2. Transverzalni sinusoidni val kružne frekvencije $24\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ putuje žicom u smjeru $+x$ brzinom $8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Ako val u trenutku $t = 0$ ima maksimalnu (pozitivnu) elongaciju pri $x = 0$, izračunajte u kojim trenucima će val imati maksimalnu (pozitivnu) elongaciju pri $x = 2\,\mathrm{m}$. (7 bodova)

Rješenje:

Izračunajmo jednadžbu vala uz zadane podatke:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi), \tag{5}$$

gdje je:

$$k = \frac{\omega}{v} = 3\ \mathrm{m}^{-1}, \tag{6}$$

iz početnog uvjeta možemo izračunati fazu φ:

$$A = A\sin(\omega\cdot 0 - k\cdot 0 + \varphi) \Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \tag{7}$$

te imamo jednadžbu vala:

$$y(x,t) = A\cos(24t - 3x), \tag{8}$$

tražimo trenutke u kojima je val u amplitudnom položaju na koordinati $x = 2$ m:

$$y(2,t) = A = A\cos(24t - 6) \Longrightarrow 24t - 6 = 2n\pi, \tag{9}$$

$$t = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{12}n, \tag{10}$$

gdje je $n \in 0, \pm 1, \pm 2\ldots$

3. Dva sinusoidalna vala koja se razlikuju u fazi, a ostale veličine koje opisuju val su jednake, gibaju se u istom smjeru po napetoj niti i interferiraju da bi dale rezultantni val dan sa $y(x,t) = (3{,}0\,\mathrm{mm})\sin\left[\left(20\,\mathrm{m}^{-1}\right)x - \left(4{,}0\,\mathrm{s}^{-1}\right)t + 0{,}820\,\mathrm{rad}\right]$. Kolike su valna duljina i amplituda ova dva sinusoidalna vala i razlika u fazi između njih? **<u>(7 bodova)</u>**

$$y_1 = A\sin(kx - \omega t)$$

$$y_2 = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$y_1 + y_2 = 2A\cos\frac{\phi}{2}\sin(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}) = y$$

$$\phi = 1.64 rad$$

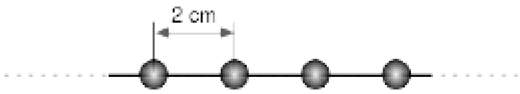
$$2A\cos\frac{\phi}{2} = 3.0mm$$

$$A = 2.2m$$

$$k = 20m^{-1}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0.314m$$

3.2 Male mase od 0.42 g su pričvršćene na dugoj niti bez mase na udaljenostima 2.0 cm. Napetost niti je 6.2 N. Transverzalni val valne duljine 34 cm i amplitude 4.1 mm putuje uzduž niti. Kolika je maksimalna akceleracija koju ima svaka kuglica?



Rješenje:

$$v = \sqrt{\frac{T}{m/L}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6.2\,\mathrm{N}}{2.1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg/m}}} = 17.2\ \mathrm{m/s}$$

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

$$f = \frac{17.2}{0.34}\,\mathrm{Hz} = 50.6\ \mathrm{Hz}$$

$$a_{\max} = \omega^2 A = 414.3\ \mathrm{m/s^2}$$

2. Dvije žice jednake duljine l=1m napete jednakim silama daju jednake tonove. Kada se, ne mijenjajući naprezanje, jedna žica skrati za 2 cm pri titranju se čuje 9 zvučnih udara u sekundi. Koje su u tom slučaju frekvencije titranja žica. (Napomena: uzmite da žice titraju osnovnim načinom to jest titraju osnovnom valnom duljinom). **(8 bodova)**

Rješenje:

Frekvencija udara je
$\nu_u = |\nu_1 - \nu_2|$
Brzina valova je
$v = \lambda_1 * \nu_1 = \lambda_2 * \nu_2$
Kako se radi o titranju osnovnom valnom duljinom
$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 * l_1 = 2 * l_2$
Jednu od žica skratimo
$l'_2 = l_2 - \Delta l = l_1 - \Delta l$
Kako se napetost ne mijenja kao ni linearna gustoća brzina valova ostaje ista te vrijedi
$\lambda_1 \nu_2 = \lambda'_2 \nu'_2 = 2 * l_1 \nu_1 = 2 * l'_2 \nu'_2 = 2 * (l_1 - \Delta l)\nu'_2$
Skraćena žica titrat će višom frekvencijom
$\nu'_2 = \nu_u + \nu_1$
Iz gornjih relacija može se dobiti
$\nu_1 = \nu_u \dfrac{l_1 - \Delta l}{\Delta l} = 441\ \mathrm{Hz}$
te
$\nu'_2 = 450\ \mathrm{Hz}$

3. Transverzalni puls na napetoj niti opisan je funkcijom:

$$y(x, t) = A\, exp[-b^2 (x - vt)^2]\ ,$$

gdje je A = 0.1 m, b = 4 m^{-1} , a brzina širenja pulsa v = 2 m/s. Izračunajte iznos maksimalne transverzalne brzine na niti u trenutku t = 0 s. **(5 bodova)**

Rješenje:

Transverzalna brzina niti je dana s:

$$v_y(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = 2Ab^2 v(x - vt) \exp[-b^2(x - vt)^2]\ .$$

Tražimo prvo položaj na niti gdje ta veličina ima maksimum:

$$\frac{\partial v_y(x,t)}{\partial x} = 2Ab^2 v \exp[-b^2(x - vt)^2] \left[1 - 2b^2(x - vt)^2\right] = 0\ .$$

U trenutku $t = 0$ s, maksimum iznosa brzine se nalazi na položajima $x_{\max} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}b}$.

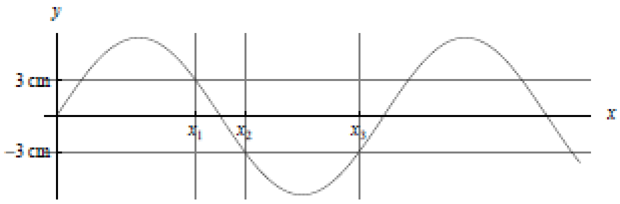
Sada izračunamo iznos transverzalne brzine u danom položaju i trenutku:

$$v_y(x_{\max}, t = 0) = 2Ab^2 v(x_{\max} - v\cdot 0) \exp[-b^2(x_{\max} - v\cdot 0)^2] = \sqrt{2}Abv \exp(-1/2)\ .$$

Za brojeve zadane u zadatku:

$$v_y(x_{\max}, t = 0) = 0.686\,\mathrm{m/s}\,.$$

Zadatak: Na užetu s čvrstim krajevima titra stojni val. Razmaci među susjednim točkama užeta koje titraju amplitudom 3 cm iznose $x_2 - x_1 = 3$ cm i $x_3 - x_2 = 7$ cm (vidi sliku). Odredi valnu duljinu λ i maksimalnu amplitudu A ovog stojog vala.



Postupak: Iz slike je očigledno da $x_3 - x_1 = \lambda/2$, odnosno,

$$\lambda = 2(x_3 - x_1) = 20 \text{ cm}$$

Također iz slike vidimo da mora vrijediti

$$x_{1,2} = \frac{\lambda}{2} \mp \frac{x_2 - x_1}{2}, \qquad x_1 = 8.5\,\text{cm}, \qquad x_2 = 11.5\,\text{cm}.$$

Sada napišemo stojni val kao

$$y[x,t] = A\sin[kx]\cos[\omega t] = A\sin[2\pi x/\lambda]\cos[\omega t],$$

odnosno amplitudu titranja točke na koordinati x kao

$$a[x] = A\sin[2\pi x/\lambda],$$

pa obzirom na zadane veličine imamo

$$a[x_1] = A\sin[2\pi x_1/\lambda],$$

iz čega slijedi (maksimalna) amplituda stojnog vala

$$A = \frac{a[x_1]}{\sin[2\pi x_1/\lambda]} \simeq 6.608 \text{ cm}$$

Rješenje: $\lambda = 20$ cm, $A \simeq 6.608$ cm

2. Cijev duga 1 m zatvorena je na jednom kraju. Napeta žica je postavljena kraj otvorenog kraja cijevi. Žica je 0,3 m duga, ima masu od 0,01 kg i titra osnovnom frekvencijom. Ona pobuđuje stupac zraka u cijevi na titranje tako da dolazi do rezonancije s osnovnom frekvencijom. Nađite napetost u žici. Za brzinu u zraku uzeti 340 m/s. (5 bodova)

Rješenje:
$l = 1$ m
$L = 0{,}3$ m
$m = 0{,}01$ kg
$v_z = 340$ m/s
<u>Osnovna frekvencija</u> $\quad \lambda = 2L$
$F = ?$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \mu = m/L \qquad v = \lambda f$$

$$l = \frac{2k+1}{4}\frac{v_z}{f_k},\ \text{k} = 0 \qquad l = \frac{1}{4}\frac{v_z}{f_0} \qquad f = f_0$$

$$F = mL\left(\frac{v_z}{2l}\right)^2 = 86{,}7 \text{ N}$$

2. Odredite omjer osnovnih frekvencija dvije jednake žice ako je jedna rastegnuta za 2% ,a druga za 4% u odnosu na neopterećenu duljinu. Pretpostavite da vrijedi Hooke-ov zakon. **(7 bodova)**

Osnovna frekvencija žice je:

$$f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Ako vrijedi Hookeov zakon sila je proporcionalna rastezanju:

$$F = k\Delta x = kl\eta$$

Gdje je η relativno produljenje (ovdje 0.02 i 0.04).

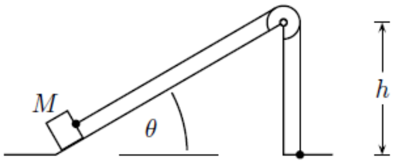
Produljenjem žice mjenja se i njena linearna gustoća (u odnosu na nerastegnutu):

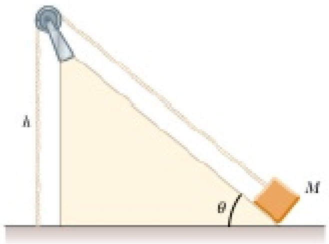
$$\mu = \frac{\mu_0}{1+\eta}$$

Iz toga svega dobijamo:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{1}{2l_1}\sqrt{\frac{F_1}{\mu_1}}}{\frac{1}{2l_2}\sqrt{\frac{F_2}{\mu_2}}} = \frac{\frac{1}{2l(1+\eta_1)}\sqrt{\frac{kl\eta_1}{\mu_0}(1+\eta_1)}}{\frac{1}{2l(1+\eta_2)}\sqrt{\frac{kl\eta_2}{\mu_0}(1+\eta_2)}} = 1.4$$

2. Sustav na slici se sastoji od kosine nagiba $\theta = 30°$ na čijem je vrhu sitna kolotura preko koje je prebačena nit. Jedan kraj niti je učvršćen za podlogu s jedne strane kosine, a na drugi kraj niti je pričvršćena masa $M = 2\,\mathrm{kg}$ koja se nalazi pri dnu kosine. Ukupna masa niti je $5\,\mathrm{g}$, a njena ukupna duljina je $1.5\,\mathrm{m}$. Na kosini i u koloturi nema trenja, a sustav je u ravnoteži. U vertikalnom dijelu niti duljine h uspostavljen je stojni transverzalni val. Odredite najnižu frekvenciju stojnog vala.





$$h = \frac{\lambda}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$F = Mg\ \sin\theta$$

$$\mu = \frac{m}{l}$$

$$f = \frac{v}{2h}$$

$$v = \sqrt{\frac{Mg\ \sin\theta}{m/l}}$$

$$h = l\ \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

$$f = \frac{\sqrt{\frac{Mg\ \sin\theta}{m/l}}}{2\ l\ \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sqrt{\frac{M\ g\ l}{m}\sin\theta}\ \frac{1+\sin\theta}{2\ l\ \sin\theta} = \sqrt{\frac{M\ g}{m\ l\ \sin\theta}}\ \frac{1+\sin\theta}{2}$$

$$f = \sqrt{\frac{2\cdot 9{,}81}{0{,}005\cdot 1{,}5\cdot \sin 30°}}\ \frac{1+\sin 30°}{2}\ \mathrm{Hz}{=}54{,}249\ \mathrm{Hz}$$

3. Čelična žica promjera d = 1 mm i duljine L = 3 m razapeta između dva zida transverzalno titra osnovnom frekvencijom jednakom f = 200 Hz. Ako pri toj frekvenciji maksimalna amplituda iznosi A = 2 cm, odredite ukupnu energiju titranja žice. Gustoća čelika jest ρ = 7800 kg/m^3.
(6 bodova)

Rješenje:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t)\sin(\pi x/L)$$

$$v(x,t) = A\omega\cos(\omega t)\sin(\pi x/L)$$

$$v(x) = A\omega\sin(\pi x/L)$$

$$E = E_k = \int_0^L \frac{v(x)^2}{2}dx = \frac{m}{L}\int_0^L \frac{1}{2}A^2\omega^2\sin^2(\pi x/L) = \frac{1}{4}A^2\omega^2 m$$

gdje je

$$m = \rho V = \rho L(d/2)^2\pi$$

$$E = 2.9\,\mathrm{J}.$$

3. Odredi na koji način će se promijeniti (hoće li se smanjiti ili će se povećati?) i koliko puta će se promijeniti frekvencija osnovnog moda titranja napete žice ako se njenu duljinu skrati za 35% , a napetost se poveća za 70% .
(6 bodova)

Rješenje:

Za osnovni mod titranja žice:
$\lambda = 2\,L$

$f = \dfrac{v}{\lambda}$

$f_0 = \dfrac{1}{2\,L}\sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \dfrac{1}{2\,L}\sqrt{\dfrac{T}{m/L}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{T}{m\,L}}$

$\dfrac{f_{02}}{f_{01}} = \sqrt{\dfrac{T_2}{T_1}\dfrac{L_1}{L_2}}$

$\dfrac{f_{02}}{f_{01}} = \sqrt{\dfrac{1{,}7}{0{,}65}} = 1{,}6$

(Napomena: priznaje se i rješenje f_{02}/f_{01} = 2 koje se dobiva iz uvjeta da je μ konstantno.)

3. U cijevi s otvorenim krajevima, duljine $L = 1$ m, nalazi se zrak pri standardnim uvjetima ($t_0 = 0°$C).
a) Skicirajte osnovni (nulti), prvi, drugi i treći harmonik.
b) Koliko će se promijeniti frekvencija trećeg harmonika ako se temperatura zraka u cijevi povisi na $t_1 = 27°$ C?
Uzmite da je molna masa zraka jednaka $M = 0.029$ kg/m^3 .
(6 bodova)

Rješenje:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, 3...$$

$$\nu_n = \frac{n+1}{2L}\sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}$$

$$\nu_3 = 662\, Hz$$

$$\Delta\nu_3 = 32\, Hz.$$

3. Napetim užetom istovremeno putuju dva transverzalna vala: $y_1(t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_1)$ i $y_2(t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_2)$, s frekvencijom $f = 50$ Hz, amplitudom $A = 3$ cm i razlikom faza $\varphi_2 - \varphi_1 = 130°$. Kolika je srednja snaga potrebna za pobuđivanje svakog od ova dva vala (kada bi oni nezavisno titrali) i koliku srednju snagu nosi rezultantni val? Uže je napeto silom 50 N, a masa po jedinici dužine je 0.1 kg m^{-1}. **(7 bodova)**

Rješenje:

Srednja snaga potrebna za pobuđivanje svakog vala zasebno ne ovisi o fazi:

$$\overline{P} = \frac{\mu}{2}A^2\omega^2 v \quad ,$$

gdje je μ masa po jedinici dužine, ω kružna frekvencija, A amplituda vala, $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ brzina propagacije vala, a F sila napetosti užeta. Za zadane brojeve (uz $\omega = 2\pi f$), dobijemo $\overline{P} = 99.2$ W.

Superpozicijom ova dva vala dobijemo rezultantni val:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$y(t) = 2A \sin\left(\frac{\omega t - kx + \phi_1 + \omega t - kx + \phi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t - kx + \phi_1 - \omega t + kx - \phi_2}{2}\right)$$

$$y(t) = 2A \sin\left(\omega t - kx + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \quad .$$

Rezultantni val ima istu frekvenciju i brzinu propagacije, a amplituda mu ovisi o razlici faza:

$$A' = 2A\cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \quad .$$

Konačno, srednja snaga koju prenosi rezultantni val je

$$\overline{P}' = \frac{\mu}{2}A'^2\omega^2 v = 70.95 \text{ W} \quad .$$

3. Na niti (užetu) duljine 120 cm formirao se stojni val. U točkama koje su međusobno udaljene 15 cm, amplituda je jednaka 20% maksimalne amplitude. Jednadžba vala je *y(t,x)=A sin(kx)cos(ωt)*. Kojem harmoniku odgovara ovo titranje niti?
(6 bodova)

Rješenje:

$y(t,x) = A\ \sin(k\ x)\ \cos(\omega\ t)$

$A\ \sin(k\ x_1) = A\ \sin(k\ x_2) = 0{,}2\ A$

$x_2 - x_1 = d = 15\ \mathrm{cm}$

$\sin(k\ x_1) = \sin[k\ (x_1 + d)] = 0{,}2$

$\sin[k\ (x_1 + d)] = \sin(k\ x_1)\ \cos(k\ d) + \cos(k\ x_1)\ \sin(k\ d) = 0{,}2$

$\cos(k\ x_1) = \sqrt{1 - 0{,}04} = \sqrt{0{,}96}$

$0{,}2\ \cos(k\ d) + \sqrt{0{,}96}\ \sin(k\ d) = 0{,}2$

$\sqrt{0{,}96}\ \sin(k\ d) = 0{,}2\ (1 - \cos(k\ d))$

$\sqrt{96}\ 2\ \sin\frac{k\ d}{2}\ \cos\frac{k\ d}{2} = 4\ \sin^2\frac{k\ d}{2}$

$\sqrt{6}\ 2\ \cos\frac{k\ d}{2} = \sin\frac{k\ d}{2}$

$\tan\frac{k\ d}{2} = 2\sqrt{6}$

$\frac{k\ d}{2} = 1{,}369438$

$\frac{2\ \pi}{\lambda}\frac{d}{2} = 1{,}369438$

$\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi\ d}{2\ 1{,}369438}$

$\frac{\lambda}{2} = 0{,}172056\ \mathrm{m}$

$\frac{1{,}2}{0{,}172056} = 6{,}97$

$\lambda = \frac{2\ l}{7}$

$n = 7$ sedmi harmonik

3. Nit je pričvršćena na oba kraja, a dva susjedna moda titranja imaju valne duljine 0,55 m i 0,44 m. Kolika je duljina niti? **(5 bodova)**

Rješenje:

$\lambda_n = 0{,}55\ \mathrm{m}$

$\lambda_{n+1} = 0{,}44\ \mathrm{m}$

$\lambda_n = \frac{2L}{n}$

$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \frac{n}{n+1}$

$\frac{n}{n+1} = \frac{4}{5}$

$n = 4$

$L = \frac{4}{2}\ 0{,}55\ \mathrm{m} = 1{,}1\ \mathrm{m}$

2. (Ne-harmonički) val na užetu opisan je izrazom $y(x,t)=Ae^{(ax-bt)^2}$, gdje su konstante A = 0.5 cm, a = 3 cm^{-1} , b = 4 s^{-1}. Kojom brzinom se širi taj val?
(6 bodova)

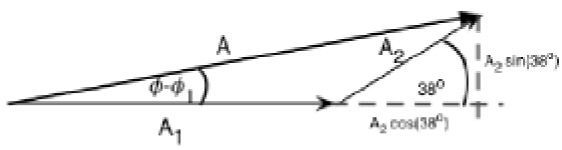
Rješenje:

Da bi funkcija bila rješenje valne jednadžbe, položaj i vrijeme se nužno moraju javljati u kombinaciji $(x-vt)$ ili $(x+vt)$. Za danu funkciju, izraz $(ax-bt)$ napišemo kao $a(x-b/at)$, iz čega slijedi da je $v=b/a=0.0133$ m/s.

1. Dva sinusoidalna vala iste frekvencije, s amplitudama A_1 = 6 mm i A_2 = $\sqrt{3}$ mm, te fazama φ_1 = 25° i φ_2 = 63°, putuju u istom smjeru po napetom užetu. Izračunajte amplitudu i fazu rezultantnog vala.
(8 bodova)

Rješenje:

Rješenje je najjednostavnije pronaći pomoću fazora (vidi sliku):

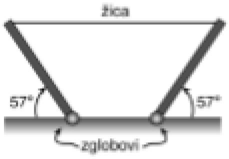


$$A=\sqrt{(A_2\sin(\phi_2-\phi_1))^2+(A_2\cos(\phi_2-\phi_1)+A_1)^2}\ ,$$

$$\tan(\phi-\phi_1)=\frac{A_2\sin(\phi_2-\phi_1)}{A_2\cos(\phi_2-\phi_1)+A_1}\ .$$

Za zadane brojeve $A=7.44$ mm, a $\phi=33.2°$.

3.2 Žica duljine 5 m i mase 0.732 kg je razapeta između dva jednaka štapa svaki težine 235 N koja su nagnuta pod kutem 57° prema površini Zemlje prema van. Vjetar uzrokuje da žica titra u četvrtom harmoniku ($n = 4$) stojnog vala. Kolika je frekvencija stojnog vala na žici?



Rješenje:

$$G\frac{l}{2}\sin(90° + \theta) - Fl\ \sin(180° - \theta) = 0$$

$$F = \frac{G}{2}\cot\theta$$

$$F = \frac{1}{2}\cdot 235\ \cot 57.0°\ \mathrm{N} = 76.305\ \mathrm{N}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{m/L}}$$

$$L = 4\,\frac{\lambda}{2} = 2\,\lambda$$

$$\lambda = \frac{L}{2}$$

$$f = \frac{v}{\lambda}$$

$$f = \sqrt{\frac{FL}{m}}\,\frac{1}{\lambda}$$

$$f = \sqrt{\frac{76.305\cdot 5}{0.732}}\cdot\frac{2}{5}\ \mathrm{Hz}{=}9.132\ \mathrm{Hz}$$

1. Stojni valovi u osnovnom modu su uspostavljeni u dvije cijevi otvorene na oba kraja. Duljina prve cijevi je L_1=1,001 m, a duljina druge cijevi je L_2=1,004 m, a po svim ostalim karakteristikama cijevi su jednake. Odredi frekvenciju udara kada obje cijevi proizvode zvuk u isto vrijeme. (Brzina zvuka v_z=340 m/s) *4 boda*

L1=1,001 m
L2=1,004 m
OTVORENA NA OBA KRAJA
lamda(n u indeksu)=2L/n
v(zraka)=340 m/s

---

lamda1= 2L1
v(zraka)= lamda1 x f1 => f1=v/lamda1
f1=(340 m/s)/(2 x 1.001 m) = 169.83 Hz
lamda2= 2L2
v(zraka)= lamda2 x f2 => f2=v/lamda2
f2=(340 m/s)/(2 x 1.004 m) = 169.32 Hz
f=|f1-f2| =0.51 Hz

Zadatak: Stojni valovi zvuka u osnovnom modu su uspostavljeni u dvije cijevi otvorene na oba kraja. Duljina prve cijevi je $L_1 = 1.001$ m, duljina druge cijevi je $L_2 = 1.004$ m, a po svim ostalim karakteristikama cijevi su jednake. Odredi frekvenciju udara koji se čuju kada obje cijevi istovremeno proizvode zvuk. (brzina zvuka $v_z = 340\ \mathrm{m\,s^{-1}}$)

Postupak: Frekvencija titranja zvuka u osnovnom modu u cijevi s otvorenim krajevima je

$$f_{1,2} = \frac{v_z}{\lambda_{1,2}} = \frac{v_z}{2L_{1,2}}.$$

Pretpostavljajući da su amplitude zvuka dvaju cijevi jednake A_0 te ne uvodeći fazni pomak intenzitete njihovog zvuka možemo napisati kao

$$A_{1,2} = A_0 \cos[2\pi f_{1,2} t].$$

Ukupna amplituda je

$$A_1 + A_2 = 2A_0 \cos\left[2\pi \frac{f_1 + f_2}{2} t\right] \cos\left[2\pi \frac{f_1 - f_2}{2} t\right],$$

gdje je

$$f_u = |f_1 - f_2| = \frac{v_z}{2}\left|\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2}\right|$$

tražena frekvencija udara.

Rješenje: $f_u = (v_z/2)\big|1/L_1 - 1/L_2\big| \simeq 0.5075$ Hz

(Danijela Grozdanić)

2. Čelična žica promjera 1 mm i duljine 3 m razapeta je između dva zida silom 2200 N. Ako žica titra frekvencijom osnovnog moda (načina titranja) s maksimalnom amplitudom od 2 cm, odredite maksimalnu brzinu koju postiže žica. Gustoća željeza je 7800 kg/m^3. (3 boda)

Rješenje:

d = 1 mm = 0,001 m
l = 3 m
F = 2200 N
Osnovni mod
$2A$ = 2 cm = 0,02 m
ρ = 7800 kg/m^3
____
v_{max} = ?

Osnovna frekvencija žice je dana izrazom:

$f = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{F}{\mu}}$, gdje je f frekvencija osnovnog moda, l duljina žice, F sila kojom je žica napeta i μ linearna gustoća žice. μ dobijemo iz izraza:

$\mu = \rho S = \rho\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 \pi$, gdje je ρ gustoća, S površina presjeka, $d/2$ polumjer, odnosno d promjer žice.

Uvrštavanjem dobijemo: $f = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{F}{\rho\pi}}\dfrac{2}{d} = 99{,}87\ \text{Hz}$

Izraz za titranje žice napete između dva zida u osnovnom modu je:

$y = 2A\sin kx\cos\omega t$

Brzina je dana izrazom:

$v = \dfrac{dy}{dt} = -2A\omega\sin kx\sin\omega t$

Maksimalna brzina je:

$v_{\max} = 2A\omega = 2A2\pi f = 12{,}55\ \text{m/s}$

2. Dvije identične žice za gitaru osciliraju osnovnom frekvencijom 600 Hz kada su napete istom silom. Za koliko postotaka se povećala napetost jedne žice, kada se zbog povećanja napetosti čuje 6 udara u sekundi, ako se žice istovremeno pobudi na titranje?
(6 bodova)

Rješenje:

Osnovna frekvencija napete žice dana je s $f_0 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$, gdje je L duljina žice, T napetost, a μ masa po jedinici duljine. Nazovimo f_{01} i T_1 osnovnu frekvenciju i napetost žice prije promjene napetosti, a f_{02} i T_2 nakon promjene. Veličina koja se traži je

$$x = \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{T_2}{T_1} - 1 \ .$$

Frekvencija udara je jednostavno razlika frekvencija dvije žice: $f_{\text{udari}} = f_{02} - f_{01} = 6$ Hz. Iz izraza za vezu osnovne frekvencije i napetosti žice, slijedi da je:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{f_{02}}{f_{01}}\right)^2 = \left(\frac{f_{\text{udari}} + f_{01}}{f_{01}}\right)^2 = \left(\frac{f_{\text{udari}}}{f_{01}} + 1\right)^2 \ ,$$

pa je tražena relativna promjena

$$x = \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{T_2}{T_1} - 1 = \left(\frac{f_{\text{udari}}}{f_{01}} + 1\right)^2 - 1 \ .$$

Za zadane brojeve $x = 0.020$, ili u postotcima $x = 2\%$.

2. Superpoziciju dvaju titranja koja se odvijaju duž iste osi te koja su opisana izrazima

$$x_1(t) = A_1 \cos \omega(t + t_1),$$
$$x_2(t) = A_2 \cos \omega(t + t_2),$$

napiši u obliku $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, ako je $t_1 = 1/6$ s, $t_2 = 1/2$ s, $\omega = \pi$ rad/s, $A_1 = 1$ cm i $A_2 = 3A_1$.
(6 bodova)

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2,$$

gdje su:

$$\phi_1 = \omega t_1 = \angle(\vec{i}, \vec{A}_1), \quad \phi_1 = \omega t_2 = \angle(\vec{i}, \vec{A}_2), \quad \phi = \angle(\vec{i}, \vec{A})$$

$$\vec{A} = (A_1 \cos \pi/6)\vec{i} + (A_1 \sin \pi/6 + A_2)\vec{j}$$

$$\phi = \arctan(A_y/A_x) = 1,33\, rad$$

$$x(t) = \sqrt{13}\cos(\omega t + 1.33)\ cm.$$