

Zadaci za vježbu

*Da sam prazna glava potpuno zdrava
ne bih više ništa učio zabadava
samo onolko kolko mi treba
da još ostanem paf od tolikog neba*

(Mile, HP)

Elastičnost

- 1 Zadatak:** Homogeni štap duljine ℓ , načinjen od materijala gustoće ρ i Youngova modula elastičnosti E , obješen je o svoj kraj. Uslijed težine samog štapa dolazi do njegova produljenja. Izračunaj ukupno produljenje štapa $\Delta\ell$ pretpostavljajući $\Delta\ell \ll \ell$.

$$\mathbf{Rj:} \quad \Delta\ell = \rho g \ell^2 / 2E$$

- 2 Zadatak:** Izvedi izraz koji opisuje produljenje homogenog štapa duljine ℓ , načinjenog od materijala Youngova modula E i gustoće ρ , koji se okreće kutnom brzinom ω oko osi okomite na štap koja prolazi njegovim središtem mase.

$$\mathbf{Rj:} \quad \Delta\ell = \rho \omega^2 \ell^3 / 12E$$

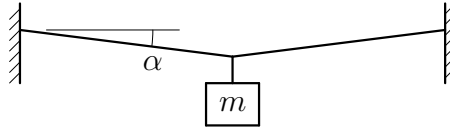
- 3 Zadatak:** Tanki homogeni obruč polumjera R , načinjen od materijala gustoće ρ i Youngova modula elastičnosti E , okreće se oko svoje osi kutnom brzinom ω . Odredi povećanje polumjera obruča do kojeg dolazi uslijed centrifugalne sile.

$$\mathbf{Rj:} \quad \Delta R = \rho \omega^2 R^3 / E$$

- 4 Zadatak:** Izvedi izraz za konstantu torzije ($D = M/\phi$, omjer momenta sile M i kuta zakreta ϕ) homogene cijevi duljine L , polumjera R , debljine stijenke $\Delta R \ll R$, načinjene od materijala modula torzije G . Zatim poopći izraz za konstantu torzije cijevi unutarnjeg polumjera R_1 i vanjskog polumjera R_2 .

$$\mathbf{Rj:} \quad D_\Delta = 2GR^3\pi\Delta R/L, \quad D_{12} = G(R_2^4 - R_1^4)\pi/2L$$

- 5 Zadatak:** Vodoravna žica promjera $d = 0.7 \text{ mm}$ i zanemarive mase napeta je silom $T_0 = 100 \text{ N}$ i učvršćena je u krajnjim točkama. Zatim je ta žica na sredini raspona opterećena utegom mase $m = 1 \text{ kg}$, nakon čega kut otklona žice u odnosu na njen početni (vodoravni) položaj iznosi $\alpha = 2^\circ$. Odredi Youngov modul elastičnosti E materijala od kojeg je žica načinjena. (ubrzanje grav. sile $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$)



$$\text{Rj: } E = \frac{4}{d^2\pi} \left(\frac{mg}{2\sin\alpha} - T_0 \right) / \left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1 \right) = 1.728 \times 10^9 \text{ Pa}$$

- 6 Zadatak:** Predmet mase m vješamo o strop s pomoću dviju niti koje su za stop pričvršćene na razmaku $2a$. Niti su jednakih duljina ℓ , površina poprečnog presjeka S , i načinjene od materijala Youngova modula E . Odredi vertikalni pomak obješenog tijela do kojeg dolazi uslijed rastezanja niti.

$$\text{Rj: } \Delta h = \frac{mg\ell}{2ES} \left(1 - \frac{a^2}{\ell^2} \right)$$

- 7 Zadatak:** Odredi kut zakreta osovine koja povezuje brodski motor i elisu ako motor pri kutnoj brzini $\omega = 180 \times 2\pi \text{ rad min}^{-1}$ razvija snagu $P = 12 \text{ kW}$. Duljina osovine je $L = 2 \text{ m}$, promjer $2R = 3 \text{ cm}$, a načinjena je od čelika konstante torzije $D =$.

$$\text{Rj: } \phi = 2PL/GR^4\pi\omega \simeq$$

Titranja

- 8 Zadatak:** Tijelo mase m_1 nalijeće brzinom v_1 na tijelo mase m_2 koje je oprugom konstante k spojeno za čvrsto uporište i miruje. Odredi amplitudu titranja tijela na opruzi nakon sraza tijela m_1 i m_2 pod pretpostavkom da je sraz (a) elastičan, (b) savršeno neelastičan.

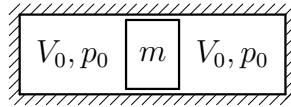


$$\text{Rj: } A_{(a)} = \frac{2m_1v_1}{m_1+m_2} \sqrt{\frac{m_2}{k}}, \quad A_{(b)} = \frac{m_1v_1}{\sqrt{(m_1+m_2)k}}$$

- 9 Zadatak:** Dvjesto jednakim oprugama zanemarivih masa, ravnotežnih duljina ℓ_0 i konstanti k , sitno tijelo mase m zakvačeno je za uporišta međusobno udaljena $d > 2\ell_0$ (u ravnotežnom položaju opruge su napete). Odredi kružnu frekvenciju malih titraja tijela (a) duž pravca koji prolazi uporištima i (b) u smjeru okomitom na pravac koji prolazi uporištima.

$$\text{Rj: } \omega_{(a)}^2 = 2k/m, \quad \omega_{(b)}^2 = 2k(1 - 2\ell_0/d)/m$$

- 10 Zadatak:** Pomični klip mase m i površine poprečnog presijeka S nalazi se u cilindru zatvorenom na oba kraja. Sa svake strane klipa nalazi se jednaka količina plina adijabatske konstante κ . Kada je klip u ravnotežnom stanju, plin s jedne i s druge strane klipa je pri istoj temperaturi i zauzima obujam V_0 pri tlaku p_0 . Pretpostavljajući da klip klizi bez trenja, da plin ne protječe pored klipa, te da je proces sažimanja/širenja plina adijabatski, odredi kružnu frekvenciju malih titraja klipa oko ravnotežnog položaja.

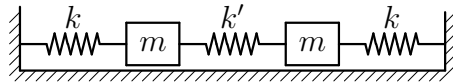


Rj: $\omega^2 = 2S^2 p_0 \kappa / m V_0$

- 11 Zadatak:** Homogena kugla polumjera r i mase m položena je na dno sferne udubine polumjera zakrivljenosti $R > r$. Odredi kružnu frekvenciju malih titraja ako kugla kotrljaajući se bez klizanja “njiše” oko ravnotežnog položaja.

Rj: $\omega^2 = 5g/7(R - r)$

- 12 Zadatak:** Sustav koji se sastoji od dvaju jednakih masa m , dvaju jednakih opruga konstante k , te jedne opruge konstante k' , prikazan je na slici u ravnotežnom položaju. Odredi omjer titrajnih vremena tog sustava u slučaju kada mase titraju (a) jednakim amplitudama u istom smjeru (‘u fazi’) i (b) kada one titraju jednakim amplitudama u suprotnim smjerovima (‘u profufazi’).



Rj: $\omega_{(a)}^2 = k/m, \quad \omega_{(b)}^2 = (k + 2k')/m$

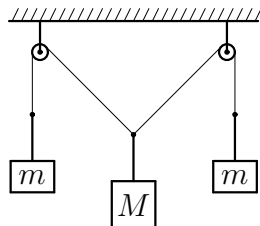
- 13 Zadatak:** Kada kruto tijelo njiše oko čvrste vodoravne osi (fizičko njihalo) njegov period pri malim titrajima neka je T . Koliki će biti period istog njihala ako se i tijelo i os nagnu tako da os zatvara kut α s vodoravnom ravninom.

Rj: $T' = T/\sqrt{\cos \alpha}$

- 14 Zadatak:** Kotač mase m čiji moment tromosti u odnosu na os simetrije možemo napisati kao $I_{\text{CM}} = m\kappa^2$ može slobodno njihat oko vodoravne osi koja je paralelna s osi simetrije i koja ga probada na udaljenosti b od njegova središta. Odredi udaljenost b za koju je period malih titraja najkraći.

Rj: $b = \kappa$

- 15 Zadatak:** Sustav prikazan na slici titra oko ravnotežnog položaja tako da se utezi gibaju duž uspravne osi (kada se mase m podižu, masa M se spušta). Odredi frekvenciju malih titraja ako je razmak među koloturama d , a polumjer kolotura se može zanemariti.



Rj: $\omega^2 = \frac{g}{mMd}(2m - M)^{3/2}(2m + M)^{1/2}$

- 16 Zadatak:** Kada muzička vilica titra u zraku, ona titra frekvencijom $f = 440$ Hz, a amplituda titranja se smanjuje na jednu polovinu početne vrijednosti u vremenu $\tau = 10$ s. Kada bi ista vilica titrala u sredstvu u kojem bi njena frekvencija iznosila $f' = 439$ Hz, koliko bi iznosilo vrijeme τ' ?

Rj: $\tau' = \left((2\pi/\ln 2)^2 (f^2 - f'^2) + \tau^{-2} \right)^{-1/2} = 3.72 \times 10^{-3} \text{ s}$

- 17 Zadatak:** Oscilator s kritičnim faktorom prigušenja δ pokrenut je u gibanje iz ravnotežnog položaja brzinom v_0 . Odredi maksimalnu elongaciju koju će oscilator postići.

Rj: $x_{\max} = v_0/e\delta$

- 18 Zadatak:** Ovjes automobila možemo shvatiti kao oprugu s prigušenjem. Masa praznog automobila neka iznosi $m = 1000$ kg, a rezonantna frekvencija $\omega_r = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$. Opteretimo li taj automobil teretom mase $\Delta m = 500$ kg on će se spustiti ('sjesti') za $\Delta h = 10$ cm. Kolika će biti rezonantna frekvencija tako opterećenog automobila?

Rj: $\omega'_r = \sqrt{\frac{g}{\Delta h} \left(1 + \left(\frac{m}{m+\Delta m} \right)^2 - \frac{2m}{m+\Delta m} \right) + \omega_r^2 \left(\frac{m}{m+\Delta m} \right)^2} = 5.333 \text{ rad s}^{-1}$

Valovi

- 19 Zadatak:** Gornji kraj homogene žice duljine ℓ i linijske gustoće mase μ je učvršćen, dok je o donji kraj žice obješen uteg mase M . Koliko vremena transverzalni valni paket putuje s gornjeg na donji kraj žice? Također razmotriti slučajeve $\mu\ell \ll M$ i $M \rightarrow 0$.

$$\mathbf{Rj:} \quad t = \frac{2}{\sqrt{\mu g}} \left(\sqrt{M + \mu \ell} - \sqrt{M} \right), \quad t_{\mu \ell \ll M} = \ell \sqrt{\frac{\mu}{Mg}}, \quad t_{M \rightarrow 0} = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

- 20 Zadatak:** Transverzalni valni paket koji u trenutku $t = 0$ ima oblik $y(x) = a e^{-x^2/b^2}$, gdje su a i b konstante, putuje užetom linijske gustoće mase μ i napetosti T (u ravnoteži uže leži na x -osi). Odredi maskimalni iznos transversalne brzine koju postižu čestice užeta.

$$\mathbf{Rj:} \quad |v_y|_{\max} = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{2T}{e\mu}}$$

- 21 Zadatak:** Žica promjera $2R = 0.01''$ načinjena od čelika Youngova modula elastičnosti $E = 2.2 \times 10^{11} \text{ Pa}$ i gustoće $\rho = 7700 \text{ kg m}^{-3}$ razapeta je na rasponu duljine $\ell = 25.5''$. Odredi silu napetosti i odgovarajuće relativno produljenje žice ako ona u osnovnom modu titra frekvencijom $f = 330 \text{ Hz}$. ($1'' = 1 \text{ in} \simeq 2.54 \times 10^{-2} \text{ m}$, podaci odgovaraju gitarskoj žici 1E.)

$$\mathbf{Rj:} \quad T = (2\ell f)^2 \rho R^2 \pi = 71.3 \text{ N}, \quad \frac{\Delta \ell}{\ell} = (2\ell f)^2 \rho / E = 6.40 \times 10^{-3}$$

- 22 Zadatak:** Avion leti duž vodoravnog pravca brzinom $v_a = v_0/2$, gdje je v_0 brzina širenja zvuka, odašiljući zvuk frekvencije $f_a = 100 \text{ Hz}$. Izračunaj frekvenciju koju čuje mirni prijatelj na tlu u trenutku kada se avion nalazi točno iznad njega. (Uzeti u obzir 'kašnjenje zvuka'.)

$$\mathbf{Rj:} \quad f_p = f_a / (1 - (v_a/v_0)^2)$$

- 23 Zadatak:** Vozite se stalnom (dopuštenom) brzinom v_1 i slušate sirenu službenog vozila koje vas sustiže stalnom brzinom $v_2 > v_1$, prestiže vas i nastavlja svojim poslom. Pretpostavljamo $v_2 < v_0$, gdje je v_0 brzina zvuka. Označimo li s f frekvenciju sirene koju čujete prije, a s f' frekvenciju koju čujete nakon što vas službeno vozilo prestigne, odredite omjer f'/f . (Ako sirena 'zavija', neka f i f' označavaju u vremenu usrednjenu frekvenciju sirene koju čujete.)

$$\mathbf{Rj:} \quad \frac{f'}{f} = \frac{1 - \beta_1 \beta_2 - (\beta_2 - \beta_1)}{1 - \beta_1 \beta_2 + (\beta_2 - \beta_1)}, \text{ gdje je } \beta_{1,2} = v_{1,2}/v_0$$

- 24 Zadatak:** Mirni prijatelj čuje zvuk frekvencije $f_p = 1200 \text{ Hz}$. Poznato je da zvuk potječe od izvora frekvencije $f_i = 1000 \text{ Hz}$ koji se gibao brzinom $v_i = 250 \text{ km h}^{-1}$. Brzina zvuka iznosi $v_0 = 340 \text{ m s}^{-1}$. Pod kojim kutom u odnosu na pravac koji spaja izvor i prijatelj se gibao izvor?

$$\mathbf{Rj:} \quad \cos \alpha = (1 - f_i/f_p)(v_0/v_i), \quad \alpha \simeq 35.31^\circ$$

Elektromagnetizam

- 25 Zadatak:** Dvije kuglice jednakih masa m obješene su u istoj točki o niti jednakih duljina ℓ . Niti su bezmasene, nerastezljive i nevodljive. Dovedemo li na svaku kuglicu naboj q , zbog elektrostatskog odbijanja niti će zatvarati kut 2α . Izrazi naboj q s pomoću m , ℓ , α i g , gdje je g ubrzanje gravitacijske sile, uz pretpostavku $\alpha \ll 1$.

$$\text{Rj: } q = 2\ell\sqrt{(4\pi\epsilon_0)mg} \sin\alpha \sqrt{\tan\alpha} \simeq 2\ell((4\pi\epsilon_0)mg)^{1/2} \alpha^{3/2}$$

- 26 Zadatak:** Električni naboj jednoliko je raspoređen duž tankog obruča polumjera R . Odredi udaljenost od središta obruča do točke na osi obruča u kojoj je iznos električnog polja maksimalan.

$$\text{Rj: } d = R/\sqrt{2}$$

- 27 Zadatak:** Dva beskonačna paralelna ravna linijska vodiča razmaknuta d vode u suprotnim smjerovima struje jakosti I i $2I$. Razmatramo jakost magnetskog polja u ravnini u kojoj leže vodiči, i to u dijelu ravnine između dva vodiča. Na kojoj udaljenosti od vodiča kojim teče slabija struja je jakost magnetskog polja najmanja?

$$\text{Rj: } r = (\sqrt{2} - 1)d$$

- 28 Zadatak:** Duž pravca je raspoređen električni naboj linijske gustoće $\lambda = 2 \text{ C m}^{-1}$. Kolika bi električna struja I morala teći istim pravcem pa da iščezne elektromagnetska (Lorentzova) sila na nabijenu česticu koja se usporedno s pravcem giba brzinom v ?

$$\text{Rj: } I = \lambda c^2/v$$

- 29 Zadatak:** Vodljivi štap duljine ℓ okreće se oko svog kraja kutnom brzinom ω u ravnini okomitoj na homogeno magnetsko polje B . Odredi iznos (napon) inducirane elektromotorne sile na krajevima štapa.

$$\text{Rj: } \mathcal{E} = \ell^2 \omega B/2$$