RJEŠENJA PRVOG MEĐUISPITA IZ FIZIKE 2
19.10.2010.

TEORIJA:

1.1. Materijalna točka koja harmonički titra:
a) nikad nije u ravnoteži jer stalno djeluje sila.
b) u ravnoteži je u sredini putanje jer je tamo njeno ubrzanje 0. TOČNO
c) nikad nije u ravnoteži jer se stalno giba.
d) u ravnoteži je na krajevima putanje jer je tamo njena brzina 0.
e) u ravnoteži je na krajevima putanje jer je tamo njeno ubrzanje 0. (1 bod)

1.2. Mehanički titrajni sustav čini homogeni valjak mase m povezan s elastičnom oprugom konstante k. Valjak se giba (titra) bez klizanja po hrapavoj horizontalnoj podlozi. Njegova diferencijalna jednadžba titranja (za mali pomak x) glasi: $\frac{3}{2}m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$. Kolika je vlastita (kružna) frekvencija titranja sustava?
a) $\omega=\frac{k}{m}$
b) $\omega=0$
c) $\omega=\frac{3m}{2k}$
d) $\omega=\sqrt{\frac{2k}{3m}}$ **TOČNO**
e) $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ (1 bod)

1.3. Glazbenik ugađa gitaru prema određenom izvoru zvuka povećavajući ili smanjujući napetost žice koju ugađa. Glazbenik pri tom slušajući istovremeno zvuk prema kojem ugađa žicu i onaj proizveden zatitranom žicom na gitari smatra žicu ugođenom ako:
a) čuje jako veliki broj udara.
b) čuje mali broj udara.
c) udari nemaju nikakve veze s ugađanjem žice.
d) ne čuje udare. TOČNO (1 bod)

1.4. Masivna kugla vezana je oprugom za čvrsto uporište i uronjena u viskoznu tekućinu. Sustav se ponaša kao kritično prigušeni oscilator. Povećamo li masu kugle, pri čemu se polumjer kugle, konstanta opruge i viskozitet tekućine ne mijenjaju, sustav će se ponašati kao:
a) slabo prigušeni oscilator
b) kritično prigušeni oscilator
c) jako (snažno) prigušeni oscilator TOČNO
d) ništa od navedenog (ne može se odrediti) (1 bod)

1.5. Progresivni harmonički val širi se elastičnim sredstvom. Njegov matematički zapis je $y(t,x) = 0{,}2\sin\left[\pi(t+x)\right]$. (Sve veličine su u jedinicama SI.) Napišite u odgovarajućim jedinicama koliki su:

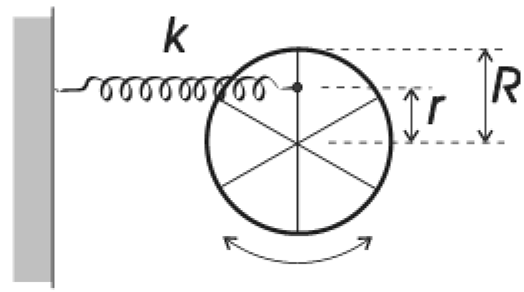
a) amplituda________________________ A = 0,2 m
b) frekvencija______________________ f = 0,5 s^{-1}
c) kružna frekvencija________________ $\omega = \pi$ s^{-1}
d) iznos valnog vektora – valni broj____ $k = \pi$ m^{-1}
e) brzina___________________________ v = 1 m/s
f) period___________________________ T = 2 s (1 bod)

2.1. Izvedite rješenje diferencijalne jednadžbe titranja za slučaj slabog prigušenja uz detaljna objašnjenja. (3 boda)

2.2. Izvedite valnu jednadžbu za transverzalni val na napetoj žici uz detaljna objašnjenja i slike. Napišite rješenje valne jednadžbe. (2 boda)

ZADACI:

1. Kotač, koji se sastoji od tankog homogenog obruča mase 2,6 kg, polumjera R i 6 žbica duljine R, svaka mase 0,1 kg, može rotirati oko nepomične horizontalne osi koja prolazi kroz središte kotača i okomita je na ravninu kotača. Opruga konstante elastičnosti 25 Nm^{-1} pričvršćena je jednim krajem u točku na žbici kotača na udaljenosti $r = \frac{3}{4}R$ od središta kotača, a drugim krajem u točku na vertikalnom zidu s lijeve strane kotača. Koliki je period malih titraja koje izvodi kotač pod utjecajem opruge? (4 boda)



Rješenje:

$m_1 = 2,6$ kg
$m_2 = 0,1$ kg
R, 6 žbica
$k = 25$ N/m
$r = \frac{3}{4}R$

$T = ?$

Kad se kotač iz ravnotežnog položaja zarotira za mali kut θ, javlja se sila opruge koja daje moment sile s obzirom na os oko koje kotač može rotirati:

$M = -kr\theta \cdot r$ koji teži smanjiti θ.

Prema jednadžbi gibanja za rotaciju krutog tijela:

$$-kr^2\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Za kotač sa žbicama:

$$I = m_1R^2 + 6\cdot\frac{m_2R^2}{3} = (m_1 + 2m_2)R^2$$

Uvrštavanjem u jednadžbu gibanja:

$$-kr^2\theta = (m_1 + 2m_2)R^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{kr^2}{(m_1 + 2m_2)R^2}\theta = 0$$

Dobili smo jednadžbu gibanja harmoničkog oscilatora gdje je:

$$\omega=\sqrt{\frac{kr^2}{(m_1+2m_2)R^2}}=\frac{r}{R}\sqrt{\frac{k}{m_1+2m_2}}$$ kružna frekvencija titranja.

Period titranja je:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$T=2\pi\frac{R}{r}\sqrt{\frac{m_1+2m_2}{k}}$$

Uvrštavanjem numeričkih vrijednosti:

$$T=2\pi\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2{,}6+2\cdot 0{,}1}{25}}\ \mathrm{s}=2{,}8\ \mathrm{s}$$

2. Čelična žica promjera 1 mm i duljine 3 m razapeta je između dva zida silom 2200 N. Ako žica titra frekvencijom osnovnog moda (načina titranja) s maksimalnom amplitudom od 2 cm, odredite maksimalnu brzinu koju postiže žica. Gustoća željeza je 7800 kg/m^3. (3 boda)

Rješenje:

d = 1 mm = 0,001 m
l = 3 m
F = 2200 N
Osnovni mod
2A = 2 cm = 0,02 m
ρ = 7800 kg/m^3

---

v_{max} = ?

Osnovna frekvencija žice je dana izrazom:

$f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$, gdje je f frekvencija osnovnog moda, l duljina žice, F sila kojom je žica napeta i μ linearna gustoća žice. μ dobijemo iz izraza:

$\mu = \rho S = \rho\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi$, gdje je ρ gustoća, S površina presjeka, d/2 polumjer, odnosno d promjer žice.

Uvrštavanjem dobijemo: $f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}\frac{2}{d} = 99{,}87 \text{ Hz}$

Izraz za titranje žice napete između dva zida u osnovnom modu je:

$y = 2A \sin kx \cos \omega t$

Brzina je dana izrazom:

$v = \frac{dy}{dt} = -2A\omega \sin kx \sin \omega t$

Maksimalna brzina je:

$v_{max} = 2A\omega = 2A2\pi f = 12{,}55 \text{ m/s}$

3. Tijelo mase 2 kg harmonički titra amplitudom A_0. U jednom trenutku na njega počne djelovati sila otpora koja mu za t_0 = 7 s smanji amplitudu na jednu petinu početne amplitude A_0. Na takav sustav (koji titra prigušeno) počne djelovati vanjska periodička sila iznosa F_P = 0,3 N. Frekvencija vanjske sile jednaka je rezonantnoj frekvenciji sustava pa tijelo titra maksimalnom amplitudom jednakom A_r = 33 cm. Izračunajte rezonantnu frekvenciju ν_r. (3 boda)

Rješenje:

m = 2 kg
t_0 = 7 s
A_0
F_P = 0,3 N
A_r = 33 cm = 0,33 m

ν_r = ?

Gibanje tijela (prije djelovanja sile otpora) opisano je ovako: $x(t) = A_0 \cos \omega_0 t$

Nakon što počne djelovati sila otpora, gibanje je opisano ovako:

$x(t) = A(t)\cos \omega t = A_0 e^{-\delta t} \cos \omega t$

Nakon vremena t_0 amplituda se promijeni od A_0 na κA_0 gdje je $\kappa = 1/5 = 0{,}2$, tj.

$A(t) = A_0 e^{-\delta t_0} = \kappa A_0$, odakle je: $\delta = -\dfrac{1}{t_0}\ln \kappa = 0{,}23\ \text{s}^{-1}$

Rezonantna kružna frekvencija jednaka je $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, a amplituda koja općenito izgleda ovako

$$A(\omega_P) = \frac{F_P / m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_P^2\right)^2 + \left(2\delta\omega_P\right)^2}}$$

za $\omega_P = \omega_r$ postaje rezonantna amplituda:

$$A_r = A(\omega_r) = \frac{F_P / m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Iz gornjeg izraza pronađemo kružnu frekvenciju ω_0

$\omega_0 = \sqrt{\left(\dfrac{F_P / m}{2\delta A_r}\right)^2 + \delta^2}$, pa je: $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\left(\dfrac{F_P / m}{2\delta A_r}\right)^2 - \delta^2} = 0{,}961\ \text{s}^{-1}$,

pa je konačno:

$$\nu_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = 0{,}153\ \text{Hz}$$