1. UVOD U TEORIJU ELASTIČNOSTI. HARMONIČKO TITRANJE

NAPREZANJE I DEFORMACIJA

Sila može djelovati na tijelo na 2 načina:

- može mu promijeniti stanje gibanja
- može mu promijeniti oblik i veličinu

Na tijelo mogu djelovati 2 vrste vanjskih sila:

- površinske (npr. sila hidrostatskog tlaka u fluidima)
- volumne (npr. gravitacijska sila)

DEFORMACIJA čvrstog tijela je promjena dimenzija i volumena tijela te je obično praćena promjenom oblika tijela.

ELASTIČNOST je svojstvo materijala – nakon prestanka djelovanja vanjskih sila:

- savršeno elastična tijela se vraćaju u početni oblik
- savršeno plastična tijela potpuno zadržavaju svoj deformirani oblik
- djelomično elastična tijela se ponašaju negdje između ova 2 ekstrema

Makroskopske promjene dimenzija, volumena i oblika tijela kod deformacije, praćene su promjenama na mikroskopskom nivou (npr. mijenjanje razmaka molekula u kristalnoj rešetci, pojava dodatnih sila – unutrašnje elastične sile) no tome se nećemo ovdje baviti.

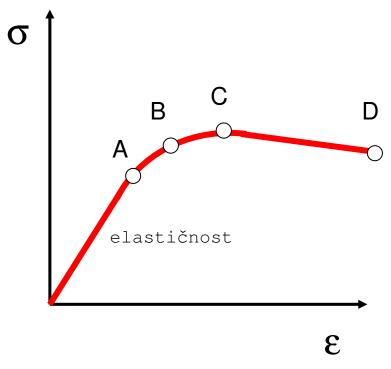
Fizikalnu veličinu NAPREZANJE σ definiramo kao iznos sile F na površinu S:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Jedinica naprezanja je N/m².

RELATIVNA DEFORMACIJA ε , koja nastaje kao posljedica naprezanja, definira se kao omjer promjene dimenzije nakon djelovanja sile i početne (originalne) dimenzije tijela prije djelovanja sile:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}$$



SLIKA: OVISNOST NAPREZANJA O RELATIVNOJ DEFORMACIJI – HORVAT – SL. 1.2. STR. 1-3

U području elastičnosti (OA) naprezanje materijala je linearno proporcionalno relativnoj deformaciji: $\sigma \propto \varepsilon$ (Hookeov zakon).

Točka B je granica elastičnosti nakon koje dolazi područje plastičnosti.

Točka C određuje maksimalnu čvrstoću, tj.maksimalno naprezanje koje materijal može izdržati bez popuštanja.

U točki D dolazi do kidanja materijala.

Deformacija, koja nastaje pri graničnom naprezanju, zove se PREKIDNO RASTEZANJE.

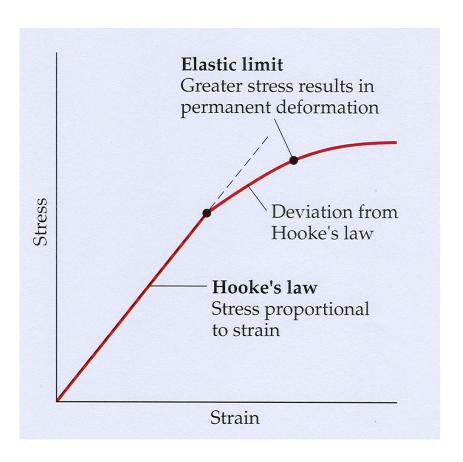
U našim razmatranjima ćemo se zadržati u području elastičnosti.

Elastične deformacije i Hookeov zakon možemo objasniti promatrajući mikroskopsku strukturu. U kristalnoj rešetci čvrstih tijela bez naprezanja atomi se nalaze u svojim ravnotežnim položajima na ravnotežnom razmaku r_0 .

SLIKA: OVISNOST SILE O RAZMAKU ATOMA U KRISTALNOJ REŠETCI – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.6. STR. 8

Linearna ovisnost sile o pomaku manifestira se u linearnoj ovisnosti elastične sile o deformaciji (Hookeov zakon).

Pri deformaciji se razmak među atomima mijenja – povećava ili smanjuje ovisno o deformaciji. Javljaju se privlačne, odn.odbojne sile koje se suprotstavljaju djelovanju vanjske sile.



IZOTROPNOST I ANIZOTROPNOST MATERIJALA

Za neke materijale nije svejedno u kojem smjeru djeluje sila, tj. materijal ima različita svojstva u različitim smjerovima.

ANIZOTROPNI MATERIJALI su materijali koji općenito imaju različita svojstva (optička, toplinska, električna) u različitim smjerovima.

IZOTROPNI MATERIJALI imaju jednaka svojstva u svim smjerovima.

Ako na anizotropni materijal djeluje sila u proizvoljnom smeru, možemo je rastaviti na normalnu i tangencijalnu komponentu i definirati odgovarajuća naprezanja:

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S} = \frac{F \cos \alpha}{S}$$

$$\sigma_t = \frac{F_t}{S} = \frac{F \sin \alpha}{S}$$

 α je kut pod kojim djeluje sila \overrightarrow{F} .

Naprezanje nije ni skalar ni vektor, već posebna matematička veličina – TENZOR.

Za određivanje naprezanja u pojedinoj točki potrebno je znati 6 veličina (3 za normalno i 3 za tangencijalno naprezanje) pomoću kojih pokrivamo bilo koju ravninu koja prolazi tom točkom.

U jednostavnim slučajevima sve te komponente iščezavaju osim jedne pa s naprezanjem radimo kao sa skalarnom veličinom.

VRSTE NAPREZANJA. MODULI ELASTIČNOSTI

Razlikujemo 3 vrste naprezanja:

- vlačno
- tlačno
- torziono (ili smicanje)

Za svaki oblik naprezanja imamo karakterističnu relativnu deformaciju:

- vlačno $L \to L + \Delta L, \mathcal{E}_L$ - tlačno $V \to V + \Delta V, \mathcal{E}_V$ - torziono $\phi \to \phi + \Delta \phi, \mathcal{E}_{\phi}$

U području elastičnosti linearnu vezu između naprezanja i deformacije možemo izraziti konstantom proporcionalnosti, koja u sebi sadrži svojstvo materijala s obzirom na odgovarajuće naprezanje. Tu konstantu zovemo MODUL ELASTIČNOSTI.

$$Modul\ elastičnosti = \frac{naprezanje}{rel.deformacija} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F/S}{\varepsilon}$$

VLAČNO NAPREZANJE (Istezanje – naprezanje na vlak)

SLIKA: ISTEZANJE ŠIPKE ORIGINALNE DULJINE L I POVRŠINE PRESJEKA S-HORVAT-SL. 1.3. STR. 1-4

Razmotrimo šipku duljine L i površine poprečnog presjeka S načinjenu od elastičnog materijala. Šipka je učvršćena na jednom kraju, a na drugom djeluje sila tako da šipku rasteže – govorimo o vlačnom naprezanju.

Relativna deformacija \mathcal{E}_L je omjer promjene (povećanja) duljine štapa ΔL i početne duljine štapa L:

$$\varepsilon_L = \frac{\Delta L}{L}$$

S obzirom da je u području elastičnosti naprezanje proporcionalno relativnoj deformaciji, slijedi: $\frac{F}{S} \propto \frac{\Delta L}{L}$

Konstanta proporcionalnosti je YOUNGOV MODUL ELASTIČNOSTI: $E = \frac{F/S}{\Delta L/L}$

To je veličina karakteristična za pojedini materijal, a red veličine je 10^9 - 10^{11} N/m².

Eksperimentalno je utvrđeno da se materijal zbog rastezanja u duljinu steže u svim smjerovima okomito na smjer rastezanja.

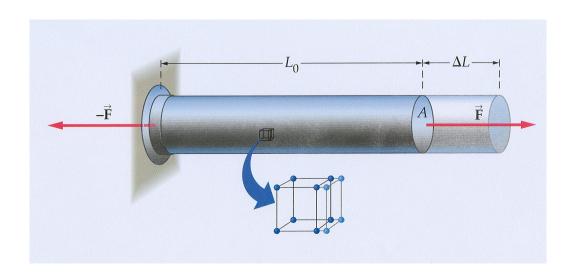
SLIKA: DEFORMACIJA ŠTAPA – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.2. STR. 4

Kod longitudinalnog rastezanja imamo lateralno stezanje (poprečne dimenzije se smanjuju).

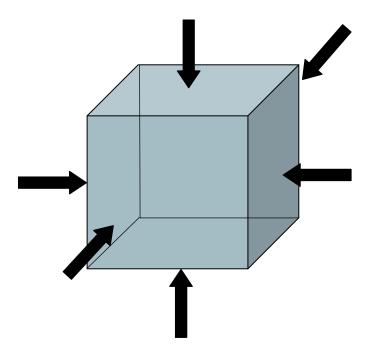
POISSONOV BROJ opisuje lateralno stezanje: $\mu = -\frac{\Delta d / d}{\Delta L / L}$

To je pozitivna veličina jer je $\Delta d < 0$.

Materijal	Poissonov broj
Beton	0,1
Čelik	0,25
Aluminij	0,33
Guma	0,46



TLAČNO NAPREZANJE (Naprezanje na tlak)



SLIKA: NAPREZANJE NA TLAK (TLAČNO NAPREZANJE) – HORVAT – SL. 1.6. STR. 1-8

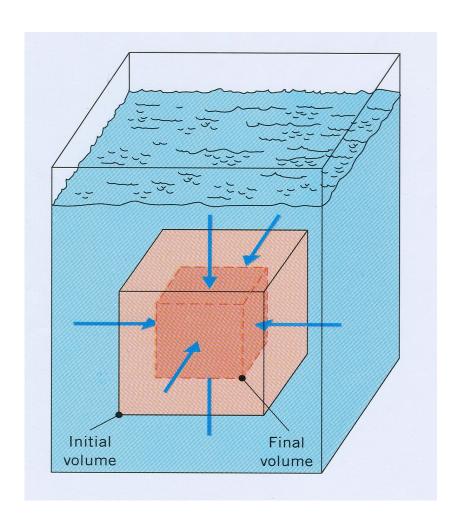
Razmatrat ćemo kocku na čije stranice sa svih strana djeluju jednake sile. Zbog naprezanja dolazi do deformacije koja predstavlja promjenu (smanjenje) volumena.

Definiramo VOLUMNI MODUL ELASTIČNOSTI *B*:
$$B = -\frac{\sigma}{\varepsilon_V} = -\frac{F/S}{\Delta V/V}$$

Predznak – jer se moduli elastičnosti definiraju kao pozitivni. ΔV <0 je volumna kontrakcija tijela.

Tlačno naprezanje se češće razmatra kod tekućina pa se uvodi veličina KOMPRESIBILNOST κ , koja opisuje promjenu volumena kao posljedicu djelovanja tlaka na fluid:

$$\kappa = \frac{1}{B} = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p}$$



SMICANJE (Torziono naprezanje – smik)

SLIKA: SMICANJE – DONJA JE POVRŠINA UČVRŠĆENA – HORVAT – SL. 1.8. STR. 1-9

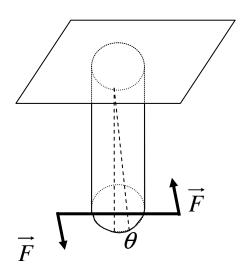
Smicanje nastaje kad je sila F usmjerena tangencijalno jednoj površini dok je druga površina, paralelna njoj, učvršćena.

Relativna deformacija = (pomak gornje stranice površine S na koju djeluje sila paralelna površini) / (debljina materijala)

$$\varepsilon_{x} = \frac{\Delta x}{h}$$

MODUL SMICANJA G = (naprezanje na smicanje) / (relativna deformacija) = $\frac{F/S}{\Delta x/h}$ (ili MODUL TORZIJE)

Do smicanja, odn. torzije dolazi i kod zakretanja valjkastog tijela (okrugli štap, žica i sl.) duljine l i promjera 2r koji je učvršćen na jednom kraju. Na slobodnom kraju djeluje par sila. Gornjom bazom tap ostaje učvršćen za podlogu, a ostali se presjeci zakreću više što su dalje od učvršćene baze. θ je kut zakreta slobodnog kraja štapa.



SLIKA: TORZIJA OKRUGLOG ŠTAPA – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 1.9. STR. 11

Kut torzije je proporcionalan momentu para sila: $M = D\theta$ $D = \frac{G\pi r^4}{2I}$

G – modul smicanja r – polumjer valjka

l – duljina (visina) valjka

M – moment para sila

 θ - kut torzije

Veza između modula elastičnosti (na auditornim vježbama):

$$E = 2G(1 + \mu)$$

$$B = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{3G} + \frac{1}{9B}$$

E – Youngov modul elastičnosti

G – modul smicanja ili torzije

B – volumni modul elastičnosti

 μ - Poissonov broj

