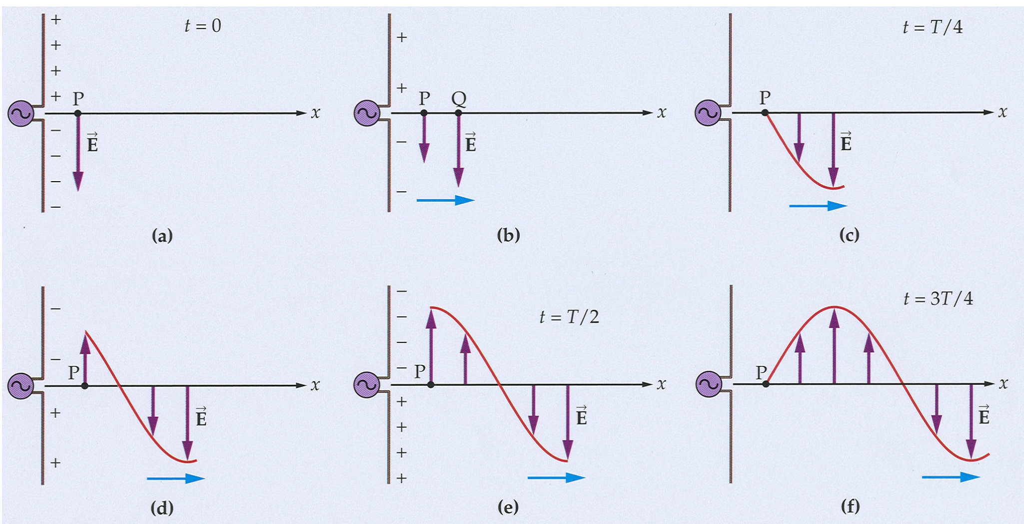
7.12. ELEKTROMAGNETSKI VALOVI

Otvaranjem titrajnog kruga dolazi ndo širenja promjenjivog električnog i magnetskog polja prostorom u obliku elektromagnetskih valova.

SLIKA: OTVORENI TITRAJNI KRUG – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 4.10. STR. 173.

Otvaranje titrajnog kruga postiže se povećavanjem razmaka između ploča kondenzatora i zavoja zavojnice. To vodi smanjenju kapaciteta i induktiviteta.

Potpunim otvaranjem ploča kondenzatora i zamjenom zavojnice pravocrtnim vodičem u krajnjem slučaju se dobije pravocrtni vodič u kojem titraju elektroni – OTVORENI TITRAJNI KRUG ili TITRAJUĆI DIPOL.



Proizvodnja EM vala

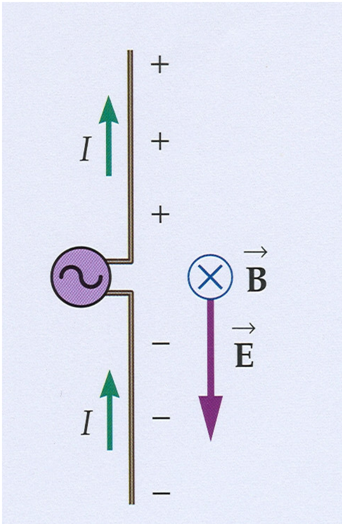
Titranje električnog i magnetskog polja prenosi se iz otvorenog titrajnog kruga u okolni prostor i oko kruga nastaje ELEKTROMAGNETSKO POLJE.

Otvoreni titrajni krug je IZVOR ELEKTROMAGNETSKIH VALOVA.

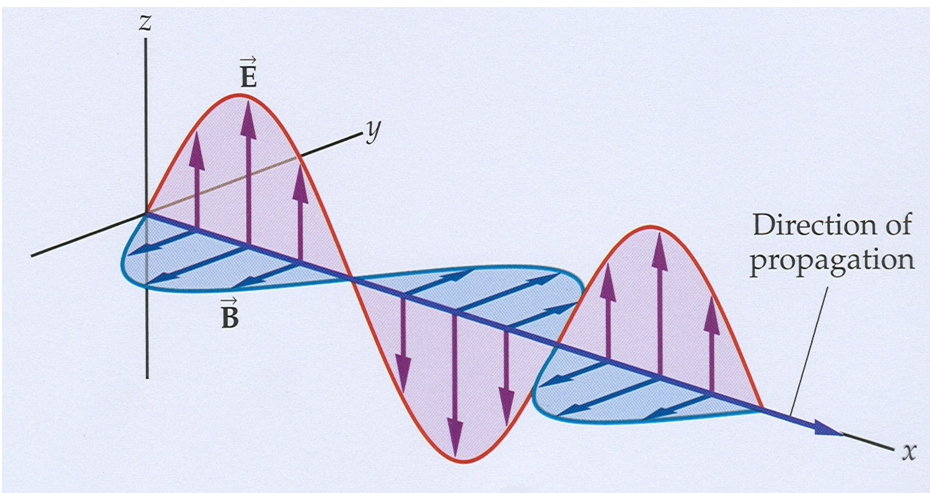
SLIKA: ELEKTROMAGNETSKI VAL DIPOLA – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 4.13. STR. 175. ($)

SLIKA: TRENUTNA SLIKA SINUSIODALNOG ELEKTROMAGNETSKOG VALA – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 4.14. STR. 175. (#)

Harmonički ravni EM val – 2 međusobno okomite sinusoide – jedna za električno, druga za magnetsko polje – oba vektora titraju u fazi – pravilo desne ruke (prstima kraćim putem od električnog do magnetskog polja, palac smjer širenja vala).



Smjerovi polja u EM valu

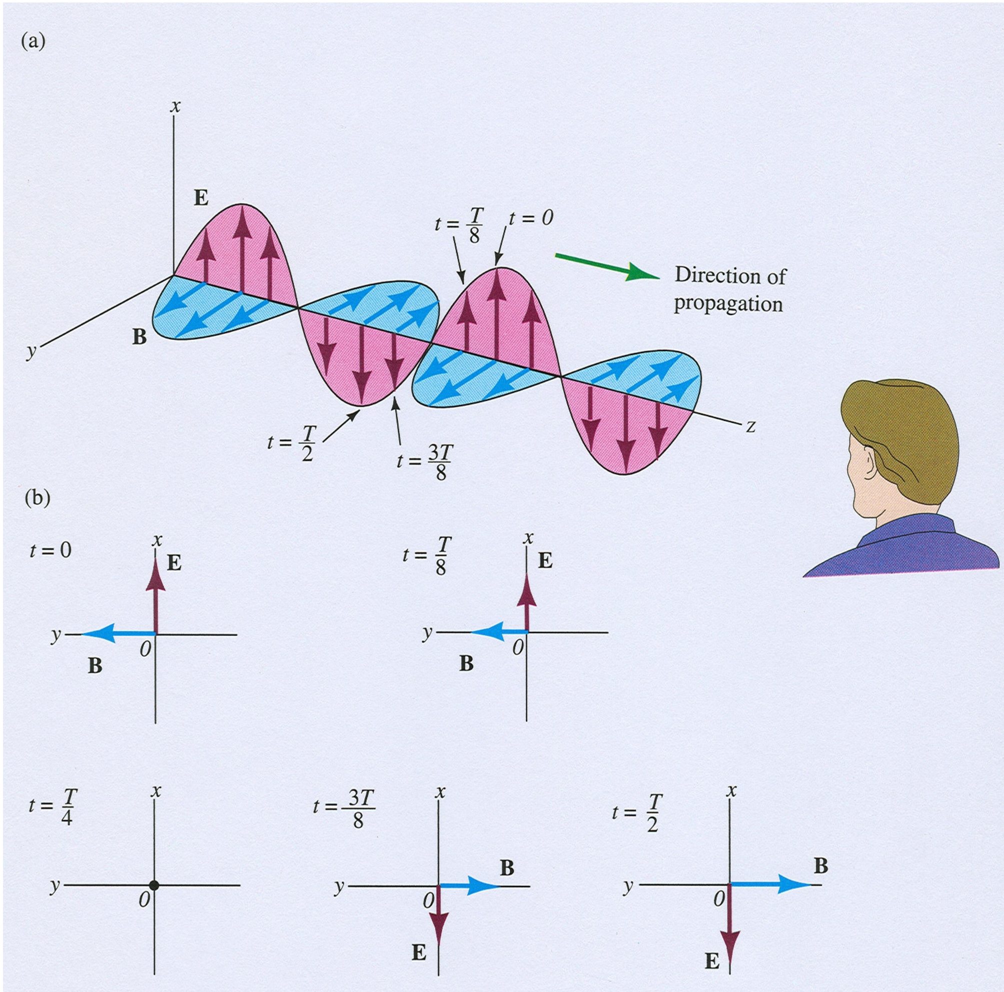


Pravilo desne ruke primijenjeno na EM val

Iz dipola se širi kuglasti EM val čiji smjer širenja daje radijus-vektor. Električno i magnetsko polje su međusobno okomiti, a okomiti su i na smjer širenja vala.

Ako oko dipola zamislimo kuglu radijusa r tako da polarna os kugle prolazi kroz dipol, onda jakost električnog polja u bilo kojoj točki kugle ima smjer tangente na meridijan, a jakost magnetskog polja smjer tangente na paralelu (slika ($)).

Polje dipola je POLARIZIRANO.



(a)
x
E
$t = \frac{T}{8}$
$t = 0$
Direction of propagation
y
B
z
$t = \frac{T}{2}$
$t = \frac{3T}{8}$
(b)
$t = 0$
x
E
y
0
B
$t = \frac{T}{8}$
x
E
y
0
B
$t = \frac{T}{4}$
x
y
0
$t = \frac{3T}{8}$
x
B
y
0
E
$t = \frac{T}{2}$
x
B
y
0
E

7.12.1. IZVOD VALNE JEDNADŽBE ZA EM VALOVE

Promatrat ćemo EM valove u homogenom izotropnom prostoru bez struja i naboja tako da je: $\vec{J} = 0, \rho = 0, \varepsilon = konst, \mu = konst.$

Maxwellove jednadžbe u tom slučaju:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad (1) \qquad \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\iint_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad (3)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \qquad (2) \qquad \oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \cdot d\vec{S} \qquad (4)$$

Promatrat ćemo harmonički ravni EM val, koji putuje u smjeru osi z (kao na slici (#)). Vekotri električnog i magnetskog polja titraju okomito na smjer širenja vala. Odabiremo takav koordinatni sustav da električno polje titra u smjeru osi x, a magnetsko u smjeru osi y – imamo samo E_x i B_y komponente.

(1) i (2) su zadovoljene jer tokovi električnog i magnetskog polja kroz bilo koju zatvorenu površinu su uvijek = 0.

Gledamo (3): $\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\iint_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S}$

SLIKA: UZ IZRAČUNAVANJE KRIVULJNOG INTEGRALA U 3. I 4. MAXWELLOVOJ JEDNADŽBI – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 4.17.a STR. 177.

Površina integracije S je pravokutnik u xz ravnini sa stranicama Δx i Δz.

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_x(z + \Delta z)\Delta x - E_x(z)\Delta x$$

$$-\iint_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} B_y \Delta x \Delta z$$

$$E_x(z + \Delta z)\Delta x - E_x(z)\Delta x = -\frac{\partial}{\partial t} B_y \Delta x \Delta z \,/ : \Delta x \Delta z \,/ \lim_{\Delta z \to 0}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}(E_x(z + \Delta z) - E_x(z)) = \frac{\partial}{\partial z} E_x = -\frac{\partial}{\partial t} B_y$$

Gledamo (4): $\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \cdot d\vec{S}$

SLIKA: UZ IZRAČUNAVANJE KRIVULJNOG INTEGRALA U 3. I 4. MAXWELLOVOJ JEDNADŽBI – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 4.17.b STR. 177.

Za integraciju imamo pravokutnik sa stranicama Δx i Δz u yz ravnini.

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_y(z)\Delta y - H_y(z+\Delta z)\Delta y$$

$$\iint_S \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} D_x \Delta y \Delta z$$

$$H_y(z)\Delta y - H_y(z+\Delta z)\Delta y = \frac{\partial}{\partial t} D_x \Delta y \Delta z \,/ : \Delta y \Delta z \,/ \lim_{\Delta z \to 0}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}(H_y(z) - H_y(z+\Delta z)) = -\frac{\partial}{\partial z} H_y = \frac{\partial}{\partial t} D_x \qquad \text{ili} \qquad \frac{\partial}{\partial z} B_y = -\varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} E_x$$

Uz: $D = \varepsilon E$ i $B = \mu H$

Imamo 2 jednadžbe i iz jedne eliminiramo npr. B_y pa dobijemo jednadžbu za samo jedno polje E_x:

$$\frac{\partial}{\partial z} E_x = -\frac{\partial}{\partial t} B_y \,/ \frac{\partial}{\partial z} \qquad \frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z} B_y \qquad -\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z} B_y$$

$$\frac{\partial}{\partial z} B_y = -\varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} E_x \,/ \frac{\partial}{\partial t} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z} B_y = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x \qquad -\varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z} B_y$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x = 0$$ valna jednadžba za električno polje

Slično eliminiramo E_x pa dobijemo:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} B_y - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} B_y = 0$$ valna jednadžba za magnetsko polje

Valnu jednadžbu još lakše možemo izvesti iz diferencijalnog oblika Maxwellovih jednadžbi:

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ (1) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (3)

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (2) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (4)

Gledamo (3) jednadžbu: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ / djelujemo operatorom $\vec{\nabla} \times (\ )$ s lijeve strane.

Općenito u vektorskoj analizi vrijedi za neki vektor $\vec{A}$ da je:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ = Laplaceov operator ili Laplaceijan $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ u pravokutnim koordinatama

$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ - nabla skalarno množena sama sa sobom

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\vec{\nabla} \times (\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \varepsilon\mu \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

Jer je: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ i $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon\mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

$$\Delta \vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$$

Istu stvar napravimo za magnetsko polje:

$$\Delta \vec{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = 0$$

7.12.2. BRZINA EM VALOVA

Sjetimo se jednadžbe transverzalnog vala na žici:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

Ovdje je *s* deformacija, a *v* brzina kojom val putuje u žici.

Analogno tome, brzina EM vala je: $v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu}}$

Brzina širenja EM vala u vakuumu će biti: $v = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}} = c$ = brzina svjetlosti

Svjetlost je EM val.

7.12.3. RJEŠENJA VALNE JEDNADŽBE

Najjednostavniji oblik valnog gibanja dobijemo kad izvor vala počne harmonički titrati.

Rješenja valne jednadžbe su analogna rješenjima za mehaničke valove:

$$E_x = E_0 \sin \omega (t - \frac{z}{v}) \qquad \omega = 2\pi f$$

$$H_y = H_0 \sin \omega (t - \frac{z}{v})$$

E_0, H_0 – amplitude EM polja

Ako se val širi u nekom smjeru koji je određen jediničnim vektorom $\vec{u}$, rješenje valne jednadžbe možemo pisati kao:

$$\vec{E} = \vec{E_0} \sin \omega (t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{u}}{v}) = \vec{E_0} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Također se rješenje valne jednadžbe može pisati u obliku: $\vec{E} = \vec{E_0} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

Ako znamo ovako općenita rješenja za električno polje, onda možemo jednoznačno odrediti rješenje za magnetsko polje iz Maxwellovih jednadžbi.

Također za ravni EM val općenito vrijedi:

$$\vec{B} = \sqrt{\varepsilon \mu} (\vec{u} \times \vec{E}) \qquad \text{i} \qquad \vec{E} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} (\vec{B} \times \vec{u})$$

$\vec{u}$ - jedinični vektor u smjeru širenja vala

Sad ćemo rezimirati svojstva rješenja električnog i magnetskog polja:
- vektori električnog i magnetskog polja su međusobno okomiti
- oba rješenja su transverzalna
- polja su u fazi, to jest u istom trenutku iščezavaju i u istom trenutku postižu svoju amplitudu
- amplituda magnetskog polja „reducirana“ je za faktor c u odnosu na amplitudu električnog polja: $B_0 = E_0 / c$
- gornja rješenja predstavljaju rješenja monokromatskog vala samo jedne frekvencije ν i valnog vektora $k = 2\pi / \lambda$
- brzina širenja valova u vakuumu je c

7.12.4. ENERGIJA EM VALA. POYNTINGOV VEKTOR

EM može prenositi energiju kroz prostor kao i svaki drugi val.

SLIKA: UZ IZRAČUNAVANJE INTENZITETA RAVNOGA EM VALA – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 4.19. STR. 185.

Promatramo infinitenzimalni sloj debljine $dz = vdt$ i površine S. Ukupna gustoća energije EM polja je zbroj gustoće energije električnog polja i gustoće energije magnetskog polja:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon E_x^2 + \frac{1}{2\mu}B_y^2$$

Budući su električno i magnetsko polje u EM valu vezani relacijom $H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_x$, doprinosi električnog i magnetskog polja gustoći energije su jednaki pa možemo pisati:

$w = \varepsilon E_x^2$ ili $w = \frac{1}{\mu}B_y^2$

U vremenu dt kroz površinu S prođe energija:

$$Pdt = wdV = wSdz = wSvdt \qquad P = wSv$$

Gustoća toka energije ili intenzitet EM vala je snaga po jediničnoj površini:

$$P/S = wv = \mathscr{S} = v\varepsilon E_x^2 = v\mu H_y^2 = E_x H_y \qquad (*)$$

Gustoća toka je vektorska veličina, a smjer joj je jednak smjeru širenja vala i zove se POYNTINGOV VEKTOR.

Iznos je dan relacijom (*), a vektorska veličina je: $\vec{E}\times\vec{H} = \frac{1}{\mu}(\vec{E}\times\vec{B})$

Gustoća energije harmoničkog EM vala mijenja se s vremenom: $w = \varepsilon E_0^2 \sin^2(\omega t - kz)$

SLIKA: OVISNOST GUSTOĆE ENERGIJE O VREMENU NA ODABRANOME MJESTU – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 4.20. STR. 186.

Srednja gustoća energije jednaka je polovici maksimalne vrijednosti: $\overline{w} = \frac{1}{2}\varepsilon E_0^2$ jer je $\overline{\sin^2(\omega t - kz)} = 1/2$.

Budući je: $\mathscr{S} = v\varepsilon E_x^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \sin^2(\omega t - kz)$,

srednja vrijednost je: $\mathscr{S}_{\mathrm{SREDNJE}} = \overline{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \sin^2(\omega t - kz)} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_o^2 = \frac{1}{2} E_0 H_0$