

Slika 1.19.

Stazu materijalne točke – Lissajousovu krivulju za $A = 2$ cm, u grafičkom prikazu (vidi sliku) prepoznamo kao Bernoullievu lemniskatu unutar intervala $-2 \text{ cm} \leq x \leq 2 \text{ cm}$ i $-2 \text{ cm} \leq y \leq 2 \text{ cm}$.

1.3. Zadaci

- ✓ 1.1. Obješena čelična žica duga 4 m, čiji je promjer 2 mm, na donjem je kraju opterećena utegom mase 20 kg. Youngov modul elastičnosti za čelik je 196 GN/m^2 . Koliko je produljenje žice?

Rezultat: $\Delta l = 1,27 \text{ mm}$

- ✓ 1.2. Kolika je sila potrebna da za 1 mm rastegne bakrenu žicu dugu 2 m, čiji je promjer 1 mm? Youngov modul elastičnosti za bakar iznosi $117,6 \text{ GN/m}^2$.

✓ 6,18 Rezultat: $F = 117,6 \text{ N}$

- ✓ 1.3. Kolika će biti relativna promjena volumena komada bakra koji je u eksplozionalnoj komori izložen tlaku 345 MPa? Volumni modul elastičnosti za bakar iznosi 138 GPa.

Rezultat: $\Delta V/V = -2,5 \cdot 10^{-3}$ ili 0,25%

- ✓ 1.4. Do koje dubine možemo vertikalno spustiti u more olovni kabel prije nego što dođe do njegovog pucanja zbog vlastite težine. Gustoća olova je $11\,400 \text{ kg/m}^3$, gustoća morske vode $1\,040 \text{ kg/m}^3$, a naprezanje pri kojem dolazi do pucanja kabla iznosi $2 \cdot 10^7 \text{ Pa}$.

Rezultat: $h = 196,8 \text{ m}$

- ✓ 1.5. Električni motor pokreće pumpu pomoću željezne osovine duge 20 cm, čiji je promjer 2 cm. Motor, pri kutnoj brzini osovine 200 rad/s daje osovini snagu 14,92 kW. Koliki je kut torzije osovine ako je modul torzije željeza $8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$?

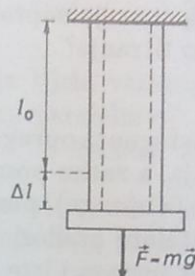
Rezultat: $\varphi = 0,68^\circ$

- 1.6. Izračunajte relativnu deformaciju gumene vrpce zbog tlačnog napreznja. Polumjer kružnog presjeka vrpce iznosi $r = 0,005 \text{ m}$. Sila koja djeluje iznosi 9,8 N. Youngov modul elastičnosti za gumu je $E = 4,4 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

Rezultat: $\frac{\Delta l}{l} = -0,028$

1.7. Gumeno crijevo dugo $l_0 = 60,5$ cm učvršćeno je na gornjem kraju, a donji kraj opterećen je utezima (sl. 1.20) tako da zbog vlačnog naprezanja dolazi do deformacije dužine. Vanjski polumjer cijevi je $r_v = 6 \cdot 10^{-3}$ m, a unutarnji $r_u = 4,5 \cdot 10^{-3}$ m. Rezultati mjerenja prikazani su u tablici. Odredite Youngov modul elastičnosti.

m/kg	l/cm	$\Delta l/\text{cm}$
0	60,5	
1	64,0	3,5
2	67,6	7,1
3	71,1	10,6



Slika 1.20.

Rezultat: srednja vrijednost, $\bar{E} = 3,4 \cdot 10^6$ Pa

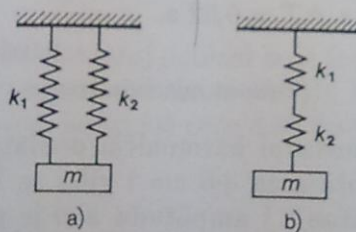
1.8. Pravokutna platforma je obješena na 4 žice koje su pričvršćene na uglovima. Promjer svake žice je 2 mm, a duljina 3 m. Youngov modul elastičnosti materijala od kojeg je žica napravljena jest $E = 180\,000$ MPa. Za koliko će se milimetara platforma spustiti zbog produženja žica ako se teret mase 50 kg stavi na sredinu platforme?

Rezultat: $\Delta l = 0,65$ mm

1.9. Na čeličnu žicu čiji je promjer 2 mm i duljine 1 m obješen je teret mase 60 kg. Ako je produljenje žice 0,94 cm, koliki je Youngov modul elastičnosti?

Rezultat: $E = 20$ GPa

1.10. Izračunajte kružnu frekvenciju titrajnih sustava na slikama 1.21.a) i b) ako su $m = 5$ kg, $k_1 = 105$ N/m i $k_2 = 95$ N/m.



Slika 1.21.

Rezultat: a) $\omega = 6,3$ s⁻¹, b) $\omega = 3,2$ s⁻¹

1.11. Klip motora automobila ima hod 55,5 mm i masu 360 g. Uz pretpostavku da gibanje klipa u cilindru motora možemo aproksimirati jednostavnim harmoničkim titranjem, kolika je maksimalna brzina i akceleracija

klipa pri vrtnji motora s 3 000 okretaja u minuti? Kolika je pritom maksimalna sila na klip?

Rezultat: $v_m = 8,7 \text{ ms}^{-1}$, $a_m = 2,74 \text{ km s}^{-2}$, $F_m = 986 \text{ N}$

1.12. Tijelo mase m obješeno o spiralnu oprugu uzrokuje produljenje opruge 4 cm. Koliko titraja napravi to tijelo u 1 min kada ga se pobudi na vertikalno harmoničko titranje?

Rezultat: $n = 150$ titraja

1.13. Nerastegnuta opruga duljine L pričvršćena je u horizontalnom položaju na oba kraja, a zatim prerezana na $\frac{1}{4} L$. Na tom je mjestu pričvršćeno tijelo (za oba kraja opruge), pomaknuto iz položaja ravnoteže i ostavljeno da titra po horizontalnoj podlozi bez trenja. Potrebno je izračunati omjer perioda titranja tog sustava i iste (neprerezane) opruge opterećene istim tijelom, ali u vertikalnom smjeru.

Rezultat: $T : T_v = 0,433$

1.14. Jedna opruga opterećena utegom produlji se 4 cm, a druga, opterećena istim utegom, produlji se 5 cm. Koliki je period titranja serijski spojenih opruga opterećenih istim utegom?

Rezultat: $T = 0,602 \text{ s}$

1.15. Utteg mase srednje vrijednosti 8,000 kg obješen je na donjem kraju elastične opruge. Mjerenjem pomoću zaporne ure određeno je da 10 uzastopnih titraja traju 10,41 s (srednja vrijednost). Odredite konstantu k opruge i relativnu i apsolutnu pogrešku mjerenja. Dokažite da za relativnu pogrešku vrijedi izraz:

$$\left(\frac{\Delta k}{k}\right)^2 = \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta T}{T}\right)^2,$$

gdje je m masa utega, a T period. U mjerenju maksimalna apsolutna pogreška $\Delta m = 0,001 \text{ kg}$, a $\Delta T = 0,02 \text{ s}$.

Rezultat: $k = (291 \pm 11) \text{ kg s}^{-2}$

(Točnost mjerenja vremena bitno utječe na pogrešku.)

1.16. U času $t = 0$ jednostavni harmonički oscilator udaljen je na osi x od svog ravnotežnog položaja za +6 cm i giba se brzinom $v_x = 5 \pi \text{ cm/s}$. Odredite početnu fazu titranja i amplitudu ako je period njegova titranja 2 s.

Rezultat: $\varphi = 50,19^\circ$, $A = 7,81 \text{ cm}$

1.17. Posuda s utezima visi na opruzi i titra periodom 0,5 s. Dodavanjem utega u posudu period titranja se promijeni na 0,6 s. Koliko se produljila opruga dodavanjem utega?

Rezultat: $\Delta l = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

1.18. Odredite omjer potencijalne i kinetičke energije materijalne točke koja harmonički titra kao funkciju vremena:

a) u općenitom slučaju, b) uz početne uvjete $t_0 = 0$ s, $\varphi_0 = 0$, c) uz početne uvjete $t_0 = 0$ s, $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$.

Rezultat: a) $\frac{E_p}{E_k} = \tan^2(\omega t + \varphi_0)$, b) $\frac{E_p}{E_k} = \tan^2 \omega t$, c) $\frac{E_p}{E_k} = \cotg^2 \omega t$.

1.19. Koliki je omjer perioda vertikalnih titranja tijela vezanog na dvije jednake opruge ako se serijski spoj opruga zamijeni paralelnim?

Rezultat: $T_1 : T_2 = 2 : 1$

1.20. Na tankoj niti visi uteg pod čijom se težinom nit produljila za $\Delta x_0 = 0,1$ m. Odredite period malih vertikalnih titranja toga utega ako je sila niti na uteg dana izrazom:

$$F_N = -c_1 \Delta x - c_2 (\Delta x)^3,$$

gdje je Δx promjena duljine niti, a $c_1 = 294 \text{ Nm}^{-1}$, $c_2 = 9800 \text{ Nm}^{-3}$.

Rezultat: $T = 0,52$ s

1.21. Kuglica mase $2 \cdot 10^{-2}$ kg, pričvršćena na oprugu konstante elastičnosti 8 Nm^{-1} , harmonički titra amplitudom A . Na udaljenosti $A/2$ od položaja ravnoteže postavi se masivna pregrada, od koje se kuglica savršeno elastično odbija. Odredite period titranja kuglice.

Rezultat: $0,21$ s

1.22. Zamislite da je uzduž jednog promjera Zemlje probijen tunel kroz cijelu Zemljinu kuglu. Ne računajte li s otporom, odredite koliki bi bio period titranja nekog tijela proizvoljne mase m ispuštenog u taj tunel. Pretpostavite konstantnu vrijednost gustoće Zemlje.

Rezultat: $T = 84$ min

1.23. Knjiga leži na horizontalnoj podlozi koja jednostavno harmonički titra u horizontalnom smjeru i pritom ima amplitudu 1 m. Kolika je maksimalna frekvencija tog gibanja pri kojoj još neće doći do klizanja knjige po podlozi? Faktor trenja je $0,5$.

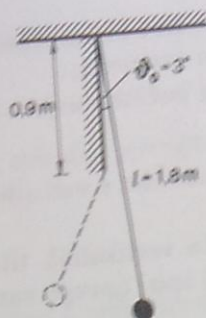
Rezultat: $f_{\text{maks}} = 0,35$ Hz

1.24. Nađite period njihanja Galileijeva njihala prikazanog na slici 1.22.

Rezultat: $T = 2,3$ s

1.25. Istodobno su zanjihana dva matematička njihala, za čije duljine vrijedi $l_1 - l_2 = 22$ cm. Nakon nekog vremena jedno je njihalo načinilo $N_1 = 30$, a drugo $N_2 = 36$ njihaja. Odredite njihove duljine.

Rezultat: $l_1 = 72$ cm, $l_2 = 50$ cm

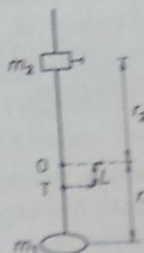


Slika 1.22.

- 1.26. Matematičko se nihalno dugo 60 cm njiše u zrakoplovu koji se uspinje pod kutom 30° prema horizontalnoj ravlini, s ubrzanjem od 4 m s^{-2} . Odredite period njihanja matematičkog nihala.

Rezultat: $T = 1,39 \text{ s}$

- 1.27. Kolika je napetost niti matematičkog nihala mase $m = 10 \text{ g}$ i duljine $l = 1 \text{ m}$ ako je u $t = 0$ maksimalna elongacija $\theta_0 = 6^\circ$?

Rezultat: $F = 0,098 \text{ N}$ 

Slika 1.23.

- 1.28. Na slici 1.23. je nihalno metronoma. Sastoji se od dva tijela mase m_1 i m_2 , od kojih se tijelo mase m_2 može pomicati po štapu. Tijela su učvršćena na štap zanemarive mase. Težište T nihala smješteno je ispod osi 0 vrtnje. Izvedite izraz za period titranja nihala metronoma i objasnite rezultat.

$$\text{Rezultat: } T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{g(m_1 r_1 - m_2 r_2)}}$$

(Udaljavanjem tijela mase m_2 od osi vrtnje povećava se period titranja jer se time povećava i moment inercije, a smanjuje se udaljenost težišta od osi.)

- 1.29. Koliki je period fizičkog nihala u obliku homogenog štapa duljine $l = 2 \text{ m}$ ako se njiše oko osi koja prolazi:
- a) jednim njegovim krajem,

1.38. Tijelo na opruzi titra gotovo neprigušeno periodom $T_0 = 0,6$ s. Ako paralelno opruzi spojimo amortizer, period titranja povećava se na $T = 0,68$ s. a) Koliki je faktor prigušenja amortizera? b) Koliko bi puta amortizer morao imati veće trenje da nastupi kritično prigušenje?

Rezultat: a) $\delta = 4,9 \text{ s}^{-1}$, b) $\delta_{kr} = 10,5 \text{ s}^{-1}$; 2,1 puta

1.39. Materijalna točka izvodi istodobno dva međusobno okomita harmonijska titranja opisana jednačbama:

$$x = 1 \text{ cm} \cos \pi \text{ s}^{-1} t \quad i \quad y = 2 \text{ cm} \cos \frac{\pi}{2} \text{ s}^{-1} t.$$

Odredite stazu materijalne točke.

Rezultat: $y^2 = (2 \text{ cm})x + 2 \text{ cm}^2$ uz $-1 \text{ cm} \leq x \leq 1 \text{ cm}$

- b) kroz točku udaljenu od sredine štapa za $d = l/6$.
 c) Kada je period najmanji, a kada najveći?

Rezultat: a) $T = 2,3$ s, b) $T = 2,3$ s
 c) period je najmanji za $d = 0,58$ m, a maksimalan (beskonačan) je za $d = 0$.

- 1.30. Njhalo se sastoji od štapa mase 0,5 kg, duljine 1 m, na čijem je donjem kraju pričvršćena kuglica polumjera 0,05 m. Kolika mora biti gustoća kuglice da bi period oko okomite osi na štap koja prolazi gornjim krajem štapa, bio 2 sekunde?

Rezultat: $\rho = 2610$ kg/m³

- 1.31. Puni homogeni disk polumjera R njiše se oko horizontalne osi koja je okomita na osnovicu diska i od njezina središta udaljena za r . Kolika mora biti ta udaljenost r da bi period malih titraja bio minimalan.

Rezultat: $r = R/\sqrt{2}$

- 1.32. Na nit dugu 3 m obješena je kuglica čiji je polumjer 3 cm. Za koliko je veći period titranja tog fizičkog njihala od perioda matematičkog njihala kojim se ono može aproksimirati?

Rezultat: $\Delta T = 6,95 \cdot 10^{-5}$ s

- 1.33. Kugla polumjera 10 cm njiše se oko horizontalne osi udaljene 5 cm od središta C. Gdje treba biti os druge jednake kugle da omjer perioda titranja bude 0,5?

Rezultat: 0,78 cm

- 1.34. Dva homogena štapa duljine l spojeni su tako da je dobiven štap duljine $2l$. Ako je omjer masa štapova 2 : 1, koliki je omjer perioda titranja kad je os na jednom, odnosno drugom kraju štapa?

Rezultat: $T_1/T_2 = 0,9165$

- 1.35. Tanki homogeni štap njiše se oko horizontalne osi koja prolazi kroz jedan njegov kraj. Koliki je odnos perioda titranja toga štapa duljine l i njemu jednakog štapa, dvostruke duljine $2l$?

Rezultat: $T_l/T_{2l} = 0,707$

- 1.36. Vanjska periodička sila maksimalnog iznosa 10 N djeluje na tijelo na opruzi koje, zbog djelovanja te sile, titra amplitudom 1 cm. Na početku titranja tijelo je udaljeno pola amplitude od središnjeg položaja. Valja izračunati rad što ga izvrši sila u vrijeme jednog perioda ako je u $t = 0$ sila maksimalna.

Rezultat: $W = 0,2721$ J

- 1.37. Tijelo obješeno o oprugu titra amplitudom 10 cm. U jednom trenutku počinje djelovati sila koja prigušuje titranje. Ako je omjer amplituda u prvoj i sedmoj sekundi prigušenja jednak 10, za koje vrijeme će se amplituda smanjiti na 1 cm?

Rezultat: $t = 6$ s