji vala na granici s optički gušćim sredstvom.



Kao što prikazuje gornja skica, val koji se reflektira na površini mora možemo shvatiti kao da potječe od zrcalne slike izvora koja se nalazi na dubini h ispod površine mora. Tada je lako vidjeti da je razlika duljine optičkih putova dvaju valova

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 2h \sin\alpha,$$

gdje je α kut elevacije prijamnika. Tome odgovara razlika u fazi

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = \frac{4\pi h \sin\alpha}{\lambda} + \pi,$$

gdje je uključen član π zbog refleksije na optički gušćem sredstvu. Uvjet konstruktivne interferencije, odn. maksimuma u intenzitetu zračenja, dvaju valova s razlikom faza $\Delta\phi$ glasi

$$\Delta\phi = 2m\pi, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

što ovdje daje

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{\lambda}{4h}(2m-1).$$

S obzirom na to da za zadane vrijednosti h i λ imamo $\lambda/4h = 5/16$ te da nas zanimaju samo pozitivni kutevi, u obzir dolaze samo vrijednosti $m = 1, 2$, za koje dobivamo

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{5}{16}, \frac{15}{16},$$

odnosno $\alpha_{\max} \simeq 18.21^\circ, 69.64^\circ$. Uvjet destruktivne interferencije, odn. minimuma u intenzitetu zračenja, dvaju valova s razlikom faza $\Delta\phi$ glasi

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

što ovdje daje

$$\sin\alpha_{\min} = \frac{\lambda}{2h}m.$$

U obzir dolaze vrijednosti $m = 0, 1$, za koje imamo

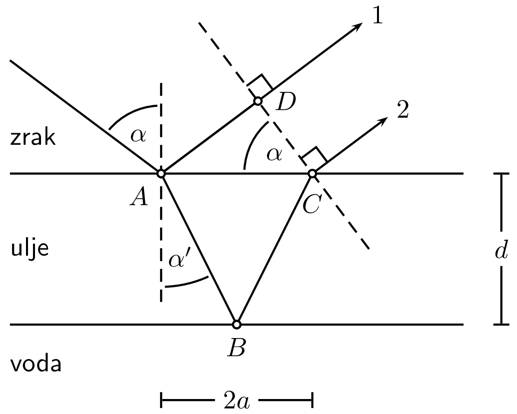
$$\sin\alpha_{\min} = 0, \frac{5}{8},$$

odnosno $\alpha_{\min} \simeq 0^\circ, 38.68^\circ$.

Rješenje: Maksimumi: $\sin\alpha_{\max} = (\lambda/4h)(2m-1)$, $m = 1, 2$, $\alpha_{\max} \simeq 18.21^\circ, 69.64^\circ$, minimumi: $\sin\alpha_{\min} = (\lambda/2h)m$, $m = 0, 1$, $\alpha_{\min} \simeq 0^\circ, 38.68^\circ$.

3 Zadatak: Na vodi pluta sloj ulja debljine d i indeksa loma n koji je veći od indeksa loma vode. Odredi razliku u fazi između svjetlosti valne duljine λ reflektirane na graničnoj plohi zrak–ulje i one reflektirane na graničnoj plohi ulje–voda, ako svjetlost upada iz zraka pod kutom α. (Indeks loma zraka jednak je jedinici.)

Postupak: Opisanu situaciju prikazujemo skicom:



Upadna svjetlost reflektira se od granične plohe zrak–ulje (na skici zraka 1) i od granične plohe ulje–voda (zraka 2). Razlika u fazi posljedica je razlike u duljini optičkih putova dviju zraka, $\Delta s = s_2 - s_1$, te pomaka u fazi π (polovica ciklusa) koji nastupa pri refleksiji svjetlosti na granici s optički gušćim sredstvom. To je ovdje samo granica zrak–ulje pa se takav pomak pojavljuje samo za zraku 1. Razliku u duljini optičkih putova razmatramo između točke A u kojoj se upadna zraka razdvaja na zrake 1 i 2, te točaka C i D u kojima zrake 1 i 2 presijecaju ravninu okomitu na njih (desna iscrtkana linija na skici). Možemo pisati

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = 2\pi\frac{s_2 - s_1}{\lambda} + \pi, \qquad s_1 = |AD|, \qquad s_2 = n(|AB| + |BC|).$$

Uvodimo duljinu $2a = |AC|$ (vidi skicu) te iz geometrije prepoznajemo

$$\frac{a}{d} = \tan\alpha' = \frac{\sin\alpha'}{\sqrt{1-\sin^2\alpha'}},$$

Koristeći zakon loma prema kojemu je $n\sin\alpha' = \sin\alpha$ gornji omjer pišemo u obliku

$$\frac{a}{d} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}.$$

Optički put zrake 1 sada možemo napisati kao

$$s_1 = |AD| = |AC|\sin\alpha = 2a\sin\alpha = \frac{2d\sin^2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}},$$

dok je optički put zrake 2

$$s_2 = n(|AB| + |BC|) = 2n|AB| = 2n\sqrt{d^2+a^2} = 2nd\sqrt{1+\left(\frac{a}{d}\right)^2} = \frac{2n^2 d}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}.$$

Konačno, razlika optičkih puteva je

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 2d\sqrt{n^2-\sin^2\alpha},$$

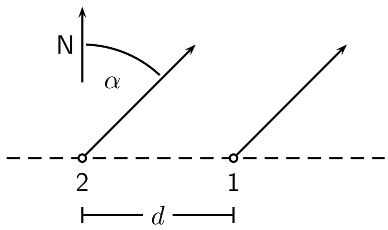
a razlika u fazi uključujući i pomak π zbog refleksije zrake 1 na optički gušćem sredstvu je

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = \frac{4\pi d}{\lambda}\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} + \pi.$$

Rješenje: $\Delta\phi = (4\pi d/\lambda)\sqrt{n^2-\sin^2\alpha} + \pi$

4 Zadatak: Dva odašiljača radio valova valne duljine $\lambda = 100\,\mathrm{m}$ leže na pravcu istok–zapad na razmaku $d = 200\,\mathrm{m}$. Odredi fazni pomak među odašiljačima s pomoću kojega se maksimum intenziteta odašilje u smjeru sjeveroistoka.

Postupak: Odašiljače prikazujemo skicom:



Električno polje istočnog odašiljača koje prijamnik opaža u nekoj točki možemo napisati kao

$$E_1[t] = E_{10} \cos\left[\omega t + \phi_1 - 2\pi \frac{s_1}{\lambda}\right] = E_0 \cos[\omega t - \psi_1],$$

gdje je E_{10} amplituda titranja polja (razmjerna snazi odašiljača te ovisna o udaljenosti odašiljača od prijamnika), ϕ_1 je faza odašiljača, s_1 je duljina optičkog puta (udaljenost) između odašiljača i prijamnika, a

$$\psi_1 = \phi_1 - 2\pi s_1/\lambda$$

je faza s kojom prijamnik prima val. Na istovjetan način možemo napisati i polje zapadnog odašiljača,

$$E_2[t] = E_{20} \cos[\omega t - \psi_2], \qquad \psi_2 = \phi_2 - 2\pi s_2/\lambda.$$

Razliku u fazi tih valova možemo napisati kao

$$\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1 = \Delta\phi - 2\pi \frac{\Delta s}{\lambda},$$

gdje je $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ fazni pomak među odašiljačima, a $\Delta s = s_2 - s_1$ je razlika duljine optičkih puteva za dani položaj prijamnika. Ako se prijamnik nalazi na velikoj udaljenosti pod azimutom α, iz geometrije slijedi (vidi skicu)

$$\Delta s = s_2 - s_1 = d \sin\alpha.$$

Nadalje, ako se on nalazi u smjeru sjeveroistoka imamo $\alpha = \pi/4$, što daje

$$\Delta s = d \sin\frac{\pi}{4} = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Razlika u fazi sada je

$$\Delta\psi = \Delta\phi - \frac{d\pi\sqrt{2}}{\lambda}.$$

Kako bismo postigli konstruktivnu interferenciju zahtijevamo

$$\Delta\psi = 2m\pi, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots.$$

S obzirom da za zadane vrijednosti λ i d imamo $d/\lambda = 2$, gornji uvjet glasi $\Delta\phi = 2\pi(m + \sqrt{2})$, Uočavamo da se vrijednost faznog pomaka $\Delta\phi$ koja se nalazi unutar intervala $[-\pi, \pi]$ dobiva se uz $m = -1$ i ona je

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = 2\pi(\sqrt{2} - 1).$$

Ta je vrijednost pozitivna te zaključujemo da zapadni odašiljač mora prethoditi $\sqrt{2} - 1 \simeq 0.41$ punog ciklusa u odnosu na istočni odašiljač.

Rješenje: Zapadni odašiljač prethodi s $\Delta\phi = 2\pi(\sqrt{2} - 1)$

5 Zadatak: Tri koherentna izvora zračenja valne duljine λ leže na pravcu. Odredi namanji razmak d među susjednim izvorima kojime se postiže iščezavanje zračenja u točkama koje leže na istom pravcu kao i izvori na velikoj udaljenosti od izvora. (Podrazumijeva se da su izvori jednake jakosti te da titraju u fazi.)

Postupak: Neka izvori leže na x-osi pri koordinatama $x = 0, \pm d$. Na udaljenosti od izvora znatno većoj od d možemo smatrati da sva tri izvora doprinose poljima koja titraju jednakim amplitudama te ukupno električno polje u točkama na samoj x-osi možemo napisati kao

$$E[x,t] = E_0 \cos[\omega t - k(x+d)] + E_0 \cos[\omega t - kx] + E_0 \cos[\omega t - k(x-d)],$$

gdje je

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Koristeći kompleksni zapis imamo

$$\begin{aligned} E[x,t] &= E_0 \,\mathrm{Re}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k(x+d))} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k(x-d))}\big] \\ &= E_0 \,\mathrm{Re}\big[\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kd} + 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kd}\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\big] \\ &= E_0 \,\mathrm{Re}\big[\big(1 + 2\cos[kd]\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\big] \\ &= E_0 \,\big(1 + 2\cos[kd]\big)\cos[\omega t - kx], \end{aligned}$$

gdje prepoznajemo titranje amplitudom $E_0(1 + 2\cos[kd])$ koja iščezava ako vrijedi

$$\cos[kd] = -\frac{1}{2}.$$

Najmanja vrijednost d koja zadovoljava gornji uvjet je

$$d_{\min} = \frac{1}{k} \arccos\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{2\pi}{3} = \frac{\lambda}{3}.$$

Isti rezultat se može dobiti i korištenjem poznatog izraza za intenzitet zračenja rešetke s N koherentnih izvora na međusobnom razmaku d,

$$I[\alpha] = I_0 \frac{\sin^2\left[N\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]}.$$

Ovdje je $N = 3$, a za točke na pravcu na kojem leže izvori stavljamo $\alpha = \pi/2$. Zahtijev da zračenje u tim točkama iščezne vodi na

$$\sin\left[\frac{\pi d}{\lambda}\right] \neq 0, \qquad \sin\left[3\frac{\pi d}{\lambda}\right] = 0,$$

odnosno

$$3\frac{\pi d}{\lambda} = \pi, 2\pi, \ldots$$

Najmanji d koji zadovoljava gornji uvjet je $d_{\min} = \lambda/3$.

Rješenje: $d_{\min} = \lambda/3$

6 Zadatak: Kontinuirani spektar zračenja s valnim duljinama u području od $\lambda_\mathrm{B} = 420\,\mathrm{nm}$ do $\lambda_\mathrm{R} = 680\,\mathrm{nm}$ (bijela svjetlost) pada okomito na optičku rešetku s razmakom $d = 5\,\mu\mathrm{m}$ među pukotinama. Odredi kutnu širinu razmaka (tamnog područja) između kraja prvog i početka drugog spektra u kutnoj raspodjeli zračenja rešetke. Zatim odredi valnu duljinu drugog spektra pri kojoj nastupa preklop s početkom trećeg spektra.

Postupak: Kutna raspodjela intenziteta svjetlosti valne duljine λ pri difrakciji na rešetki s razmakom među pukotinama d opisana je poznatim izrazom

$$I[\alpha] = I_0 \frac{\sin^2\left[N\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]},$$

a njeni se glavni maksimumi, $I_\mathrm{max} = N^2 I_0$, nalaze pri

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}m, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots,$$

gdje $m = 0$ odgovara središnjem ili nultom maksimumu, $m = \pm 1$ odgovara prvom maksimumu itd. S obzirom da ovdje imamo kontinuirani spektar, prvi se maksimum ($m = 1$), odn. spektar prvog reda, proteže u području kuta α

$$\text{od} \quad \sin\alpha_{1B} = \frac{\lambda_\mathrm{B}}{d} \quad \text{do} \quad \sin\alpha_{1R} = \frac{\lambda_\mathrm{R}}{d},$$

Drugi maksimum ($m = 2$), odn. spektar u drugog reda, proteže u području kuta α

$$\text{od} \quad \sin\alpha_{2B} = \frac{2\lambda_\mathrm{B}}{d} \quad \text{do} \quad \sin\alpha_{2R} = \frac{2\lambda_\mathrm{R}}{d}.$$

S obzirom da za zadane granične valne duljine λ_B i λ_R vrijedi $2\lambda_\mathrm{B} > \lambda_\mathrm{R}$, slijedi $\alpha_{2B} > \alpha_{1R}$ te zaključujemo da zaista postoji razmak (tamno područje) između kraja spektra prvog i početka spektra drugog reda. Kutna širina tog razmaka je

$$\Delta\alpha = \alpha_{2B} - \alpha_{1R} = \arcsin\left[\frac{2\lambda_\mathrm{B}}{d}\right] - \arcsin\left[\frac{\lambda_\mathrm{R}}{d}\right],$$

što za zadane vrijednosti $\lambda_\mathrm{B,R}$ i d daje $\Delta\alpha \simeq 1.85°$. Treći maksimum ($m = 3$), odn. spektar trećeg reda, u kutnoj raspodjeli počinje pri

$$\sin\alpha_{3B} = \frac{3\lambda_\mathrm{B}}{d}.$$

S obzirom da za zadane valne duljine $\lambda_\mathrm{B,R}$ vrijedi $3\lambda_\mathrm{B} < 2\lambda_\mathrm{R}$, slijedi $\alpha_{3B} < \alpha_{2R}$, što potvrđuje da se početak trećeg spektra nalazi unutar spektra drugog reda. Valna duljina λ spektra drugog reda kojoj odgovara isti kut otklona kao i početku spektra trećeg reda slijedi iz uvjeta

$$\sin\alpha = \frac{2\lambda}{d} = \frac{3\lambda_\mathrm{B}}{d},$$

što daje

$$\lambda = \frac{3}{2}\lambda_\mathrm{B}.$$

Za zadane vrijednosti $\lambda = 630\,\mathrm{nm}$.

Rješenje: $\Delta\alpha = \arcsin[2\lambda_\mathrm{B}/d] - \arcsin[\lambda_\mathrm{R}/d] \simeq 1.85°$, $\lambda = 3\lambda_\mathrm{B}/2 = 630\,\mathrm{nm}$

7 Zadatak: Monokromatska svjetlost upada okomito na optičku rešetku koja se sastoji od niza pukotina širine a raspoređenih tako da je razmak među središtima susjednih pukotina d. Na zastoru promatramo svijetle i tamne pruge. Na mjestu gdje bismo očekivali treći po redu interferencijski maksimum pojavljuje se prvi po redu difrakcijski minimum. Odredi omjer širine pukotina a i razmaka među njihovim središtima d.

Postupak: Kutna raspodjela intenziteta zračenja pri interferenciji N točkastih koherentnih izvora valne duljine λ na međusobnom razmaku d opisana je poznatim izrazom

$$I[\alpha] = I_0 \frac{\sin^2\left[N\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]},$$

gdje glavne interferencijske maksimume iznosa $I_{\max} = N^2 I_0$ očekujemo pri kutu α za koji vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}m, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Kut koji odgovara trećem po redu glavnom interferencijskom maksimumu dan je s

$$\sin\alpha_3 = \frac{3\lambda}{d}.$$

Svaki od koherentnih izvora ovdje je pukotina širine a te osim same interferencije izvora uzimamo u obzir i difrakciju. Kutna raspodjela intenziteta zračenja pri difrakciji svjetlosti valne duljine λ na pukotini širine a opisan je izrazom

$$I[\alpha'] = I_0 \frac{\sin^2\left[\frac{\pi a}{\lambda}\sin\alpha'\right]}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\alpha'\right)^2}.$$

Minimume očekujemo pri kutu α' koji zadovoljava

$$\sin\alpha' = \frac{\lambda}{a}m' \qquad m' = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Za prvi difrakcijski minimum uzimamo $m = 1$, odnosno

$$\sin\alpha'_1 = \frac{\lambda}{a}.$$

Uvjet zadatka glasi

$$\alpha_3 = \alpha'_1,$$

odnosno, napišemo li $\sin\alpha_3 = \sin\alpha'_1$, slijedi

$$\frac{3\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a},$$

na osnovu čega je traženi omjer

$$\frac{a}{d} = \frac{1}{3}.$$

Rješenje: $a/d = 1/3$

8 Zadatak: Snop prirodne svjetlosti intenziteta I_0 upada na niz od tri polarizatora. Propusni smjer trećeg i propusni smjer prvog polarizatora zatvaraju kut θ_{31} dok se kut θ_{21} što ga zatvara propusni smjer drugog polarizatora s propusnim smjerom prvog polarizatora može podešavati. Odredi kut θ_{21} kojime se postiže najveći intenzitet snopa nakon njegova prolaska trećim polarizatorom te iznos najvećeg intenziteta.

Postupak: Intenzitet snopa nakon prolaska prvim polarizatorom jednak je jednoj polovini uparnog intenziteta,

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0,$$

jer polarizator apsorbira jedan od dvaju ravnomjerno zastupljenih smjerova polarizacije prirodne svjetlosti. Daljnji pad intenziteta nakon prolaska snopa drugim i trećim polarizatorom slijedi primjenom Malusova zakona,

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta_{21}, \qquad I_3 = I_2 \cos^2 \theta_{32},$$

gdje je θ_{21} traženi kut između drugog i prvog polarizatora, a θ_{32} je kut između trećeg i drugog polarizatora. Koristeći

$$\theta_{21} + \theta_{32} = \theta_{31}$$

možemo napisati

$$I_3 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta_{21} \cos^2 \theta_{32} = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta_{21} \cos^2 [\theta_{31} - \theta_{21}].$$

Kut θ_{21} s kojim se ostvaruje maksimum intenziteta I_3 pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}I_3}{\mathrm{d}\theta_{21}} = -2(\tan \theta_{21} - \tan[\theta_{31} - \theta_{21}]) I_3$$

koji je ispunjen kada je

$$\tan \theta_{21} = \tan[\theta_{31} - \theta_{21}],$$

odnosno za

$$\theta_{21} = \theta_{31}/2.$$

Maksimalni intenzitet je

$$(I_3)_{\max} = \frac{1}{2} I_0 \cos^4 [\theta_{31}/2].$$

Rješenje: $\theta_{21} = \theta_{31}/2$, $I_{\max} = I_0 \cos^4[\theta_{31}/2]/2$