1 Zadatak: Žarna nit duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$ i promjera $d = 1\,\mathrm{mm}$ priključena je na napon $U = 220\,\mathrm{V}$ te njome teče struja $I = 1\,\mathrm{A}$. Pretpostavljajući da nit apsorbira i emitira termalno zračenje u skladu sa zakonom zračenja crnog tijela te da nisu prisutni drugi mehanizmi odvođenja topline odredi temperaturu niti ako je temperatura okoline $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. (Štefan–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.)

Postupak: U stacionarnom stanju žarna nit prima energiju jednakom brzinom kojom ju i predaje te je njena toplinska energija, a time i njena temperatura T, u vremenu stalna. Pišemo

$$0 = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = UI + S\sigma T_0^4 - S\sigma T^4,$$

gdje prvi član opisuje snagu kojom električna struja zagrijava (pozitivni predznak) nit, drugi član opisuje snagu kojom nit apsorbira (pozitivni predznak) termalno zračenje iz okoline dok treći član opisuje snagu termalne emisije (negativni predznak) niti. $S = d\pi\ell$ je površina niti. Slijedi:

$$T^4 = T_0^4 + \frac{UI}{S\sigma} = T_0^4 + \frac{UI}{d\pi\ell\sigma},$$

Za zadane vrijednosti $T \simeq 1056\,\mathrm{K}$.

Rješenje: $T = \left(T_0^4 + UI/d\pi\ell\sigma\right)^{1/4} \simeq 1056\,\mathrm{K}$

2 Zadatak: Odredi silu kojom Sunčevo zračenje djeluje na Zemlju pretpostavljajući da Zemlja apsorbira svo zračenje koje na nju pada. Ukupna snaga Sunčeva zračenja (tzv. luminozitet Sunca) $L_\odot = 3.839 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$, polumjer Zemlje $R = 6371\,\mathrm{km}$, a srednja udaljenost Zemlje od Sunca $a = 149.6 \times 10^6\,\mathrm{km}$. (Brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Na osnovu očuvanja količine gibanja mora vrijediti

$$\Delta\mathbf{p}_\mathrm{Z} + \Delta\mathbf{p}_\mathrm{aps.} = 0,$$

gdje je $\Delta\mathbf{p}_\mathrm{Z}$ promjena količine gibanja Zemlje, a $\Delta\mathbf{p}_\mathrm{aps.}$ je promjena količine gibanja zračenja uslijed apsorpcije. Promjenu količine gibanja Zemlje koja nastupa u vremenskom intervalu Δt možemo napisati kao

$$\Delta\mathbf{p}_\mathrm{Z} = \mathbf{F}\,\Delta t,$$

gdje je $\mathbf{F}$ sila koja djeluje na Zemlju. Promjenu količine gibanja zračenja u istom vremenskom intervalu možemo napisati kao zbroj promjena količina gibanja svih apsorbiranih fotona,

$$\Delta\mathbf{p}_\mathrm{aps.} = \sum_{i\in\Delta t}(\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}_i) = -\sum_{i\in\Delta t}\mathbf{p}_i.$$

S obzirom da je udaljenost Zemlja–Sunce znatno veća i od polumjera i Sunca vektori $\mathbf{p}_i$ su gotovo paralelni pa možemo računati s modulima vektora. Slijedi

$$F = \frac{\Delta p_\mathrm{Z}}{\Delta t} = \frac{\Delta p_\mathrm{aps.}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{i\in\Delta t} p_i = \frac{1}{\Delta t}\sum_{i\in\Delta t}\frac{E_i}{c} = \frac{1}{c}\frac{\Delta E_\mathrm{aps.}}{\Delta t} = \frac{1}{c}P_\mathrm{aps.}$$

gdje je $E_i = p_i c$ energija apsorbirnog fotona, $\Delta E_\mathrm{aps.}$ je ukupna energija apsorbiranog zračenja u vremenskom intervalu Δt, a $P_\mathrm{aps.}$ snaga apsorbiranog zračenja. S obzirom da je polumjer Zemlje mnogo manji od udaljenosti Zemlja–Sunce omjer apsorbirane snage $P_\mathrm{aps.}$ i ukupne snage Sunčevog zračenja $L_\odot$ odgovara omjeru površine kruga polumjera R i površine sfere polumjera a,

$$\frac{P_\mathrm{aps.}}{L_\odot} = \frac{R^2\pi}{4a^2\pi} = \frac{R^2}{4a^2}.$$

Konačno

$$F = \frac{R^2 L_\odot}{4a^2 c} \simeq 5.125 \times 10^8\,\mathrm{N}.$$

Rješenje: $F = R^2 L_\odot/4a^2 c \simeq 5.125 \times 10^8\,\mathrm{N}$.

3 Zadatak: Pri Comptonovu raspršenju fotona na elektronu, foton je raspršen pod kutem 60°, a njegova energija nakon raspršenja iznosi 0.7 MeV. Odredi energiju fotona prije raspršenja. (Masa elektrona $m_e = 0.511$ MeV$/c^2$.)

Postupak: Koristeći poznat izraz za razliku valnih duljina fotona pri Comptonovu raspršenju,

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}\big(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}}\big),$$

te izraz za energiju fotona,

$$E_{\text{fot.}} = hf = \frac{hc}{\lambda},$$

imamo

$$\frac{hc}{E'_{\text{fot.}}} - \frac{hc}{E_{\text{fot.}}} = \frac{h}{m_e c}\big(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}}\big),$$

odnosno

$$E_{\text{fot.}} = \frac{E'_{\text{fot.}}}{1 - (E'_{\text{fot.}}/m_e c^2)(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}})}.$$

Za zadane vrijednosti $E_{\text{fot.}} \simeq 2.222$ MeV.

Rješenje: $E_{\text{fot.}} = E'_{\text{fot.}}/\big(1 - (E'_{\text{fot.}}/m_e c^2)(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}})\big) \simeq 2.222$ MeV

4 **Zadatak:** Proučavanjem fotoelektričnog efekta na uzorku nekog metala uočeno je da svjetlost valne duljine $\lambda_1 = 410\,\mathrm{nm}$ s njegove površine izbacuje elektrone koji savladavaju zaustavni potencijal do $\Delta U_1 = 1\,\mathrm{V}$. Odredi gornju granicu na valnu duljinu svjetlosti koja bi proizvela fotone koji savladavaju zaustavni potencijal $\Delta U_2 = 2\,\mathrm{V}$. (Planckova konstanta $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, elementarni naboj $e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.)

Postupak: Kako bi elektron izbačen s površine metala fotoelektričnim efektom savladao zaustavni potencijal ΔU energija fotona $E_{\mathrm{fot.}} = hf = hc/\lambda$ mora biti veća od, ili u graničnom slučaju jednaka zbroju izlaznog rada $W_{\mathrm{izl.}}$ za dani metal i rada $e\,\Delta U$ potrebnog za savladavanje zaustavnog potencijala,

$$E_{\mathrm{fot.}} = \frac{hc}{\lambda} \geq W_{\mathrm{izl.}} + e\,\Delta U.$$

Ovdje imamo granični slučaj

$$\frac{hc}{\lambda_1} = W_{\mathrm{izl.}} + e\,\Delta U_1$$

te zahtjev

$$\frac{hc}{\lambda_2} \geq W_{\mathrm{izl.}} + e\,\Delta U_2.$$

Eliminacijom $W_{\mathrm{izl.}}$ slijedi

$$\frac{hc}{\lambda_2} \geq \frac{hc}{\lambda_1} + e(\Delta U_2 - \Delta U_1),$$

odnosno,

$$\lambda_2 \leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{e}{hc}(\Delta U_2 - \Delta U_1) \right)^{-1}.$$

Za zadane vrijednosti $\lambda_2 \leq 308.1\,\mathrm{nm}$.

Rješenje: $\lambda_2 \leq (1/\lambda_1 + (e/hc)(\Delta U_2 - \Delta U_1))^{-1} \simeq 308.1\,\mathrm{nm}$

5 Zadatak: Čestica μ^- (mion) i proton mogu činiti vezano stanje nalik vodikovu atomu. Koristeći Bohrov model atoma procijeni energiju fotona emitiranog prilikom prelaska miona iz prvog pobuđenog u osnovno energijsko stanje na osnovu podataka da energija ionizacije vodikova atoma iznosi približno 13.6 eV te da je masa miona približno 207 puta veća od mase elektrona.

Postupak: U Bohrovom modelu vodikova atoma energija fotona emitiranog pri prelasku iz m-tog u n-to pobuđeno stanje dana je izrazom

$$E_{mn} = |E_m - E_n| = \left|\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right| E_\mathrm{I}\ ,$$

gdje je E_I energija ionizacije vodikova atoma,

$$E_\mathrm{I} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \simeq 13.6\,\mathrm{eV}.$$

Ovdje imamo $m = 2$ i $n = 1$, dakle

$$E_{21} = |E_2 - E_1| = \left|\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right| E_\mathrm{I} = \frac{3}{4} E_\mathrm{I}\ .$$

U vezanom stanju miona i protona u gornjim izrazima potrebno je masu elektrona m_e zamijeniti masom miona,

$$m_e \ \longrightarrow\ m_\mu \simeq 207\, m_e.$$

Iz gornjih izraza je očigledno da je i energija ionizacije "mionskog H-atoma" približno 207 puta veća od energije ionizacije "običnog" vodikovog atoma te isto vrijedi i za energije fotona

$$E_{21}^{(\mu)} = \frac{3}{4} E_\mathrm{I}^{(\mu)} \simeq \frac{3}{4}\, 207\, E_\mathrm{I} \simeq 2.1\,\mathrm{keV}.$$

(Napomena: Stroži račun uzeo bi u obzir da na mjestu m_e u izrazu za E_I stoji tzv. reducirana masa elektrona, definirana izrazom $\mu_e = m_e m_p/(m_e + m_p)$. Zamjenom $\mu_e \to \mu_\mu$ dobili bismo $E_\mathrm{I}^{(\mu)} \simeq 186\, E_\mathrm{I}$, odnosno $E_{21}^{(\mu)} \simeq 1.9\,\mathrm{keV}$.)

Rješenje: $E_{21}^{(\mu)} \simeq 2.1\,\mathrm{keV}$

6 Zadatak: Pretpostavimo da se čestica mase m giba u kružnim orbitama pod djelovanjem privlačne centralne sile čemu odgovara potencijalna energija čestice opisana izrazom

$$E_{\text{pot.}}[r] = \frac{1}{2}kr^2,$$

gdje je k konstanta, a r je udaljenost čestice od središta. U skladu s postulatom o kvantizaciji kutne količine gibanja ($L_n = n\hbar$, $n = 1, 2, \dots$) izvedi izraz za energijske nivoe čestice.

Postupak: Najprije prepoznajemo da zadana potencijalna energija odgovara harmoničkoj sili (sili opruge) čija jakost je kr. Ako se elektron giba u kružnoj orbiti polumjera r brzinom v, odnosno kutnom brzinom $\omega = v/r$, centralna sila mora biti jednaka centripetalnoj sili, $F_{\text{CP}} = mv^2/r = m\omega^2 r$. Slijedi $kr = m\omega^2 r$, odnosno

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

gdje uočavamo da kutna brzina ne ovisi o polumjeru orbite (slično kao što frekvencija titranja harmoničkog oscilatora ne ovisi o amplitudi). Kutna količina gibanja čestice u kružnoj orbiti je $L = pr = mvr = m\omega r^2$ ($p = mv$ je količina gibanja), a u skladu s postulatom o kvantizaciji imamo

$$L_n = m\omega_n r_n^2 = n\hbar, \qquad n = 1, 2, \dots$$

gdje su ω_n i r_n kutna brzina vrtnje i polumjer orbite za dani n. S obzirom da je kutna brzina ω jednaka u svim orbitama (dakle ne ovisi o n) slijedi izraz za polumjer orbite,

$$r_n^2 = \frac{n\hbar}{m\omega} = \frac{n\hbar}{\sqrt{mk}}, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Energija čestice u kružnoj orbiti je

$$E = E_{\text{kin.}} + E_{\text{pot.}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}(m\omega^2 + k)r^2 = kr^2.$$

S obzirom na kvantizaciju slijedi energija čestice u n-toj orbiti

$$E_n = kr_n^2 = n\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Rješenje: $E_n = n\hbar\sqrt{k/m}$, $n = 1, 2, \dots$

7 **Zadatak:** Pretpostavljajući da sva energija Sunčeva zračenja potiče iz pretvorbe vodika (${}^{1}_{1}\mathrm{H}$) u helij (${}^{4}_{2}\mathrm{He}$) i pritom zanemarujući energiju nastalih neutrina procijeni masu vodika koju Sunce troši u jedinici jedinici vremena. Ukupna snaga Sunčeva zračenja (tzv. luminozitet sunca) $L_\odot = 3.839 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$, masa vodikova atoma $m^*[{}^{1}_{1}\mathrm{H}] = 1.007825\,\mathrm{u}$, masa helijeva atoma $m^*[{}^{2}_{4}\mathrm{He}] = 4.002603\,\mathrm{u}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Postupak: Reakciju možemo sažeti kao

$$4\,{}^{1}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + 2\nu_e + \mathrm{fotoni}.$$

Zanemarujući energiju neutrina nastalih u reakciji energija zračenja koja se oslobodi po jednom utrošenom vodikovu atomu je

$$E_\mathrm{H} = \Big(m^*[{}^{1}_{1}\mathrm{H}] - \frac{1}{4}\,m^*[{}^{4}_{2}\mathrm{He}]\Big)c^2,$$

odnosno, količina energije koja se oslobađa po jedinici mase potrošenog vodika je

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m} = \frac{E_\mathrm{H}}{m^*[{}^{1}_{1}\mathrm{H}]} = \left(1 - \frac{m^*[{}^{4}_{2}\mathrm{He}]}{4\,m^*[{}^{1}_{1}\mathrm{H}]}\right)c^2.$$

Masa vodika koju Sunce troši u jedinici vremena je

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}E}\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m}\right)^{-1} L_\odot = \left(1 - \frac{m^*[{}^{4}_{2}\mathrm{He}]}{4\,m^*[{}^{1}_{1}\mathrm{H}]}\right)^{-1} \frac{L_\odot}{c^2}.$$

Za zadane vrijednosti

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \simeq 6.0 \times 10^{11}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}.$$

Rješenje: $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = (1 - m^*[{}^{4}_{2}\mathrm{He}]/4m^*[{}^{1}_{1}\mathrm{H}])^{-1} L_\odot/c^2 \simeq 6.0 \times 10^{11}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$

8 Zadatak: Nekim fizikalnim procesom čija aktivnost A_1 je stalna u vremenu nastaju jezgre aktivnog izotopa 2 s konstantom raspada λ_2. Odredi ovisnost aktivnosti izotopa 2 o vremenu ako je ona u početnom trenutku bila jednaka nuli.

Postupak: Populacija jezgara izotopa 2 podložna je raspadu, a doprinosi joj stalna aktivnost A_1, dakle

$$\mathrm{d}N_2 = -\lambda_2 N_2 \,\mathrm{d}t + A_1 \,\mathrm{d}t.$$

Separacijom varijabli,

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{-N_2 + A_1/\lambda_2} = \lambda_2 \,\mathrm{d}t,$$

te integracijom slijedi

$$-\ln[-N_2 + A_1/\lambda_2] = \lambda_2 t + C,$$

gdje je C integracijska konstanta. Možemo pisati

$$A_2[t] = \lambda_2 N_2[t] = A_1 - \lambda_2 \mathrm{e}^{-(\lambda_2 t + C)}.$$

Konstantu C određujemo na osnovu početnog uvjeta $A_2[0] = 0$. Slijedi

$$C = \ln[\lambda_2/A_1].$$

Konačno

$$A_2[t] = A_1 \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right).$$

Rješenje: $A_2[t] = A_1 \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right)$