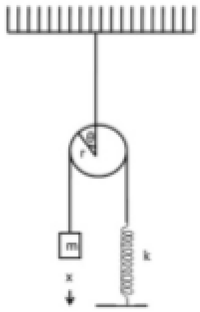
1. Sustav titra malim amplitudama oko ravnotežnog položaja. Masa tijela obješenog na nit je m=0,2 kg , a masa koloture je M=0,3 kg. Konstanta opruge je k=30 Nm^{-1} . Masa niti i opruge je zanemariva, nit se ne skliže po koloturi, u osovini koloture nema trenja. Izračunajte period titranja sustava. (Moment tromosti koloture je $Mr^2/2$.)
(6 bodova)



Rješenje:

Za mali pomak iz ravnotežnog položaja:

$$(T - k\,\Delta l)\,r = I\,\ddot{\theta}$$
$$mg - T = ma$$

Za ravnotežni položaj:

$$mg = k\,\Delta l_0$$
$$\Delta l = \Delta l_0 + x$$

$$[T - k(\Delta l_0 + x)]\,r = I\,\ddot{\theta}$$
$$(mg - ma - k\,\Delta l_0 - kx)\,r = I\,\ddot{\theta}$$
$$(-ma - kx)\,r = I\,\ddot{\theta}$$

$$x = r\,\theta$$
$$a = r\,\ddot{\theta}$$
$$\left(-mr\ddot{\theta} - kr\theta\right)r = I\,\ddot{\theta}$$
$$\ddot{\theta} + \frac{k\,r^2}{I + m\,r^2}\,\theta = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k\,r^2}{I + m\,r^2}$$
$$I = \frac{M\,r^2}{2}$$
$$\omega_0^2 = \frac{k\,r^2}{\frac{M\,r^2}{2} + m\,r^2} = \frac{k}{m + \frac{M}{2}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{M}{2}}{k}}$$
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2 + \frac{0{,}3}{2}}{30}}\ \mathrm{s} = 0{,}679\ \mathrm{s}$$

1. Na jednoj opruzi titra tijelo mase m_1=1 kg, a na drugoj tijelo mase m_2=1,1 kg. Omjeri njihovih perioda su $T_1 : T_2$ = 1 : 1,1. Koliko mase treba oduzeti drugom tijelu i dodati prvom da bi tijela titrala istim periodom? **(6 bodova)**

Rješenje:

Period je dan izrazom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Iz zadanog omjera perioda

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{1{,}1} = \sqrt{\frac{m_1 k_2}{m_2 k_1}}$$

korištenjem činjenice da je m_2=1,1* m_1 slijedi

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{1{,}1}$$

Nakon prebacivanja mase periodi su isti

$$\frac{T'_2}{T'_2} = 1 = \sqrt{\frac{m'_1}{m'_2 * 1{,}1}}$$

iz čega slijedi

$$m'_1 = 1{,}1 * m'_2$$

Ukupna masa je nepromijenjena, dakle

$$m'_1 + m'_2 = 2{,}1 \text{ kg}$$

Također vrijedi

$$m'_2 = m_2 - \Delta m$$

te je naposljetku

$$\Delta m = 0{,}1 \text{ kg}$$

1. Tri homogena štapa duljine l = 1 m spojeni su tako da je dobiven štap duljine 3l. Ako je omjer masa 1 : 2 : 3, odredite period titranja štapa kada je obješen oko lakšeg kraja.
(8 bodova)

Rješenje:

Obzirom da mase pojedinih dijelova nisu jednake, centra mase štapa nije na sredini već (računajući od lakšeg kraja):

$$x_{CM} = \frac{m(l/2) + 2m(3l/2) + 3m(5l/2)}{M} = \frac{11}{6}l, \tag{7}$$

gdje je $M = m + 2m + 3m = 6m$.
Moment tromosti sustava jednak je zbroju momenata tromosti pojedinih dijelova (oko osi rotacije), tj.:

$$I = \left(\frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)_1 + \left(\frac{1}{12}2ml^2 + 2m\left(\frac{3l}{2}\right)^2\right)_2 + \left(\frac{1}{12}3ml^2 + 3m\left(\frac{5l}{2}\right)^2\right)_3 = 24ml^2. \tag{8}$$

Traženi period titranja jednak je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgx_{CM}}} = 2\pi\sqrt{\frac{24l}{11g}} = 2,96\,s. \tag{9}$$

1. Odredite na kojoj udaljenosti od središta homogenog štapa duljine *l* treba postaviti horizontalnu os rotacije da bi period malih oscilacija štapa bio minimalan ?
(8 bodova)

Rješenje:

Period fizičkog njihala dan je izrazom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}},$$

pri čemu je I moment tromosti štapa oko osi rotacije, b je udaljenost od centra mase štapa do osi rotacije. Prema Steinerovom poučku, moment tromosti štapa je:

$$I = \frac{1}{12}ml^2 + mb^2,$$

gdje je $ml^2/12$ moment tromosti štapa oko centra mase.
Period je minimalan tamo gdje iščezava derivacija, $dT/db = 0$:

$$\frac{d}{db}\left(\frac{b}{g} + \frac{l^2}{12gb}\right) = 0 = \frac{1}{g} - \frac{l^2}{12gb^2},$$

odnosno

$$b = \frac{l}{\sqrt{12}}.$$

2. Disk mase m = 200 g i polumjera R = 20 cm obješen je kroz središte na torzionu nit (nit i ravnina diska su međusobno okomiti). Period harmoničkih oscilacija tog sustava je T = 2,2 s. Zatim se na disk pričvrsti tijelo nepravilnog oblika, te se za novi sustav izmjeri period harmoničkih oscilacija T = 3,8 s. Izračunajte moment tromosti tijela nepravilnog oblika oko osi koja se podudara s torzionom niti. **(7 bodova)**

Rješenje:

Moment tromosti diska oko osi koja prolazi njegovim središtem (okomito na ravninu diska) je $I_{\text{disk}} = \frac{1}{2}mR^2$, gdje je m masa, a R polumjer diska. Period oscilacija torzionog njihala dan je s:

$$T_{\text{disk}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\text{disk}}}{D}} \quad ,$$

gdje je D torziona konstanta, a I moment tromosti njihala oko osi koja se podudara s torzionom niti.

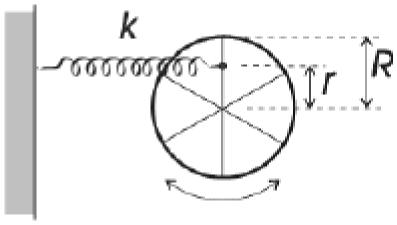
Za novi sustav (disk i nepravilno tijelo) moment tromosti je zbroj $I_{\text{tot}} = I_{\text{disk}} + I_{\text{tijelo}}$.

Torziona konstanta D je ista u oba slučaja, pa ju možemo eliminirati $(\frac{D}{4\pi^2} = \frac{I}{T^2})$:

$$\frac{I_{\text{disk}}}{T^2_{\text{disk}}} = \frac{I_{\text{disk}} + I_{\text{tijelo}}}{T^2_{\text{sustav}}} \quad .$$

Iz prethodne jednadžbe dobijemo za nepravilno tijelo $I_{\text{tijelo}} = I_{\text{disk}}\left(\frac{T^2_{\text{disk}}}{T^2_{\text{sustav}}} - 1\right) = 0.00793$ kg m^2.

1. Kotač, koji se sastoji od tankog homogenog obruča mase 2,6 kg, polumjera R i 6 žbica duljine R, svaka mase 0,1 kg, može rotirati oko nepomične horizontalne osi koja prolazi kroz središte kotača i okomita je na ravninu kotača. Opruga konstante elastičnosti 25 Nm^{-1} pričvršćena je jednim krajem u točku na žbici kotača na udaljenosti $r=\frac{3}{4}R$ od središta kotača, a drugim krajem u točku na vertikalnom zidu s lijeve strane kotača. Koliki je period malih titraja koje izvodi kotač pod utjecajem opruge? (4 boda)



Rješenje:

$m_1 = 2{,}6$ kg
$m_2 = 0{,}1$ kg
R, 6 žbica
$k = 25$ N/m
$r=\frac{3}{4}R$

$T = ?$

Kad se kotač iz ravnotežnog položaja zarotira za mali kut θ, javlja se sila opruge koja daje moment sile s obzirom na os oko koje kotač može rotirati:

$M=-kr\theta\cdot r$ koji teži smanjiti θ.

Prema jednadžbi gibanja za rotaciju krutog tijela:

$$-kr^2\theta=I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Za kotač sa žbicama:

$$I=m_1R^2+6\cdot\frac{m_2R^2}{3}=(m_1+2m_2)R^2$$

Uvrštavanjem u jednadžbu gibanja:

$$-kr^2\theta=(m_1+2m_2)R^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{kr^2}{(m_1+2m_2)R^2}\theta=0$$

Dobili smo jednadžbu gibanja harmoničkog oscilatora gdje je:

$$\omega=\sqrt{\frac{kr^2}{(m_1+2m_2)R^2}}=\frac{r}{R}\sqrt{\frac{k}{m_1+2m_2}}$$ kružna frekvencija titranja.

Period titranja je:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$T=2\pi\frac{R}{r}\sqrt{\frac{m_1+2m_2}{k}}$$

Uvrštavanjem numeričkih vrijednosti:

$$T=2\pi\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2{,}6+2\cdot 0{,}1}{25}}\ \text{s}=2{,}8\ \text{s}$$

1. Njihalo se sastoji od malog utega mase 60 g obješenog na nerastezljivu nit zanemarive mase. Kut θ koji nit njihala čini s vertikalom dan je izrazom

$$\theta(t) = (0{,}08 \text{ rad}) \cos[(4{,}43 \text{ rad/s})\, t + \varphi] \,,$$

gdje je φ neodređena faza. Izračunajte maksimalnu kinetičku energiju takvog njihala.
(7 bodova)

Rješenje:

Kružnu frekvenciju ω i amplitudu θ_0 njihala očitamo iz zadanog izraza:

$$\theta(t) = (\theta_0)\cos[\omega t + \phi] \,,$$

pa imamo $\omega = 4.43$ rad/s i $\theta_0 = 0.08$ rad/s.

Budući da se radi o matematičkom njihalu, kojemu znamo masu i frekvenciju, znamo i duljinu njihala: $l = g/\omega^2 = 0.5$ m.

Kinetička energija će biti maksimalna kada je i linearna (obodna) brzina maksimalna. Budući da je kuglica na udaljenosti l od osi rotacije, obodna brzina $v(t)$ i kutna brzina $\Omega(t)$ vezane su preko $v(t) = l\Omega(t)$. Kutnu brzinu nalazimo derivacijom danog izraza za kut po vremenu:

$$\Omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = -\theta_0\omega\cos[\omega t + \phi] \ .$$

Slijedi da je maksimalna kinetička energija:

$$E_{k,max} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(l\theta_0\omega)^2 \ .$$

Za zadane brojeve $E_{k,max} = 9.42 \cdot 10^{-4}$ J.

3. Masa molekule deuterija (D_2) je dvostruko veća od mase od molekule vodika (H_2). Ako molekula vodika može titrati frekvencijom $1.3 \cdot 10^{14}$ Hz, kolikom frekvencijom titra molekula deuterija? Prepostavite da je harmonička sila u oba slučaja iste jačine.
(6 bodova)

Rješenje:

Ako je harmonička sila napisana kao $\vec{F} = -k\vec{x}$, a masa na koju takva sila djeluje m, onda je frekvencija oscilacija mase m, pod utjecajem harmoničke sile, dana sa $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Budući je konstanta opruge ista za obje molekule, odnos frekvencija dan je sa

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \ .$$

Za masu deuterija $m_2 = 2m_1$, pa je frekvencija vibracija molekule deuterija $f_2 = f_1\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \frac{f_1}{\sqrt{2}}$.

Za zadane brojeve $f_2 = 9.19 \cdot 10^{13}$ Hz.

2. Matematičko njihalo duljine l = 1m obješeno je na stropu dizala. Dizalu je potrebno 6 s da se podigne za 100 m, pri čemu se uzdiže jednoliko ubrzano. Izračunajte koliki je period njihala kad se dizalo uzdiže prema vrhu. Koliki bi bio period njihala kad bi dizalo slobodno padalo?
(6 bodova)

Rješenje:

a) Najprije treba izračunati akceleraciju lifta:

$$s = \frac{at^2}{2} \Longrightarrow a = \frac{2s}{t^2} = 5{,}56 \text{ m/s}^2 \tag{1}$$

sada treba napisati sile koje djeluju u sistemu:

$$ml\ddot{\theta} + ma\sin\theta = -mg\sin\theta, \tag{2}$$

aproksimiramo $\sin\theta \sim \theta$ s za male kutove, te dobivamo jednadžbu gibanja:

$$\ddot{\theta} + \frac{a+g}{l}\theta = 0. \tag{3}$$

prepoznajemo:

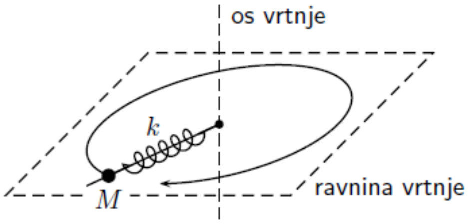
$$\omega^2 = \frac{a+g}{l}, \tag{4}$$

slijedi period:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a+g}} = 1.60 \text{ s} \tag{5}$$

b) Na sustav koji slobodno pada ne djeluju sile, stoga njihalo stoji na mjestu i postaje inercijalni sustav pa je period njihanja $T = \infty$.

1. Tanki štap se vrti u vodoravnoj ravnini oko jednog svog kraja kutnom frekvencijom ω_s. Opruga konstante elastičnosti k omotana je oko štapa i s jednim svojim krajem je pričvršćena za kraj štapa kojim prolazi os vrtnje. Opruga se može skupljati i rastezati duž štapa bez trenja. Masa M je pričvršćena za slobodni kraj opruge i može klizati duž štapa također bez trenja. Zatitramo li masu M duž štapa, kolika je frekvencija ω njenog titranja oko ravnotežnog položaja?



1. zadatak

$$k\,x_0 = M\,\omega_s^2\,(l_0 + x_0)$$
$$M\,\ddot{x} = -k\,(x_0 + x) + M\,\omega_s^2\,(l_0 + x_0 + x)$$
$$M\,\ddot{x} = -k\,x_0 + M\,\omega_s^2\,(l_0 + x_0) - k\,x + M\,\omega_s^2\,x$$
$$M\,\ddot{x} = -k\,x + M\,\omega_s^2\,x$$
$$\ddot{x} + \frac{1}{M}\,(k - M\,\omega_s^2)\,x = 0$$
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M}\,(k - M\,\omega_s^2)}$$

1. Tijelo na opruzi neprigušeno titra periodom T_0=0,6 s. Kada se opruzi paralelno spoji prigušivač (amortizer), period titranja se povećava na T=0,68 s. Koliki je faktor slabog prigušenja amortizera? Koliko puta amortizer mora imati veće trenje da bi nastupilo kritično prigušenje?
(6 bodova)

Rješenje:

Općenito,

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Slijedi

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Za prigušeno titranje vrijedi

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

to jest vrijedi

$$\delta = \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Kritično prigušenje nastupa za

$$\delta_{kritično} = \omega_0$$

Stoga je traženi odgovor

$$\frac{\delta_{kritično}}{\delta} \approx 2,1$$

3. Homogeni štap duljine 1m obješen je na udaljenosti d od centra mase. Period titranja je 2,5 s. Odredite koliki iznosi d? **(6 bodova)**

Rješenje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m\,g\,b}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{12}+md^2}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{l^2}{12}+d^2}{gd}}$$

$$d^2 - \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 gd + \frac{l^2}{12} = 0$$

$$d^2 - \left(\frac{2,5}{2\pi}\right)^2 \cdot 9,81\ d + \frac{1}{12} = 0$$

$$d^2 - 1,553064\ d + 0,083333 = 0$$

$$d_{1,2} = \frac{1,553064 \pm \sqrt{1,553064^2 - 4 \cdot 0,083333}}{2} = \frac{1,553064 \pm 1,441761}{2}$$

$$d_1 = 1,497\ \mathrm{m}$$

$$d_2 = 0,055652\ \mathrm{m} = 5,6\ \mathrm{cm}$$

Prvo rješenje nema smisla jer je veće od 0,5 m pa je rješenje $d = 5,6$ cm.

2. Osoba sjedne u automobil zbog čega se automobil malo spusti na svojim oprugama koje su već bile sabijene težinom vozila. Nakon toga se osoba vozi automobilom po cesti koja ima uzvisine. Zbog vožnje po uzvisinama javlja se periodička sila i uzrokuje titranje. Vlastita kružna frekvencija titranja vozila je ω_0=30 s^{-1} , a faktor prigušenja je 0,057 s^{-1}. Zbog promjene brzine vožnje mijenja se frekvencija pobudne sile. Amplituda titranja za frekvenciju ω=27s^{-1} je 1 mm . Kolika je maksimalna amplituda titranja? **(5 bodova)**

Rješenje:

$$A(\omega = 27\ \mathrm{s}^{-1}) = 1\ \mathrm{mm}$$

$$A(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$A_0 = 0{,}17103\ \mathrm{ms}^{-2}$$

$$\omega_r = \sqrt{30^2 - 2 \cdot 0{,}057^2}\ \mathrm{s}^{-1} = 29{,}99989\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$A(\omega_r) = \frac{0{,}17103}{\sqrt{(30^2 - 29{,}99989^2)^2 + 4 \cdot 0{,}057^2 \cdot 29{,}99989^2}}\ \mathrm{m}=0{,}050009\ \mathrm{m}=5{,}0\ \mathrm{cm}$$

1. Uteg leži na podlozi koja titra u horizontalnom smjeru frekvencijom f = 1 Hz. Odredite koeficijent trenja μ između utega i podloge ako je maksimalna amplituda titranja podloge pri kojoj još ne dolazi do proklizavanja utega jednaka A = 5 cm. **(6 bodova)**

Rješenje:

Pomak utega jednak je

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

pri čemu je $\omega = 2\pi f$. Akceleracija je dana izrazom

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$$

gdje je

$$a_{\max} = A\omega^2 = \mu g$$

iz čega slijedi

$$\mu = \frac{A\omega^2}{g} = 0.2$$

1. Šalica stoji na horizontalnoj podlozi koja jednostavno harmonički titra u horizontalnom smjeru amplitudom 0,5 m. Pronađite maksimalnu frekvenciju tog titranja pri kojoj još neće doći do proklizavanja šalice. Faktor trenja između šalice i podloge iznosi 0,42.
(6 bodova)

Rješenje:

Sila na šalicu zbog inercije pri titranju je maksimalna kada se dogodi promjena smjera titranja.
Formula koja opisuje akceleraciju pri titranju je:

$$a(t)=A\omega^2\sin(\omega t)$$

Maksimalna akceleracija zbog titranja je $A\omega^2$.

Uvjet da ne dođe do klizanja je da maksimalna sila zbog inercije pri promjeni smjera bude manja od trenja na podlozi.

$$\mu\, m\, g > m\, a_{max}$$
$$\mu\, m\, g > m\, A\omega^2$$

Iz toga se dobije

$$\omega^2_{MAX} = \mu\, g / A$$
$$\omega_{MAX} = 1{,}43 \text{ rad/s}$$
$$f_{MAX} = 0{,}23 \text{ Hz}$$

3.1 Kad tijela u sustavu na slici titraju u fazi, kružna frekvencija titranja iznosi $\omega_{\mathrm{uf}} = 3\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, a kad titraju u protufazi, frekvencija titranja iznosi $\omega_{\mathrm{pf}} = 4\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Odredite kružnu frekvenciju kojom bi titralo jedno od dvaju tijela kad bismo onom drugom tijelu onemogućili gibanje (zakočili ga).

Rješenje:

- U zadanom sustavu možemo koristiti poznate izraze za kružne frekvencije titranja u fazi i u protufazi. Oni glase

$$\omega_{\mathrm{uf}} = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega_{\mathrm{pf}} = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}},$$

a omogućuju nam da konstante opruga k i k' izrazimo kao

$$k = m\omega_{\mathrm{uf}}^2, \qquad k' = \frac{m}{2}(\omega_{\mathrm{pf}}^2 - \omega_{\mathrm{uf}}^2).$$

- Zakočimo li jedno od tijela, jednadžba gibanja onog drugog tijela glasi

$$m\ddot{x} = -kx - k'x.$$

Možemo je napisati u obliku

$$\ddot{x} + \frac{k+k'}{m}x = 0,$$

gdje prepoznajemo jednadžbu gibanja jednostavnog harmoničkog oscilatora s kvadratom kružne frekvencije

$$\omega^2 = \frac{k+k'}{m}.$$

Koristeći gornje izraze za k i k',

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_{\mathrm{uf}}^2 + \omega_{\mathrm{pf}}^2}{2}} = \frac{5\pi}{\sqrt{2}}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}.$$

1. Na kraju štapa duljine l = 1 m pričvršćena je kugla polumjera R = 10 cm (kraj štapa dodiruje površinu kugle). Mase kugle i štapa međusobno su jednake. Odredi period titranja ovog tijela kada ono njiše oko vodoravne (horizontalnu) osi koja prolazi spojištem kugle i štapa.
(6 bodova)

Rješenje:

knjiga D. Horvat, PR. 2-28

$$\begin{aligned} I &= m\left(1/3l^2 + 7/5R^2\right), \\ x_T &= b = \frac{l/2 - R}{2}, \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{2(1/3l^2 + 7/5R^2)}{g(l-2R)}} = 0.416\,s \end{aligned}$$

1. Izračunajte omjer perioda titranja matematičkog njihala kad je na visini h i kad je na $0\,\mathrm{m}$ nadmorske visine, ako je polumjer Zemlje R. (6 bodova)

Rješenje:

Ono što je različito u ta dva slučaja je gravitacijska akceleracija g. Na visini h je ona:

$$mg_h = G\frac{mM_z}{(R+h)^2} \Rightarrow g_h = G\frac{M_z}{(R+h)^2}, \tag{1}$$

a na 0 nadmorske visine je:

$$g_0 = G\frac{M_z}{R^2}, \tag{2}$$

ako je period matemaičkog njihala dan:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{3}$$

tada je omer:

$$\frac{T_h}{T_0} = \sqrt{\frac{g_0}{g_h}} = \sqrt{\frac{(R+h)^2}{R^2}} = 1 + \frac{h}{R}. \tag{4}$$

1. Na oba kraja tankog štapa duljine $58\,\mathrm{cm}$ pričvršćeni su mali utezi oblika kuglice polumjera $3.0\,\mathrm{cm}$. Utezi imaju jednaku masu. Štap sa utezima njiše se oko horizontalne osi okomite na štap koja prolazi kroz točku udaljenu za jednu trećinu duljine štapa od jednog kraja štapa. Koliki je period malih titraja ovog fizičkog njihala? Masu štapa možemo zanemariti.

Rješenje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Gb}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{2mgb}}$$

$$I = m\left[\frac{4}{5}r^2 + \left(\frac{l}{3}+r\right)^2 + \left(\frac{2}{3}l+r\right)^2\right]$$

$$b = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{l}{6}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{gl}\left[\frac{4}{5}r^2 + \left(\frac{l}{3}+r\right)^2 + \left(\frac{2}{3}l+r\right)^2\right]}$$

$$T = 2.160\ \mathrm{s}$$

1. Jednostavna vaga sastoji se od opruge i pločastog nosača mase 20 g. Kada se na nosač stavi uteg od 5 g i lagano pomakne u vertikalnom smjeru, period titranja će biti π/3 s. Ako na nosač umjesto 5 g stavimo uteg od 25 g, koliko se opruga može rastegnuti iz ravnotežnog položaja, a da uteg niti u jednom trenutku ne odskoči s nosača? **(7 bodova)**

Rješenje:

Konstantu opruge nalazimo iz relacije za period

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}, \qquad k = 0.9\,Nm^{-1},$$

gdje je $m_1 = (20 + 5)\,g$.
Kada uteg od $5\,g$ zamijenimo s onim od $25\,g$, sustav će oscilirati kružnom frekvencijom

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}} = 0.124\,\text{rad/s},$$

pri čemu je $m_2 = (20 + 25)\,g$.
Iz jaednažbe za elongaciju/pomak harmoničkog oscilatora

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi),$$

dobijemo izraz za akceleraciju

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi).$$

Da uteg ne bi odskočio s nosača, maksimalna akceleracija ne smije biti veća od akceleracije sile teže

$$g = a_{max} = \omega^2 A,$$

odnosno, tražena amplituda je

$$A = g\frac{m_2}{m_1}\left(\frac{T}{2\pi^2}\right)^2 = 0.49\,m.$$

1. Masa *m* se nalazi na uspravnom štapu duljine *L*, na visini *b* od dna štapa. Štap može rotirati oko donjeg kraja, a na gornjem kraju je preko horizontalne opruge konstante elastičnosti *k* povezan s vertikalnim zidom. Štap se otkloni iz vertikalnog položaja i pusti da titra oko donjeg kraja štapa. Izračunajte kružnu frekvenciju malih titranja ovog sustava. Masu štapa i opruge te gravitaciju zanemariti. **(7 bodova)**

Rješenje:

$$-kxL = mb^2\ddot{\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{x}{L}$$

$$\theta \simeq \frac{x}{L}$$

$$-kL\theta \cdot L = mb^2\ddot{\theta}$$

$$-kL^2\theta = mb^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{kL^2}{mb^2}\theta = 0$$

$$\omega = \frac{L}{b}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

2. Prigušeni oscilator se sastoji od tijela mase m=250g na opruzi konstante k=100 N/m te amortizera koji prigušuje titranje s konstantom prigušenja b=10 kg/s. Ako je takav oscilator izmaknut 3 cm iz ravnotežnog položaja pušten, koliko daleko od ravnotežnog položaja se nalazi 0.05 s kasnije? **(7 bodova)**

Rješenje:

Usporedimo prvo slobodnu frekvenciju ω_0 za oscilator zadane mase i konstante opruge i faktor prigušenja δ:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20\,\mathrm{s}^{-1} \ .$$

$$\delta = \frac{b}{2m} = 20\,\mathrm{s}^{-1} \ .$$

Budući da vrijedi $\delta = \omega_0$, radi se o kritično gušenom oscilatoru, za kojega je opće rješenje jednadžbe gibanja

$$x(t) = e^{-\delta t}\left\{x(0) + [v(0) + x(0)\delta]\, t\right\} \ .$$

Početna brzina je nula, pa je rješenje jednadžbe gibanja

$$x(t) = e^{-\delta t} x(0)\,(1 + \delta t) \ .$$

Za zadane brojeve, $x(t = 0.05\,\mathrm{s}) = 2.21$ cm.

Amplitude brzine prisilnih oscilacija pri f_1=200Hz i f_2=300Hz su jednake. Ako je amplituda vanjske sile u oba slučaja ista, pronađite rezonantnu frekvenciju oscilatora.

Za prigušeno titranje vrijedi:

$$x = A\sin\omega t$$

$$v = \omega A\cos\omega t$$

Gdje je :

$$A = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\delta^2\omega^2}}$$

$$\omega_1 \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_1^2)^2+\delta^2\omega_1^2}} = \omega_2 \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_2^2)^2+\delta^2\omega_2^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2-\omega_1^2}{\omega_1}\right)^2+\delta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2-\omega_2^2}{\omega_2}\right)^2+\delta^2}}$$

$$\left(\frac{\omega_0^2-\omega_1^2}{\omega_1}\right) = -\left(\frac{\omega_0^2-\omega_2^2}{\omega_2}\right)$$

Predznak minus dolazi zato što je jedna frekvancija veća a druga manja od rezonantne.

$$\omega_0^2(\omega_2+\omega_1) = \omega_1^2\omega_2 + \omega_1\omega_2^2$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2} = 245\mathrm{Hz}$$

1. Bakrena kuglica obješena je na niti dugoj 2 m te joj se amplituda u periodu od 6 minuta smanji od 5,5° na 4,4°. Odredite faktor prigušenja δ i period prigušenog njihanja. **(6 bodova)**

Rješenje:

Iz

$$\theta = \theta_0 e^{-\delta t}$$

slijedi faktor prigušenja

$$\delta = \frac{1}{t} \ln \frac{\theta_0}{\theta} = 6,198 \times 10^{-4}\, s^{-1}$$

Period neprigušenog titranja je $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g} = 2,8370067\, s$, a prigušenog

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/l - \delta^2}} = 2,8370068\, s.$$

Usporedbom T_0 i T slijedi da otpor zraka praktički ne utječe na period njihala iako utječe na amplitudu.

3.1 Uteg mase 200 g ovješen je na vertikalnu oprugu konstante elastičnosti 30 N m^{-1}. Faktor prigušenja titranja je 0.7 s^{-1}. Na uteg djeluje periodička sila maksimalnog iznosa 3 N. Kolika treba biti frekvencija sile da bi amplituda titranja utega ovješenog na oprugu bila 10 cm?

Rješenje:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{30}{0.2}}\, s^{-1} = 12.247\, s^{-1}$$

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\,\delta^2\,\omega^2}}$$

$$0.1 = \frac{\frac{3}{0.2}}{\sqrt{\left(\frac{30}{0.2} - \omega^2\right)^2 + 4\,0.7^2\,\omega^2}}$$

$$\omega = \sqrt{300 - 4\,0.7^2}\, s^{-1}$$

$$\omega = 17.264\, s^{-1}$$

1. U-cijev je napunjena tekućinom mase m i gustoće ρ. Unutarnji polumjer cijevi je r. Odredite frekvenciju titranja tekućine oko ravnotežnog položaja. (7 bodova)

Rješenje:

U odnosu na ravnotežni položaj visina tekućine je x, a razlika je $2x$, tada je sila koja vraća tekućinu u ravnotežu jednaka težini neuravnoteženog stupca:

$$m\ddot{x} = mg = \rho V g = \rho(2xr^2\pi)g, \tag{1}$$

sređivanjem jednadžba harmoničkog oscilatora glasi:

$$\ddot{x} + \frac{2\pi r^2 \rho g}{m} x = 0, \tag{2}$$

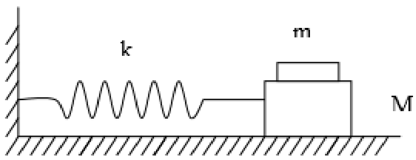
slijedi kružna frekvencija:

$$\omega^2 = \frac{2\pi r^2 \rho g}{m}, \tag{3}$$

konačno frekvencija ($\omega = 2\pi\nu$) je:

$$\nu = \sqrt{\frac{r^2 \rho g}{2\pi m}}. \tag{4}$$

1. Za prikazani oscilatorni sustav na slici, nađite maksimalnu amplitudu oscilacija tako da gornja masa ne sklizne s donje. Uzmite da je koeficijent trenja među masama $\mu = 0.2$, $M = 10m = 10\ g$, a konstanta elastičnosti opruge $k = 1 Nm^{-1}$. **<u>(10 bodova)</u>**



Rješenje:
- maksimalna akceleracija koju može podnijeti mala masa dobije se iz uvjeta:

$$ma = \mu mg$$

- iz diferencijalna jedn. sustava na slici

$$(m+M)\ddot{x} + kx = 0$$

slijedi rješenje za pomak

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

i akceleraciju

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$$

iz čega slijedi da je maximalna amplituda oscilacija dana izrazom

$$A = \frac{m+M}{k}\mu g = 2.2\ cm$$