3. PRIGUŠENO TITRANJE

3.1. JEDNADŽBA GIBANJA I RJEŠENJA ZA SLABO PRIGUŠENJE

U jednostavnom harmoničkom titranju nema gubitaka zbog trenja i ukupna mehanička energija je održana. Amplituda se ne mijenja s vremenom i smatramo je konstantom.

SLIKA: a) NEPRIGUŠENO, b) PRIGUŠENO TITRANJE – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.25. STR. 40

NEPRIGUŠENO TITRANJE

Uteg koji titra na opruzi u zraku (prigušeno slabo - gotovo neprigušeno titranje).

Ako postoje gubici energija (npr. zbog trenja i sl.), amplituda će se s vremenom smanjivati i na kraju će titranje prestati.

PRIGUŠENO TITRANJE

Uteg koji titra na opruzi uronimo u neku viskoznu tekućinu (npr. ulje).

Kod prigušenog titranja energija nije konstantna nego se s vremenom smanjuje $\frac{dE}{dt} < 0$.

Pretpostavljamo da je sila trenja proporcionalna brzini:

$$\vec{F} = -b\vec{v} = -b\frac{d\vec{s}}{dt}$$

Tu je *b* konstanta trenja (pozitivna veličina), a – predznak je su sila trenja i brzina suprotnog smjera.

Jednadžba gibanja (2. Newtonov zakon):

$$m\vec{a} = \overrightarrow{F_{opr}} + \overrightarrow{F_{tr}} \qquad \text{(vektorski)}$$

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -ks - b\frac{ds}{dt} \; / : m \qquad \text{(skalarno)}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{ds}{dt} + \frac{ks}{m} = 0$$

Označimo: $\frac{b}{m} = 2\delta$ i $\frac{k}{m} = \omega_0^2$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_o^{\ 2} s = 0$$ (homogena linearna diferencijalna jednadžba)

$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - vlastita frekvencija neprigušenog oscilatora

δ - faktor prigušenja

Rješenje je oblika: $s(t) = a(t)\sin(\omega t + \varphi_o) = A_e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_o)$

Sa slike za prigušeno titranje vidimo da je $s(t)$ sinusoidalna fja čija se amplituda eksponencijalno smanjuje.

Deriviramo jednom pa dva puta $s(t)$:

$$s(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_o)$$

$$\frac{ds}{dt} = A(-\delta)e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_o) + \omega A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_o)$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = A(-\delta)^2 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_o) - A\omega\delta e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_o) +$$

$$+ \omega A(-\delta)e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_o) - \omega^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_o)$$

Uvrstimo to u jednadžbu gibanja:

$$A\delta^2 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) - A\omega\delta e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0) - A\omega\delta e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0) - A\omega^2 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) -$$
$$- 2\delta^2 A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + 2\delta A\omega e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega_0^{\ 2} A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) = 0$$

$$Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)\left[\delta^2 - \omega^2 - 2\delta^2 + \omega_0^2\right] + Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)\left[-\omega\delta - \omega\delta + 2\delta\omega\right] = 0$$

$$\left[\omega_0^2 - \omega^2 - \delta^2\right] Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_o) = 0 \qquad (*)$$

U svakom trenutku relacija (*) mora biti zadovoljena pa je onda: $\left[\omega_0^2 - \omega^2 - \delta^2\right] = 0$

Slijedi: $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$, odn. $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ je frekvencija prigušenih titraja.

$\omega < \omega_0$

Što je trenje veće, to je veće prigušenje. Amplituda $a = Ae^{-\delta t}$ se eksponencijalno smanjuje s vremenom $\rightarrow$ što je faktor prigušenja δ veći, to se amplituda a brže smanjuje.

Možemo pretpostaviti i rješenje oblika:

$$s(t) = Ae^{i(\omega t+\varphi_0)}$$

$$\frac{ds}{dt} = Ai\omega e^{i(\omega t+\varphi_0)}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = A(i\omega)^2 e^{i(\omega t+\varphi_0)} = Ai^2\omega^2 e^{i(\omega t+\varphi_0)} = -A\omega^2 e^{i(\omega t+\varphi_0)} = -A\omega^2 e^{i(\omega t+\varphi_0)}$$

Uvrstimo u:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta\frac{ds}{dt} + \omega_0{}^2 s = 0$$

$$-A\omega^2 e^{i(\omega t+\varphi_0)} + 2\delta Ai\omega e^{i(\omega t+\varphi_0)} + \omega_0{}^2 Ae^{i(\omega t+\varphi_0)} = 0$$

$$\left[-\omega^2 + 2\delta i\omega + \omega_0{}^2\right]Ae^{i(\omega t+\varphi_0)} = 0$$

$$-\omega^2 + 2i\delta\omega + \omega_0{}^2 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2} = \frac{-2i\delta \pm \sqrt{4(i\delta)^2 + 4\omega_0^2}}{-2}$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-2i\delta \pm 2\sqrt{-\delta^2 + \omega_0{}^2}}{-2} = i\delta \pm \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}$$

Razmatrat ćemo 3 moguća slučaja:

1) $\delta^2 < \omega_0^2$ malo ili slabo prigušenje
2) $\delta^2 > \omega_0^2$ aperiodičko prigušenje
3) $\delta^2 = \omega_0^2$ kritično prigušenje

Za slabo prigušenje je $\omega_0^2 - \delta^2 > 0$, pa rješenje jednadžbe možemo pisati kao:

$s(t) = Ae^{-\delta t} e^{i(\omega t + \varphi_0)} = Ae^{-\delta t} e^{i\omega t} e^{i\varphi_0}$

gdje je: $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$

Realni dio te fje je: $s(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$
Imaginarni dio: $s(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$

Oba dijela su rješenja jednadžbe gibanja pa možemo uzeti samo jedno od njih, npr. $s(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$.

3.2. APERIODIČKO I KRITIČNO GUŠENJE

Ako je trenje preveliko, sustav ne može titrati.

Prigušenje δ je tada tako veliko ($\delta^2 > \omega_0^2$) da se zatitrano tijelo, kad dosegne određenu amplitudu, vraća u ravnotežni položaj mjesto da titra. To je APERIODIČNO TITRANJE.

U $\omega_{1,2} = i\delta \pm \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}$ je izraz ispod korijena negativan, a frekvencija imaginarna.

Ako je $\omega = i\omega'$, onda rješenje jednadžbe gibanja možemo pisati u obliku:

$$s(t) = e^{-\delta t}(Ash\omega' t + Bch\omega' t)$$

Hiperbolne fje su:

$$sh\omega' t = \frac{1}{2}(e^{\omega' t} - e^{-\omega' t})$$
$$ch\omega' t = \frac{1}{2}(e^{\omega' t} + e^{-\omega' t})$$

Ako je u $t = 0$ $s(t) = 0$, onda je:

$$s(t) = Ae^{-\delta t} sh\omega' t \qquad (**), \qquad \omega' = \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

To možemo provjeriti uvrštavanjem, ali nećemo. Rješenje (**) je produkt dviju funkcija:

- eksponencijalne
- sinusa hiperbolnog

SLIKA: a) APERIODIČNO JE TITRANJE PRODUKT EKSPONENCIJALNE I HIPERBOLIČNE FUNKCIJE – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.27a). STR. 44

SLIKA: b) APERIODIČNO TITRANJE ZA RAZLIČITA PRIGUŠENJA – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.27b). STR. 45

$\delta_1 = 12,6 s^{-1}$
$\delta_2 = 6,5 s^{-1}$
$\delta_3 = 6,3 s^{-1}$
$\omega_0 = 6,3 s^{-1}$

Ovisno o omjeru δ / ω_0 aperiodično titranje može imati različite oblike. U slučaju 3 elongacija relativno brzo pada na nulu - to je granica između prigušenog i aperiodičnog titranja i zove se KRITIČNO GUŠENJE.

Sustav se pri kritičnom prigušenju vraća u položaj ravnoteže u najkraćem vremenu.

Zato se kritično gušenje javlja kod mjernih instrumenata koji mjere iznenadni impuls i zatim se moraju vratiti u ravnotežno stanje u što kraćem vremenu (npr. seizmograf).

3.3. LOGARITAMSKI DEKREMENT PRIGUŠENJA I *Q*-FAKTOR

Omjer dviju susjednih amplituda a_1 i a_2 (slika s početka) koje se razlikuju u vremenu za period T je:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a(t)}{a(t+T)} = \frac{Ae^{-\delta t}}{Ae^{-\delta(t+T)}} = \frac{Ae^{\delta t}}{Ae^{-\delta t}e^{-\delta T}} = e^{\delta T}$$

Logaritamski dekrement prigušenja λ je logaritam tog omjera:

$$\lambda = \ln\frac{a(t)}{a(t+T)} = \ln(e^{\delta T}) = \delta T$$

Logaritamski dekrement λ i period T se mogu mjeriti pa pomoću njih određujemo faktor prigušenja δ, odnosno konstantu trenja $b = 2m\delta$.

Q-faktor (faktor kvalitete ili dobrote) pokazuje kako brzo sustav gubi energiju pri prigušenom titranju (uz slabo prigušenje):

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

Što je Q veći, prigušenje δ je manje, odnosno manji je gubitak energije iz titrajnog sustava.

Često se *Q*-faktor definira kao omjer srednje ukupne energije titrajnog sustava $\overline{E}$ između 2 susjedne pozitivne amplitude (npr. a_1 i a_2) i gubitka energije u tom intervalu:

$$Q = 2\pi\frac{\overline{E}}{\Delta E}$$

$$\overline{E} = \frac{1}{4}k({a_1}^2 + {a_2}^2)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}k({a_1}^2 - {a_2}^2)$$

$$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{4}k(A^2 e^{-2\delta t} + A^2 e^{-2\delta(t+T)})}{\frac{1}{2}k(A^2 e^{-2\delta t} - A^2 e^{-2\delta(t+T)})} = \pi \frac{(e^{-2\delta t} + e^{-2\delta t} e^{-2\delta T})}{(e^{-2\delta t} - e^{-2\delta t} e^{-2\delta T})} =$$

$$\pi \frac{(1+e^{-2\delta T})}{1-e^{-2\delta T}} = \frac{\pi(1+e^{-\delta T} e^{-\delta T})}{1-e^{-\delta T} e^{-\delta T}} = \frac{\pi e^{-\delta T}}{e^{-\delta T}} \frac{(e^{\delta T} + e^{-\delta T})}{e^{\delta T} - e^{-\delta T}}$$

$$Q = \pi \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{e^{\lambda} - e^{-\lambda}} \qquad \text{uz} \qquad tgh\lambda = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}$$

$$Q = \frac{\pi}{tgh\lambda}$$

Za mali λ je tgh $\lambda \approx \lambda$ pa slijedi:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}$$

U dobrim titrajnim sustavima *Q*-faktor je reda veličine 10^3-10^4.

SLIKA: DVA TITRAJNA SUSTAVA S RAZLIČITIM PRIGUŠENJEM – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.26. STR. 43

$Q = 100$	$Q = 10$
$T = 1$s	$T = 1$s
$\delta = 0{,}031 s^{-1}$	$\delta = 0{,}31 s^{-1}$

Što je veći *Q*, manje je prigušenje δ. Neprigušeni harmonički oscilator $Q \to \infty$

3.4. ENERGIJA KOD PRIGUŠENOG TITRANJA

Za idealni harmonički oscilator vrijedi da je energija konstantna veličina u vremenu.

Kod prigušenog harmoničkog oscilatora energija se smanjuje. Brzina promjene energije u vremenu je:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}(E_k(s') + E_p(s)) = \frac{ds'}{ds'}\frac{dE_k}{dt} + \frac{ds}{ds}\frac{dE_p}{dt} = \frac{ds'}{dt}\frac{d}{ds'}(\frac{1}{2}ms'^2) + \frac{ds}{dt}\frac{d}{ds}(\frac{1}{2}ks^2)$$

$$\frac{dE}{dt} = s''\frac{1}{2}m2s' + s'\frac{1}{2}k2s = ms''s' + ks's = (ms'' + ks)s'$$

$ms'' + bs' + ks = 0$ (jednadžba prigušenog harmoničkog titranja)

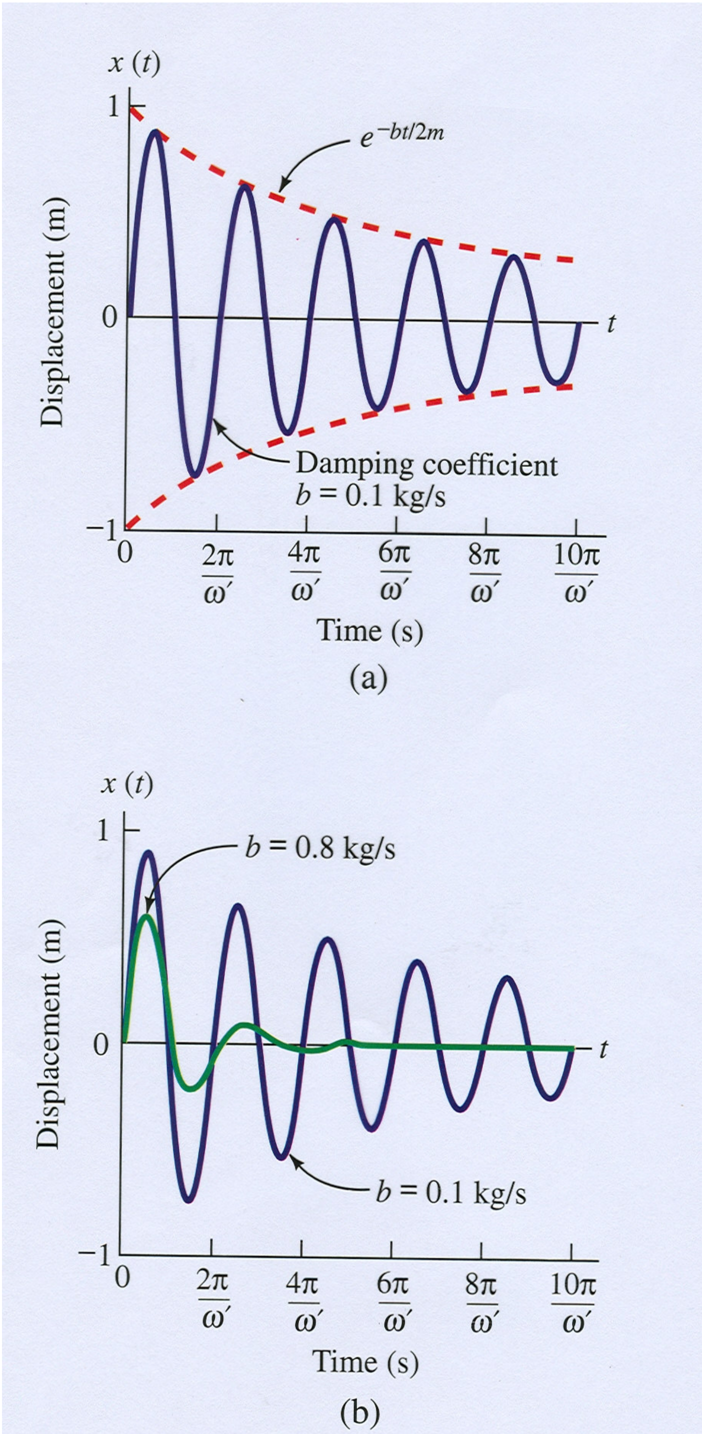
$$ms'' + ks = -bs'$$

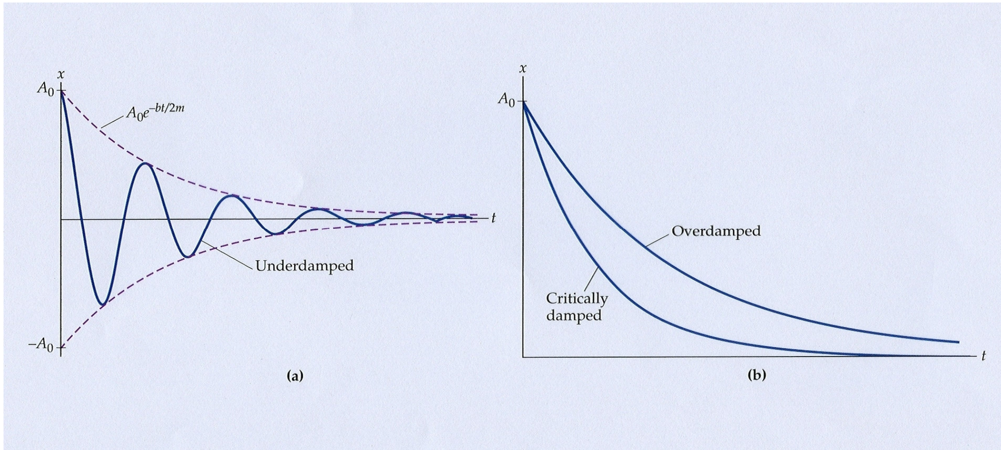
$$\frac{dE}{dt} = -bs's' = -bs'^2 = -bv^2$$

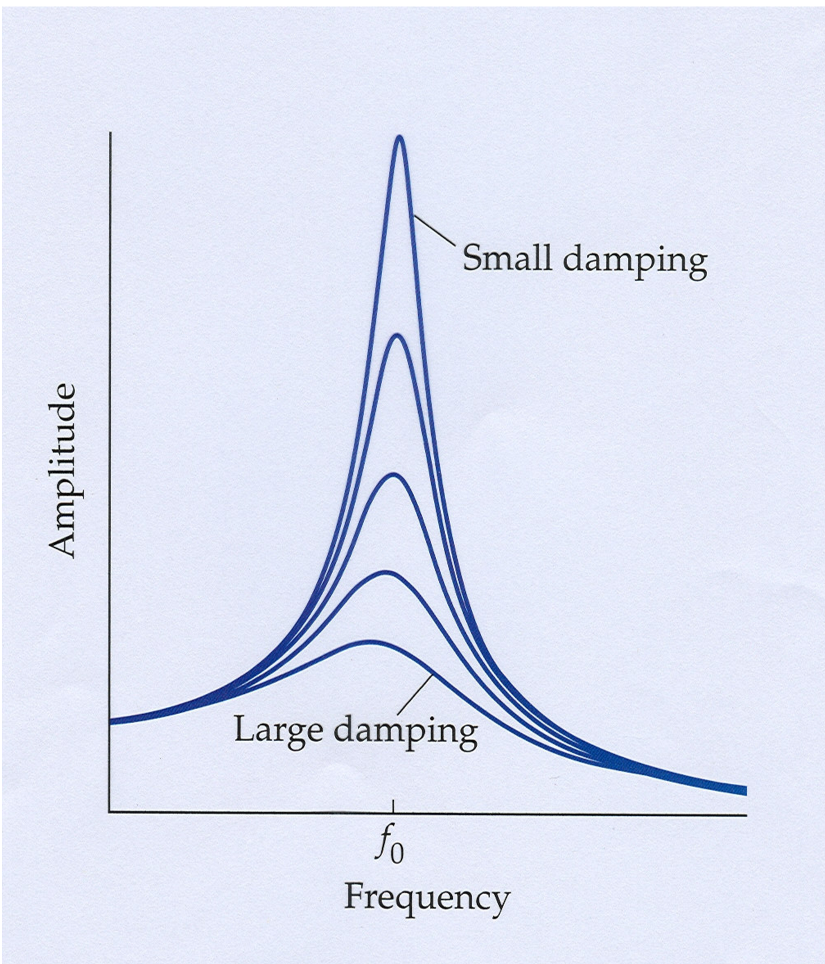
Brzina gubitka energije sustava proporcionalna je kvadratu brzine v^2 kad je disipativna sila linearno proporcionalna brzini ($F_{tr} \propto v$).

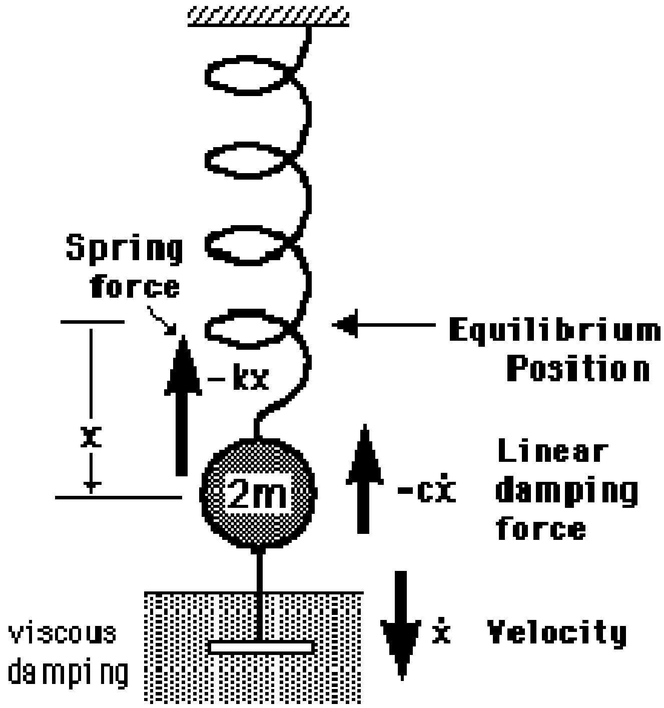
Ovo vrijedi bez obzira na jakost prigušenja.

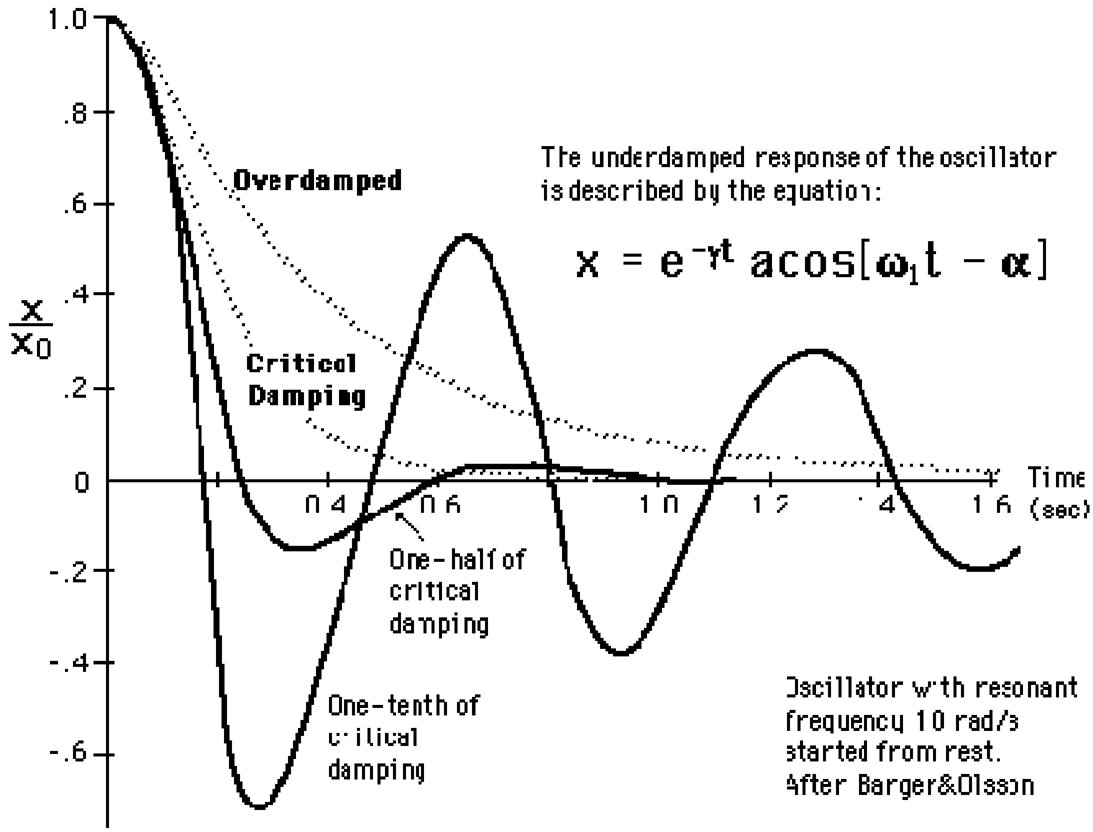
Vremenska promjena energije je snaga, a snaga je umnožak sile (-bv) i brzine (v).

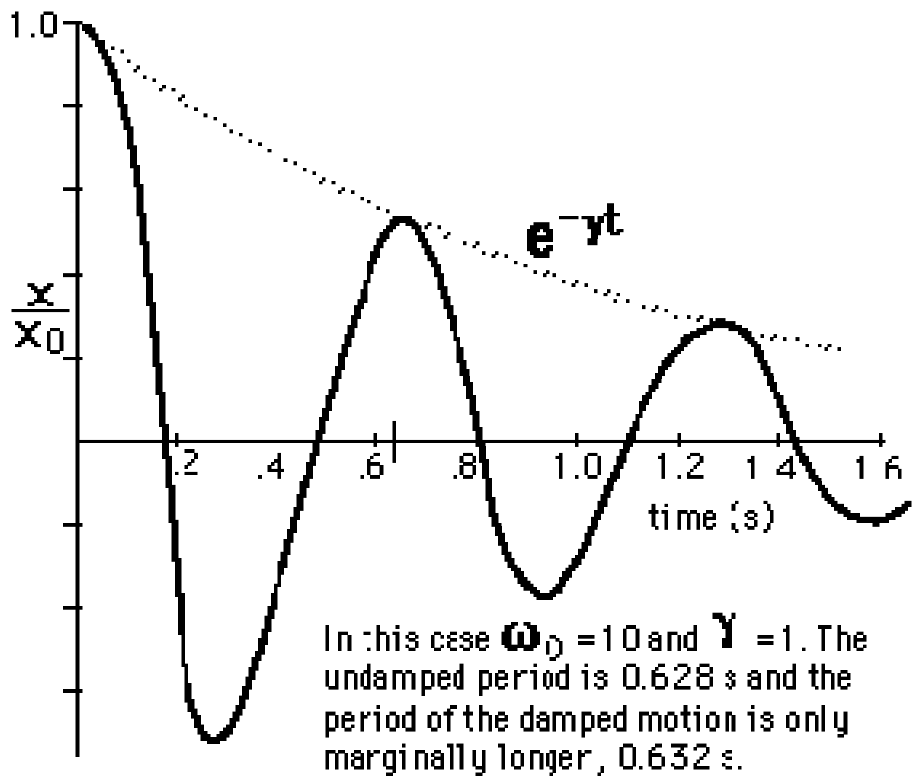

x (t)
1
0
−1
e^{−bt/2m}
Displacement (m)
Damping coefficient
b = 0.1 kg/s
t
0
2π/ω′
4π/ω′
6π/ω′
8π/ω′
10π/ω′
Time (s)
(a)
x (t)
1
0
−1
b = 0.8 kg/s
b = 0.1 kg/s
Displacement (m)
t
0
2π/ω′
4π/ω′
6π/ω′
8π/ω′
10π/ω′
Time (s)
(b)


x
A_0
$A_0e^{-bt/2m}$
t
Underdamped
$-A_0$
(a)
x
A_0
Overdamped
Critically damped
t
(b)


Small damping
Amplitude
Large damping
f_0
Frequency


Spring
force
$-kx$
x
2m
Equilibrium
Position
$-c\dot{x}$
Linear
damping
force
viscous
damping
$\dot{x}$
Velocity


1.0
.8
.6
.4
.2
0
-.2
-.4
-.6
x/x0
Overdamped
Critical Damping
The underdamped response of the oscillator is described by the equation:
x = e^-γt acos[ω1t - α]
0.4
0.6
1.0
1.2
1.4
1.6
Time (sec)
One-half of critical damping
One-tenth of critical damping
Oscillator with resonant frequency 10 rad/s started from rest.
After Barger&Olsson


1.0
x/x0
e^-γt
.2
.4
.6
.8
1.0
1.2
1.4
1.6
time (s)
In this case ω0 =10 and γ =1. The undamped period is 0.628 s and the period of the damped motion is only marginally longer, 0.632 s.