2 Zadatak: Ravni elektromagnetski val čije je električno polje opisano izrazom

$$\mathbf{E}[z,t] = E_{0x}\,\mathbf{i}\,\cos[\kappa z - \omega t] + E_{0y}\,\mathbf{j}\,\sin[\kappa z - \omega t]$$

pada na polaroid koji propušta komponentu vala čije je električno polje usporedno s vektorom $3\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Odredi amplitudu titranja električnog polja nakon prolaska vala kroz polaroid.

Postupak: Komponenta upadnog elektromagnetskog vala čije je električno polje okomito na propusni smjer polaroida se pri prolasku kroz polaroid apsorbira, dok komponenta vala čije je električno polje usporedno s propusnim smjerom polaroida ostaje nepromijenjena. Komponentu upadnog električnog polja koja je usporedna s propusnim smjerom polaroida računamo kao projekciju upadnog polja na propusni smjer polaroida. Uvodimo jedinični vektor propusnog smjera polaroida,

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{3\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{10}},$$

te kao projekciju zadanog električnog polja na taj smjer dobivamo

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \frac{3E_{0x}}{\sqrt{10}} \cos[\kappa z - \omega t] + \frac{E_{0y}}{\sqrt{10}} \sin[\kappa z - \omega t].$$

Kako bismo u gornjem izrazu prepoznali amplitudu titranja uvodimo oznake

$$a = \frac{3E_{0x}}{\sqrt{10}}, \qquad b = \frac{E_{0y}}{\sqrt{10}},$$

te gornji izraz za projekciju polja zapisujemo kao

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{p}} = a \cos[\kappa z - \omega t] + b \cos[\kappa z - \omega t - \pi/2].$$

Koristeći kompleksni zapis imamo

$$\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \mathrm{Re}\left[a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\kappa z - \omega t)}\right] + \mathrm{Re}\left[b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\kappa z - \omega t - \pi/2)}\right] = \mathrm{Re}\left[(a - \mathrm{i}\,b)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\kappa z - \omega t)}\right],$$

gdje kao amplitudu titranja prepoznajemo

$$E_0 = |a - \mathrm{i}\,b| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{9}{10}E_{0x}^2 + \frac{1}{10}E_{0y}^2}.$$

Rješenje: $E_0 = \sqrt{(9E_{0x}^2 + E_{0y}^2)/10}$

6 Zadatak: S jedne strane tanke konvergentne leće žarišne duljine $f = 1\,\mathrm{m}$ i kružnog otvora promjera $2R = f/4$ se na optičkoj osi na udaljenosti $a = 3f$ nalazi izotropni točkasti izvor svjetlosti snage $P = 100\,\mathrm{W}$. S druge strane leće se na udaljenosti $d = f$ nalazi zastor okomit na optičku os. Odredi osvijetljenje zastora u području u kojem na njega pada svjetlost.

Postupak: Traženo osvijetljenje E je omjer znage svjetlosti $P_\circ$ koja prolazi lećom i površine svijetle mrlje $S_\circ$ koju ona stvara na zastoru, $E = P_\circ/S_\circ$. Najprije računamo snagu svjetlosti $P_\circ$ koja ulazi u leću. Omjer snage $P_\circ$ i ukupne snage izotropnog izvora P jednak je omjeru prostornog kuta $\Omega_\circ$ koji u odnosu na izvor svjetlosti zahvaća otvor leće i ukupnog prostornog kuta 4π u koji izvor zrači. Prostorni kut $\Omega_\circ$ napisat ćemo s pomoću poznate formule za stožac vrštnog kuta 2θ,

$$\Omega_\circ = \int_0^\theta 2\pi \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = -2\pi\cos\vartheta\,\Big|_0^\theta = 2\pi(1-\cos\theta),$$

gdje iz geometrije stošca svjetlosti koja ulazi u leću imamo

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}.$$

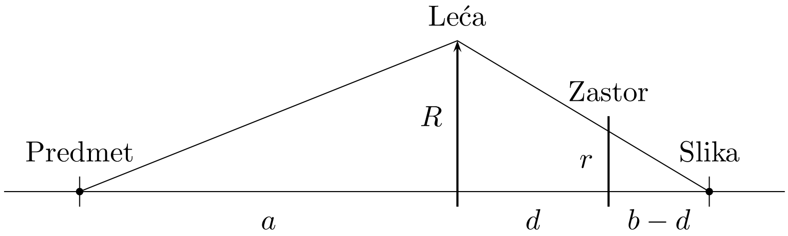
Slijedi

$$\frac{P_\circ}{P} = \frac{\Omega_\circ}{4\pi} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right).$$

Sada računamo površinu svijetle mrlje S_0. Na osnovu poznate relacije $1/a + 1/b = 1/f$ slijedi da slika točkastog izvora koji se nalazi na udaljenosti $a > f$ nastaje na suprotnoj strani leće na udaljenosti

$$b = \frac{a}{a-f}\,f.$$

S obzirom da se ovdje zastor nalazi na udaljenosti $d \neq b$, čunj svjetlosti zahvaćen lećom kružnog otvora na zastoru stvara svijetao krug polumjera r (tzv. "mutnu sliku").



Iz sličnosti trokuta imamo $R/b = r/(b-d)$ te je površina svijetlog kruga na zastoru

$$S_\circ = r^2\pi = R^2\left(\frac{b-d}{b}\right)^2\pi = R^2\pi\left(1 - \frac{d}{f} + \frac{d}{a}\right)^2.$$

Konačno, osvijetljenje zastora unutar svijetlog kruga je

$$E = \frac{P_\circ}{S_\circ} = P\,\frac{1-\left(1+(R/a)^2\right)^{-1/2}}{2R^2\pi(1-d/f+d/a)^2}.$$

Za zadane vrijednosti

$$E \simeq 7.947\ \mathrm{W\,m^{-2}}.$$

Rješenje: $E = P\big(1-(1+(R/a)^2)^{-1/2}\big)/\big(2R^2\pi(1-d/f+d/a)^2\big) \simeq 7.947\ \mathrm{W\,m^{-2}}$