Riješeni zadaci iz Fizike 2

Saša Ilijić (FER)

14. prosinca 2015.

Upozorenje: Pred vama je izbor zadataka među kojima ima vrlo zahtjevnih, ali nadam se, i vrlo zanimljivih. Moguće da su se u načinu kako su zadaci formulirani te u prikazanim postupcima rješavanja prisutne manje ili veće nejasnoće i pogreške. Molim studente koji odluče rješavati ove zadatke da mi se, u slučaju nedoumica ili sumnji u pogreške, svakako jave. E-mail: `sasa.ilijic@fer.hr`

Sadržaj

1 Elastičnost

1 **Zadatak:** Odredi rad koji je potrebno obaviti kako bismo čelični štap duljine $L = 2\,\mathrm{m}$, površine poprečnog presjeka $S = 1\,\mathrm{cm}^2$ i početne napetosti $F_0 = 5000\,\mathrm{N}$, dodatnim naprezanjem produljili za $\Delta L = 2\,\mathrm{mm}$. (Youngov modul čelika $E = 200\,\mathrm{GPa}$.)

Postupak: U linearnom području elastičnih deformacija, promjena napetosti štapa ΔF razmjerna je njegovu produljenju ΔL,

$$\Delta F = \frac{SE}{L}\Delta L.$$

Označimo li s x produljenje štapa u odnosu na početno stanje u kojem je njegova napetost F_0, napetost štapa možemo opisati izrazom

$$F[x] = F_0 + kx,$$

gdje je

$$k = \frac{SE}{L}$$

tzv. konstanta elastičnosti štapa (štap možemo shvatiti kao oprugu konstante k). Rad potreban za produljenje štapa od $x = 0$ do $x = \Delta L$ dobivamo integracijom

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_0^{\Delta L} F[x]\,\mathrm{d}x = \int_0^{\Delta L} (F_0 + kx)\,\mathrm{d}x = \left(F_0 x + \frac{1}{2}kx^2\right)\Big|_0^{\Delta L} = F_0\Delta L + \frac{SE}{2L}(\Delta L)^2.$$

Za zadane vrijednosti parametara L, F_0, ΔL, S i E dobivamo $W = 30\,\mathrm{J}$.

Umjesto izravnom integracijom rada, zadatak se može riješiti i korištenjem poznate formule za potencijalnu energiju opruge,

$$U = \frac{1}{2}kx^2,$$

gdje je x produljenje opruge u odnosu na stanje u kojom je njena napetost jednaka nuli (važno je uočiti razliku u definiciji koordinate x u odnosu na raniji postupak). Rad potreban za produljenje opruge jednak je promjeni potencijalne energije,

$$W = \Delta U = U' - U = \frac{1}{2}k(x_0 + \Delta L)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = kx_0\Delta L + \frac{1}{2}k(\Delta L)^2,$$

gdje je

$$x_0 = \frac{F_0}{k}$$

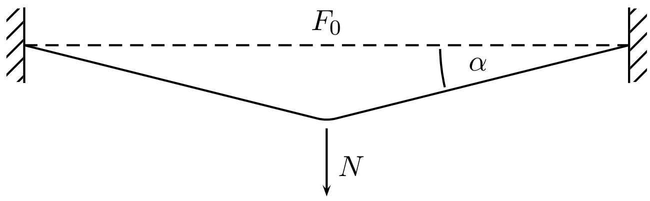
početna vrijednost koordinate x. Slijedi

$$W = F_0\Delta L + \frac{1}{2}k(\Delta L)^2 = F_0\Delta L + \frac{SE}{2L}(\Delta L)^2,$$

što se podudara s ranije dobivenim rezultatom.

Rješenje: $W = F_0\Delta L + SE(\Delta L)^2/2L = 30\,\mathrm{J}$

2 Zadatak: Čelična žica promjera $2r = 0.5\,\mathrm{mm}$ napeta je silom $F_0 = 100\,\mathrm{N}$ nakon čega su njeni krajevi učvršćeni. Odredi jakost sile N kojom treba djelovati okomito na žicu pri sredini njezina raspona kako bi ju se otklonilo za kut $\alpha = 5°$ od njezina prvobitna položaja (vidi sliku). (Youngov modul čelika $E = 200\,\mathrm{GPa}$.)



Postupak: Tražena jakost sile N jednaka je jakosti zbroja sila kojima dvije polovice žice djeluju na samo polovište žice. Označimo li s $F[\alpha]$ napetost žice pri otklonu α,

$$N[\alpha] = 2F[\alpha]\,\sin\alpha.$$

U linearnom području elastičnih deformacija, napetost žice pri otklonu α možemo napisati kao

$$F[\alpha] = F_0 + k\,\Delta L = F_0 + k(L[\alpha] - L_0),$$

gdje je ΔL produljenje žice, L_0 je duljina neotklonjene žice čija je napetost F_0, a $L[\alpha]$ je duljina žice pri otklonu α. Veličina k dana je izrazom

$$k = \frac{SE}{L_0} = \frac{r^2\pi E}{L_0}$$

($S = r^2\pi$ je površina poprečnog presjeka žice). Duljinu žice pri otklonu α možemo napisati kao

$$L[\alpha] = \frac{L_0}{\cos\alpha}.$$

Slijedi

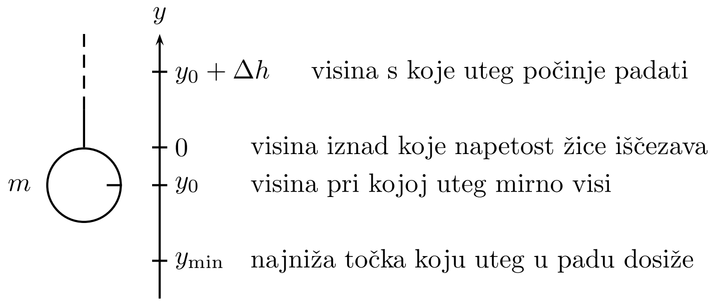
$$N[\alpha] = 2\left(F_0 + kL_0\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\right)\sin\alpha = 2\left(F_0 + r^2\pi E\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\right)\sin\alpha.$$

Za zadane vrijednosti parametara F_0, r, α i E dobivamo $N \simeq 43.6\,\mathrm{N}$.

Rješenje: $N = 2\left(F_0 + r^2\pi E\,(1/\cos\alpha - 1)\right)\sin\alpha \simeq 43.6\,\mathrm{N}$

3 Zadatak: Uteg mase $m = 10\,\mathrm{kg}$ mirno visi na čeličnoj žici duljine $L = 5\,\mathrm{m}$ i promjera $2r = 0.5\,\mathrm{mm}$. Iz tog položaja uteg podižemo za visinu $\Delta h = 0.5\,\mathrm{m}$, čime je žica olabavljena, te ga puštamo da padne. Odredi najveću napetost žice koja nastupa tokom zaustavljanja utega. (Pretpostavljamo da se sva naprezanja nalaze unutar linearnog područja elastičnosti, Youngov modul čelika $E = 200\,\mathrm{GPa}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Opisanu situaciju prikazujemo skicom:



Najveća napetost žice nastupa kada se padajući uteg na trenutak zaustavi u najnižoj točki svoje putanje, a tu ćemo točku pronaći na osnovu načela očuvanja ukupne energije.

Uspravna y-os uvedena tako da položaj utega $y > 0$ odgovara labavoj žici te njenu napetost možemo napisati kao

$$F[y] = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad y > 0, \\ -ky & \text{za} \quad y \le 0, \end{cases}$$

gdje je

$$k = SE/L = r^2\pi E/L$$

konstanta elastičnosti žice. Položaj u kojem uteg mirno visi dobiva se iz jednakosti sila $F[y_0] = mg$ kao

$$y_0 = -mg/k.$$

(Može provjeriti da za zadane vrijednosti parametara vrijedi $y_0 + \Delta h > 0$, što znači da uteg zaista počinje padati s visine pri kojoj je žica olabavljena.) Potencijalna energija sustava sastoji se od gravitacijske i od elastične potencijalne energije te ju možemo napisati kao

$$U[y] = \begin{cases} mgy & \text{za} \quad y > 0, \\ mgy + \frac{1}{2}ky^2 & \text{za} \quad y \le 0. \end{cases}$$

Pri početku pada ($y = y_0 + \Delta h > 0$), kao i u najnižoj točki koju uteg dosiže ($y = y_{\mathrm{min}} < 0$), kinetička energija u sustavu jednaka je nuli te na osnovu očuvanja ukupne energije očekujemo jednakost

$$E = U[y_0 + \Delta h] = U[y_{\mathrm{min}}],$$

što daje

$$mg(y_0 + \Delta h) = mgy_{\mathrm{min}} + \frac{1}{2}ky_{\mathrm{min}}^2.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe po y_{min} slijedi

$$(y_{\mathrm{min}})_{1,2} = \frac{mg}{k}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2k}{mg}(y_0 + \Delta h)}\right).$$

Pozitivno rješenje $(y_{\mathrm{min}})_1$ odbacujemo te zaključujemo

$$F_{\mathrm{max}} = -k(y_{\mathrm{min}})_2 = mg\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2k}{mg}(y_0 + \Delta h)}\right) = \cdots = mg\left(1 + \sqrt{-1 + \frac{2r^2\pi E\,\Delta h}{mgL}}\right).$$

Za zadane vrijednosti parametara dobivamo $F_{\mathrm{max}} \simeq 970\,\mathrm{N}$.

Rješenje: $F_{\mathrm{max}} = mg\left(1 + \sqrt{-1 + 2r^2\pi E\,\Delta h/mgL}\right) \simeq 970\,\mathrm{N}$

4 **Zadatak:** Homogena gumena vrpca slobodno visi o jednom svom kraju te uslijed naprezanja izazvanog njezinom težinom dolazi do njezina produljenja. Odredi ukupno produljenje vrpce ako duljina nenapregnute vrpce iznosi $\ell = 25\,\mathrm{m}$, Youngov modul gume je $E = 4.00 \times 10^6\,\mathrm{Pa}$, a gustoća gume je $\rho = 1500\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

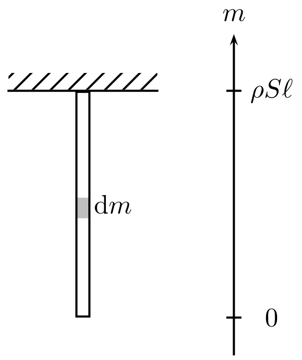
Postupak: Naprezanje vrpce najveće je pri njenom gornjem kraju gdje je ono izazvano ukupnom težinom vrpce, dok pri donjem kraju vrpce naprezanje iščezava. Općenito, naprezanje u nekoj točki vrpce dano je omjerom težine dijela vrpce koji se nalazi ispod te točke i površine poprečnog presjeka vrpce. Naprezanje možemo napisati kao

$$\sigma = \frac{mg}{S},$$

gdje je m masa vrpce koja se nalazi ispod promatrane točke, a S je površina poprečnog presjeka. Tom naprezanju odgovara relativno produljenje elementa vrpce

$$\delta_{\parallel} = \frac{\mathrm{d}\ell' - \mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\sigma_L}{E} = \frac{mg}{SE},$$

gdje je $\mathrm{d}\ell$ duljina elementa nenapregnute vrpce, a $\mathrm{d}\ell'$ je duljina istog elementa pri naprezanju σ_L.



Nadalje, s obzirom da masu i duljinu nenapregnutog elementa vrpce povezuje relacija

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V = \rho S\,\mathrm{d}\ell,$$

produljenje elementa možemo napisati kao

$$\mathrm{d}\ell' - \mathrm{d}\ell = \frac{mg}{SE}\,\mathrm{d}\ell = \frac{mg}{S^2 E\rho}\,\mathrm{d}m.$$

Konačno, ukupno produljenje vrpce $\Delta\ell$ dobit ćemo integrirajući produljenje elementa vrpce po masi vrpce m koja se nalazi ispod promatrane točke, počevši od donjeg kraja gdje je $m = 0$, pa do gornjeg kraja gdje je $m = \rho S\ell$,

$$\Delta\ell = \ell' - \ell = \int (\mathrm{d}\ell' - \mathrm{d}\ell) = \int_0^{\rho S\ell} \frac{mg}{S^2E\rho}\,\mathrm{d}m = \frac{g}{S^2E\rho}\frac{m^2}{2}\bigg|_0^{\rho S\ell} = \frac{\rho g\ell^2}{2E},$$

što za zadane vrijednosti parametara ρ, ℓ i E daje $\Delta\ell \simeq 1.15\,\mathrm{m}$.

Rješenje: $\Delta\ell = \rho g\ell^2/2E \simeq 1.15\,\mathrm{m}$

2 Jednostavni oscilatori

5 Zadatak: Objesimo li uteg o oprugu br. 1 ona se produlji za $\Delta x_1 = 4\,\mathrm{cm}$. Objesimo li isti uteg o oprugu br. 2 ona se produlji za $\Delta x_2 = 6\,\mathrm{cm}$. Odredi periode kojima bi uteg titrao kad bismo ga objesili na te dvije opruge spojene u seriju i kad bismo ga objesili na te dvije opruge spojene paralelno. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Označimo li masu utega s m te konstante dvaju opruga s k_1 i k_2, iz uvjeta ravnoteže utega kada on visi na tim oprugama imamo $mg = k_1\,\Delta x_1 = k_2\,\Delta x_2$, odnosno

$$k_1 = \frac{mg}{\Delta x_1}, \qquad k_2 = \frac{mg}{\Delta x_2}.$$

Konstanta paralelnog spoja dvaju opruga čije su konstante k_1 i k_2 je

$$k_\mathrm{p} = k_1 + k_2 = mg\,\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1\,\Delta x_2}$$

te je, na osnovu poznatog rješenja jednadžbe gibanja za masu na opruzi (harmonički oscilator), frekvencija titranja ω_p dana izrazom

$$\omega_\mathrm{p}^2 = \frac{k_\mathrm{p}}{m} = g\,\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1\,\Delta x_2}.$$

Tome odgovara period

$$T_\mathrm{p} = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{p}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{g\,(\Delta x_1 + \Delta x_2)}}.$$

Za zadane vrijednosti $T_\mathrm{p} \simeq 0.311\,\mathrm{s}$.

Konstanta serijskog spoja dvaju opruga je

$$k_\mathrm{s} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = mg\,\frac{1}{\Delta x_1 + \Delta x_2},$$

te je odgovarajuća frekvencija titranja ω_s dana izrazom

$$\omega_\mathrm{s}^2 = \frac{k_\mathrm{s}}{m} = g\,\frac{1}{\Delta x_1 + \Delta x_2}.$$

Odgovarajući period titranja je

$$T_\mathrm{s} = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{s}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{g}}$$

što za zadane vrijednosti daje $T_\mathrm{s} \simeq 0.634\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $T_\mathrm{s} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{g}} \simeq 0.634\,\mathrm{s}$, $T_\mathrm{p} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{g\,(\Delta x_1+\Delta x_2)}} \simeq 0.311\,\mathrm{s}$

6 Zadatak: Uteg je obješen o donji kraj dinamometra i titra u uspravnom smjeru. Najmanja i najveća vrijednost sile koju očitavamo na dinamometru tokom titranja su $T_{\min} = 3\,\mathrm{N}$ i $T_{\max} = 7\,\mathrm{N}$, a kružna frekvencija titranja iznosi $\omega_0 = 2\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Odredi masu utega i amplitudu titranja. (Dinamometar možemo smatrati oprugom zanemarive mase. Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Neka je y-os uspravna i orijentirana uvis. Položaj utega možemo napisati kao

$$y[t] = y_0 + A\cos[\omega_0 t],$$

gdje je y_0 koordinata ravnotežnog položaja, a A je amplituda titranja. Prema Newtonovu aksiomu, sila koja osigurava to gibanje je

$$F_y[t] = m a_y[t] = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y[t] = -m\omega_0^2 A\cos[\omega t],$$

gdje je m masa utega. Ta se sila sastoji od gravitacijske sile i od sile dinamometra,

$$F_y[t] = -mg + T[t].$$

Slijedi

$$T[t] = mg - m\omega_0^2 A\cos[\omega t],$$

gdje prepoznajemo

$$T_{\max} = mg + m\omega_0^2 A,$$
$$T_{\min} = mg - m\omega_0^2 A.$$

Iz gornjih dviju jednadžbi možemo izračunati m i A:

$$m = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2g},$$

$$A = \frac{g}{\omega_0^2}\frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}}.$$

Za zadane vrijednosti parametara dobivamo $m \simeq 0.510\,\mathrm{kg}$, $A \simeq 9.94\,\mathrm{cm}$.

Rješenje: $m = (T_{\max} + T_{\min})/2g \simeq 0.510\,\mathrm{kg}$, $A = g\omega_0^{-2}(T_{\max} - T_{\min})/(T_{\max} + T_{\min}) \simeq 9.94\,\mathrm{cm}$

7 Zadatak: Najveći iznos brzine koju čestica postiže pri harmoničkom titranju je $v_{\max} = 5\ \mathrm{cm\,s^{-1}}$, a najveći iznos akceleracije koju postiže je $a_{\max} = 10\ \mathrm{cm\,s^{-2}}$. Odredi amplitudu A i kružnu frekvenciju titranja ω_0. Zatim odredi iznos brzine u trenutku u kojem otklon čestice od ravnotežnog (središnjeg) položaja iznosi $x = A/2$.

Postupak: Napišemo li otklon čestice koja harmonički titra amplitudom A i kutnom frekvencijom ω_0 kao

$$x[t] = A\cos[\omega_0 t],$$

brzina i akceleracija čestice dane su izrazima

$$v[t] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x[t] = -\omega_0 A\sin[\omega_0 t], \qquad a[t] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x[t] = -\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t].$$

Kao maksimalni iznos brzine i maksimalni iznos akceleracije prepoznajemo

$$v_{\max} = \omega_0 A, \qquad a_{\max} = \omega_0^2 A.$$

Iz gornjih dviju jednadžbi slijedi

$$\omega_0 = \frac{a_{\max}}{v_{\max}}, \qquad A = \frac{v_{\max}}{\omega_0} = \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}}.$$

Za zadane vrijednosti $v_{\max}$ i $a_{\max}$ dobivamo $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $A = 2.5\,\mathrm{cm}$. Ovisnost iznosa brzine o otklonu dobit ćemo pišući izraz za brzinu u obliku

$$v^2 = \omega_0^2 A^2 \sin^2[\omega_0 t] = \omega_0^2 A^2(1 - \cos^2[\omega_0 t]),$$

gdje sada možemo iskoristiti izraz za položaj čestice kako bismo eliminirali $\cos[\omega_0 t]$. Slijedi

$$v^2 = \omega_0^2 A^2 \left(1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2\right) = \omega_0^2 (A^2 - x^2).$$

(Važno je uočiti da gornja relacija govori o kvadratima veličina v i x, što znači da ona govori isključivo o iznosima (modulima) brzine i otklona, a ne o njihovim predznacima.) Pri otklonu $x = A/2$ dobivamo

$$v_{x=A/2} = \omega_0 A\sqrt{1 - (1/2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\omega_0 A = \frac{\sqrt{3}}{2}\,v_{\max}$$

što za zadane vrijednosti daje $v_{x=A/2} \simeq 4.33\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$.

Napomena: Relaciju koja povezuje v^2 i x^2 se može dobiti i na osnovu izraza za ukupnu energiju pri harmoničkom titranju mase m na opruzi konstante elastičnosti k,

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Posebno, pri maksimalnom otklonu imamo $v = 0$ i $x = A$, pa možemo pisati

$$E = \frac{1}{2}kA^2.$$

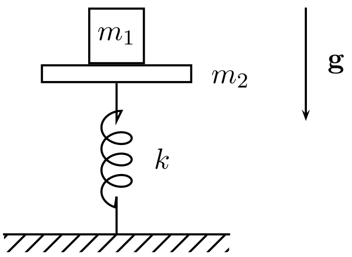
Iz gornjih izraza za energiju slijedi

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2,$$

gdje dijeleći s m i uzimajući u obzir da vrijedi $\omega_0^2 = k/m$ dobivamo $v^2 = \omega_0^2(A^2 - x^2)$ kao i ranije.

Rješenje: $\omega_0 = a_{\max}/v_{\max} = 2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $A = v_{\max}^2/a_{\max} = 2.5\,\mathrm{cm}$, $v_{x=A/2} = v_{\max}\sqrt{3}/2 \simeq 4.33\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$

8 Zadatak: Tijelo mase $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ položeno je na tijelo mase $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ koje je s pomoću opruge konstante $k = 5 \times 10^3\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ oslonjeno o čvrsto tlo (vidi sliku). Odredi najveću amplitudu titranja sustava pri kojoj ne dolazi do međusobnog odvajanja tijela m_1 i m_2. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)



Postupak: Neka je y-os uspravna i orijentirana uvis. Pod pretpostavkom da pri titranju ne dolazi do odvajanja tijela m_1 i m_2, njihovu visinu nad tlom možamo napisati kao

$$y[t] = y_0 + A\cos[\omega_0 t],$$

gdje je y_0 ravnotežna visina, A je amplituda, a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

je kružna frekvencija titranja. Akceleracija masa m_1 i m_2 tada je

$$a_y[t] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y[t] = -\omega_0^2 A \cos[\omega_0 t],$$

a silu koja djeluje na m_1 možemo napisati kao

$$F_y[t] = m_1 a_y[t] = m_1 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = -m_1\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t].$$

Ta se sila sastoji od gravitacijske sile iznosa $m_1 g$ koja djeluje prema dolje te od sile N usmjerene uvis kojom tijelo m_2 djeluje na m_1,

$$F_y[t] = -m_1 g + N[t].$$

Slijedi

$$N[t] = m_1 g - m_1\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t].$$

Uvjet ne-odvajanja tijela m_1 i m_2 možemo izraziti kao zahtjev da sila N bude pozitivna ili jednaka nuli, tj. da bude usmjerena prema gore ili da iščezne, što vodi na

$$g \ge \omega_0^2 A \cos[\omega_0 t].$$

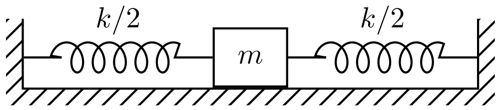
Taj je uvjet ispunjen za

$$A \le \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{g(m_1 + m_2)}{k}.$$

Zaključujemo da je najveća amplituda titranja pri kojoj ne dolazi do odvajanja masa $A = g(m_1 + m_2)/k$. Za zadane vrijednosti parametara dobivamo $A \simeq 0.98\,\mathrm{cm}$.

Rješenje: $A = g(m_1 + m_2)/k \simeq 0.98\,\mathrm{cm}$

9 Zadatak: Tijelo mase m leži na vodoravnoj podlozi s kojom ima koeficijent trenja μ i dvjema je oprugama čije su konstante $k/2$ pričvršćeno za uporišta (vidi sliku). Tijelo puštamo u gibanje iz mirovanja s neke udaljenosti od središnjeg položaja. Odredi najveću dopuštenu udaljenost želimo li da tijelo, nakon što se prvi puta zaustavi, ostane mirovati.



Postupak: Neka se gibanje tijela odvija duž x-osi gdje $x = 0$ odgovara središnjem položaju sustava (opruge djeluju silama jednakog iznosa). Silu kojom opruge djeluju na tijelo te potencijalnu energiju opruga možemo napisati kao

$$F_{\text{opr}}[x] = -kx, \qquad U[x] = \frac{1}{2}kx^2.$$

Kako bi tijelo koje miruje pri $x = x_0$ krenulo u gibanje, sila kojom na njega djeluju opruge mora biti po iznosu veća od najvećeg mogućeg iznosa sile trenja. Koristeći izraz za silu opruga te $F_{\text{tr}} = \mu mg$ slijedi $k|x_0| > \mu mg$, odnosno

$$|x_0| > \mu mg/k.$$

Koordinatu točke u kojoj će se tijelo zaustaviti dobit ćemo razmatranjem energije u sustavu. U početnom trenutku energija se sastoji isključivo od potencijalne energine opruga,

$$E = U[x_0] = \frac{1}{2}kx_0^2,$$

dok u trenutku kada se tijelo nakon gibanja zaustavi pri $x = x_1$ imamo

$$E = U[x_1] + \mu mg|x_1 - x_0|,$$

gdje drugi član na desnoj strani opisuje rad obavljen savladavajući silu trenja. Pretpostavimo li da je $x_1 > x_0$, odnosno $x_0 < 0$, slijedi

$$x_1 = -x_0 - 2mg\mu/k.$$

Kako bi tijelo u tom položaju nastavilo mirovati, sila opruga mora biti manja ili jednaka najvećem iznosu sile trenja, $k|x_1| \le \mu mg$, što vodi na

$$|-x_0 - 2mg\mu/k| \le mg\mu/k.$$

Napišemo li sada $x_0 = -s$ (ranije smo pretpostavili $x_0 < 0$), gdje je s tražena udaljenost, gornje se razmatranje svodi na sustav nejednakosti

$$s > b > 0, \qquad |s - 2b| \le b,$$

gdje je $b = mg\mu/k$. Sustav se svodi na

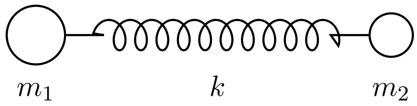
$$0 < b < s \le 3b.$$

Slijedi da je najveća dopuštena udaljenost

$$s_{\max} = 3b = 3mg\mu/k.$$

Rješenje: $s_{\max} = 3mg\mu/k$

10 Zadatak: Čestica mase m_1 i čestica mase m_2 povezane su oprugom konstante k. Odredi kružnu frekvenciju titranja tog sustava.



Postupak: Neka se gibanje čestica odvija duž x-osi; x_1 neka je koordinata čestice m_1, a x_2 neka je koordinata čestice m_2. Neka je u ravnoteži $x_2 > x_1$. Označimo li s ℓ_0 ravnotežnu duljinu opruge, promjenu njene duljine uslijed gibanja čestica možemo napisati kao

$$\xi = x_2 - x_1 - \ell_0.$$

Jednadžbe gibanja čestica sada možemo napisati kao

$$m_1 \ddot{x}_1 = k\xi, \qquad m_2 \ddot{x}_2 = -k\xi.$$

Napišemo li sada jednadžbu gibanja za varijablu ξ, dobit ćemo

$$\ddot{\xi} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{k\xi}{m_1} + \frac{k\xi}{m_2},$$

odnosno

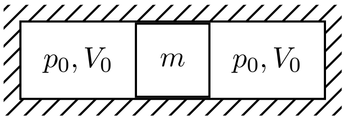
$$\ddot{\xi} + k\,\frac{m_2 + m_2}{m_1 m_2}\,\xi = 0,$$

što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja harmoničkog oscilatora s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = k\,\frac{m_2 + m_2}{m_1 m_2}.$$

Rješenje: $\omega_0 = \sqrt{k(m_1 + m_2)/m_1 m_2}$

11 Zadatak: U nepomičnom, s obje strane zatvorenom, toplinski izoliranom cilindru, nalazi se pomični klip mase $m = 3\,\mathrm{kg}$ i površine poprečnog presijeka $S = 10\,\mathrm{cm}^2$ (vidi sliku). Sa svake strane klipa nalazi se jednaka količina idealnog plina adijabatske konstante $\gamma = 1.4$. Kada je klip u ravnotežnom stanju, plin s jedne i s druge strane klipa je pri istoj temperaturi te zauzima obujam $V_0 = 5\,\mathrm{dm}^3$ pri tlaku $p_0 = 2 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$. Pretpostavljajući da je proces sažimanja i širenja plina adijabatski, odredi frekvenciju malih titraja klipa oko ravnotežnog položaja. (Za $\epsilon \ll 1$ može se koristiti razvoj $(1 \pm \epsilon)^\alpha \simeq 1 \pm \alpha\epsilon$.)



Postupak: Postavimo x-os duž osi cilindra, tako da $x = 0$ odgovara ravnotežnom položaju klipa, a $x > 0$ neka odgovara pomaku klipa nadesno. Jednadžba gibanja klipa glasi

$$m\ddot{x} = (p_1[x] - p_2[x])\, S,$$

gdje je p_1 tlak s lijeve, a p_2 tlak s desne strane. Pri adijabatskom procesu vrijedi $pV^\gamma = \mathrm{const.}$, odnosno

$$p_1 V_1^\gamma = p_0 V_0^\gamma = p_2 V_2^\gamma,$$

pa ovdje imamo

$$p_1[x]\,(V_0 + Sx)^\gamma = p_0 V_0^\gamma = p_2[x]\,(V_0 - Sx)^\gamma\,,$$

što još možemo napisati u obliku

$$p_{1,2}[x] = p_0 \frac{V_0^\gamma}{(V_0 \pm Sx)^\gamma} = p_0 \left(1 \pm \frac{Sx}{V_0}\right)^{-\gamma}.$$

Pod pretpostavkom da je $Sx/V_0 \ll 1$, što odgovara malim oscilacijama, možemo koristiti $(1 \pm \epsilon)^\alpha \simeq 1 \pm \alpha\epsilon$, te pišemo

$$p_{1,2}[x] = p_0 \mp p_0\gamma\,\frac{Sx}{V_0}.$$

Slijedi

$$p_1[x] - p_2[x] = -2p_0\gamma S/V_0$$

te jednadžba gibanja glasi

$$\ddot{x} + \frac{2p_0\gamma S^2}{mV_0}\,x = 0,$$

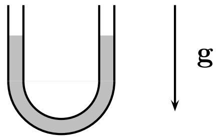
što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja jednostavnog harmoničkog titranja s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{2p_0\gamma S^2}{mV_0}.$$

Za zadane vrijednosti parametara dobivamo $\omega_0 \simeq 6.11\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Rješenje: $\omega_0 = \sqrt{2p_0\gamma S^2/mV_0} \simeq 6.11\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

12 Zadatak: U cijevi u obliku slova 'U' površine poprečnog presjeka $S = 1\,\mathrm{cm}^2$, s oba otvorena kraja, nalazi se $m = 20\,\mathrm{g}$ vode (vidi sliku). Odredite period titranja razine vode.



(Gustoća vode $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Jednadžbu gibanja te iz nje frekvenciju titranja dobit ćemo na osnovu uvjeta očuvanja energije, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Pretpostavimo li da se u nekom trenutku razina vode u lijevom stupcu nalazi na visini $y > 0$ iznad ravnotežne visine, slijedi da je u lijevom stupcu došlo do povećanja mase vode u iznosu

$$\Delta m = \rho S y,$$

dok je istovremeno u desnom stupcu došlo do smanjenja mase vode u tom iznosu. Shvatimo li tu situaciju kao da je masa vode Δm premještena iz desnog u lijevi stupac, pri čemu je njeno središte mase podignuto za y, promjenu gravitacijske potencijalne energije možemo napisati kao

$$U = \Delta m g y = \rho S g y^2.$$

Kinetička energija vode u cijevi može se napisati kao

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}^2.$$

Ukupna mehanička energija,

$$E = U + K = \rho S g y^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2,$$

očuvana je veličina pa slijedi

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E = 2\rho S g y \dot{y} + m \dot{y} \ddot{y} = m \dot{y} \left(\ddot{y} + \frac{2\rho S g}{m} y \right),$$

što je ispunjeno za $\dot{y} = 0$ (mirovanje u ravnoteži) ili za

$$\ddot{y} + \frac{2\rho S g}{m} y = 0,$$

što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja harmoničkog oscilatora s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{2\rho S g}{m}.$$

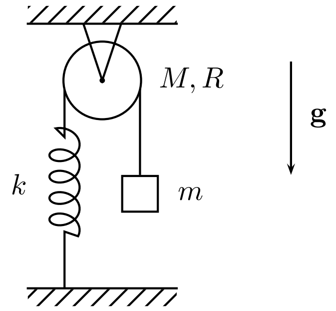
Odgovarajući period je

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\rho S g}}.$$

Za zadane parametre dobivamo $T \simeq 0.634\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $T = 2\pi \sqrt{m/2\rho S g} \simeq 0.634\,\mathrm{s}$

13 Zadatak: Tanka nerastezljiva nit zanemarive mase prebačena je preko koloture mase M i polumjera R koju smatramo homogenim diskom. Jedan kraj niti oprugom je povezan s čvrstim uporištem, dok na drugom kraju visi uteg mase m. Odredi period malih oscilacija u ovom sustavu.



Postupak: Jednadžbu gibanja sustava dobit ćemo iz uvjeta očuvanja mehaničke energije, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Uvodimo uspravnu x-os, usmjerenu prema dolje, tako da $x = 0$ odgovara položaju utega pri kojem napetost opruge iščezava, a $x = x_0$ odgovara ravnotežnom položaju utega. Iz uvjeta ravnoteže imamo relaciju $kx_0 = mg$, a zbog jednostavnosti daljnjeg računa uvodimo koordinatu

$$\xi = x - x_0 = x - mg/k$$

koja opisuje pomak sustava iz ravnoteže. Potencijalnu energiju sustava možemo napisati kao zbroj potencijalne energije opruge i gravitacijske potencijalne energije utega,

$$U = \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \frac{1}{2}k(\xi + mg/k)^2 - mg(\xi + mg/k) = \frac{1}{2}k\left(\xi^2 - \left(\frac{mg}{k}\right)^2\right).$$

Kinetičkoj energiji sustava doprinose translacija utega i vrtnja koloture,

$$K = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2,$$

gdje je $I = \frac{1}{2}MR^2$ moment tromosti koloture (disk mase M i polumjera R), a ϕ je kut zakreta koloture koji odgovara pomaku ξ. Iz geometrije sustava slijedi da su ϕ i ξ povezani relacijom $\xi = R\phi$, odnosno kad je riječ o brzinama, $\dot{\xi} = R\dot{\phi}$. Slijedi

$$K = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{\xi}^2.$$

Iz uvjeta očuvanja mehaničke energije sada imamo

$$0 = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K+U) = \left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{\xi}\left(\ddot{\xi} + \frac{k}{m + M/2}\xi\right).$$

Gornji izraz mora biti jednak nuli u svim trenucima vremena pa slijedi da vrijedi jednakost

$$\ddot{\xi} + \frac{k}{m + M/2}\,\xi = 0,$$

što je jednadžba gibanja harmoničkog oscilatora s kružnom frekvencijom

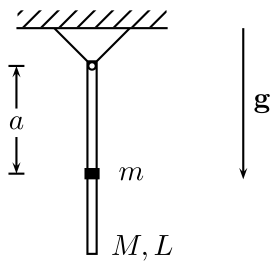
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + M/2}},$$

a kojoj odgovara period

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m + M/2}{k}}.$$

Rješenje: $T = 2\pi\sqrt{(m + M/2)/k}$

14 Zadatak: Tanki homogeni štap duljine L i mase M poduprt je tako da može slobodno njihati oko jednog kraja. Odredi udaljenost a od gronjeg kraja štapa na kojoj treba pričvrstiti sitan uteg mase m (vidi sliku) kako bi period pri njihanju čitavog sustava malom amplitudom bio najkraći. Posebno razmotri granični slučaj $m/M \to 0$.



Postupak: Jednadžbu gibanja sustava dobit ćemo na osnovu uvjeta očuvanja mehaničke energije, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Neka kut ϕ opisuje otklon njihala od njegova ravnotežna položaja. Potencijalnu energiju sustava možemo napisati kao

$$U = Mg\frac{L}{2}(1-\cos\phi) + mga(1-\cos\phi) \simeq \left(M\,\frac{L}{2} + ma\right) g\,\frac{\phi^2}{2},$$

gdje je $L/2$ udaljenost središta mase štapa od osi, a a je udaljenost utega m od osi. S obzirom da razmatramo mali kut ϕ, koristili smo razvoj $\cos\phi \simeq 1 - \phi^2/2$. Kinetičku energiju možemo napisati kao

$$K = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2 + ma^2\right)\dot{\phi}^2.$$

Uvjet očuvanja energije daje

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K+U) = \left(\frac{1}{3}ML^2 + ma^2\right)\dot{\phi}\left(\ddot{\phi} + \frac{g(ML/2+ma)}{ML^2/3+ma^2}\phi\right).$$

Gornji uvjet mora biti ispunjen u svim trenucima vremena, dakle mora vrijediti

$$\ddot{\phi} + \frac{g(ML/2+ma)}{ML^2/3+ma^2}\phi = 0$$

što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja oscilatora s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{(ML/2+ma)g}{ML^2/3+ma^2}.$$

Minimum perioda podudara se s maksimumom frekvencije, kao i njena kvadrata, pa odgovarajuću vrijednost udaljenosti a pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}\omega_0^2}{\mathrm{d}a} = \frac{m(ML^2/3 - MLa - ma^2)}{(ML^2/3+ma^2)^2},$$

iz čega dobivamo

$$a_{1,2} = \frac{ML}{2m}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4m}{3M}}\right).$$

S obzirom da se uteg mora nalaziti ispod objesišta odabiremo pozitivno rješenje, odnosno rješenje s pozitivnim predznakom ispred korijena, dakle

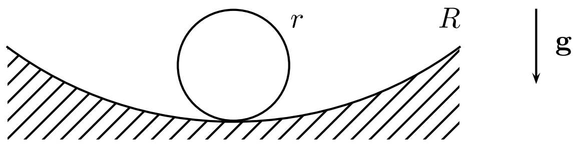
$$a = \frac{ML}{2m}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4m}{3M}}\right).$$

U graničnom slučaju $m/M \to 0$ dobivamo

$$\lim_{m/M\to 0} a = L/3$$

Rješenje: $a = (ML/2m)(-1 + \sqrt{1 + 4m/3M})$, $\lim_{m/M\to 0} a = L/3$

15 Zadatak: Homogena kugla polumjera r položena je u dno sferne udubine polumjera zakrivljenosti $R > r$ (vidi sliku). Odredi frekvenciju malih titraja kada kugla kotrljajući se bez proklizavanja "njiše" oko ravnotežnog položaja.



Postupak: Jednadžbu gibanja te iz nje frekvenciju titranja dobit ćemo iz uvjeta očuvanja mehaničke energije, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Kako bismo opisali potencijalnu i kinetičku energiju sustava uvodimo dvije kutne koordinate; Kut Φ opisuje otklon središta kugle od ravnotežnog položaja kako ga vidimo iz središta zakrivljenosti sferne udubine (središte se giba po luku polumjera zakrivljenosti $R - r$), a kut ϕ opisuje zakret same kugle. Kuteve Φ i ϕ povezujemo tako što pomak središta kugle $\mathrm{d}s$ najprije izražavamo s pomoću $\mathrm{d}\Phi$, a zatim s pomoću $\mathrm{d}\phi$,

$$\mathrm{d}s = (R - r)\,\mathrm{d}\Phi = r\,\mathrm{d}\phi.$$

Integracijom slijedi relacija $(R-r)\Phi = r\phi$, dok dijeljenjem gornje jednakosti s $\mathrm{d}t$ dobivamo odnos brzine središta kugle v i kutnih brzina $\dot{\Phi}$ i $\dot{\phi}$,

$$v = (R - r)\dot{\Phi} = r\dot{\phi}.$$

Kinetičku energiju homogene kugle čiji je moment tromosti $I = \frac{2}{5}mr^2$ sada možemo zapisati kao

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m(r\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\dot{\phi}^2 = \frac{7}{10}mr^2\dot{\phi}^2.$$

Pri kutnom otklonu Φ središte kugle se, u odnosu na njegov ravnotežni položaj, podiže na visinu $(R-r)(1-\cos\Phi)$ te gravitacijsku potencijalnu energiju kugle možemo napisati kao

$$U = mg(R - r)(1 - \cos\Phi) \simeq mg(R - r)\frac{\Phi^2}{2},$$

gdje smo, s obzirom da kut Φ pri malim titrajima poprima male vrijednosti, koristili razvoj $\cos\Phi \simeq 1 - \Phi^2/2$. Prelaskom s kuta Φ na kut $\phi = (R - r)\Phi/r$, potencijalnu energiju pišemo kao

$$U = \frac{mgr^2}{2(R - r)}\phi^2.$$

Uvjet očuvanja mehaničke energije daje

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K + U) = \cdots = \frac{7}{5}\dot{\phi}\left(\ddot{\phi} + \frac{5g}{7(R - r)}\phi\right).$$

S obzirom da gornja jednakost mora vrijediti u svim trenucima vremena, slijedi

$$\ddot{\phi} + \frac{5g}{7(R - r)}\phi = 0,$$

što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja jednostavnog harmonijskog titranja s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{5g}{7(R - r)}.$$

Rješenje: $\omega_0 = \sqrt{5g/7(R - r)}$

16 Zadatak: Čestica mase m se giba u x, y-ravnini pod djelovanjem sile $\mathbf{F} = -k\,(x\,\mathbf{i} + 4y\,\mathbf{j})$, a puštena u gibanje iz mirovanja u točki $\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j}$. Napiši putanju čestice u obliku $y[x]$ te ju skiciraj. Zatim odredi najveću vrijednost iznosa brzine koju čestica postiže tokom gibanja.

Postupak: Jednadžba gibanja $m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$, rastavljena na komponente u x, y-ravnini, daje dvije nevezane jednadžbe gibanja,

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \text{i} \qquad m\ddot{y} + 4ky = 0.$$

Prepoznajemo da je riječ o harmoničkom titranju u x-smjeru frekvencijom

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

te o harmoničkom titranju u y-smjeru dvostruko većom većom frekvencijom. Opća rješenja možemo napisati kao

$$x[t] = A_x \cos[\omega_0 t + \phi_x] \qquad \text{i} \qquad y[t] = A_y \cos[2\omega_0 t + \phi_y],$$

gdje su A_x i A_y amplitude titranja, a ϕ_x i ϕ_y su fazni pomaci. Za komponente brzine dobivamo

$$v_x[t] = \dot{x}[t] = -\omega_0 A_x \sin[\omega_0 t + \phi_x] \qquad \text{i} \qquad v_y[t] = \dot{y}[t] = -2\omega_0 A_y \sin[2\omega_0 t + \phi_y].$$

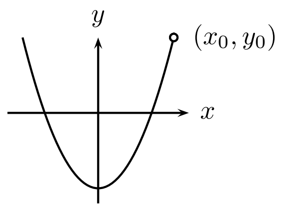
Uzmemo li $t = 0$ kao početni trenutak, na osnovu početnog uvjeta $\mathbf{v}[0] = 0$ zaključujemo da fazni pomaci moraju biti jednaki 0 ili π. Nakon toga na osnovu početnog uvjeta $\mathbf{r}[0] = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j}$ slijedi $A_x = |x_0|$ i $A_y = |y_0|$, gdje za $x_0 > 0$ uzimamo $\phi_x = 0$ dok za $x_0 < 0$ uzimamo $\phi_x = \pi$ te isto tako za y-smjer. Konačno, položaj možemo napisati kao

$$x[t] = x_0 \cos[\omega_0 t] \qquad \text{i} \qquad y[t] = y_0 \cos[2\omega_0 t] = y_0(2\cos^2[\omega_0 t] - 1).$$

Eliminacijom $\cos\omega_0 t$ iz gornjih izraza slijedi jednadžba putanje čestice u x, y ravnini,

$$y[x] = y_0\left(2x^2/x_0^2 - 1\right),$$

gdje prepoznajemo parabolu s tjemenom pri $x = 0$ i $y = -y_0$. Skica za $x_0 > 0$ i $y_0 > 0$:



Komponente brzine su $v_x[t] = -\omega_0 x_0 \sin[\omega_0 t]$ i $v_y[t] = -4\omega_0 y_0 \cos[\omega_0 t]\sin[\omega_0 t]$ te za kvadrat njena iznosa dobivamo

$$v^2[t] = v_x^2[t] + v_y^2[t] = \omega_0^2 \sin^2[\omega_0 t]\,(x_0^2 + 16y_0^2\cos^2[\omega_0 t]).$$

Zbog lakšeg računa uvodimo varijablu $u = \cos^2[\omega_0 t]$ koja poprima vrijednosti iz intervala $[0, 1]$. Gornji izraz za kvadrat iznosa brzine sada možemo napisati kao

$$v^2 = \omega^2(1-u)(x_0^2 + 16y_0^2 u) = -16y_0^2\omega^2(u-1)\left(u + x_0^2/16y_0^2\right), \qquad u \in [0, 1],$$

što je parabola s negativnim vodećim koeficijentom, s nultočkama pri $u_1 = -x_0^2/16y_0^2$ i $u_2 = 1$, te s tjemenom pri

$$u_0 = (u_1 + u_2)/2 = \left(1 - x_0^2/16y_0^2\right)/2.$$

Naš je cilj pronaći maksimum te parabole na intervalu $u \in [0, 1]$. Uočavamo da za sve x_0 i y_0 vrijedi $u_0 \leq 1/2$. Za $u_0 \geq 0$ tjeme se nalazi unutar intervala $[0, 1]$ te odgovara maksimumu kvadrata iznosa brzine. Zaključujemo

$$v_{\max} = \sqrt{v^2\big|_{u=u_0}} = \omega_0(x_0^2 + 16y_0^2)/8y_0 \qquad \text{za} \qquad x_0^2/16y_0^2 \leq 1.$$

Ako je $u_0 < 0$, maksimum vrijednosti v^2 se za $u \in [0, 1]$ nalazi pri lijevom rubu intervala, odnosno pri $u = 0$, te imamo

$$v_{\max} = \sqrt{v^2\big|_{u=0}} = \omega_0 x_0 \qquad \text{za} \qquad x_0^2/16y_0^2 > 1.$$

Rješenje: $y[x] = y_0\left(2x^2/x_0^2 - 1\right)$, $v_{\max} = \omega_0(x_0^2 + 16y_0^2)/8y_0$ za $x_0^2/16y_0^2 \leq 1$, $v_{\max} = \omega_0 x_0$ za $x_0^2/16y_0^2 > 1$

3 Prigušeni oscilator

17 Zadatak: Otklon čestice koja prigušeno titra opisujemo izrazom $x[t] = A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t + \phi]$. Odredi konstante $A > 0$ (amplitudu u $t = 0$) i ϕ (fazu) ako u trenutku $t = 0$ čestica ima brzinu $\dot{x} = v_0 > 0$ pri otklonu $x = x_0 > 0$.

Postupak: Ako je položaj opisan izrazom

$$x[t] = A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t + \phi],$$

onda brzinu možemo napisati kao

$$\dot{x}[t] = -(\delta + \omega\tan[\omega t + \phi])\,x[t].$$

Najprije razmotrimo početni uvjet za brzinu,

$$\dot{x}[0] = -(\delta + \omega\tan\phi)\,x_0 = v_0.$$

On je ispunjen za

$$\tan\phi = -\frac{\delta}{\omega} - \frac{v_0}{x_0\omega},$$

gdje valja voditi računa o dvoznačnosti pri određivanju samog ϕ. S obzirom da je zadano $v_0 > 0$ i $x_0 > 0$, tangens faze ϕ je negativan što dopušta fazu (kut) iz II ili iz IV kvadranta. Zatim razmatramo početni uvjet za otklon,

$$x[0] = A\cos\phi = x_0,$$

S obzirom da zahtijevamo $A > 0$ te da je ovdje zadano $x_0 > 0$, slijedi $\cos\phi > 0$ što znači da faza ϕ pripada I ili IV kvadrantu, od čega je samo IV kvadrant dopušten ranije dobivenim uvjetom. Konačno, iz početnog uvjeta za elongaciju slijedi

$$A = \frac{x_0}{\cos\phi} = x_0\sqrt{1 + \tan^2\phi} = x_0\sqrt{1 + \left(\frac{\delta + v_0/x_0}{\omega}\right)^2}.$$

Rješenje: $\phi = \arctan[-(\delta + v_0/x_0)/\omega] \in [-\pi/2, 0]$, $A = x_0\sqrt{1 + ((\delta + v_0/x_0)/\omega)^2}$

18 Zadatak: Čestica prigušeno titra duž x-osi. Koordinate triju uzastopnih krajnjih položaja čestice (položaji pri kojima brzina čestice iščezava) su $x_1 = 20\,\mathrm{cm}$, $x_2 = 5.6\,\mathrm{cm}$ i $x_3 = 12.8\,\mathrm{cm}$. Odredi koordinatu ravnotežnog položaja.

Postupak: Položaj čestice koja prigušeno titra duž x-osi možemo općenito napisati kao

$$x[t] = x_\infty + A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t + \phi],$$

gdje je x_∞ koordinata ravnotežnog položaja, a

$$\omega = 2\pi/T$$

je period prigušenog titranja. Napišemo li brzinu čestice kao

$$\dot{x}[t] = -A\mathrm{e}^{-\delta t}(\delta\cos[\omega t + \phi] + \omega\sin[\omega t + \phi]),$$

lako je uočiti da ona miruje, tj. nalazi se u krajnjem položaju, u trenucima koji su u vremenu razmaknuti polovicu perioda prigušenog titranja. Označimo li s x_n koordinatu krajnjeg položaja čestice, slijedi da za koordinate dvaju uzastopnih krajnjih položaja vrijedi relacija

$$\frac{x_{n+1} - x_\infty}{x_n - x_\infty} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}$$

(negativan predznak na desnoj strani je prisutan jer se dva uzastopna krajnja položaja nalaze sa suprotnih strana ravnotežnog položaja). U našem slučaju imamo dva para uzastopnih krajnjih položaja za koje pišemo

$$\frac{x_2 - x_\infty}{x_1 - x_\infty} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}, \qquad \frac{x_3 - x_\infty}{x_2 - x_\infty} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}.$$

Eliminacijom $\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}$ iz gornjeg sustava dobivamo

$$(x_1 - x_\infty)(x_3 - x_\infty) = (x_2 - x_\infty)^2,$$

iz čega slijedi

$$x_\infty = \frac{x_1 x_3 - x_2^2}{x_1 - 2x_2 + x_3}.$$

Rješenje: $x_\infty = (x_1 x_3 - x_2^2)/(x_1 - 2x_2 + x_3) = 10.4\,\mathrm{cm}$

19 Zadatak: Čestica koja prigušeno titra s logaritamskim dekrementom prigušenja $\lambda = 0.002$ puštena je u gibanje iz mirovanja pri otklonu $x_0 = 1\,\mathrm{cm}$ u odnosu na ravnotežni položaj. Odredi ukupni put koji će čestica preći do "konačnog zaustavljanja".

Postupak: Ako $x = 0$ odgovara ranvotežnom položaju, uzastopni krajnji položaji čestice koja prigušeno titra zadovoljavaju relaciju

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)} = -\mathrm{e}^{-\lambda/2},$$

gdje je x_n položaj n-tog krajnjeg položaja, δ je koeficijent prigušenja, T je period prigušenog titranja, a $\lambda = \delta T$ je logaritamski dekrement prigušenja. Ukupan put koji čestica pravaljuje titrajući, krene li iz mirovanja pri otklonu x_0, možemo napisati kao

$$\begin{aligned} s &= |x_0| + 2|x_1| + 2|x_2| + 2|x_3| + \cdots \\ &= x_0 + 2x_0\mathrm{e}^{-\lambda/2} + 2x_0\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^2 + 2x_0\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^3 + \cdots \\ &= x_0\Big(-1 + 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^k\Big). \end{aligned}$$

Sumu prepoznajemo kao geometrijski red,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^k = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda/2}},$$

te je prevaljeni put

$$s = x_0\left(-1 + \frac{2}{1-\mathrm{e}^{-\lambda/2}}\right).$$

Rješenje: $s = x_0\left(-1 + 2/(1-\mathrm{e}^{-\lambda/2})\right) \simeq 4x_0/\lambda \simeq 20\,\mathrm{m}$

20 Zadatak: Homogeni disk polumjera $R = 0.5\,\mathrm{m}$ prigušeno njiše oko vodoravne osi koja je okomita na njegovu površinu i prolazi njegovim rubom. Otklonimo li disk iz ravnotežnog položaja za kut $\vartheta_0 = 4°$ i pustimo li ga u gibanje, njegov se krajnji otklon nakon $n = 6$ punih titraja smanji na vrijednost $\vartheta_6 = 1°$. Odredi period prigušenog titranja diska te razliku između tog perioda i perioda kojim bi on titrao kada prigušenje ne bi bilo prisutno. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Kut otklona pri prigušenom titranju ovog njihala možemo napisati kao

$$\vartheta[t] = \theta\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos[\omega t + \phi]$$

gdje su θ i ϕ konstante, parametar δ opisuje prigušenje,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

je frekvencija prigušenog titranja, dok je

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{mgb}{I}} = \sqrt{\frac{mgb}{mb^2 + I_{\mathrm{cm}}}} = \sqrt{\frac{mgR}{mR^2 + \frac{1}{2}mR^2}} = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$$

vlastita frekvencija, odnosno frekvencija kojom bi sustav titrao kada prigušenje ne bi bilo prisutno. Ako je $\vartheta_0 = \vartheta[0]$ otklon oscilatora u nekom trenutku $t = 0$, onda njegov otklon nakon n punih titraja možemo napisati kao

$$\vartheta_n = \vartheta[nT] = \vartheta[0]\mathrm{e}^{-n\delta T} = \vartheta_0\mathrm{e}^{-n\delta T},$$

iz čega slijedi

$$\delta = \frac{1}{nT}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta_n}.$$

Uvrštavanjem gornjih izraza za ω_0 i δ u izraz za ω dobivamo

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{2g}{3R} - \left(\frac{1}{nT}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta_n}\right)^2,$$

iz čega izlučujemo period prigušenog titranja

$$T^2 = (2\pi)^2\frac{3R}{2g}\left(1 + \left(\frac{1}{2\pi n}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta_n}\right)^2\right) = T_0^2\left(1 + \left(\frac{1}{2\pi n}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta_n}\right)^2\right).$$

Uz zadane vrijednosti parametara n, ϑ_0, ϑ_n, R i g dobivamo $T_0 \simeq 1.737\,\mathrm{s}$, a vrlo blisku vrijednost dobivamo i za period prigušenog titranja T. Kako bismo odredili razliku između ta dva perioda možemo pisati

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{T^2 - T_0^2}{T + T_0} \simeq \frac{T^2 - T_0^2}{2T_0} = \cdots = \frac{T_0}{2}\left(\frac{1}{2\pi n}\ln\frac{\vartheta_0}{\vartheta_n}\right)^2,$$

što uz zadane vrijednosti parametara daje $\Delta T \simeq 1.17 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $T_0 = 2\pi\sqrt{3R/2g} \simeq 1.737\,\mathrm{s}$, $T = T_0\sqrt{1 + (\ln[\vartheta_0/\vartheta_n]/2\pi n)^2} \simeq 1.738\,\mathrm{s}$, $\Delta T = T - T_0 \simeq (T_0/2)\big(\ln[\vartheta_0/\vartheta_n]/2\pi n\big)^2 \simeq 1.17 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$

21 Zadatak: Muzička vilica u zraku titra frekvencijom $f = 440\,\mathrm{Hz}$, a amplituda titranja joj se smanji na jednu polovinu početne vrijednosti u vremenu $\tau_{1/2} = 4\,\mathrm{s}$. Odredi koliko bi se smanjila frekvencija titranja iste vilice kada bi ona titrala u sredstvu zbog kojeg bi se amplituda smanjila na jednu polovinu u vremenu $\tau'_{1/2} = 3\,\mathrm{s}$.

Postupak: Amplituda prigušenog titranja se smanjuje u vremenu razmjerno s $\exp(-\delta t)$ pa vrijedi $\exp(-\delta\tau_{1/2}) = 1/2$, odnosno

$$\delta\tau_{1/2} = \ln 2,$$

gdje je δ koeficijent prigušenja. U zraku vilica titra frekvencijom

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2, \qquad \delta = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}},$$

dok u sredstvu s jačim prigušenjem imamo

$$\omega'^2 = \omega_0^2 - \delta'^2, \qquad \delta' = \frac{\ln 2}{\tau'_{1/2}},$$

gdje je ω_0 vlastita frekvencija vilice. Eliminacijom ω_0 iz gornjeg sustava slijedi

$$\omega'^2 = \omega^2 - (\delta'^2 - \delta^2)$$

Razlika frekvencija je

$$\Delta\omega = \omega' - \omega = \omega\left(\sqrt{1 - \frac{\delta'^2 - \delta^2}{\omega^2}} - 1\right).$$

Uzmemo li u obzir $\delta < \delta' \ll \omega$ možemo koristiti razvoj $\sqrt{1 \pm \epsilon} \simeq 1 + \frac{1}{2}\epsilon$ te dobivamo

$$\Delta\omega \simeq -\frac{\delta'^2 - \delta^2}{2\omega} = \frac{(\ln 2)^2}{2\omega}\left(\tau_{1/2}{}^{-2} - \tau'_{1/2}{}^{-2}\right).$$

Konačno uz $\omega = 2\pi f$,

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{(\ln 2)^2}{8\pi^2 f}\left(\tau_{1/2}{}^{-2} - \tau'_{1/2}{}^{-2}\right).$$

Rješenje: $\Delta f = f' - f = (\ln 2)^2\big(\tau_{1/2}^{-2} - \tau'_{1/2}{}^{-2}\big)/8\pi^2 f \simeq -6.72 \times 10^{-7}\,\mathrm{Hz}$

22 Zadatak: Kritično prigušeni oscilator vlastite frekvencije ω_0 pokrenut je u gibanje iz ravnotežnog položaja početnom brzinom iznosa v_0. Odredi najveći otklon koji će ovaj oscilator postići. Zatim odredi najveći iznos brzine koji će oscilator postići tokom povratka iz najjače otklonjenog u ravnotežni položaj.

Postupak: Opće rješenje jednadžbe gibanja kritično prigušenog oscilatora (koeficijent prigušenja δ jednak je vlastitoj frekvenciji ω_0) ima oblik

$$x[t] = (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{-\omega_0 t},$$

gdje su c_1 i c_2 konstante. Tomu odgovara brzina

$$\dot{x}[t] = (c_2 - \omega_0(c_1 + c_2 t))\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.$$

Početni uvjet za položaj daje

$$x[0] = c_1 = 0,$$

s pomoću čega početni uvjet za brzinu daje

$$\dot{x}[0] = c_2 = v_0.$$

Konačno, otklon, brzinu i akceleraciju oscilatora pišemo kao

$$x[t] = v_0 t\, \mathrm{e}^{-\omega_0 t}, \qquad \dot{x}[t] = v_0(1 - \omega t)\, \mathrm{e}^{-\omega_0 t}, \qquad \ddot{x}[t] = -v_0\omega_0(2 - \omega_0 t)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}.$$

Najveći otklon dobivamo iz uvjeta $\dot{x}[t] = 0$ koji je ispunjen u trenutku $t = 1/\omega_0$ te

$$x_{\max} = x[1/\omega_0] = \frac{v_0}{\mathrm{e}\omega_0}.$$

Najveći iznos brzine slijedi iz uvjeta $\ddot{x}[t] = 0$ koji je ispunjen u trenutku $t = 2/\omega_0$. Možemo pisati

$$v_{\max} = |\dot{x}[2/\omega_0]| = \frac{v_0}{\mathrm{e}^2}.$$

Rješenje: $x_{\max} = v_0/\mathrm{e}\omega_0$, $v_{\max} = v_0/\mathrm{e}^2$

23 Zadatak: Mornarički top (16"/50 Mk VII) čija je masa $M = 120\,\mathrm{t}$ ispaljuje projektil mase $m_\mathrm{p} = 1\,\mathrm{t}$ brzinom iznosa $v_\mathrm{p} = 800\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Ovjes topa dopušta topu da se on po ispaljenju projektila pomakne unazad čime se ublaži djelovanje povratnog udarca na konstrukciju broda. Ovjes je podešen je tako da se top ponaša kao kritično prigušeni oscilator. Odredi vrijeme koje protječe od ispaljenja projektila do trenutka u kojem se top nalazi u najjače otklonjenom položaju ako udaljenost tog položaja od ravnotežnog položaja topa iznosi $x_\mathrm{max} = 1.5\,\mathrm{m}$. Zatim odredi najveći iznos sile kojom top nakon ispaljenja projektila djeluje na brod.

Postupak: S obzirom da je top kritično prigušeni oscilator njegovo gibanje u odnosu na brod opisujemo izrazom

$$x[t] = \mathrm{e}^{-\delta t}(x_0 + (v_0 + x_0\delta)t),$$

gdje su x_0 i v_0 početni položaj i brzina u trenutku $t = 0$. Ovdje $t = 0$ odgovara trenutku ispaljenja projektila pa imamo $x_0 = 0$, dok početnu brzinu određujemo na osnovu očuvanja količine gibanja pri ispaljenju projektila. Količina gibanja projektila $m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}$ mora po iznosu biti jednaka količini gibanja topa Mv_0, pa imamo

$$v_0 = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{M},$$

odnosno,

$$x[t] = v_0 t\mathrm{e}^{-\delta t} = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{M}\, t\mathrm{e}^{-\delta t}.$$

Funkcija $t\mathrm{e}^{-\delta t}$ ima maksimum pri $t = \delta^{-1}$ gdje je njena vrijednost $1/e\delta$, pa imamo

$$x_\mathrm{max} = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{\mathrm{e}\delta M}.$$

Iz gornjeg izraza određujemo

$$\delta = \frac{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}{\mathrm{e}Mx_\mathrm{max}},$$

te za trenutak u kojem top doseže x_max dobivamo

$$t = \frac{1}{\delta} = \frac{\mathrm{e}Mx_\mathrm{max}}{m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}}.$$

Za zadane vrijdnosti $t \simeq 0.612\,\mathrm{s}$. Iznos sile kojom top djeluje na brod računamo na osnovu mase i akceleracije samog topa,

$$F[t] = M\ddot{x}[t] = m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}\delta\mathrm{e}^{-\delta t}(-2 + \delta t).$$

Može se pokazati da funkcija $\mathrm{e}^{-\delta t}(-2 + \delta t)$ za $t \geq 0$ ima najveću apsolutnu vrijednost upravo u trenutku $t = 0$, dakle netom nakon ispaljenja projektila (a ne pri maksimalnom otklonu topa gdje je sila povratne opruge najveća, kao niti u još kasnijem trenutku u kojem je ispunjen uvjet $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t = 0$). Slijedi

$$F_\mathrm{max} = |F[0]| = 2m_\mathrm{p}v_\mathrm{p}\delta = \frac{2(m_\mathrm{p}v_\mathrm{p})^2}{\mathrm{e}Mx_\mathrm{max}}.$$

Za zadane vrijednosti $F_\mathrm{max} \simeq 2.61 \times 10^6\,\mathrm{N}$.

Rješenje: $t = \mathrm{e}Mx_\mathrm{max}/m_\mathrm{p}v_\mathrm{p} \simeq 0.612\,\mathrm{s}$, $F_\mathrm{max} = 2(m_\mathrm{p}v_\mathrm{p})^2/\mathrm{e}Mx_\mathrm{max} \simeq 2.61 \times 10^6\,\mathrm{N}$

4 Oscilator s vanjskom silom

24 Zadatak: Kuglica mase $m = 12\,\mathrm{g}$ i polumjra $r = 1\,\mathrm{cm}$ vezana je oprugom za čvrsto uporište tako da kružna frekvencija njenog neprigušenog titranja iznosi $\omega_0 = 2\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Odredi logaritamski dekrement prigušenja, frekvenciju prigušenog titranja te rezonantnu frekvenciju tog oscilatora kada je on uronjen u ulje viskoznosti $\eta = 0.4\,\mathrm{Pa\,s}$. (Silu otpora pri gibanju kuglice kroz ulje opisati Stokesovim zakonom.)

Postupak: Prema Stokesovu zakonu, jakost sile koja koči gibanje kugle polumjera r i brzine iznosa v pri njenu gibanju kroz fluid koeficijenta viskoznosti η opisana je izrazom

$$F_\eta = 6\pi\eta r v.$$

Prema tome, jednadžbu gibanja aluminijske kuglice možemo napisati kao

$$m\ddot{x} = -6\pi\eta r\dot{x} - kx,$$

gdje je k konstanta opruge. Podijelimo li gornju jednadžbu s m možemo ju napisati u poznatom obliku,

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

gdje je $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ zadana frekvencija neprigušenog titranja, dok parametar

$$\delta = 3\pi\eta r/m$$

opisuje jakost prigušenja. Za $\delta < \omega_0$, što je za vrijednosti ovdje zadanih parametara ispunjeno (dobiva se $\delta/\omega_0 = 0.5$), rješenje jednadžbe gibanja je prigušeno titranje frekvencijom

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - (3\pi\eta r/m)^2} \simeq 5.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}.$$

Logaritamski dekrement prigušenja ovdje je

$$\lambda = \delta T = \frac{2\pi\delta}{\omega} = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = 2\pi\left(\frac{\omega_0^2}{\delta^2} - 1\right)^{-1/2} = 2\pi\left(\left(\frac{\omega_0 m}{3\pi\eta r}\right)^2 - 1\right)^{-1/2} \simeq 3.63.$$

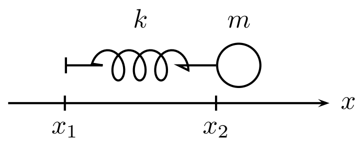
Rezonantna frekvencija dana je izrazom

$$\omega_{\text{rez.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2(3\pi\eta r/m)^2} \simeq 4.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}.$$

Rješenje: $\lambda = 2\pi\big((\omega_0 m/3\pi\eta r)^2 - 1\big)^{-1/2} \simeq 3.63$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (3\pi\eta r/m)^2} \simeq 5.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $\omega_{\text{rez.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2(3\pi\eta r/m)^2} \simeq 4.44\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

25 Zadatak: Na jednom kraju opruge konstante k pričvršćeno je tijelo mase m. Drugi kraj opruge, pod utjecajem vanjske sile, titra duž osi opruge amplitudom R i frekvencijom ω_p. Odredi amplitudu titranja mase m te najveći iznos produljenja opruge do kojeg dolazi tokom gibanja ovog sustava.

Postupak: Neka je x_1 položaj kraja opruge koji titra amplitudom R i frekvencijom ω_p, a x_2 neka je položaj suprotnog kraja na kojem je pričvršćena masa m.



Jednadžbu gibanja mase m možemo napisati kao

$$m\ddot{x}_2 = -k\,\Delta\ell = -k(\ell - \ell_0) = -k(x_2 - x_1 - \ell_0),$$

gdje je $\Delta\ell$ produljenje opruge, ℓ je njena trenutna duljina, a konstanta ℓ_0 je ravnotežna duljina opruge. Titranje x_1 možemo opisati izrazom

$$x_1[t] = R\cos[\omega_\mathrm{p} t].$$

Nadalje, s obzirom da ravnotežnu duljinu opruge ℓ_0 možemo odabrati po volji, zbog jednostavnosti uzimamo $\ell_0 = 0$. Dijeleći jednadžbu gibanja s m možemo ju napisati u obliku

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = R\omega_0^2\cos[\omega_\mathrm{p} t],$$

gdje je

$$\omega_0^2 = k/m, \qquad f_\mathrm{p} = kR/m = R\omega_0^2.$$

Prepoznajemo da se radi o neprigušenom oscilatoru vlastite frekvencije ω_0, ali s vanjskom silom. Općenit izraz za amplitudu prisilnog titranja,

$$A = \frac{f_\mathrm{p}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_\mathrm{p}^2)^2 + (2\delta\omega_\mathrm{p})^2}},$$

uz $\delta = 0$ jer nema prigušenja te uz gornji izraz za f_p poprima oblik

$$A = \frac{f_\mathrm{p}}{|\omega_0^2 - \omega_\mathrm{p}^2|} = \frac{R\omega_0^2}{|\omega_0^2 - \omega_\mathrm{p}^2|} = \frac{R}{\left|1 - (\omega_\mathrm{p}/\omega_0)^2\right|}.$$

Najveće produljenje opruge može se odrediti iz najvećeg iznosa akceleracije mase m koji pri harmoničkom titranju amplitudom A i frekvencijom ω_p iznosi

$$a_\mathrm{max} = \omega_\mathrm{p}^2 A.$$

Najveće produljenje je

$$(\Delta\ell)_\mathrm{max} = \frac{F_\mathrm{max}}{k} = \frac{m a_\mathrm{max}}{k} = \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega_0^2} A = \frac{R}{\left|1 - (\omega_0/\omega_\mathrm{p})^2\right|}.$$

Rješenje: $\omega_0^2 = k/m$, $A = R/|1 - (\omega_\mathrm{p}/\omega_0)^2|$, $(\Delta\ell)_\mathrm{max} = R/|1 - (\omega_0/\omega_\mathrm{p})^2|$

26 Zadatak: Kada na prigušeni oscilator djeluje vanjska harmonička sila amplitude F_{p} i frekvencije jednake rezonantnoj frekvenciji oscilatora, on titra amplitudom $A_{\mathrm{rez.}}$. Kada na isti oscilator djeluje vanjska sila nepromijenjene amplitude F_{p}, ali frekvencije koja je znatno niža od rezonantne frekvencije (teži u nulu), oscilator titra amplitudom A_0. Izrazi logaritamski dekrement prigušenja oscilatora s pomoću omjera $q = A_{\mathrm{rez.}}/A_0$.

Postupak: Logaritamski dekrement prigušenja oscilatora opisanog s ω_0 i δ definiran je s $\lambda = \delta T$, gdje je $T = 2\pi/\omega$ period prigušenog titranja (bez vanjske sile), a $\omega = \omega_0\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}$ je frekvencija. Možemo pisati

$$\lambda = 2\pi\frac{\delta/\omega_0}{\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}}.$$

Amplituda prisilnog titranja tog oscilatora uz vanjsku silu amplitude F_{p} i frekvencije ω_{p} dana je izrazom

$$A[\omega_{\mathrm{p}}] = \frac{F_{\mathrm{p}}/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_{\mathrm{p}}^2)^2+(2\delta\omega_{\mathrm{p}})^2}}.$$

U rezonanciji gdje je $\omega_{\mathrm{p}} = \omega_{\mathrm{rez.}} = \omega_0\sqrt{1-2(\delta/\omega_0)^2}$, te kada $\omega_{\mathrm{p}} \to 0$, imamo

$$A_{\mathrm{rez.}} = A[\omega_{\mathrm{rez.}}] = \frac{F_{\mathrm{p}}/m}{2\delta\omega_0\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}}, \qquad \text{i} \qquad A_0 = A[0] = \frac{F_{\mathrm{p}}/m}{\omega_0^2}.$$

Slijedi

$$q = \frac{A_{\mathrm{rez.}}}{A_0} = \frac{1}{2(\delta/\omega_0)\sqrt{1-(\delta/\omega_0)^2}}.$$

Iz gornjeg izraza računamo omjer δ/ω_0,

$$\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{1}{q^2}}\right).$$

Odabiremo rješenje s negativnim predznakom ispred korijena jer za $(\delta/\omega_0)^2 > 1/2$ pojava rezonancije ne postoji te računamo logaritamski dekrement prigušenja,

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-q^{-2}}}{1+\sqrt{1-q^{-2}}}}.$$

Rješenje: $\lambda = 2\pi\sqrt{\left(1-\sqrt{1-q^{-2}}\right)/\left(1+\sqrt{1-q^{-2}}\right)}$

27 Zadatak: Ovjes (opruge i amortizeri) automobilske prikolice mase $m = 200\,\mathrm{kg}$ podešen je tako da se ona, kad nije opterećena, ponaša kao kritično prigušeni oscilator. Odredi rezonantnu frekvenciju prikolice opterećene teretom mase $M = 400\,\mathrm{kg}$ ako je opaženo da se ona pod tim opterećenjem spusti za $H = 10\,\mathrm{cm}$. (Prikolicu s teretom shvaćamo kao masu $m + M$ oslonjenu na oprugu s prigušenjem. Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Rezonantna frekvencija oscilatora dana je poznatim izrazom

$$\omega_{\text{rez.}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

gdje je ω_0 vlastita frekvencija oscilatora, a δ je parametar koji opisuje prigušenje. S obzirom da prikolicu s teretom shvaćamo kao masu $m + M$ oslonjenu na oprugu konstante k s trenjem b, vlastita frekvencija je

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m+M}},$$

a koeficijent prigušenja je

$$\delta = \frac{b}{2(M+m)}.$$

Na osnovu podatka da se neopterećena prilkolica ponaša kao kritično prigušeni oscilator, što znači da je za $M = 0$ vrijedi $\omega_0 = \delta$, ovdje imamo

$$\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{b}{2m}.$$

Nadalje, na osnovu opažanja da se pod teretom težine Mg prikolica spusti (sabije oprugu) za visinu H, slijedi jenakost sila $kH = Mg$, odnosno

$$k = Mg/H.$$

Konačno, rezonantnu frekvenciju s pomoću gornjih izraza možemo napisati kao

$$\omega_{\text{rez.}}^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 = \frac{k}{m+M} - 2\left(\frac{b}{2(M+m)}\right)^2 = \frac{k}{m+M} - \frac{2km}{(M+m)^2} = \frac{k(M-m)}{(M+m)^2} = \frac{M(M-m)}{(M+m)^2}\,\frac{g}{H},$$

odnosno

$$\omega_{\text{rez.}} = \frac{M}{M+m}\sqrt{\frac{g}{H}\left(1 - \frac{m}{M}\right)}.$$

(Zanimljivo je uočiti da se kod ovako podešenog ovjesa pojava rezonancije pojavljuje tek za $M \geq m$, jer u protivnom je izraz pod korijenom negativan.) Za zadane vrijednosti parametara m, M i H dobije se $\omega_{\text{rez.}} \simeq 4.67\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Rješenje: $\omega_{\text{rez.}} = (M/(M+m))\sqrt{(g/H)(1 - m/M)} \simeq 4.67\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

28 Zadatak: Automobil se kreće po neravninama koje možemo opisati visinom $y[x] = H\cos[2\pi x/\lambda]$, gdje je x vodoravna koordinata položaja, $H = 2\,\mathrm{cm}$ je "amplituda", a λ je "valna duljina" neravnina. Ovjes automobila ima $q = 5$ puta slabije prigušenje od onog koji bi odgovarao kritičnom prigušenju. Odredi amplitudu titranja automobila duž uspravne osi kada se on kreće brzinom pri kojoj dolazi do rezonancije. (Automobil shvaćamo kao masu oslonjenu na oprugu s prigušenjem. Prijelazne pojave ne razmatramo.)

Postupak: Automobil shvaćamo kao oscilator koji se sastoji od mase m oslonjene na oprugu konstante k uz koeficijent trenja b, čemu odgovaraja vlastita frekvencija

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

i koeficijent gušenja $\delta = b/2m$. Pri kritičnom prigušenju vrijedi $\delta = \omega_0$, pa s obzirom da je ovdje prigušenje q puta slabije od kritičnog, imamo

$$\delta = \frac{\omega_0}{q}.$$

Pri gibanju automobila donji kraj opruge titra s amplitudom H, a to znači da amplitudu vanjske sile koja na njega djeluje možemo napisati kao

$$F_{\mathrm{p}} = kH = m\omega_0^2 H.$$

Amplituda titranja u rezonanciji dana je poznatim izrazom

$$A_{\mathrm{rez.}} = \frac{F_{\mathrm{p}}/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Uvrštavanjem gornjih izraza za F_{p} i δ slijedi

$$A_{\mathrm{rez.}} = \frac{Hq^2}{2\sqrt{q^2 - 1}}.$$

Rješenje: $A_{\mathrm{r}} = (H/2)\left(q^2/\sqrt{q^2 - 1}\right) \simeq 5.103\,\mathrm{cm}$

5 Mehanički valovi

29 Zadatak: Gitarska žica 1E, promjera $2r = 0.01''$, načinjena od čelika Youngova modula elastičnosti $E = 2.2 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa}$ i gustoće $\rho = 7700\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, razapeta je na rasponu duljine $\ell = 25.5''$. Odredi silu napetosti i odgovarajuće relativno produljenje žice ako ona u osnovnom modu titra frekvencijom $f = 330\,\mathrm{Hz}$. ($1'' = 1\,\mathrm{in} = 2.54 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$.)

Postupak: Pri titranju stojnog vala na žici duljine ℓ s učvršćenim krajevima, za osnovni mod titranja vrijedi

$$\ell = \frac{\lambda}{2},$$

gdje je λ valna duljina. Tome odgovara valni vektor

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\ell},$$

odnosno frekvencija

$$\omega = 2\pi f = kv,$$

gdje je

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

brzina širenja vala na žici, T je napetost, a

$$\mu = \rho S = \rho r^2 \pi$$

je linijska gustoća mase žice. Slijedi

$$T = \mu v^2 = \rho r^2 \pi \,(2\pi f/k)^2 = \rho r^2 \pi \,(2\pi \ell)^2 = 4 r^2 \pi \rho \ell^2 f^2.$$

Za zadane vrijednosti $T \simeq 71.3\,\mathrm{N}$. Relativno produljenje žice u odnosu na stanje bez naprezanja je

$$\delta_L = \frac{\sigma_L}{E} = \frac{T/S}{E} = \frac{T}{r^2 \pi E} = \frac{4\rho\ell^2 f^2}{E}.$$

Za zadane vrijednosti $\delta \simeq 6.40 \times 10^{-3}$

Rješenje: $T = 4r^2\pi\rho\ell^2 f^2 \simeq 71.3\,\mathrm{N}$, $\delta_L = 4\rho\ell^2 f^2/E \simeq 6.40 \times 10^{-3}$

30 Zadatak: Čelična žica promjera $d = 1\,\mathrm{mm}$ i duljine $\ell = 3\,\mathrm{m}$ s učvršćenim krajevima napeta je tako da joj frekvencija titranja transverzalnog stojnog vala u osnovnom modu iznosi $f = 200\,\mathrm{Hz}$. Odredi ukupnu energiju titranja te žice kada ona titra u osnovnom modu maksimalnom amplitudom $A = 2\,\mathrm{cm}$. (Gustoća čelika $\rho = 7800\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.)

Postupak: Titranje stojnog vala u osnovnom modu na napetoj žici s krajevima pri $x_1 = 0$ i $x_2 = \ell$ možemo opisati valnom funkcijom

$$y[x,t] = A\sin[kx]\cos[\omega t],$$

gdje vrijedi

$$\ell = \frac{\lambda}{2}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\ell}, \qquad \omega = 2\pi f.$$

Linijska gustoća kinetičke energije žice je

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta x}\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y[x,t]}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2\sin^2[kx]\sin^2[\omega t],$$

gdje je

$$\mu = \rho S = r^2\pi\rho = \frac{d^2\pi\rho}{4}$$

linijska gustoća mase žice. Ukupnu kinetičku energiju dobivamo integracijom preko čitavog raspona žice,

$$K = \int_{x=0}^{\ell}\frac{\Delta K}{\Delta x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mu\omega^2A^2\sin^2[\omega t]\int_0^{\ell}\sin^2[\pi x/\ell]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mu\omega^2A^2\ell\sin^2[\omega t]$$

(gornji je integral očigledan jer je srednja vrijednost kvadrata trigonometrijske funkcije na polovici perioda jednaka 1/2). Vidimo da kinetička energija postiže maskimalnu vrijednost

$$(K)_{\max} = \frac{1}{4}\mu\omega^2A^2\ell$$

u trenucima kada vrijedi $\sin[\omega t] = \pm 1$. Primjećujemo da u tim trenucima vrijedi $\cos[\omega t] = 0$, odnosno $y[x,t] = 0$, što znači da u tim trenucima žica nije otklonjena te da je njena potencijalna energija jednaka nuli. Konačno, s obzirom da je ukupna energija zbroj kinetičke i potencijalne energije, te da je ukupna energija očuvana u vremenu, zaključujemo

$$E = K + U = (K)_{\max} = \frac{1}{4}\mu\omega^2A^2\ell = \frac{1}{4}\frac{d^2\pi\rho}{4}(2\pi f)^2A^2\ell = \frac{1}{4}d^2\pi^3\rho f^2A^2\ell.$$

Za zadane vrijednosti d, ℓ i f, A i ρ dobije se $E \simeq 2.90\,\mathrm{J}$.

Rješenje: $E = d^2\pi^3\rho f^2A^2\ell/4 \simeq 2.90\,\mathrm{J}$

31 Zadatak: Uteg mase $M = 2\,\mathrm{kg}$ mirno visi na užetu duljine $\ell = 10\,\mathrm{m}$ i mase $m = 0.5\,\mathrm{kg}$. Odredi trajanje putovanja transverzalnog valnog poremećaja s jednog na drugi kraj kraj užeta (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Brzina kretanja valnog poremećaja dana je izrazom

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

gdje je T napetost, a

$$\mu = \frac{m}{\ell}$$

je linijska gustoća mase užeta. Napetost užeta u točki na visini h iznad njegova donjeg kraja jednaka je zbroju težine utega i težine dijela užeta koje se nalazi ispod te točke,

$$T[h] = \left(M + \frac{h}{\ell}m\right)g.$$

Slijedi da je brzina kretanja vala na visini h iznad donjeg kraja

$$v[h] = \sqrt{\frac{T[h]}{\mu}} = \sqrt{\left(\frac{M\ell}{m} + h\right)g}.$$

Trajanje putovanja vala s jednog kraja na drugi je

$$\tau = \int \mathrm{d}t = \int_{h=0}^{\ell} \frac{\mathrm{d}h}{v[h]} = \frac{1}{\sqrt{g}} \int_0^{\ell} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{M\ell/m + h}} = \frac{2}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{M\ell}{m} + h}\,\Bigg|_0^{\ell} = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(\sqrt{1 + \frac{M}{m}} - \sqrt{\frac{M}{m}}\right).$$

Za zadane vrijednosti M, ℓ i m dobivamo $\tau \simeq 0.477\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $\tau = 2\sqrt{\ell/g}\left(\sqrt{1 + M/m} - \sqrt{M/m}\right) \simeq 0.477\,\mathrm{s}$

32 Zadatak: Napetim užetom, brzinom iznosa $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, putuje transverzalni valni poremećaj oblika $y[x] = \alpha x \mathrm{e}^{-x^2/b^2}$, gdje su $\alpha = 0.1$ i b konstante. Odredi maksimalni iznos brzine kojom se gibaju čestice užeta.

Postupak: Valni poremećaj koji se brzinom iznosa v užetom giba na desno općenito opisujemo s

$$y[x,t] = f[x - vt],$$

gdje je f funkcija jedne varijable. U trenutku $t = 0$ imamo

$$y[x,0] = f[x].$$

Uzmemo li da se oblik valnog poremećaja opisan u zadatku funkcijom $y[x]$ odnosi na trenutak $t = 0$, mora vrijediti $f[x] = y[x]$, te funkciju f prepoznajemo kao

$$f[x] = \alpha x \mathrm{e}^{-x^2/b^2}.$$

Brzina kojom se gibaju čestice je

$$\dot{y}[x,t] = \frac{\partial}{\partial t} y[x,t] = \frac{\partial}{\partial t} f[x - vt] = -v f'[x - vt].$$

Najveći iznos te brzine možemo pronaći tako da se ograničimo na trenutak $t = 0$ te da razmotrimo brzine čestica duž čitave x-osi,

$$\dot{y}[x,0] = -v f'[x].$$

Ekstrem gornje brzine tražimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dot{y}[x,0] = -v f''[x] = -\frac{2\alpha x \mathrm{e}^{-(x/b)^2}}{b^2}\left(3 - \frac{2x^2}{b^2}\right),$$

koji je ispunjen za

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\,b, \qquad x_3 = 0.$$

Brzine čestica za gornje vrijednosti x su

$$\dot{y}[x_{1,2},0] = \frac{2}{\mathrm{e}^{3/2}}\alpha v, \qquad \dot{y}[x_3,0] = -\alpha v.$$

S obzirom da je $2 < \mathrm{e}^{3/2}$ zaključujemo da je najveći iznos brzine koju postižu čestice pri gibanju zadanog valnog poremećaja

$$|\dot{y}|_{\max} = \alpha v.$$

Za zadane vrijednosti $|\dot{y}|_{\max} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Rješenje: $|\dot{y}|_{\max} = \alpha v = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

33 Zadatak: Beskonačnim užetom napetosti $T = 2\,\mathrm{kN}$ putuje transverzalni valni poremećaj čiji je oblik u trnutku $t = 0$ opisan s $y[x] = A\mathrm{e}^{-x^2/b^2}$, gdje su $A = 1\,\mathrm{cm}$ i $b = 10\,\mathrm{cm}$ konstante. Odredi ukupnu energiju valnog poremećaja. (Koristi se integral $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}/2$.)

Postupak: Uzmemo li da valni poremećaj putuje na desno, opisujemo ga valnom funkcijom

$$y[x,t] = f[x - vt] = A\mathrm{e}^{-(x-vt)^2/b^2},$$

gdje je

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

brzina propagacije vala, T je napetost, a $\mu = \Delta m/\Delta x$ je linijska gustoća mase užeta. Linijska gustoća kinetičke energije užeta je

$$\frac{\Delta K}{\Delta x} = \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta x}v_y^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y[x,t]}{\partial t}\right)^2 = \frac{2\mu v^2 A^2}{b^2}\left(\frac{x - vt}{b}\mathrm{e}^{-(x-vt)^2/b^2}\right)^2.$$

Linijska gustoća potencijalne energije je

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{T(\Delta x' - \Delta x)}{\Delta x},$$

gdje je $\Delta x' - \Delta x$ produljenje elementa užeta uslijed valnog gibanja. Pišući

$$\Delta x' = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x\sqrt{1 + (\Delta y/\Delta x)^2} \simeq \Delta x\left(1 + (\Delta y/\Delta x)^2/2\right),$$

gdje smo koristili $\sqrt{1+\epsilon} \simeq 1 + \epsilon/2$, slijedi

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{T}{2}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = \frac{T}{2}\left(\frac{\partial y[x,t]}{\partial x}\right)^2 = \frac{2TA^2}{b^2}\left(\frac{x - vt}{b}\mathrm{e}^{-(x-vt)^2/b^2}\right)^2.$$

Linijsku gustoću ukupne energije u trenutku $t = 0$ možemo, koristeći $\mu v^2 = T$, napisati kao

$$\left.\frac{\Delta E}{\Delta x}\right|_{t=0} = \left.\left(\frac{\Delta K}{\Delta x} + \frac{\Delta U}{\Delta x}\right)\right|_{t=0} = \frac{4TA^2}{b^4}x^2\mathrm{e}^{-2x^2/b^2}.$$

Ukupna energija valnog poremećaja je

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta E}{\Delta x}\,\mathrm{d}x = \frac{4TA^2}{b^4}\frac{b^3}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty}u^2\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{TA^2}{b}.$$

Za zadane vrijednosti $E \simeq 2.507\,\mathrm{J}$

Rješenje: $E = TA^2\sqrt{\pi}/b\sqrt{2} \simeq 2.507\,\mathrm{J}$

34 Zadatak: Stojni valovi zvuka titraju u dvije cijevi s otvorenim krajevima. Duljina prve cijevi je $\ell = 1$ m, a druga cijev je za $\Delta\ell = 1\,\mathrm{mm}$ dulja od prve. Odredi frekvenciju udara koji se čuju kada obje cijevi istovremeno proizvode zvuk u osnovnom modu titranja. (brzina zvuka $v_\mathrm{z} = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$)

Postupak: Titranje zraka u osnovnom modu u cijevi s otvorenim krajevima pri $x_1 = 0$ i $x_2 = \ell$ opisujemo funkcijom

$$\xi[x,t] = A\cos[kx]\cos[\omega t]$$

gdje vrijedi

$$\ell = \frac{\lambda}{2}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\ell}, \qquad \omega = kv_\mathrm{z} = \frac{\pi}{\ell}v_\mathrm{z}.$$

Kad dvije cijevi titraju istovremeno, ukupno titranje koje opažamo u nekoj točki izvan obiju cijevi možemo opisati s

$$\zeta[x,t] = a_1\cos[\omega_1 t + \phi_1] + a_2\cos[\omega_2 t + \phi_2].$$

Uzmemo li $a_1 = a_2 = a$, te zbog jednostavnosti $\phi_1 = \phi_2 = 0$, imamo

$$\zeta[x,t] = 2a\cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right]\cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right],$$

gdje prepoznajemo udare s kružnom frekvencijom

$$\omega_\mathrm{u} = \omega_1 - \omega_2 = \pi v_\mathrm{z}\left(\frac{1}{\ell_1} - \frac{1}{\ell_2}\right) = \pi v_\mathrm{z}\frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1\ell_2} = \pi v_\mathrm{z}\frac{\Delta\ell}{\ell(\ell + \Delta\ell)} \simeq \pi v_\mathrm{z}\frac{\Delta\ell}{\ell^2}.$$

Tražena frekvencija je

$$f_\mathrm{u} = \frac{\omega_\mathrm{u}}{2\pi} = \frac{v_\mathrm{z}\Delta\ell}{2\ell^2}.$$

Za zadane vrijednosti $f_\mathrm{u} \simeq 0.170\,\mathrm{Hz}$.

Rješenje: $f_\mathrm{u} = v_\mathrm{z}\Delta\ell/2\ell(\ell + \Delta\ell) \simeq v_\mathrm{z}\Delta\ell/2\ell^2 \simeq 0.170$ Hz

35 Zadatak: Kada je omjer frekvencija dvaju tonova jednak $\sqrt[12]{2}$ glazbenici kažu da se oni razlikuju za “pola tona”. (Jednu “oktavu” čini dvanaest uzastopnih “polutonova”, dakle ona odgovara udvostručenju polazne frekvencije.) Odredi od koliko se “polutonova” sastoji prirast frekvencije koji nastupa kada titranje zraka u cijevi s jednim zatvorenim i jednim otvorenim krajem iz osnovnog moda pređe u prvi pobuđeni.

Postupak: Duljina cijevi ℓ s jednim zatvorenim i jednim otvorenim krajem i valna duljina zvuka λ, kad se radi o titranju u osnovnom modu (1) te u prvom pobuđenom modu (2), zadovoljavaju relacije

$$\ell = \frac{\lambda_1}{4}, \qquad \ell = \frac{3\lambda_2}{4}.$$

Nadalje vrijedi

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\pi}{2\ell}, \qquad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = \frac{3\pi}{2\ell} = 3k_1,$$

te koristeći relaciju

$$\omega = kv$$

slijedi

$$\omega_2 = 3\omega_1.$$

Vidimo da prilikom prelaska u prvi pobuđeni mod titranja dolazi do utrostručenja polazne frekvencije zvuka. Odgovarajući broj polutonova m dobit ćemo s pomoću uvjeta

$$3 = \left(\sqrt[12]{2}\right)^m = 2^{m/12},$$

iz čega slijedi

$$m = 12 \times \frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 19.02.$$

Rješenje: $m = 12 \times \ln 3/\ln 2 \simeq 19.02$

36 Zadatak: Zvučnik se nalazi na vodoravnom tlu i emitira zvuk frekvencije $f = 1000\,\mathrm{Hz}$ ravnomjerno u svim smjerovima "gornjeg poluprostora". Odredi snagu zvučnika ako na udaljenosti $r = 30\,\mathrm{m}$ od njega jakost buke iznosi $L_{\mathrm{dB}} = 100\,\mathrm{dB}$. Zatim odredi amplitudu kojom osciliraju čestice zraka te amplitudu oscilacije tlaka zraka na udaljenosti r od izvora. (Za frekvenciju zvuka $f = 1000\,\mathrm{Hz}$ uzima se da granica čujnosti odgovara intenzitetu $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. Gustoća zraka $\rho_{\mathrm{z}} = 1.22\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, brzina zvuka u zraku $v_{\mathrm{z}} = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Na osnovu definicije jakosti buke, $L_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}[I/I_0]$, gdje je I_0 granica čujnosti, slijedi

$$I = I_0 \times 10^{L_{\mathrm{dB}}/10},$$

što za zadanu vrijednost daje $I = 10^{-2}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$. S druge strane, intenzitet zvuka definiran je kao omjer srednje snage vala, odnosno njegova izvora, i površine na koju on pada, što je ovdje polusfera polumjera r. Možemo pisati

$$\langle P\rangle = IS = I2r^2\pi,$$

što za zadane vrijednosti daje $\langle P\rangle \simeq 56.5\,\mathrm{W}$. Nadalje, poznati izraz za intenzitet longitudinalnog vala glasi

$$I = \frac{\langle P\rangle}{S} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{z}}\omega^2 A^2 v_{\mathrm{z}} = \frac{(\Delta p)^2_{\mathrm{max}}}{2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}},$$

gdje je ρ_{z} gustoća zraka, v_{z} je brzina zvuka u zraku, $\omega = 2\pi f$ je kružna frekvencija vala, A je amplituda oscilacije čestica, a $(\Delta p)_{\mathrm{max}}$ je amplituda titranja tlaka. Slijedi

$$A = \frac{1}{\pi f}\sqrt{\frac{I}{2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}}},$$

što za zadane vrijednosti daje $A \simeq 1.10 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Za amplitudu oscilacije tlaka dobivamo

$$(\Delta p)_{\mathrm{max}} = \sqrt{2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}I},$$

što za zadane vrijednosti daje $(\Delta p)_{\mathrm{max}} \simeq 2.88\,\mathrm{Pa}$.

Rješenje: $I = I_0 \times 10^{L_{\mathrm{dB}}/10} = 10^{-2}\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, $\langle P\rangle = 2r^2\pi I \simeq 56.5\,\mathrm{W}$, $A = (1/\pi f)\sqrt{I/2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}} \simeq 1.10 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$, $(\Delta p)_{\mathrm{max}} = \sqrt{2\rho_{\mathrm{z}}v_{\mathrm{z}}I} \simeq 2.88\,\mathrm{Pa}$

37 Zadatak: Prvi automobil vozi ravnom cestom prema reflektirajućem zidu brzinom iznosa $v_\mathrm{i} = 60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ svo vrijeme trubeći frekvencijom $f_\mathrm{i} = 250\,\mathrm{Hz}$. Drugi automobil vozi istom cestom ususret prvom automobilu brzinom iznosa $v_\mathrm{p} = 120\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Odredi frekvenciju koju čuje vozač drugog automobila kada se radi o zvuku trube koji do njega stiže izravno od prvog automobila (a) prije njihova mimoilaženja, (b) nakon mimoilaženja, te (c) kada se radi o zvuku trube koji do njega stiže nakon što se reflektirao od zida. (Brzina zvuka $v_\mathrm{z} = 1240\,\mathrm{km\,h^{-1}}$)

Postupak: Općenito, frekvencija izvora f_i i frekvencija f_p koju čuje prijamnik slijede relaciju

$$\frac{f_\mathrm{p}}{f_\mathrm{i}} = \frac{1 - \hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip} \cdot \mathbf{v}_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}}{1 - \hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip} \cdot \mathbf{v}_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}},$$

gdje je $\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}$ jedinični vektor usmjeren od izvora prema prijamniku, a $\mathbf{v}_\mathrm{i}$ i $\mathbf{v}_\mathrm{p}$ su njihove brzine. U slučaju prijema zvuka koji stiže izravno od prvog automobila ovdje imamo

$$f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,\frac{1 \pm v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}}{1 \mp v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}},$$

gdje gornji predznak odgovara slučaju (a), a donji predznak slučaju (b). U slučaju (c) radi se o zvuku koji stiže nakon reflektiranja od zida pa najprije računamo frekvenciju koju "čuje" zid,

$$f_\mathrm{zid} = \frac{f_\mathrm{i}}{1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}},$$

a zatim zid shvaćamo kao izvor frekvencije f_zid. Slijedi da je frekvencija koju čuje vozač drugog automobila

$$f_\mathrm{p} = f_\mathrm{zid}\,(1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}) = f_\mathrm{i}\,\frac{1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z}}{1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}}.$$

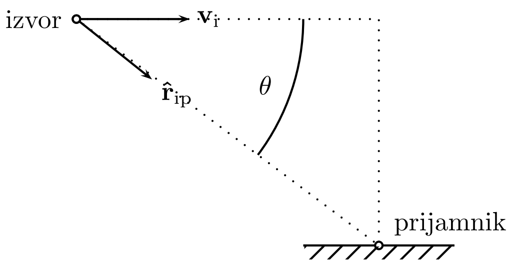
Rješenje: (a) $f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,(1 + v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z})/(1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}) \simeq 288\,\mathrm{Hz}$, (b) $f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,(1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z})/(1 + v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}) \simeq 215\,\mathrm{Hz}$, (c) $f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,(1 - v_\mathrm{p}/v_\mathrm{z})/(1 - v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}) \simeq 237\,\mathrm{Hz}$

38 Zadatak: Avion leti duž vodoravnog pravca brzinom $v_\mathrm{i} = 0.8\,v_\mathrm{z}$, gdje je v_z brzina širenja zvuka, i odašilje zvuk frekvencije $f_\mathrm{i} = 100\,\mathrm{Hz}$. Izračunaj frekvenciju koju čuje mirni prijamnik na tlu u trenutku kada se avion nalazi točno iznad njega. (Potrebno je uzeti u obzir "kašnjenje" zvuka.)

Postupak: Frekvencija zvuka koju čuje mirni prijamnik dana je izrazom

$$f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}\,\frac{v_\mathrm{z}}{v_\mathrm{z} - \hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{i}},$$

gdje je $\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}$ je jedinični vektor koji pokazuje smjer od položaja izvora u trenutku emitiranja prema položaju prijamnika u trenutku prijama, $\mathbf{v}_\mathrm{i}$ je brzina izvora u trenutku emitiranja, a v_z je iznos brzine zvuka. Zadanu situaciju prikazujemo skicom:



U pravokutnom trokutu na skici, omjer duljine vodoravne katete i duljine hipotenuze jednak je $v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}$, jer u istom vremenu avion prevaljuje duljinu katete, dok zvuk prevaljuje duljinu hipotenuze. Možemo pisati

$$\cos\theta = v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z},$$

odnosno skalarni produkt $\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{i}$ možemo napisati kao

$$\hat{\mathbf{r}}_\mathrm{ip}\cdot\mathbf{v}_\mathrm{i} = v_\mathrm{i}\cos\theta = v_\mathrm{i}^2/v_\mathrm{p}.$$

Slijedi

$$f_\mathrm{p} = \frac{f_\mathrm{i}}{1-(v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z})^2}.$$

Za zadani omjer $v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z}$ dobivamo $f_\mathrm{p} \simeq 278\,\mathrm{Hz}$.

Rješenje: $f_\mathrm{p} = f_\mathrm{i}/(1-(v_\mathrm{i}/v_\mathrm{z})^2) \simeq 278\,\mathrm{Hz}$

39 Zadatak: Izvor koji proizvodi zvuk frekvencije f i prijamnik se nalaze u istoj točki do trenutka $t = 0$ u kojem se izvor počninje gibati ubrzavajući duž pravca akceleracijom stalnog iznosa a, dok prijamnik i dalje miruje. Odredi frekvenciju koju čuje prijamnik u trenutku $t > 0$.

Postupak: Općenito, kada izvor koji se giba brzinom $\mathbf{v}_i$ odašilje frekvenciju f_i, frekvencija koju čuje mirni prijamnik je

$$f_{\mathrm{p}} = \frac{f_{\mathrm{i}}}{1 - (\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{ip}} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{i}})/v_{\mathrm{z}}},$$

gdje je v_{z} iznos brzine zvuka, a $\hat{\mathbf{r}}$ je jedinični vektor usmjeren od točke odašiljanja prema prijemniku. U ovom slučaju, u trenutku $t > 0$ prijamnik čuje zvuk emitiran u ranijem trenutku t' (vrijedi $0 < t' < t$) u kojem su brzina izvora i udaljenost izvora od prijamnika dani s

$$v(t') = at', \qquad x(t') = \frac{a}{2}t'^2.$$

Vrijeme t nakon kojeg odaslani zvuk stiže do prijamnika jest zbroj vremena t' koliko je izvor putovao i vremena $x(t')/v_{\mathrm{z}}$ koliko je zvuku trebalo da stigne do prijamnika, dakle vrijedi relacija

$$t = t' + x(t')/v_{\mathrm{z}}.$$

Rješavanjem po t' dobivamo

$$t'_{1,2} = \frac{v_{\mathrm{z}}}{a}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 2at/v_{\mathrm{z}}}\right),$$

gdje odabiremo pozitivno rješenje, tj. ono s pozitivnim predznakom ispred korijena. Brzina izvora u trenutku t' je

$$v(t') = v_{\mathrm{z}}\left(-1 + \sqrt{1 + 2at/v_{\mathrm{z}}}\right).$$

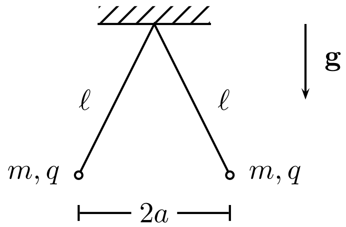
Konačno, frekvencija koju čuje mirni prijamnik u trenutku t je

$$f_{\mathrm{p}}(t) = \frac{f_{\mathrm{i}}}{1 - (\hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{ip}} \cdot \mathbf{v}_{\mathrm{i}}(t'))/v_{\mathrm{z}}} = \frac{f_{\mathrm{i}}}{1 + v(t')/v_{\mathrm{z}}} = \frac{f_{\mathrm{i}}}{\sqrt{1 + 2at/v_{\mathrm{z}}}}.$$

Rješenje: $f_{\mathrm{p}}(t) = f_{\mathrm{i}}/\sqrt{1 + 2at/v_{\mathrm{z}}}$

6 Elektromagnetizam

40 Zadatak: Dvije metalne kuglice od kojih svaka ima masu $m = 10\,\mathrm{g}$ ovješene su jedna tik do druge o nevodljive niti duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$. Dovedemo li na kuglice ukupan naboj $2q$ koji se među njima ravnomjerno rasporedi, one će se zbog elektrostatskog odbijanja razmaknuti (vidi sliku). Odredi naboj q ako razmak među kuglicama iznosi $2a = 20\,\mathrm{cm}$ i izrazi ga u jedinicama elementarnog naboja q_e. (Permitivnost vakuuma $\epsilon_0 = 8.854\times10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, elementarni naboj $q_\mathrm{e} = 1.602\times10^{-19}\,\mathrm{C}$.)



Postupak: Neka je x-os vodoravna i usmjerena prema desno, a y-os neka je uspravna i usmjerena uvis. Na svaku od kuglica djeluje napetost niti,

$$\mathbf{T} = T(\pm\sin\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j}),$$

gdje je α kut otklona niti, a izbor predznaka x-komponente ovisi o tome promatramo li lijevu ili desnu kuglicu. Na kuglice također djeluje odbojna elektrostatska sila,

$$\mathbf{F}_\mathrm{e} = \mp F_\mathrm{e}\,\mathbf{i}, \qquad F_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(2a)^2},$$

gdje ponovo izbor predznaka ovisi o tome promatramo li lijevu ili densu kuglicu, te s gravitacijska sila

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g} = -mg\,\mathbf{j}.$$

Uvjet ravnoteže kuglica možemo napisati kao

$$0 = T(\pm\sin\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j}) \mp F_\mathrm{e}\,\mathbf{i} - G\,\mathbf{j},$$

odnosno, raspisano po komponentama

$$F_\mathrm{e} = T\sin\alpha, \qquad G = T\cos\alpha.$$

Dijeljenjem gornjih jednadžbi dobivamo

$$\tan\alpha = \frac{F_\mathrm{e}}{G},$$

dok iz geometrije imamo

$$\tan\alpha = \frac{a}{\sqrt{\ell^2 - a^2}}.$$

Eliminacijom $\tan\alpha$ iz gornjih dviju jednadžbi te korištenjem izraza za F_e i G, slijedi

$$q^2 = 4\pi\epsilon_0\,mg\,\frac{4a^3}{\sqrt{\ell^2 - a^2}},$$

odnosno,

$$q = \pm 4a^{3/2}\sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 mg}{\sqrt{\ell^2 - a^2}}},$$

gdje predznak naboja q ostaje neodređen. Za zadane vrijednosti m, ℓ i a dobije se $q \simeq \pm 2.095\times10^{-7}\,\mathrm{C} \simeq \pm 1.308\times10^{12}\,q_\mathrm{e}$.

Rješenje: $q = \pm 4a^{3/2}\sqrt{\pi\epsilon_0\,mg/\sqrt{\ell^2 - a^2}} \simeq \pm 1.308\times10^{12}\,q_\mathrm{e}$

41 Zadatak: Dvije čestice naboja q učvršćene su na x-osi pri koordinatama $x_{1,2} = \pm a$. Odredi frekvenciju kojom bi oko ravnotežnog položaja $x = y = 0$ titrala čestica mase m i naboja q, ako je njeno gibanje ograničeno na x-os. Zatim odredi frekvenciju kojom bi duž y-osi, oko istog ravnotežnog položaja, titrala čestica mase m i naboja $-q$. (Pretpostavlja se male oscilacije i koristiti se razvoj $(1+\epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$.)

Postupak: Čestice mase m i naboja $\pm q$ gibaju se pod djelovanjem električne sile $\mathbf{F} = \pm q\mathbf{E}$. Električno polje $\mathbf{E}$ dvaju naboja q učvršćenih pri $\mathbf{r}_{1,2} = \pm a\,\mathbf{i}$ možemo u točki $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ napisati kao

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(x-a)\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}}{|(x-a)\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}|^3} + \frac{(x+a)\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}}{|(x+a)\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}|^3}\right)$$

Za gibanje naboja q duž x-osi odgovorna je x-komponenta električne sile. Uvrstimo li $y = 0$ u gornji izraz za električno polje, kao x-komponentu dobivamo

$$E_x[x] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x-a}{|x-a|^3} + \frac{x+a}{|x+a|^3}\right).$$

S obzirom da razmatramo male oscilacije, vrijedi $|x| \ll a$, odnosno $|a \pm x| = a \pm x$, te možemo pisati

$$E_x[x] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-(a-x)^{-2} + (a+x)^{-2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(-(1-x/a)^{-2} + (1+x/a)^{-2}\right) \simeq -\frac{qx}{\pi\epsilon_0 a^3},$$

gdje smo u poslijednjem koraku koristili razvoj $(1\pm\epsilon)^{-2} \simeq 1 \mp 2\epsilon$. Jednadžbu gibanja čestice naboja q i mase m sada možemo napisati kao

$$m\ddot{x} = F_x = qE_x = -\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a^3}\,x,$$

odnosno $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, gdje prepoznajemo jednadžbu gibanja harmoničkog oscilatora s frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a^3 m}.$$

Za gibanje naboja $-q$ duž y-osi odgovorna je y-komponenta električnoe sile. Uz $x = 0$ dobivamo

$$E_y[y] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{y}{|-a\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}|^3} + \frac{y}{|a\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}|^3}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2y}{(a^2+y^2)^{3/2}} = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0 a^3}\frac{1}{(1+(y/a)^2)^{3/2}} \simeq \frac{qy}{2\pi\epsilon_0 a^3},$$

gdje smo, s obzirom da je pri malim oscilacijama vrijedi $|y| \ll a$, koristili razvoj $(1+\epsilon)^{-3/2} \simeq 1 - (3/2)\epsilon$. Jednadžbu gibanja pišemo kao

$$m\ddot{y} = F_y = -qE_y = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a^3}\,y,$$

odnosno $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$, gdje je frekvencija titranja

$$\omega_0^2 = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a^3 m}.$$

Rješenje: Titranje q duž x-osi: $\omega_0 = q/\sqrt{\pi\epsilon_0 a^3 m}$, titranje $-q$ duž y-osi: $\omega_0 = q/\sqrt{2\pi\epsilon_0 a^3 m}$

42 Zadatak: Električno polje opisano je izrazom

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}] = \begin{cases} E_0(r/r_0)\,\hat{\mathbf{r}} & \text{za} \quad r \le r_0 \\ E_0(r_0/r)^2\,\hat{\mathbf{r}} & \text{za} \quad r > r_0, \end{cases}$$

gdje je $\mathbf{r}$ položaj točke u prostoru u odnosu na točku $\mathcal{O}$ (ishodište), r je udaljenost, $\hat{\mathbf{r}}$ je jedinični vektor, a E_0 i $r_0 > 0$ su konstante. Odredi količinu električnog naboja sadržanu unutar sfere polumjera r sa središtem u $\mathcal{O}$ te volumnu gustoću električnog naboja na udaljenosti r od točke $\mathcal{O}$.

Postupak: Prema Gaussovu zakonu za električno polje, količina naboja q unutar zatvorene plohe S razmjrena je toku električnog polja $\mathbf{E}$ kroz S,

$$q = \int_V \rho\,\mathrm{d}V = \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Kao S ovdje odabiremo sfernu plohu polumjera r sa središtem u $\mathcal{O}$. S obzirom da je zadano polje $\mathbf{E}$ svugdje okomito na tako odabranu plohu te da je svugdje na njoj jednakog iznosa, tok $\mathbf{E}$ kroz S jednak je produktu jakosti polja i ukupne površine plohe. Slijedi

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{cases} E_0(r/r_0)\,4\pi r^2 & \text{za} \quad r \le r_0 \\ E_0(r_0/r)^2\,4\pi r^2 & \text{za} \quad r > r_0, \end{cases}$$

odnosno,

$$q[r] = \begin{cases} 4\pi\epsilon_0 E_0 r^3/r_0 & \text{za} \quad r \le r_0 \\ 4\pi\epsilon_0 E_0 r_0^2 & \text{za} \quad r > r_0. \end{cases}$$

Volumnu gustoću naboja na udaljenosti r od točke $\mathcal{O}$ dobit ćemo iz omjera naboja sadržanog između dviju sfernih ljuski čiji su polumjeri r i $r + \mathrm{d}r$ i volumena prostora među tim ljuskama,

$$\rho[r] = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} = \frac{q[r+\mathrm{d}r] - q[r]}{4\pi r^2\,\mathrm{d}r} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}q[r].$$

Slijedi

$$\rho[r] = \begin{cases} 3\epsilon_0 E_0/r_0 & \text{za} \quad r \le r_0 \\ 0 & \text{za} \quad r > r_0. \end{cases}$$

Prepoznajemo da je riječ o homogenoj raspodjeli naboja unutar sfere polumjera r_0 te o vakuumu izvan nje.

Gustoću naboja se također može odrediti iz Maxwellove jednadžbe, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. U pravokutnim koordinatama, pišući $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, unutar sfere polumjera $\mathbf{r}_0$ imamo

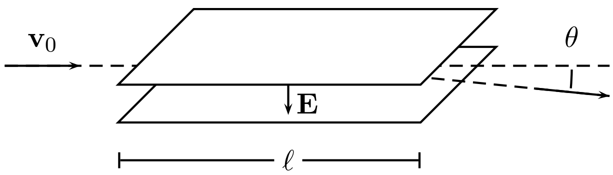
$$\rho = \epsilon_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \epsilon_0 \left(\mathbf{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \mathbf{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + \mathbf{k}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\cdot\left(\frac{E_0}{r_0}\,(\mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z)\right) = \cdots = \frac{3\epsilon E_0}{r_0},$$

dok izvan nje imamo

$$\rho = \epsilon_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \epsilon_0 \left(\mathbf{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \mathbf{j}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + \mathbf{k}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\cdot\left(E_0 r_0^2\,\frac{\mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \cdots = 0.$$

Rješenje: Za $r \le r_0$: $q[r] = 4\pi\epsilon_0 E_0 r^3/r_0$, $\rho[r] = 3\epsilon_0 E_0/r_0$, za $r > r_0$: $q = 4\pi\epsilon_0 E_0 r_0^2$, $\rho = 0$

43 Zadatak: Čestica mase m i naboja q ulijeće brzinom iznosa v_0 među paralelne ploče nabijenog kondenzatora. Prvobitan smjer gibanja čestice paralelan je s pločama, a duljina ploča u tom smjeru je ℓ (vidi sliku). Odredi kut otklona smjera gibanja čestice do kojeg dolazi uslijed prolaska kroz kondenzator ako je jakost homogenog električnog polja među pločama E. (Pretpostavljamo da čestica nije udarila u ploču kondenzatora.)



Postupak: Postavimo pravokutni koordinatni sustav tako da je ishodište u točki u kojoj čestica ulazi u kondenzator, orijentacija x-osi neka je podudarna s prvobitnim smjerom gibanja čestice, a y-os neka ima smjer obrnut u odnosu na smjer električnog polja. Jednadžba gibanja nabijene čestice u električnom polju, $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = q\mathbf{E}$, ovdje glasi

$$m\big(\ddot{x}[t]\,\mathbf{i} + \ddot{y}[t]\,\mathbf{j}\big) = -qE\,\mathbf{j}.$$

Uz pokratu

$$\gamma = qE/m$$

jednadžba gibanja svodi se na

$$\ddot{x}[t] = 0, \qquad \ddot{y}[t] = -\gamma,$$

što je podudarno s uobičajenim opisom gibanja čestice u homogenom polju gravitacijske sile ubrzanja $g = \gamma$. Integracijom jednadžbi gibanja uz početne uvjete u $t = 0$,

$$x[0] = y[0] = 0, \qquad \dot{x}[0] = v_0, \quad \dot{y}[0] = 0,$$

slijedi

$$x[t] = v_0 t, \qquad y[t] = -\frac{\gamma}{2}t^2,$$

što pak odgovara tzv. horizontalnom hitcu u homogenom polju gravitacijske sile. Čestica napušta kondenzator u trenutku $t = \tau$ u kojem vrijedi $x[\tau] = \ell$, odnosno

$$\tau = \ell/v_0.$$

Kut otkona slijedi iz

$$\tan\theta = -\frac{\dot{y}[\tau]}{\dot{x}[\tau]} = \frac{\gamma\tau}{v_0} = \frac{qE\ell}{mv_0^2}.$$

Rješenje: $\tan\theta = qE\ell/mv_0^2$

44 Zadatak: Čestica mase m i naboja q se slobodno giba kroz prostor u kojem nije prisutno elektromagnetsko polje. U trenutku $t = 0$ uključuje se homogeno magnetsko polje jakosti B i smjera okomitog na brzinu čestice, a u trenutku $t = \tau$ polje se gasi. Odredi otklon pravca gibanja čestice koji je nastupio uslijed prisutnosti magnetskog polja u tom vremenskom intervalu.

Postupak: Prije uključenja i nakon gašenja nagnetskog polja čestica se giba jednoliko pravocrtno, dok u vremenskom intervalu u kojem je prisutno polje $\mathbf{B}$ na nju djeluje magnetska komponenta Lorentzove sile,

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

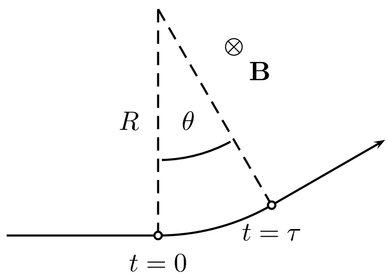
gdje je $\mathbf{v}$ brzina čestice. S obzirom da je početna brzina $\mathbf{v}$ okomita na $\mathbf{B}$, te da je $\mathbf{F}$ uvijek okomita na $\mathbf{B}$, slijedi da se gibanje odvija u ravnini okomitoj na $\mathbf{B}$. Nadalje, s obzirom da je $\mathbf{F}$ okomita na $\mathbf{v}$, slijedi da ona ima ulogu centripetalne sile koja mijenja smjer brzine $\mathbf{v}$, ali ne i njen iznos v. Iz svega navedenog slijedi da je riječ o gibanju u ravnini pod utjecajem centripetalne sile stalnog iznosa

$$F = |q|vB.$$

Takvoj sili odgovara kružno gibanje pri čemu vrijedi

$$F = \frac{mv^2}{R},$$

gdje je R polumjer putanje. Na skici koja slijedi smjer polja $\mathbf{B}$ je postavljen u skladu s pretpostavkom $q > 0$:



Kutnu brzinu ω možemo, na osnovu gornjih izraza za silu, napisati kao

$$\omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m},$$

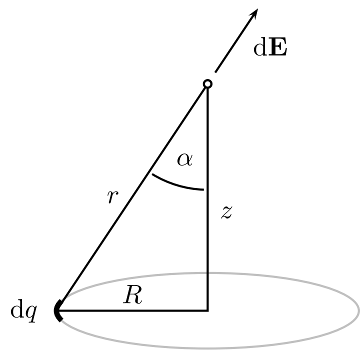
te kut otklona koji nastupa u vremenskom intervalu τ možemo napisati kao

$$\theta = \omega\tau = \frac{|q|B\tau}{m}.$$

Rješenje: $\theta = |q|B\tau/m$

45 Zadatak: Električni naboj jednoliko je raspoređen duž tankog obruča polumjera R. Odredi udaljenost od središta obruča onih točaka na njegovoj osi u kojima je jakost električnog polja najveća.

Postupak: Zadatak se može riješiti izravnim računanjem jakosti električnog polja u točkama na njegovoj osi.



Element naboja $\mathrm{d}q$ na obruču doprinosi električnom polju $\mathbf{E}$ u točki udaljenoj z od središta obruča elementom polja $\mathrm{d}\mathbf{E}$ čija je jakost

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}.$$

Zbog simetrije je očigledno da je ukupno polje $\mathbf{E} = \int \mathrm{d}\mathbf{E}$ usmjereno duž osi obruža (komponente $\mathrm{d}\mathbf{E}$ okomite na os se poništavaju). Stoga nas zanima isključivo komponenta $\mathrm{d}\mathbf{E}$ usmjerena duž osi obruča. Njen iznos možemo napisati kao

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E\,\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}q,$$

gdje smo koristili $\cos\alpha = z/r$ te $r^2 = R^2 + z^2$. Integracijom preko čitavog obruča

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

gdje je q ukupan naboj. Ekstrem nalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_z[z] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2-2z^2}{(R^2+z^2)^{5/2}},$$

koji je ispunjen za

$$z = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Očigledno je da se radi o maksimumu jakosti polja jer električno polje iščezava u središtu prstena (zbog simetrije), kao i pri beskonačnoj udaljenosti.

Umjesto izravnom integracijom, jakost električnog polja može se odrediti i preko elektrostatskog potencijala U kao $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}U$. Neka je z-os podudarna s osi simetrije obruča i neka $z = 0$ odgovara njegovu središtu. Za točke na z-osi elektrostatski potencijal možemo napisati kao

$$U[z] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}.$$

z-komponenta električnog polja sada je

$$E_z[z] = -\frac{\partial}{\partial z}U[z] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}},$$

što se podudara s ranije dobivenim rezultatom.

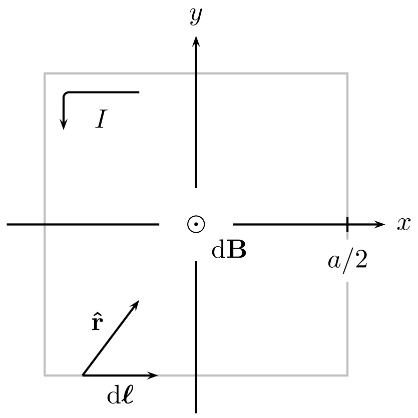
Rješenje: $z = R/\sqrt{2}$

46 Zadatak: Kvadratičnom petljom čija stranica ima duljinu $a = 10\,\mathrm{cm}$ teče struja jakosti $I = 1\,\mathrm{A}$. Primjenom Biot–Savartova pravila odredi jakost magnetskog polja B u sredini petlje. (Koristi se integral $\int (x^2+c^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}x = xc^{-2}(x^2+c^2)^{-1/2}$, permeabilnost vakuuma $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-1}}$.)

Postupak: Prema Biot–Savartovu pravilu, element petlje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ kojim teče struja jakosti I doprinosi magnetskom polju u točki čiji je položaj u odnosu na $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ dan vektorom $\mathbf{r}$ kao

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}) \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

gdje je $r = |\mathbf{r}|$ udaljenost, a $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ je jedinični vektor. Skica prikazuje zadanu kvadratnu petlju smještenu u x, y-ravninu, element petlje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, te odgovarajući element polja $\mathrm{d}\mathbf{B}$ u središtu kvadrata i jedinični vektor $\hat{\mathbf{r}}$,



Element stranice kvadrata pri $y = -a/2$ (donja stranica na slici) možemo napisati kao

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mathbf{i}\,\mathrm{d}x.$$

Vektor položaja točke u kojoj računamo polje u odnosu na $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ je $\mathbf{r} = -x\,\mathbf{i} + (a/2)\,\mathbf{j}$ te udaljenost r i jedinični vektor $\hat{\mathbf{r}}$ pišemo kao

$$r = \sqrt{x^2 + (a/2)^2}, \qquad \hat{\mathbf{r}} = \frac{-x\,\mathbf{i} + (a/2)\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+(a/2)^2}}.$$

Slijedi

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \mathbf{k}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a/2}{(x^2+(a/2)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

Doprinos čitave stranice kvadrata dobivamo integracijom,

$$\mathbf{B} = \int \mathrm{d}\mathbf{B} = \mathbf{k}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{x=-a/2}^{a/2}\frac{a/2}{(x^2+(a/2)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{\mu_0 I}{\pi a\sqrt{2}}\,\mathbf{k}.$$

Konačno, s obzirom da sve četiri stranice kvadrata na jednak način doprinose polju u središtu kvadrata, ukupno polje dobivamo množenjem gornjeg izraza s četiri. Tražena jakost magnetskog polja je

$$B = 2\sqrt{2}\,\frac{\mu_0 I}{\pi a}.$$

Za zadane vrijednosti a i I dobivamo $B \simeq 1.132 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$.

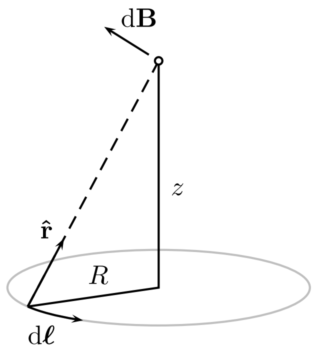
Rješenje: $B = 2\sqrt{2}\,\mu_0 I/\pi a \simeq 1.132 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$

47 Zadatak: Kružnom petljom teče električna struja stalne jakosti. Odredi polumjer petlje s kojim se postiže najveća jakost magnetskog polja u točki na osi petlje koja je udaljena z od središta petlje.

Postupak: Element magnetskog polja $\mathrm{d}\mathbf{B}$ u točki čiji je položaj u odnosu na element struje $I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ dan s $\mathbf{r}$ opisan je Biot–Savartovim zakonom,

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}) \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

($r = |\mathbf{r}|$ je udaljenost, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ je jedinični vektor). Ovdje je $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ element kružnice polumjera R,



Na osnovu simetrije zaključujemo da je polje $\mathbf{B} = \int \mathrm{d}\mathbf{B}$ u točkama na osi petlje usmjereno duž same osi. Stoga je dovoljno integrirati uzdužnu komponentu $\mathrm{d}\mathbf{B}$ koju možemo napisati kao

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\sin\phi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\ell,$$

gdje je ϕ kut što ga $\hat{\mathbf{r}}$ zatvara s osi petlje, a zatim smo koristili $r = \sqrt{z^2+R^2}$ i $\sin\phi = R/r$. Integracijom po čitavoj petlji, uz $\int \mathrm{d}\ell = 2R\pi$, slijedi

$$B = B_z = \int \mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}.$$

Polumjer petlje R koji će dati najveći B za danu udaljenost z i jakost struje I dobivamo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}B = \cdots = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R(2z^2-R^2)}{(R^2+z^2)^{5/2}},$$

koji je izpunjen za

$$R = \sqrt{2}z.$$

Rješenje: $R = \sqrt{2}z$

48 Zadatak: Duž pravca kojim teče struja stalne jakosti I također je raspoređen naboj linijske gustoće λ. Odredi iznos brzine kojom se usporedno s tim pravcem mora gibati nabijena čestica kako bi elektromagnetska (Lorentzova) sila na česticu iščezla.

Postupak: Elektromagnetska (Lorentzova) sila na česticu naboja q koja se giba brzinom $\mathbf{v}$ u polju $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ dana je izrazom $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ te iščezava ako vrijedi

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0.$$

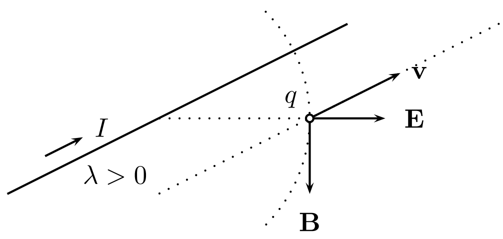
Električno polje naboja linijske gustoće λ raspoređenog po beskonačnom pravcu ima iznos

$$E[r] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r},$$

gdje je r udaljenost od pravca, a za $\lambda > 0$ je usjereno "radijalno prema van" u odnosu na pravac (taj rezultat slijedi iz primjene Gaussova zakona za električno polje). Magnetsko polje struje stvoreno strujom I koja teče beskonačnim pravcem ima jakost

$$B[r] = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r},$$

a smjer je određen "pravilom desne ruke" (rezultat slijedi iz primjene Ampèreova zakona). U ovom slučaju, pretpostavimo li da je pravac pozitivno nabijen te da struja teče u naznačenom smjeru, smjerove polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ možemo prikazati slikom:



Pretpostavimo li da se nabijena čestica giba u smjeru naznačenom na slici, s obzirom da su vektori $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{v}$ međusobno okomiti, uvjet za iščezavanje elektromagnetske sile se svodi na

$$E = vB,$$

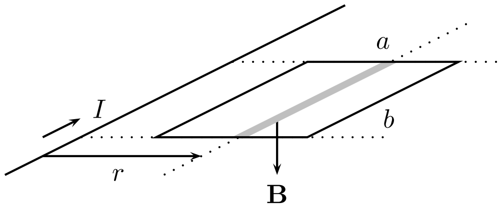
gdje su E, B i v iznosi tih vektora. Slijedi

$$v = \frac{E}{B} = \frac{\lambda c^2}{I}.$$

Rješenje: $v = \lambda c^2 / I$

49 Zadatak: Pravokutnik sa stranicama duljine $a = 2\,\mathrm{cm}$ i $b = 3\,\mathrm{cm}$ i beskonačni ravni vodič duž kojeg teče stalna struja jakosti $I = 5\,\mathrm{A}$ nalaze se u istoj ravnini. Vodiču je najbliža stranica pravokutnika duljine b, paralelna je s njim i nalazi se na udaljenosti $d = 1\,\mathrm{cm}$ od njega. Odredi tok magnetskog polja kroz prevokutnik. (Permeabilnost vakuuma $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$.)

Postupak: Vodič i kvadrat prikazujemo skicom:



Magnetsko polje okomito je na ravninu u kojoj leže vodič i petlja, a jakost polja ovisi o udaljenosti od vodiča r kao

$$B[r] = \frac{\mu_0 I}{2\pi\epsilon_0 r}$$

(gornji rezultat slijedi iz primjene Ampèreova zakona). Element toka magnetskog polja kroz plohu može se napisati kao

$$\mathrm{d}\Phi_B = B\,\mathrm{d}S,$$

gdje je dS element površine. Njega ovdje ovdje odabiremo kao vrpcu širine dr na udaljenosti r od vodiča (vrpca sive boje na gornjoj skici). Element toka sada je

$$\mathrm{d}\Phi_B = B[r]\,b\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I b}{2\pi r}\,\mathrm{d}r,$$

a integracijom preko čitavog pravolutnika slijedi

$$\Phi_B = \int \mathrm{d}\Phi_B = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I b}{2\pi r}\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left[\frac{d+a}{d}\right].$$

Za zadane vrijednosti a, b, d i I dobivamo $\Phi_B \simeq 3.29 \times 10^{-6}\,\mathrm{T\,m^2}$.

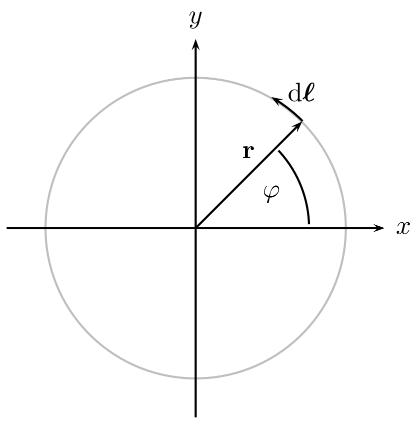
Rješenje: $\Phi_B = (\mu_0 I b/2\pi)\ln[(d+a)/d] \simeq 3.29 \times 10^{-6}\,\mathrm{T\,m^2}$

50 Zadatak: Odredi moment elektromagnetske sile koja djeluje na kružnu petlju polumjera R kojom teče struja jakosti I kada se ona nalazi u homogenom magnetskom polju jakosti B i smjera koji zatvara kut θ s okomicom na ravninu petlje.

Postupak: Element sile koja djeluje na element vodiča $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ kojim teče struja I u magnetskom polju $\mathbf{B}$ može se općenito napisati kao

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathrm{d}q\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = \mathrm{d}q\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{B}\right) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}) = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}.$$

Zadanu kružnu petlju ćemo smjestiti u ravninu $z=0$ kao što prikazuje slika:



Položaj elementa petlje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ možemo napisati kao

$$\mathbf{r} = R\,(\mathbf{i}\,\cos\varphi + \mathbf{j}\,\sin\varphi),$$

gdje je φ kutna koordinata, dok sam element krivulje možemo napisati kao

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = R\,\mathrm{d}\varphi\,(-\mathbf{i}\,\sin\varphi + \mathbf{j}\,\cos\varphi).$$

Magnetsko polje koje zatvara kut θ sa z-osi možemo napisati kao

$$\mathbf{B} = B\,(\mathbf{i}\,\sin\theta + \mathbf{k}\,\cos\theta).$$

Element momenta sile (u odnosu na ishodište) sada možemo napisati kao

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{r}\times(I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}) &= (\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})\,I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} - (\mathbf{r}\cdot I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell})\,\mathbf{B}\\ &= R^2 IB\,\mathrm{d}\varphi\,(-\mathbf{i}\,\cos\theta\,\cos\varphi\sin\varphi + \mathbf{j}\,\sin\theta\,\cos^2\varphi)\\ &= R^2 IB\,\mathrm{d}\varphi\left(-\mathbf{i}\,\cos\theta\,\frac{\sin 2\varphi}{2} + \mathbf{j}\,\sin\theta\,\cos^2\varphi\right),\end{aligned}$$

gdje smo najprije koristili opći vektorski identitet $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$, a zatim gornje izraze za $\mathbf{r}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ i $\mathbf{B}$. Moment elektromagnetske sile slijedi integracijom gornjeg izraza preko čitave petlje. Očigledno je da će integral x-komponente biti jednak nuli jer se radi o oscilatornoj funkciji, dok je integral y-komponente također očigledan jer je srednja vrijednost kvadrata trigonometrijske funkcije na njenom punom periodu jednaka 1/2. Slijedi

$$\mathbf{M} = \int \mathrm{d}\mathbf{M} = \mathbf{j}\,R^2\pi IB\,\sin\theta.$$

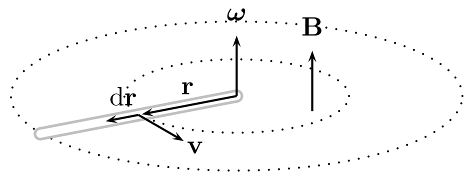
Rješenje: $M = R^2\pi IB\,\sin\theta$

51 Zadatak: Tanki vodljivi štap duljine ℓ okreće se oko svog kraja kutnom brzinom ω u ravnini okomitoj na homogeno magnetsko polje jakosti B. Odredi iznos inducirane elektromotorne sile na krajevima štapa.

Postupak: Elektromotorna sila je krivuljni integral sile koja djeluje na jedinični naboj,

$$\mathcal{E} = \int_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell},$$

gdje je $\mathbf{v}$ brzina elementa krivulje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$. Električno polje $\mathbf{E}$ u ovom slučaju nije prisutno, a odnos brzine elementa štapa $\mathbf{v}$ i magnetskog polja $\mathbf{B}$ prikazujemo slikom:



Vektor $\mathbf{r}$ pokazuje položaj elementa štapa u odnosu na os vrtnje. Brzinu elementa štapa može se napisati kao $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, a sam element kao $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mathrm{d}\mathbf{r}$. Slijedi da možemo pisati

$$\mathcal{E} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int ((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Koristeći opći identitet $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ te uzimajući u obzir da su $\mathbf{B}$ i $\boldsymbol{\omega}$ paralelni, dok su $\mathbf{B}$ i $\mathbf{r}$ okomiti, vektorski produkt iz gornjeg izraza za elektromotornu silu možemo raspisati kao

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} = B\omega\mathbf{r}.$$

Konačno

$$\mathcal{E} = \int B\omega\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = B\omega \int_0^\ell r\,\mathrm{d}r = \frac{B\omega\ell^2}{2}.$$

Zadatak se može riješiti i primjenom Faradayeva zakona indukcije prema kojemu je elektromotorna sila inducirana u zatvorenoj petlji jednaka vremenskoj promjeni toka magnetskog polja kroz plohu omeđenu tom petljom. Ovdje uočavamo da krivulja koju razmatramo (štap) nije zatvorena, dakle ona ne omeđuje plohu, no moguć je sljedeći pristup. Kod homogenog i u vremenu stalnog polja jakosti B koje je okomito na plohu površine S možemo pisati

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(BS) = B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}.$$

S obzirom da kraj štapa u vremenu $\mathrm{d}t$ napravi pomak $\ell\omega\,\mathrm{d}t$, površina koju štap prebriše jednaka je površini pravokutnog trokuta s katetama ℓ i $\ell\omega\,\mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\ell^2\omega\,\mathrm{d}t.$$

Slijedi $\mathcal{E} = B\omega\ell^2/2$, kao i ranije.

Rješenje: $\mathcal{E} = B\omega\ell^2/2$

52 Zadatak: Vodljiva žica duljine $L = 1\,\mathrm{m}$ s učvršćenim krajevima napeta je tako da frekvencija titranja transverzalnog stojnog vala u osnovnom modu iznosi $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$. Odredi amplitudu elektromotorne sile koja se inducira u toj žici kada na njoj titra stojni val amplitude $A = 1\,\mathrm{cm}$ u n-tom modu, a titranje se odvija u ravnini koja je okomita na homogeno magnetsko polje jakosti $B = 5 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$.

Postupak: Elektromotorna sila je definirana izrazom

$$\mathcal{E} = \int_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

gdje je $\mathbf{v}$ brzina elementa krivulje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, a $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ su električno i magnetsko polje. U zadanoj situaciji električno polje nije prisutno, a $\mathbf{v}$ je brzina kojom se žica giba pri titranju. Pravokutni koordinatni sustav postavljamo tako da žica leži na x-osi s krajevima pri $x = 0$ i $x = L$, te uzimamo da se titranje stojnog vala odvija u $z = 0$ ravnini. Otklon žice od ravnotežnog položaja opisujemo valnom funkcijom

$$y[x,t] = A\,\sin[n\pi x/L]\,\sin[n\omega_1 t + \phi]$$

gdje $n = 1, 2, \ldots$ odgovara različitim modovima titranja, a ϕ je općenit pomak u fazi. Takvom titranju odgovara brzina

$$\mathbf{v}[x,t] = \dot{y}[x,t]\,\mathbf{j} = An\omega_1\,\sin[n\pi x/L]\,\cos[n\omega_1 t + \phi]\,\mathbf{j}.$$

Homogeno magnetsko polje je okomito na ravninu titranja pa pišemo

$$\mathbf{B} = B\,\mathbf{k}.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= \int_{x=0}^{L} \big((An\omega_1\,\sin[n\pi x/L]\,\cos[n\omega_1 t + \phi]\,\mathbf{j}) \times (B\,\mathbf{k})\big) \cdot (\mathbf{i}\,\mathrm{d}x) \\ &= ABn\omega_1\cos[n\omega_1 t + \phi] \int_0^L \sin[n\pi x/L]\,\mathrm{d}x \\ &= ABn\omega_1\,\frac{L}{n\pi}(1 - \cos n\pi)\,\cos[n\omega_1 t + \phi].\end{aligned}$$

Pišući $\cos n\pi = (-1)^n$, elektromotornu silu možemo napisati kao

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_n\,\cos(n\omega_1 t + \phi),$$

gdje je

$$\mathcal{E}_n = \frac{AB\omega_1 L}{\pi}(1 - (-1)^n)$$

amplituda elektromotorne sile pri titranju žice u n-tom modu. Važno je uočiti da ona iščezava za parne modove titranja. Za neparne modove, te za zadane vrijednosti parametara, amplituda elektromotorne sile je

$$\mathcal{E}_{1,3,\ldots} = \frac{2AB\omega_1 L}{\pi} = 4ABf_1L \simeq 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{V}.$$

Rješenje: $\mathcal{E}_{1,3,\ldots} = 4ABf_1L = 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{V}$, $\mathcal{E}_{2,4,\ldots} = 0$

53 Zadatak: Homogeno ali o vremenu ovisno magnetsko polje ima stalan iznos B_0 te smjer koji leži u ravnini $z = 0$ i jednoliko se okreće kutnom brzinom ω. Odredi amplitudu titranja elektromotorne sile inducirane u zatvorenoj petlji koja leži u ravnini okomitoj na vektor $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ te omeđuje površinu S.

Postupak: Prema Faradayevu zakonu, inducirana elektromotorna sila jednaka je negativnoj vremenskoj promjeni toka magnetskog polja kroz petlju,

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Zadano magnetsko polje možemo napisati kao

$$\mathbf{B}[t] = B_0(\mathbf{i}\,\cos[\omega t + \phi] \pm \mathbf{j}\,\sin[\omega t + \phi]),$$

gdje pozitivni (negativni) predznak odgovara pozitivnom (negativnom) smjeru vrtnje vektora $\mathbf{B}$, a ϕ je fazni pomak. U nastavku ćemo odabrati pozitivan predznak (pozitivan smjer vrtnje) i fazni pomak $\phi = 0$. Vektorski element površine $\mathrm{d}\mathbf{S}$ je produkt iznosa površine $\mathrm{d}S$ i jediničnog vektora okomitog na nju. Ovdje možemo napisati

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{14}}\,\mathrm{d}S.$$

Za tok magnetskog polja dobivamo

$$\Phi_B[t] = \int_S \mathbf{B}[t]\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{B_0}{\sqrt{14}}\int_S (\cos[\omega t] + 2\sin[\omega t])\,\mathrm{d}S = \frac{B_0 S}{\sqrt{14}}(\cos[\omega t] + 2\sin[\omega t]),$$

te inducirana elektromotorna sila slijedi kao

$$\mathcal{E}[t] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B[t] = \frac{B_0 S\omega}{\sqrt{14}}(\sin[\omega t] - 2\cos[\omega t]).$$

Kako bismo u gornjem izrazu prepoznali amplitudu titranja, faktor u okruglim zagradama raspisujemo koristeći Eulerovu formulu za kompleksne brojeve,

$$\begin{aligned}
\sin[\omega t] - 2\cos[\omega t] &= \cos[\omega t - \pi/2] - 2\cos[\omega t] \\
&= \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \pi/2)} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}] \\
&= \mathrm{Re}[-(\mathrm{i} + 2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}] \\
&= \mathrm{Re}[\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}] \\
&= \sqrt{5}\,\cos[\omega t + \psi].
\end{aligned}$$

(Fazni pomak ψ u gornjem se izrazu pojavio kada smo kompleksni broj $-\mathrm{i} - 2$ napisali u obliku $\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$. Samu vrijednost faznog pomaka ψ ovdje nije potrebno posebno odrediti.) Slijedi da induciranu elektromotornu silu možemo napisati kao

$$\mathcal{E}[t] = \mathcal{E}_0\cos[\omega t + \psi],$$

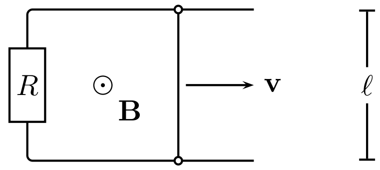
gdje je

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{5/14}\,B_0 S\omega$$

amplituda njenog titranja.

Rješenje: $\mathcal{E}_0 = \sqrt{5/14}\,B_0 S\omega$

54 Zadatak: Dvije paralelne vodljive tračnice leže u ravnini okomitoj na homogeno magnetsko polje jakosti B. Tračnice su povezane električnim otporom R, razmak među njima je ℓ, te po njima klizi vodljivi štap (vidi sliku). Odredi jakost sile koja mora djelovati na štap kako bi se on gibao stalnom brzinom iznosa v.



Postupak: Najprije ćemo odrediti induciranu elektromotornu silu, zatim struju koja teče petljom, te konačno silu koja djeluje na štap i koju treba uravnotežiti traženom vanjskom silom kako bi se štap gibao stalnom brzinom. Prema Faradayevu zakonu indukcije, elektromotorna sila inducirana u petlji koju čine tračnice, otpor i štap jednaka je (negativnoj) promjeni toka magnetskog polja kroz petlju. Ovdje možemo pisati

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}SB = -B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t},$$

gdje je S površina petlje koja se u vremenu mijenja, a B je stalno magnetsko polje koje smo izlučili ispred operatora $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Pretpostavimo li da se štap giba brzinom iznosa v, on u vremenskom intervalu Δt napravi pomak $\Delta x = v\,\Delta t$, a time poveća površinu petlje za

$$\Delta S = \ell\,\Delta x = \ell v\,\Delta t.$$

Slijedi da možemo pisati

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \ell v,$$

odnosno

$$\mathcal{E} = -B\ell v.$$

Uslijed inducirane elektromotorne sile $\mathcal{E}$ petljom teče električna struja I čija je jakost određena električnim otporom R. Prema Ohmovu zakonu,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Silu koja djeluje na štap određujemo s pomoću izraza za element sile $\mathrm{d}\mathbf{F}$ koja djeluje na element vodiča $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ kojim teče struja I u polju $\mathbf{B}$,

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}.$$

Ovdje je ravni štap duljine ℓ okomit na homogeno polje te je jakost sile

$$F = I\ell B = \frac{\mathcal{E}\ell B}{R} = \frac{B^2\ell^2 v}{R}.$$

Tu je silu potrebno uravnotežiti traženom vanjskom silom kako bi štap bio u ravnoteži i gibao se stalnom brzinom iznosa v.

Rješenje: $F = B^2\ell^2 v/R$

55 Zadatak: Koaksijalni kabel se sastoji od vodljive jezgre polumjera $a = 1\,\mathrm{mm}$ i od vodljivog omotača polumjera $b = 2.5\,\mathrm{mm}$. Jezgra je nabijena linijskom gustoćom naboja $\lambda = 10^{-6}\,\mathrm{C\,m^{-1}}$, a omotač je nabijen linijskom gustoćom naboja jednakog iznosa ali suprotnog predznaka. Odredi energiju električnog polja po jedinici duljine kabla. (Permitivnost vakuuma $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$.)

Postupak: Volumna gustoća energije elektromagnetskog polja općenito je dana izrazom

$$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right),$$

gdje je E jakost električnog, a B je jakost magnetskog polja. Magnetsko polje ovdje nije prisutno, a električno polje u prostoru između jezgre i omotača možemo smatrati ekvivalentnim električnom polju beskonačnog pravca nabijenog linijskom gustoćom naboja λ. Jakost tog polja je

$$E[r] = \frac{\lambda}{2r\pi\epsilon_0}, \qquad a \le r \le b$$

(gornji izraz slijedi iz primjene Gaussova zakona za električno polje). Unutar same jezgre, kao i izvan omotača kabla, električno polje iščezava. Slijedi da je volumna gustoća energije elektromagnetskog polja unutar ovog kabla

$$w[r] = \frac{\epsilon_0}{2}E^2[r] = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_0 r^2}.$$

Energija sadržana u dijelu kabla duljine ℓ dobiva se integracijom po prostoru između jezgre kabla i omotača kabla. Element volumena $\mathrm{d}V$ možemo napisati kao umnožak površine omotača cilindra polumjera r i duljine ℓ, $A = 2r\pi\ell$, i radijalnog pomaka $\mathrm{d}r$,

$$\mathrm{d}V = 2r\pi\ell\,\mathrm{d}r.$$

Slijedi

$$E = \int_V w\,\mathrm{d}V = \int_a^b w[r]2r\pi\ell\,\mathrm{d}r = \int_a^b \frac{\lambda^2\ell}{4\pi\epsilon_0 r}\,\mathrm{d}r = \frac{\lambda^2\ell}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Energija polja po jedinici duljine kabla je

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Za zadane vrijednosti a, b i λ dobije se $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\ell \simeq 8.23 \times 10^{-3}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$.

Rješenje: $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\ell = (\lambda^2/4\pi\epsilon_0)\ln[b/a] \simeq 8.235 \times 10^{-3}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$

56 Zadatak: Koaksijalni kabel se sastoji od šuplje vodljive jezgre polumjera $a = 1\,\mathrm{mm}$ i vodljivog omotača polumjera $b = 5\,\mathrm{mm}$. Kroz vodiče u suprotnim smjerovima teku struje jednake jakosti $I = 1\,\mathrm{A}$. Odredi energiju magnetskog polja po jedinici duljine kabla. (Permeabilnost vakuuma $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$.)

Postupak: Gustoća energije elektromagnetskog polja je općenito dana izrazom

$$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right).$$

U zadanoj situaciji električno polje nije prisutno, dok magnetsko polje iščezava unutar tanjeg vodiča jer kroz kružnu petlju polumjera $r < a$ ne teče struja, kao i izvan omotača jer se struje koje teku kroz kružnu petlju polumjera $r > b$ poništavaju. Jakosti magnetskog polja u prostoru između jezgre i omotača doprinosi struja koja teče jezgrom kabla. Prema Ampèreovu zakonu,

$$B[r] = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}, \qquad a \le r \le b.$$

Gustoća energije elektromagnetskog polja sada je

$$w[r] = \frac{1}{2\mu_0}B^2[r] = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}, \qquad a < r < b.$$

Energija sadržana u dijelu kabla duljine ℓ je

$$E = \int_V w\,\mathrm{d}V = \int_a^b w[r]\,2\pi r\ell\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Linijska gustoća energije kabla je

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Za zadane vrijednosti a, b i I dobije se $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\ell \simeq 1.61 \times 10^{-7}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$.

Rješenje: $\lambda = (\mu_0 I^2/4\pi)\ln[b/a] \simeq 1.61 \times 10^{-7}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$

57 Zadatak: Ravni linearno polarizirani elektromagnetski val valne duljine λ širi se u vakuumu u smjeru jediničnog vektora $\mathbf{i}$. Amplituda titranja električnog polja tog vala je E_0, a smjer se podudara s vektorom $\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Sastavi izraze koji opisuju pripadajuće magnetsko polje $\mathbf{B}$ te Poyntingov vektor $\mathbf{S}$.

Postupak: Općenit izraz za električno polje ravnog linearno polariziranog vala možemo napisati kao

$$\mathbf{E}[\mathbf{r},t] = \mathbf{E}_0 \cos[\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi],$$

gdje je $\mathbf{E}_0$ amplituda električnog polja (vektor), $\boldsymbol{\kappa}$ je valni vektor (vrijedi $\mathbf{E}_0\cdot\boldsymbol{\kappa}=0$), $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ je položaj točke u prostoru, ω je frekvencija, t je vrijeme, a ϕ je fazni pomak. Za val valne duljine λ koji se u vakuumu širi u smjeru $\mathbf{i}$ imamo $\boldsymbol{\kappa} = \kappa\,\mathbf{i}$, $\kappa = 2\pi/\lambda$, $\omega = \kappa c$, te s obzirom na zadanu linearnu polarizaciju, $\mathbf{E}_0 = E_0\,(\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{2}$. Slijedi

$$\mathbf{E}[x,t] = E_0\,\frac{\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}\,\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\phi\right].$$

Magnetsko polje dobivamo koristeći izraz $\mathbf{B} = \hat{\boldsymbol{\kappa}}\times(\mathbf{E}/c)$, gdje je u ovom slučaju $\hat{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{i}$. Slijedi

$$\mathbf{B}[x,t] = \frac{E_0}{c}\,\frac{-\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}\,\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\phi\right].$$

Poyntingov vektor, $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$, slijedi kao

$$\mathbf{S}[x,t] = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\,\mathbf{i}\,\cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\phi\right] = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\mathbf{i}\,\left(1+\cos\left[\frac{4\pi}{\lambda}(x-ct)+2\phi\right]\right).$$

Rješenje: $\mathbf{B}[x,t] = \frac{E_0}{c}\,\frac{-\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}\,\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\phi]$, $\mathbf{S}[x,t] = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\mathbf{i}\,(1+\cos[\frac{4\pi}{\lambda}(x-ct)+2\phi])$

58 Zadatak: Ukupna snaga Sunčeva zračenja je $L_\odot = 3.839 \times 10^{26}$ W (tzv. luminozitet Sunca), a srednja udaljenost Zemlje od Sunca je $a = 149.6 \times 10^9$ m (tzv. astronomska jedinica). Odredi srednju vrijednost iznosa Poyntingova vektora na Zemlji. Zatim, pretpostavljajući da je Sunčevo zračenje ravni linearno polarizirani val, odredi amplitude kojima titraju električno i magnetsko polje.

Postupak: Srednja vrijednost iznosa Poyntingova vektora odgovara količini energije elektromagnetskog zračenja koja prolazi jediničnom plohom u jedinici vremena. Shvatimo li Sunce kao točkasti izvor snage $L_\odot$, srednju vrijednost iznosa Poyntingova vektora na udaljenosti a od Sunca možemo napisati kao

$$\langle S \rangle = \frac{L_\odot}{4a^2\pi} \simeq 1365\,\mathrm{W\,m^{-2}}.$$

Sam Poyntingov vektor definiran je izrazom

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

gdje su $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ električno i magnetsko polje. u ravnom valu $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ titraju u fazi, međusobno su okomiti, a za njihove amplitude E_0 i B_0 vrijedi

$$E_0 = cB_0.$$

Slijedi da iznos Poyntingova vektora u danoj točki prostora možemo napisati kao

$$S = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 \cos^2[\omega t],$$

te s obzirom da je srednja vrijednost kvadrata trigonometrijske funkcije jednaka 1/2, srednju vrijednost pišemo kao

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0.$$

Koristeći $E_0 = cB_0$ slijedi

$$E_0^2 = 2\mu_0 c \langle S \rangle = \frac{\mu_0 c L_\odot}{2a^2\pi},$$

odnosno,

$$B_0^2 = \frac{2\mu_0}{c}\langle S \rangle = \frac{\mu_0 L}{2ca^2\pi}.$$

Uz poznate konstante dobivamo vrijednosti $E_0 \simeq 1014\,\mathrm{V\,m^{-1}}$, $B_0 \simeq 3.383 \times 10^{-6}$ T.

Rješenje: $\langle S \rangle = L_\odot/4a^2\pi \simeq 1365\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, $E_0 = \sqrt{\mu_0 c L_\odot/2a^2\pi} \simeq 1014\,\mathrm{V\,m^{-1}}$, $B_0 = \sqrt{\mu_0 L_\odot/2ca^2\pi} \simeq 3.383 \times 10^{-6}$ T

59 Zadatak: Ravni (eliptički polarizirani) elektromagnetski val čije je električno polje opisano izrazom

$$\mathbf{E}[z,t] = E_{0x}\,\mathbf{i}\,\cos[\kappa z - \omega t] + E_{0y}\,\mathbf{j}\,\sin[\kappa z - \omega t]$$

pada na polarizator koji propušta komponentu vala čije je električno polje usporedno s vektorom $3\mathbf{i}+\mathbf{j}$. Odredi amplitudu titranja električnog polja nakon prolaska vala kroz polarizator.

Postupak: Komponenta upadnog elektromagnetskog vala čije je električno polje okomito na propusni smjer polarizatora se pri prolasku kroz polarizator apsorbira, dok komponenta vala čije je električno polje usporedno s propusnim smjerom polarizatora ostaje nepromijenjena. Komponentu upadnog električnog polja koja je usporedna s propusnim smjerom polarizatora računamo kao projekciju upadnog polja na taj smjer . Uvodimo jedinični vektor propusnog smjera polarizatora,

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{3\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{10}},$$

te kao projekciju zadanog električnog polja na taj smjer imamo

$$\mathbf{E}' = (\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{p}},$$

gdje je

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}} = \frac{3E_{0x}}{\sqrt{10}}\cos[\kappa z - \omega t] + \frac{E_{0y}}{\sqrt{10}}\sin[\kappa z - \omega t].$$

Kako bismo u gornjem izrazu prepoznali amplitudu titranja uvodimo oznake

$$a = \frac{3E_{0x}}{\sqrt{10}}, \qquad b = \frac{E_{0y}}{\sqrt{10}},$$

te gornji izraz za projekciju polja zapisujemo kao

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}} = a\cos[\kappa z - \omega t] + b\cos[\kappa z - \omega t - \pi/2].$$

Korištenjem Eulerove formule slijedi

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}} = \mathrm{Re}\left[a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\kappa z-\omega t)}\right] + \mathrm{Re}\left[b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\kappa z-\omega t-\pi/2)}\right] = \mathrm{Re}\left[(a-\mathrm{i}\,b)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\kappa z-\omega t)}\right] = \sqrt{a^2+b^2}\;\cos[\kappa z - \omega t + \phi]$$

(faza ϕ pojavila se kada smo kompleksni broj $a-\mathrm{i}\,b$ napisali kao $\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$). Konačno, električno polje nakon prolaska kroz polarizator je

$$\mathbf{E}' = \sqrt{a^2+b^2}\;\cos[\kappa z - \omega t + \phi]\;\hat{\mathbf{p}},$$

gdje kao amplitudu titranja prepoznajemo

$$E_0' = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{9}{10}E_{0x}^2 + \frac{1}{10}E_{0y}^2}.$$

Rješenje: $E_0' = \sqrt{(9E_{0x}^2 + E_{0y}^2)/10}$

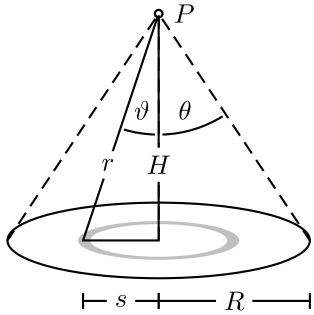
7 Fotometrija i geometrijska optika

60 Zadatak: Odredi prostorni kut koji baza stošca zauzima u odnosu na vrh stošca, ako je polumjer baze stošca R, a njegova visina je H. Zatim taj prostorni kut izrazi preko kuta θ koji plašt stošca zatvara s njegovom visinom (vrijedi $\tan\theta = R/H$).

Postupak: Općenito, Element prostornog kuta koji element plohe $\mathrm{d}S$ zauzima u odnosu na točku P može se napisati kao

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{r^2}\cos\vartheta,$$

gdje je r udaljenost između P i $\mathrm{d}S$, a ϑ je kut koji pravac koji prolazi kroz P i $\mathrm{d}S$ zatvara s okomicom na $\mathrm{d}S$. Ovdje kao element plohe odabiremo kružnu stazu polumjera s i širine $\mathrm{d}s$:



Površina kružne staze (sivo područje na gornjoj skici) je

$$\mathrm{d}S = 2s\pi\,\mathrm{d}s,$$

a iz geometrije prepoznajemo

$$r^2 = H^2 + s^2, \qquad \cos\vartheta = \frac{H}{r}.$$

Element prostornog kuta koji zauzima kružna staza je

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{2s\pi\,\mathrm{d}s}{r^2}\,\frac{H}{r} = 2\pi H\,\frac{s}{(H^2+s^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}s.$$

Ukupni prostorni kut koji zauzima baza stošca dobivamo integracijom od $s = 0$ do $s = R$,

$$\Omega = \int \mathrm{d}\Omega = 2\pi H\int_0^R \frac{s}{(H^2+s^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}s = -2\pi H\,\frac{1}{\sqrt{H^2+s^2}}\Big|_0^R = 2\pi\left(1 - \frac{H}{\sqrt{H^2+R^2}}\right).$$

Konačno, iz geometrije prepoznajemo da je drugi član u zagradi jednak $\cos\theta$ te zaključujemo

$$\Omega = 2\pi(1-\cos\theta).$$

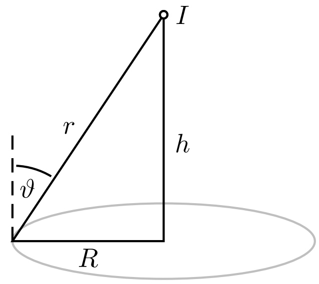
Rješenje: $\Omega = 2\pi\big(1 - H/\sqrt{H^2+R^2}\big) = 2\pi(1-\cos\theta)$

61 Zadatak: Okrugli stol polumjera R osvijetljen je točkastim izotropnim izvorom svjetlosti koji se nalazi na visini h iznad njegova središta. Odredi visinu h kojom se postiže najveća osvijetljenost ruba stola.

Postupak: Općenito, osvijetljenost elementa plohe točkastim izvorom može napisati kao

$$E = \frac{I}{r^2} \cos\vartheta,$$

gdje je I svjetlosna jakost izvora, r je udaljenost izvora od elementa plohe, a ϑ je kut pod kojim svjetlost pada na plohu (u odnosu na okomicu). Izvor na visini h nad središtem okruglog stola prikazujemo skicom:



Pri rubu stola imamo

$$r^2 = R^2 + h^2, \qquad \cos\vartheta = \frac{h}{r},$$

te osvjetljenost ruba stola pišemo kao

$$E = \frac{I}{r^2}\frac{h}{r} = I\,\frac{h}{(R^2+h^2)^{3/2}}.$$

Visinu h kojom se postiže ekstrem osvijetljenosti E pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}E = \left(\frac{1}{h} - \frac{3}{2}\frac{1}{R^2+h^2}\,2h\right)E = I\,\frac{R^2-2h^2}{(R^2+h^2)^{5/2}},$$

koji je ispunjen za

$$h = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Pronađeni ekstrem je nužno maksimum jer veičina $E \geq 0$ iščezava za $h \to 0$ kao i za $h \to \infty$.

Rješenje: $h = R/\sqrt{2}$

62 Zadatak: Dva točkasta izvora svjetlosti jednake jakosti nalaze se na visini h iznad vodoravne ravnine, a razmak među njima je d. Za $d \gg h$ opaža se dva maksimuma osvijetljenosti ravnine, dok se za $d \ll h$ opaža samo jedan maksimum. Odredi graničnu vrijednost omjera h/d pri kojoj se dva maksimuma osvijetljenosti ravnine stapaju u jedan.

Postupak: Neovisno o tome imamo li jedan ili dva maksimuma osvijetljenosti ravnine, oni se nalaze na pravcu koji leži ispod samih izvora (jer osvijetljenost nužno opada s udaljavanjem od tog pravca). Stoga u nastavku razmatramo isključivo osvijetljenost ravnine duž tog pravca. Za dovoljno malen omjer h/d, dva se maksimuma osvijetljenosti nalaze u točkama pravca približno ispod samih izvora, dok pri sredini razmaka imamo lokalni minimum osvijetljenosti na pravcu. S druge strane, za dovoljno velik omjer h/d, pri sredini razmaka među izvorima imamo maksimum osvijetljenosti. Slijedi da graničnu vrijednost omjera h/d možemo odrediti na osnovu karaktera ekstrema osvijetljenosti ravnine u točki pri sredini razmaka među izvorima, odnosno, na osnovu toga radi li se o minimumu ili o maksimumu osvijetljenosti.

Općenito, osvijetljenost elementa plohe na udaljenosti r od izvora jakosti I opisana je s $E = (I/r^2)\cos\theta$, gdje je θ kut pod kojim svjetlost upada na plohu (u odnosu na okomicu). Ovdje krećemo od izraza za osvijetljenost elementa ravnine na vodoravnoj udaljenosti x od izvora jakosti I koji se nalazi na visini h. S obzirom da iz geometrije imamo

$$r^2 = h^2 + x^2, \qquad \cos\theta = \frac{h}{r},$$

osvijetljenost elementa ravnine opisujemo funkcijom

$$E_1[x] = \frac{Ih}{(h^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Uvedemo li sada dva takva izvora na međusobnom razmaku d, osvijetljenost plohe u točkama na pravcu koji leži ispod njih možemo opisati funkcijom

$$E_2[x] = E_1[d/2 + x] + E_1[d/2 - x] = \frac{Ih}{(h^2 + (d/2 + x)^2)^{3/2}} + \frac{Ih}{(h^2 + (d/2 - x)^2)^{3/2}},$$

gdje je x udaljenost promatrane točke od točke pravca koja se nalazi pri sredini razmaka među izvorima. Prva derivacija gornje funkcije glasi

$$E_2'[x] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} E_2[x] = -\frac{3Ih(d/2 + x)}{(h^2 + (d/2 + x)^2)^{5/2}} + \frac{3Ih(d/2 - x)}{(h^2 + (d/2 - x)^2)^{5/2}},$$

gdje uočavamo očekivanu činjenicu da pri $x = 0$ vrijedi $E_2' = 0$, odnosno da pri sredini razmaka među izvorima imamo ekstrem osvijetljenosti (minimum ili maksimum), neovisno o vrijednosti omjera h/d. Sada je potrebno odrediti radi li se o minimumu ili o maksimumu. Druga derivacija funkcije E_2 glasi

$$E_2''[x] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} E_2[x] = \frac{15Ih(d/2 + x)^2}{(h^2 + (d/2 + x)^2)^{7/2}} - \frac{3Ih}{(h^2 + (d/2 + x)^2)^{5/2}} + \frac{15Ih(d/2 - x)^2}{(h^2 + (d/2 - x)^2)^{7/2}} - \frac{3Ih}{(h^2 + (d/2 - x)^2)^{5/2}}.$$

Pri $x = 0$ ona se značajno pojednostavljuje,

$$E_2''[0] = \frac{30Ih(d/2)^2 - 6Ih(h^2 + (d/2)^2)}{(h^2 + (d/2)^2)^{7/2}} = \frac{6Ih(d^2 - h^2)}{(h^2 + (d/2)^2)^{7/2}}.$$

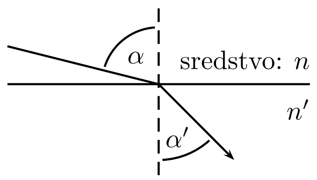
Uočavamo da za $d > h$ imamo $E''[0] > 0$, što znači da pri $x = 0$ imamo minimum osvijetljenosti, odnosno da postoje dva maksimuma osvijetljenosti, jedan s jedne, a drugi s druge strane ovog minimuma, dok za $d < h$ imamo $E''[0] < 0$, dakle maksimum osvijetljenosti pri $x = 0$. Kao granični slučaj prepoznajemo $h = d$, odnosno

$$h/d = 1.$$

Rješenje: $h/d = 1$

63 Zadatak: Traktor vozi ravnom cestom te u nekom trenutku silazi s nje i nastavlja vožnju poljem, kako bi u najkraćem mogućem vremenu stigao na odredište koje se nalazi u polju na nekoj udaljenosti od ceste. Odredi kut koji putanja traktora kroz polje zatvara s okomicom na cestu ako je iznos brzine traktora na cesti $v = 12\,\mathrm{km/h}$, dok je u polju iznos njegove brzine $v' = 6\,\mathrm{km/h}$.

Postupak: Problem je ekvivalentan putanji zrake svjetlosti koja iz optičkig sredstva indeksa loma n prelazi u sredstvo indeksa loma n':



Kut upada α i kut loma α' povezani su s indeksima loma optičkih sredstava Snellovim zakonom,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{n'}{n}.$$

Indeks loma je obrnuto razmjeran brzini propagacije svjetlosti u optičkom sredstvu pa možemo pisati

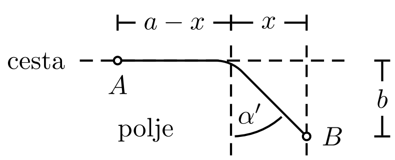
$$\frac{n'}{n} = \frac{v}{v'}.$$

Omjer brzina na desnoj strani ovdje možemo shvatiti kao omjer brzina traktora u dvama sredstvima (na cesti i u polju). Nadalje, kut upada traktora s ceste u polje ovdje je $\alpha = \pi/2$, što znači da imamo $\sin\alpha = 1$, a kut loma α' je traženi kut pod kojim se (u odnosu na okomicu na cestu) traktor giba poljem. Slijedi

$$\sin\alpha' = \frac{n}{n'} = \frac{v'}{v}$$

te za zadani omjer brzina dobivamo $\alpha' = 30^\circ$.

Naravno, problem se može riješiti i izravnim razmatranjem kinematike. Neka traktor kreće iz točke A koja je udaljena a od one točke na cesti koja je najbliža odredištu B, a udaljenost odredišta od ceste neka je b. Neka je x udaljenost točke u kojoj traktor silazi s ceste od točke ceste koja je najbliža odredištu.



Trajanje putovanja možemo napisati kao

$$t = \frac{a-x}{v} + \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{v'}.$$

Ekstrem pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}t = -\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} = -\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\sin\alpha',$$

iz čega slijedi

$$\sin\alpha' = \frac{v'}{v},$$

što se podudara s ranije dobivenim rezultatom.

Rješenje: $\alpha' = \arcsin[v'/v] = 30^\circ$

64 Zadatak: Muha leti brzinom iznosa v prema konkavnom zrcalu duž njegove optičke osi. Kada muha uđe u područje u kojem je njena udaljenost od tjemena zrcala manja od $R/2$, gdje je R polumjer zakrivljenosti zrcala, ona vidi 'prividnu muhu' (vlastitu sliku) kako joj leti u susret. U trenutku u kojem udaljenost stvarne muhe od tjemena zrcala iznosi $a = R/3$, odredi (a) koliko se puta prividna muha pričinja većom od stvarne muhe, (b) udaljenost među muhama te (c) iznos (relativne) brzine prividne u odnosnu na stvarnu muhu.

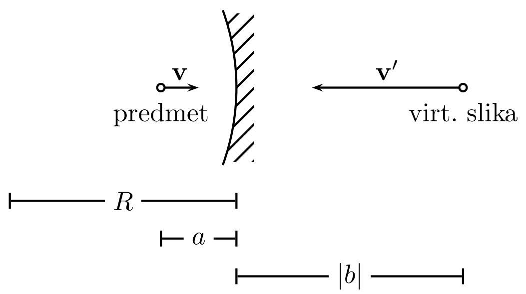
Postupak: Udaljenosti predmeta (ovdje stvarne muhe), $a > 0$, i njegove slike (ovdje prividne muhe), b, od tjemena konkavnog zrcala s polumjerom zakrivljenosti R te lateralno povećanje slike u odnosu na predmet, m, povezani su poznatim izrazima

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}, \qquad m = -\frac{b}{a}.$$

Kada je $a < R/2$, gornje formule daju negativnu vrijednost udaljenosti b te pozitivnu vrijednost povećanja m,

$$b = \frac{Ra}{2a - R} < 0, \quad m = \frac{R}{R - 2a} > 0 \quad \text{za} \quad a < \frac{R}{2},$$

a to znači da je slika virtuelna (nalazi se iza zrcala) te da je uspravna. Skica prikazuje položaj predmeta i virtuelne slike u slučaju $a < R/2$ te njihove smjerove gibanja kada se radi o muhama u ovom zadatku:



Slijedi da udaljenost između predmeta (stvarne muhe) i slike (prividne muhe) za $a < R/2$ možemo napisati kao

$$D = a + |b| = a - b = a - \frac{Ra}{2a - R} = \frac{2a(R - a)}{R - 2a},$$

a iznos relativne brzine slike (prividne muhe) u odnosu na predmet (stvarnu muhu) dobivamo deriviranjem te udaljenosti po vremenu,

$$v_{\text{rel.}} = \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D \right| = \cdots = \left| 2 \frac{(R - a)^2 + a^2}{(R - 2a)^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a \right| = 2v \frac{(R - a)^2 + a^2}{(R - 2a)^2},$$

pri čemo smo udaljenost a smatrali funkcijom vremena te smo koristili

$$\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a \right| = v.$$

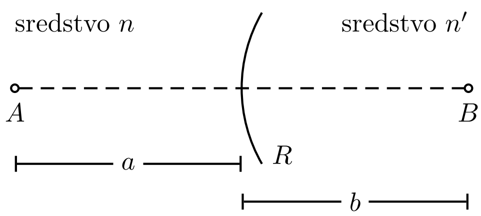
Konačno, za zadanu vrijednost udaljenosti $a = R/4$ dobivamo

$$m = 3, \qquad D = 4R/3, \qquad v_{\text{rel.}} = 10v.$$

Rješenje: (a) $m = R/(R - 2a) = 3$, (b) $D = 2a(R - a)/(R - 2a) = 4R/3$, (c) $v_{\text{rel.}} = 2v((R - a)^2 + a^2)/(R - 2a)^2 = 10v$

65 Zadatak: Odredi najmanju udaljenost između predmeta i njegove realne slike koja može nastati u sfernom dioptru polumjera zakrivljenosti R ako su indeksi loma optičkih sredstava s dvaju strana dioptra n i n'.

Postupak: Sferni dioptar koji stvara realnu sliku predmeta prikazujemo skicom:



Orijentacija zakrivljenosti granične plohe na gornjoj skici u skladu je s pretpostavkom da vrijedi $n' > n$ (dioptar je konvergentan, odn. može stvoriti realnu sliku, ako je granična ploha konveksna kada joj pristupamo iz optički rjeđeg sredstva). Točke A i B predstavljaju položaj predmeta i njegove realne slike (točke A i B mogu zamijeniti uloge). Udaljenosti točaka A i B od tjemena dioptra, a i b, povezane su poznatim izrazom

$$\frac{n}{a} + \frac{n'}{b} = \frac{n' - n}{R} > 0,$$

a kako bi slika bila realna (b pozitivno u gornjem izrazu), udaljenost a mora biti dulja od odgovarajuće 'žarišne duljine' f_a,

$$a > f_a = \frac{n}{n' - n} R$$

(sličan uvjet se može formulirati i za udaljenost b). Međusobnu udaljenost točaka A i B možemo izraziti kao funkciju udaljenosti a,

$$D = a + b = a + n' \left(\frac{n' - n}{R} - \frac{n}{a} \right)^{-1} = \cdots = \frac{(n' - n)(R + a)a}{(n' - n)a - nR}$$

Ekstrem te udaljenosti nalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} D = \cdots = (n' - n) \frac{(n' - n)a^2 - 2nRa - nR^2}{((n' - n)a - nR)^2}$$

koji je ispunjen za

$$a_{1,2} = \frac{n \pm \sqrt{n'n}}{n' - n} R.$$

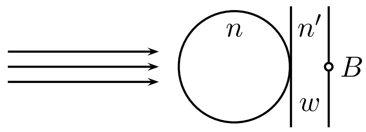
Uočavamo da vrijedi $a_2 < f_a$, zbog čega to rješenje odbacujemo, dok ono drugo prihvaćamo, jer vrijedi $a_1 > f_a$. Za $a = a_1$ udaljenost točaka A i B je

$$D = \cdots = \frac{\sqrt{n'} + \sqrt{n}}{\sqrt{n'} - \sqrt{n}} R.$$

Radi se o minimumu jer $D \to \infty$ za $a \to \infty$ kao i za $a \to f_a$.

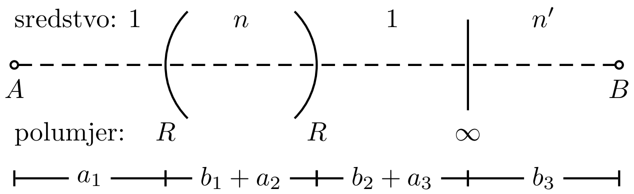
Rješenje: $D_{\min} = R(\sqrt{n'} + \sqrt{n})/(\sqrt{n'} - \sqrt{n})$

66 Zadatak: Snop paralelnih zraka svjetlosti pada na prozirnu kuglicu indeksa loma n koja dodiruje planparalelnu prozirnu ploču debljine w i indeksa loma n' (vidi skicu).



Odredi promjer kuglice želimo li da snop bude fokusiran na izlaznoj plohi planparalelne ploče (točka B na skici). Sustav se nalazi u zraku (indeks loma jednak jedinici).

Postupak: Ovaj optički sustav možemo shvatiti kao niz sfernih diptara pri čemu slika koja nastaje prolaskom svjetlosti kroz neki dioptar predstavlja predmet sljedećem dioptru u nizu. Prvi dioptar u nizu je ploha kroz koju svjetlost ulazi u kuglicu, drugi dioptar je ploha kroz koju svjetlost izlazi iz kuglice, treći dioptar je ploha kroz koju svjetlost ulazi u ploču. Plohu kroz koju svjetlost izlazi iz ploče ne moramo razmatrati jer fokusiranje svjetlosti na samom rubu ploče možemo shvatiti kao fokusiranje unutar ploče na udaljenosti w od ulazne plohe. Tri dioptra koja razmatramo prikazujemo shemom:



Prva dva dioptra su konvergentna jer su obje granične plohe konveksne kada im pristupamo iz sredstva manjeg indeksa loma. Polumjer zakrivljenosti trećeg (ravnog) dioptra naveden je kao ∞ jer ravni dioptar možemo smatrati sfernim dioptrom čiji polumjer zakrivljenosti teži u beskonačnost. Tri dioptra opisana su uobičajenim jednadžbama,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{R} > 0, \qquad \frac{n}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{n-1}{R} > 0, \qquad \frac{1}{a_3} + \frac{n'}{b_3} = \frac{n'-1}{\infty} = 0.$$

S obzirom da je upadna svjetlost snop paralelnih zraka, možemo smatrati da ona potječe od beskonačno udaljenog predmeta te uzeti

$$a_1 = \infty.$$

Kako je udaljenost između tjemenima prvog i drugog dioptra jednaka je promjeru kuglice, pišemo

$$b_1 + a_2 = 2R.$$

Zatim, s obzirom da kuglica dodiruje planparalelnu ploču, udaljenost između tjemena drugog dioptra i plohe trećeg dioptra jednaka je nuli te stavljamo

$$b_2 + a_3 = 0.$$

Konačno, s obzirom na zahtjev da se svjetlost, nakon što je ušla u planparalelnu ploču, fokusira na udaljenosti koja je jednaka debljini ploče, pišemo

$$b_3 = w.$$

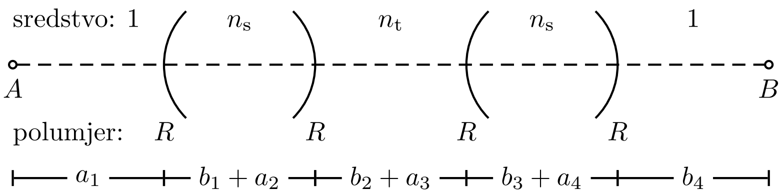
Eliminacijom veličina $a_{1,2,3}$ i $b_{1,2,3}$ iz gornjih jednadžbi dobivamo polumjer zakrivljenosti sfernih dioptara R, odnosno, traženi promjer kuglice,

$$2R = \frac{4(n-1)w}{(2-n)n'}.$$

Rješenje: $2R = 4w(n-1)/(2-n)n'$

67 Zadatak: Dvije jednake konvergentne simetrične tanke leće načinjene od stakla indeksa loma $n_\mathrm{s} = 1.5$ postavljene su jedna iza druge na zajedničku optičku os tako da im se tjemena dodiruju. Kada se u prostoru među lećama nalazi zrak (indeks loma jednak jedinici) one u zraku čine sustav žarišne duljine $f = 1\,\mathrm{m}$. Odredi žarišnu duljinu ovog sustava u zraku kada se prostor među lećama umjesto zrakom ispuni tekućinom indeksa loma $n_\mathrm{t} = 1.35$.

Postupak: Sustav dviju leća se sastoji od četiriju sfernih dioptara. U slučaju kada je među lećama sredstvo indeksa loma n_t možemo ga prikazati sljedećom shemom:



Udaljenosti predmeta i slika povezane su s poumjerom zakrivljenosti dioptara te s indeksima loma sredstava jednadžbama

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n_\mathrm{s}}{b_1} = \frac{n_\mathrm{s} - 1}{R}, \qquad \frac{n_\mathrm{s}}{a_2} + \frac{n_\mathrm{t}}{b_2} = \frac{n_\mathrm{s} - n_\mathrm{t}}{R}, \qquad \frac{n_\mathrm{t}}{a_3} + \frac{n_\mathrm{s}}{b_3} = \frac{n_\mathrm{s} - n_\mathrm{t}}{R}, \qquad \frac{n_\mathrm{s}}{a_4} + \frac{1}{b_4} = \frac{n_\mathrm{s} - 1}{R},$$

a s obzirom da leće smatramo tankima te da se njihova tjemena dodiruju, uzimamo

$$b_1 + a_2 = 0, \qquad b_2 + a_3 = 0, \qquad b_3 + a_3 = 0.$$

Eliminacijom $a_{2,3,4}$ i $b_{1,2,3}$ iz gornjih jednadžbi računamo žarišnu duljinu sustava u slučaju u kojem je među lećama sredstvo indeksa loma n_t,

$$f' = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_4}\right)^{-1} = \cdots = \frac{R}{4n_\mathrm{s} - 2(n_\mathrm{t} + 1)}.$$

Stavimo li u gornjem izrazu $n_\mathrm{t} = 1$ dobivamo žarišnu duljina ovog sustava u slučaju u kojem je među lećama zrak,

$$f = \frac{R}{4(n_\mathrm{s} - 1)}.$$

Eliminacijom R iz gornjih izraza za f i f' slijedi

$$f' = f\,\frac{2(n_\mathrm{s} - 1)}{2n_\mathrm{s} - n_\mathrm{t} - 1}.$$

Za zadane vrijednosti parametara f, n_s i n_t dobivamo $f' \simeq 1.538\,\mathrm{m}$.

Rješenje: $f' = 2f(n_\mathrm{s} - 1)/(2n_\mathrm{s} - n_\mathrm{t} - 1) \simeq 1.538\,\mathrm{m}$

68 Zadatak: Konvergentna leća žarišne duljine $f = 50\,\mathrm{cm}$ stvara sliku predmeta koja je udaljena $b = 3\,\mathrm{m}$ od leće. Primaknemo li predmet leći za $\Delta a = -5\,\mathrm{cm}$, koliko će se duž optičke osi pomaknuti njegova slika?

Postupak: Prema jednadžbi leće imamo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

gdje je a udaljeost predmeta, a b je udaljeost slike od leće žarišne duljine f. Slijedi

$$a = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{b}\right)^{-1} = \frac{fb}{b-f}.$$

Kada se predmet pomakne za Δa, slika se pomiče za Δb, te vrijedi

$$\frac{1}{a+\Delta a} + \frac{1}{b+\Delta b} = \frac{1}{f},$$

iz čega dobivamo

$$b + \Delta b = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{a+\Delta a}\right)^{-1} = \frac{f(a+\Delta a)}{a+\Delta a - f} = \frac{f(fb + \Delta a(b-f))}{fb + (\Delta a - f)(b-f)},$$

odnosno, nakon sređivanja izraza,

$$\Delta b = \cdots = -\Delta a\,\frac{(b-f)^2}{f^2 + (b-f)\Delta a}.$$

Za zadane vrijednosti f, b i Δa dobivamo $\Delta b = 2.5\,\mathrm{m}$.

Rješenje: $\Delta b = -\Delta a\,(b-f)^2/(f^2 + (b-f)\Delta a) = 2.5\,\mathrm{m}$

69 Zadatak: Lećom žarišne duljine f i polumjera otvora $R_\mathrm{L} = f/4$ na zaslonu okomitom na optičku os stvaramo sliku Sunca. Odredi koliko je puta zaslon u području te slike jače osvijetljen nego što bi bio osvijetljen da je jednostavno izložen Sunčevoj svjetlosti. (Polumjer Sunca $R_\odot = 6.963 \times 10^8$ m, srednja udaljenost Sunca od Zemlje $a = 1.496 \times 10^{11}$ m)

Postupak: Koristeći jednadžbu leće žarišne duljine $f > 0$,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

gdje je $a > f$ udaljenost predmeta (ovdje Sunca) s jedne, a b je udaljenost slike (ovdje zaslona) s njene druge strane, te jednadžbu za lateralno povećanje slike u odnosu na izvor

$$m = -\frac{b}{a},$$

polumjer slike Sunca na zastoru možemo napisati kao

$$R'_\odot = |m| R_\odot = R_\odot \frac{b}{a} = R_\odot \frac{f}{a-f}.$$

Površina te slike je

$$S' = {R'_\odot}^2 \pi = \frac{R_\odot^2 \pi f^2}{(a-f)^2}.$$

Osvijetljenost je općenito omjer snage zračenja i površine na koju ono pada. Ako je E osvijetljenost bilo koje površine jednostavno izloženoe Suncu (podrazumijeva se da je površina okomita na smjer toka zračenja), onda snagu zračenja koju zahvaća leća možemo napisati kao

$$P_\mathrm{L} = E S_\mathrm{L} = E R_\mathrm{L}^2 \pi.$$

Kada je riječ o slici Sunca, ta snaga pada na površinu S' te je osvijetljenost zaslona u području slike

$$E' = \frac{P_\mathrm{L}}{S'} = \frac{E R_\mathrm{L}^2 (a-f)^2}{R_\odot^2 f^2}.$$

Konačno, traženi omjer osvijetljenosti se može napisati kao

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{R_\mathrm{L} a}{R_\odot f}\right)^2 \left(1 - \frac{f}{a}\right)^2,$$

a s obzirom da je $f/a \ll 1$, možemo izostaviti faktor u okruglim zagradama i pisati

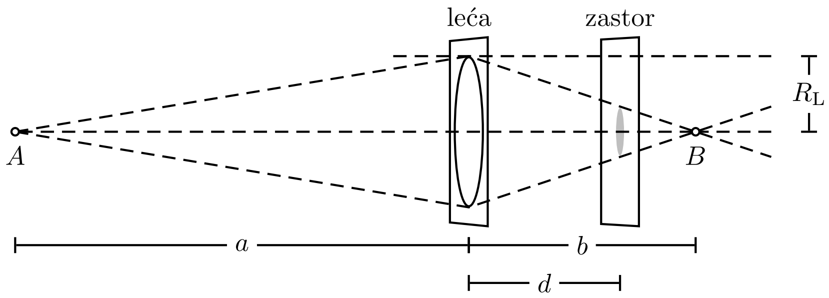
$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{R_\mathrm{L} a}{R_\odot f}\right)^2.$$

Za zadani omjer R_L/f te poznate astronomske konstante a i $R_\odot$ dobivamo $E'/E \simeq 2.88 \times 10^3$.

Rješenje: $E'/E = (R_\mathrm{L} a / R_\odot f)^2 (1 - f/a)^2 \simeq (R_\mathrm{L} a / R_\odot f)^2 \simeq 2.88 \times 10^3$

70 Zadatak: S jedne strane tanke konvergentne leće kružnog otvora se na optičkoj osi na udaljenosti a nalazi izotropni točkasti izvor svjetlosti snage P. Sa suprotne strane na udaljenosti b od leće nastaje njegova realna slika. Postavimo li na slikovnoj strani leće na udaljenosti $d \neq b$ zastor okomit na optičku os, na njemu će nastati svijetla mrlja kružnog oblika. Odredi osvijetljenost zastora unutar svijetle mrlje pretpostavljajući da je udaljenost a znatno veća od polumjera otvora leće.

Postupak: Skica prikazuje slučaj u kojem je $d < b$ (svijetla mrlja prikazana je sivo, R_L je polumjer otvora leće):



Polumjer svijetle mrlje r slijedi iz sličnosti pravokutnih trokuta,

$$\frac{r}{b-d} = \frac{R_\mathrm{L}}{b},$$

a u općenitom slučaju možemo pisati

$$r = R_\mathrm{L}\left|1 - \frac{d}{b}\right|$$

(uzimamo apsolutnu vrijednost kako bismo obuhvatili i slučaj $d > b$ koji nije prikazan na skici). Osvijetljenost mrlje E je omjer snage svjetlosti P_L koja ulazi u leću i površine svijetle mrlje $S = r^2\pi$ koju ta svjetlost stvara na zastoru,

$$E = \frac{P_\mathrm{L}}{S} = \frac{P_\mathrm{L}}{r^2\pi} = \frac{P_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}^2\pi(1-d/b)^2}.$$

Omjer snage koja ulazi u leću P_L i ukupne snage izotropnog izvora P jednak je omjeru prostornog kuta Ω_L koji u odnosu na izvor svjetlosti zahvaća otvor leće i ukupnog prostornog kuta 4π u koji izvor zrači,

$$\frac{P_\mathrm{L}}{P} = \frac{\Omega_\mathrm{L}}{4\pi}.$$

Prostorni kut Ω_L napisat ćemo s pomoću poznate formule za prostorni kut stošca visine a i polumjera baze R_L (vidi raniji zadatak),

$$\Omega_\mathrm{L} = 2\pi\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R_\mathrm{L}^2}}\right) = 2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+(R_\mathrm{L}/a)^2}}\right).$$

S obzirom da je ovdje $R_\mathrm{L}/a \ll 1$, možemo koristiti razvoj $(1+\epsilon)^{-1/2} \simeq 1 - \epsilon/2$, čime se gornji izraz svodi na

$$\Omega_\mathrm{L} = R_\mathrm{L}^2\pi/a^2.$$

(Taj rezultat se može izravno dobiti uoči li se da, s obzirom da je $a \gg R_\mathrm{L}$, čitav otvor leće možemo smatrati okomitim na pravac izvor–leća.) Snagu zahvaćenu lećom sada možemo napisati kao

$$P_\mathrm{L} = \frac{PR_\mathrm{L}^2}{4a^2},$$

te za osvijetljenost svijetle mrlje na zastoru dobivamo

$$E = \frac{P}{4a^2\pi(1-d/b)^2}.$$

Rješenje: $E = (P/4a^2\pi)(1-d/b)^{-2}$

71 Zadatak: Predmet se nalazi na udaljenosti $a_1 = 20\,\mathrm{cm}$ ispred tanke konvergentne leće žarišne duljine $f_1 = 10\,\mathrm{cm}$. Iza te leće se na udaljenosti $D = 30\,\mathrm{cm}$ nalazi druga tanka konvergentna leća čija je žarišna duljina $f_2 = 12.5\,\mathrm{cm}$. Odredi karakter slike te njen položaj i lateralno povećanje u odnosu na predmet.

Postupak: Udaljenost predmeta i njegove slike od prve leće te odgovarajuće lateralno povećanje povezani su poznatim izrazima

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}, \qquad m_1 = -\frac{b_1}{a_1}.$$

Istovjetni izrazi vrijede i za drugu leću,

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}, \qquad m_2 = -\frac{b_2}{a_2}.$$

pri čemu slika koju stvara prva leća predstavlja predmet za drugu leću, a s obzirom da je razmak među lećama D, vrijedi

$$b_1 + a_2 = D.$$

Eliminacijom b_1 i a_2 iz gornjih jednadžbi računamo udaljenost slike od druge leće,

$$b_1 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}, \qquad b_2 = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2} = \frac{(D - b_1) f_2}{(D - b_1) - f_2} = \cdots = \frac{a_1(D - f_1)f_2 - D f_1 f_2}{a_1(D - f_1 - f_2) - f_1(D - f_2)}.$$

Kao ukupno lateralno povećanje slike u odnosu na predmet slijedi općenit izraz

$$m = m_2\, m_1 = \frac{b_1}{a_1}\frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1 b_2}{a_1(D - b_1)} = \cdots = \frac{f_1 f_2}{a_1(D - f_1 - f_2) - f_1(D - f_2)}.$$

Za zadane vrijednosti a_1 i f_1 dobivamo $b_1 = 20\,\mathrm{cm}$, što znači da se predmet druge leće nalazi na udaljenosti $a_2 = D - b_1 = 10\,\mathrm{cm}$ od nje, gdje uočavamo da vrijedi $a_2 < f_2$, što pak znači da će druga leća tvoriti virtuelnu sliku. Za zadane vrijednosti a_1, $f_{1,2}$ i D dobivamo $b_2 = -50\,\mathrm{cm}$, gdje predznak suprotan predznaku udaljenosti a_2 potvrđuje da se slika nalazi s iste strane leće kao i predmet, odnosno, da je ona virtuelna. Udaljenost slike koju stvara druga leća i predmeta prve leće je za zadane vriejdnosti parametara a_1, $f_{1,2}$ i D jednaka nuli,

$$a_1 + D + b_1 = 0,$$

što znači da se položaj slike i predmeta u ovom slučaju podudaraju. Za ukupno lateralno povećanje dobivano $m = -5$, što znači da je slika ovdje preokrenuta i povećana.

Rješenje: $b_2 = (a_1(D - f_1)f_2 - D f_1 f_2)/(a_1(D - f_1 - f_2) - f_1(D - f_2)) = -50\,\mathrm{cm}$ (slika je virtuelna, njen se položaj podudara s položajem predmeta), $m = f_1 f_2/(a_1(D - f_1 - f_2) - f_1(D - f_2)) = -5$ (slika je uvećana i preokrenuta)

72 Zadatak: Fotografski teleobjektiv se sastoji od (prednje) konvergentne leće žarišne duljine $f_1 = 30\,\mathrm{cm}$ iza koje se na udaljenosti $D = 27.5\,\mathrm{cm}$ nalazi (stražnja) divergentna leća žarišne duljine $f_2 = -10\,\mathrm{cm}$. Odredi udaljenost između prednje leće teleobjektiva i slike predmeta, ako udaljenost predmeta od fotografskog aparata teži u beskonačno. Zatim odredi žarišnu duljinu leće koja daje jednako povećanje slike vrlo udaljenog predmeta kao i opisani teleobjektiv. (Sve leće smatramo tankim lećama.)

Postupak: Teleobjektiv je kombinacija dviju leća pa možemo koristiti općenite izraze za udaljenost slike od stražnje leće, b_2, te za ukupno lateralno povećanje slike, m, izvedene u prethodnom zadatku,

$$b_2 = \frac{a_1(D-f_1)f_2 - Df_1f_2}{a_1(D-f_1-f_2) - f_1(D-f_2)}, \qquad m = \frac{f_1f_2}{a_1(D-f_1-f_2) - f_1(D-f_2)}.$$

Udaljenost slike 'beskonačno dalekog' predmeta od prednje leće je

$$x_\infty = D + \lim_{a_1\to\infty} b_2 = D + \frac{(D-f_1)f_2}{D-f_1-f_2},$$

što za zadane vrijednosti $f_{1,2}$ i D daje $x_\infty \simeq 30.83\,\mathrm{cm}$. Kada bismo umjesto teleobjektiva imali samo jednu leću žarišne duljine f te predmet na udaljenosti a_1, pisali bismo

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}, \qquad m = -\frac{b_1}{a_1} = -\frac{f}{a_1-f}.$$

Izjednačavajući izraze za povećanje slike u slučaju teleobjektiva i u slučaju jednostruke leće dobivamo

$$f = \frac{f_1f_2}{f_1+f_2-D(1-f_1/a_1)}.$$

S obzirom da vrijedi $a_1 \gg f_1$ možemo uzeti

$$f = \frac{f_1f_2}{f_1+f_2-D},$$

što za zadane vrijednosti $f_{1,2}$ i D daje $f \simeq 40\,\mathrm{cm}$.

Rješenje: $x = D + (D-f_1)f_2/(D-f_1-f_2) \simeq 30.83\,\mathrm{cm}$, $f = f_1f_2/(f_1+f_2-D) \simeq 40\,\mathrm{cm}$

8 Valna optika

73 Zadatak: Bijela svjetlost pada okomito na tanku opnu od sapunice ineksa loma $n = 4/3$. Odredi najmanju debljinu opne pri kojoj istovremeno dolazi do najslabije moguće refleksije plave svjetlosti (valna duljina u vakuumu $\lambda_\mathrm{B} = 480\,\mathrm{nm}$) i do najjače moguće refleksije crvene svjetlosti ($\lambda_\mathrm{R} = 640\,\mathrm{nm}$).

Postupak: Razlika u fazi svjetlosti valne duljine λ reflektirane na prednjoj i one reflektirane na stražnjoj strani opne debljine d i indeksa loma n je

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = 2\pi\,\frac{2nd}{\lambda} + \pi,$$

gdje je $\Delta s = s_2 - s_1 = 2nd$ razlika u duljini optičkih putova koje prevaljuju dvije zrake, dok je član π je prisutan zbog toga što se jedna od dvije zrake reflektira od optički gušćeg sredstva. Uvjet destruktivne interferencije za plavu svjetlost glasi

$$\Delta\phi_\mathrm{B} = 2\pi\,\frac{2nd}{\lambda_\mathrm{B}} + \pi = (2k+1)\pi, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

iz čega slijedi

$$d = \frac{\lambda_\mathrm{B}}{2n}k = 180\,\mathrm{nm}, 360\,\mathrm{nm}, 540\,\mathrm{nm}, 720\,\mathrm{nm}, \ldots$$

Uvjet konstruktivne interferencije za crvenu svjetlost glasi

$$\Delta\phi_\mathrm{R} = 2\pi\,\frac{2nd}{\lambda_\mathrm{R}} + \pi = 2k'\pi, \qquad k' = 1, 2, \ldots$$

što daje

$$d = \frac{\lambda_\mathrm{R}}{4n}\,(2k'-1) = 120\,\mathrm{nm}, 360\,\mathrm{nm}, 600\,\mathrm{nm}, \ldots$$

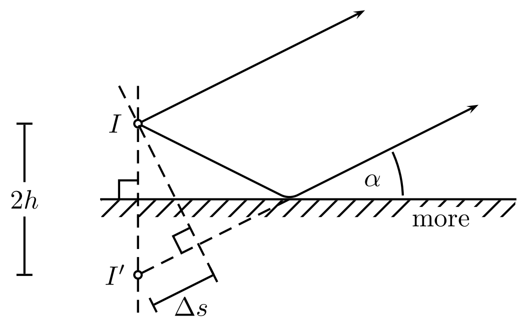
Usporedbom dobivenih vrijednosti pronalazimo da je najmanja debljina opne koja zadovoljava oba uvjeta

$$d_\mathrm{min} = 360\,\mathrm{nm}.$$

Rješenje: $d_\mathrm{min} = 360\,\mathrm{nm}$

74 Zadatak: Odašiljač radio-valova valne duljine $\lambda = 10\,\mathrm{m}$ nalazi se na visini $h = 8\,\mathrm{m}$ iznad mirne površine mora. Uzimajući u obzir da površina mora reflektira radio-valove, odredi kuteve u odnosu nju pod kojima se, s velike udaljenosti, opaža maksimume i minimume jakosti radio-signala.

Postupak: Razlika u fazi vala koji do prijamnika na udaljenosti $r \gg h$ stiže izravno od odašiljača i vala koja do njega stiže nakon refleksije na površini mora prisutna je zbog razlike u duljini optičkih putova dvaju valova te zbog pomaka u fazi π (polovica punog ciklusa titranja) koja nastupa pri refleksiji vala na granici s optički gušćim sredstvom.



Kao što prikazuje gornja skica, val koji se reflektira na površini mora možemo shvatiti kao da potječe od zrcalne slike izvora koja se nalazi na dubini h ispod površine mora. Tada je lako vidjeti da je razlika duljine optičkih putova dvaju valova

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 2h \sin\alpha,$$

gdje je α kut elevacije prijamnika. Tome odgovara razlika u fazi

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = \frac{4\pi h \sin\alpha}{\lambda} + \pi,$$

gdje je uključen član π zbog refleksije na optički gušćem sredstvu. Uvjet konstruktivne interferencije, odn. maksimuma u intenzitetu zračenja, dvaju valova s razlikom faza $\Delta\phi$ glasi

$$\Delta\phi = 2m\pi, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

što ovdje daje

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{\lambda}{4h}(2m-1).$$

S obzirom na to da za zadane vrijednosti h i λ imamo $\lambda/4h = 5/16$ te da nas zanimaju samo pozitivni kutevi, u obzir dolaze samo vrijednosti $m = 1, 2$, za koje dobivamo

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{5}{16}, \frac{15}{16},$$

odnosno $\alpha_{\max} \simeq 18.21°, 69.64°$. Uvjet destruktivne interferencije, odn. minimuma u intenzitetu zračenja, dvaju valova s razlikom faza $\Delta\phi$ glasi

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots,$$

što ovdje daje

$$\sin\alpha_{\min} = \frac{\lambda}{2h}m.$$

U obzir dolaze vrijednosti $m = 0, 1$, za koje imamo

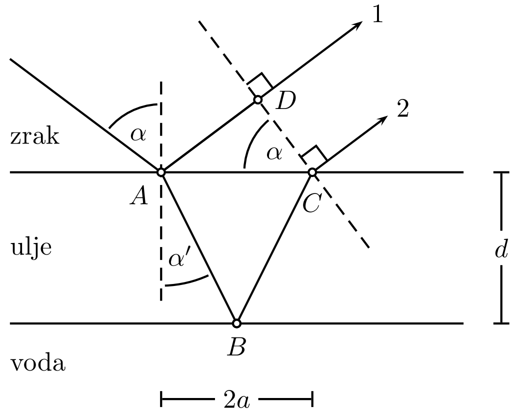
$$\sin\alpha_{\min} = 0, \frac{5}{8},$$

odnosno $\alpha_{\min} \simeq 0°, 38.68°$.

Rješenje: Maksimumi: $\sin\alpha_{\max} = (\lambda/4h)(2m-1)$, $m = 1, 2$, $\alpha_{\max} \simeq 18.21°, 69.64°$, minimumi: $\sin\alpha_{\min} = (\lambda/2h)m$, $m = 0, 1$, $\alpha_{\min} \simeq 0°, 38.68°$.

75 Zadatak: Na vodi pluta sloj ulja debljine d i indeksa loma n koji je veći od indeksa loma vode. Odredi razliku u fazi između svjetlosti valne duljine λ reflektirane na graničnoj plohi zrak–ulje i one reflektirane na graničnoj plohi ulje–voda, ako svjetlost upada iz zraka pod kutom α. (Indeks loma zraka jednak je jedinici.)

Postupak: Opisanu situaciju prikazujemo skicom:



Upadna svjetlost reflektira se od granične plohe zrak–ulje (na skici zraka 1) i od granične plohe ulje–voda (zraka 2). Razlika u fazi posljedica je razlike u duljini optičkih putova dviju zraka, $\Delta s = s_2 - s_1$, te pomaka u fazi π (polovica ciklusa) koji nastupa pri refleksiji svjetlosti na granici s optički gušćim sredstvom. To je ovdje samo granica zrak–ulje pa se takav pomak pojavljuje samo za zraku 1. Razliku u duljini optičkih putova razmatramo između točke A u kojoj se upadna zraka razdvaja na zrake 1 i 2, te točaka C i D u kojima zrake 1 i 2 presijecaju ravninu okomitu na njih (desna iscrtkana linija na skici). Možemo pisati

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = 2\pi\frac{s_2 - s_1}{\lambda} + \pi, \qquad s_1 = |AD|, \qquad s_2 = n(|AB| + |BC|).$$

Uvodimo duljinu $2a = |AC|$ (vidi skicu) te iz geometrije prepoznajemo

$$\frac{a}{d} = \tan\alpha' = \frac{\sin\alpha'}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha'}},$$

Koristeći zakon loma prema kojemu je $n\sin\alpha' = \sin\alpha$ gornji omjer pišemo u obliku

$$\frac{a}{d} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}.$$

Optički put zrake 1 sada možemo napisati kao

$$s_1 = |AD| = |AC|\sin\alpha = 2a\sin\alpha = \frac{2d\sin^2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}},$$

dok je optički put zrake 2

$$s_2 = n(|AB| + |BC|) = 2n|AB| = 2n\sqrt{d^2 + a^2} = 2nd\sqrt{1 + \left(\frac{a}{d}\right)^2} = \frac{2n^2 d}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}.$$

Konačno, razlika optičkih puteva je

$$\Delta s = s_2 - s_1 = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha},$$

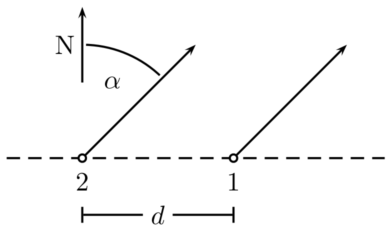
a razlika u fazi uključujući i pomak π zbog refleksije zrake 1 na optički gušćem sredstvu je

$$\Delta\phi = 2\pi\frac{\Delta s}{\lambda} + \pi = \frac{4\pi d}{\lambda}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \pi.$$

Rješenje: $\Delta\phi = (4\pi d/\lambda)\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} + \pi$

76 Zadatak: Dva odašiljača radio valova valne duljine $\lambda = 100\,\mathrm{m}$ leže na pravcu istok–zapad na razmaku $d = 200\,\mathrm{m}$. Odredi fazni pomak među odašiljačima s pomoću kojega se maksimum intenziteta odašilje u smjeru sjeveroistoka.

Postupak: Odašiljače prikazujemo skicom:



Električno polje istočnog odašiljača koje prijamnik opaža u nekoj točki možemo napisati kao

$$E_1[t] = E_{10} \cos\left[\omega t + \phi_1 - 2\pi \frac{s_1}{\lambda}\right] = E_0 \cos[\omega t - \psi_1],$$

gdje je E_{10} amplituda titranja polja (razmjerna snazi odašiljača te ovisna o udaljenosti odašiljača od prijamnika), ϕ_1 je faza odašiljača, s_1 je duljina optičkog puta (udaljenost) između odašiljača i prijamnika, a

$$\psi_1 = \phi_1 - 2\pi s_1/\lambda$$

je faza s kojom prijamnik prima val. Na istovjetan način možemo napisati i polje zapadnog odašiljača,

$$E_2[t] = E_{20} \cos[\omega t - \psi_2], \qquad \psi_2 = \phi_2 - 2\pi s_2/\lambda.$$

Razliku u fazi tih valova možemo napisati kao

$$\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1 = \Delta\phi - 2\pi \frac{\Delta s}{\lambda},$$

gdje je $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ fazni pomak među odašiljačima, a $\Delta s = s_2 - s_1$ je razlika duljine optičkih puteva za dani položaj prijamnika. Ako se prijamnik nalazi na velikoj udaljenosti pod azimutom α, iz geometrije slijedi (vidi skicu)

$$\Delta s = s_2 - s_1 = d \sin\alpha.$$

Nadalje, ako se on nalazi u smjeru sjeveroistoka imamo $\alpha = \pi/4$, što daje

$$\Delta s = d \sin\frac{\pi}{4} = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Razlika u fazi sada je

$$\Delta\psi = \Delta\phi - \frac{d\pi\sqrt{2}}{\lambda}.$$

Kako bismo postigli konstruktivnu interferenciju zahtijevamo

$$\Delta\psi = 2m\pi, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots.$$

S obzirom da za zadane vrijednosti λ i d imamo $d/\lambda = 2$, gornji uvjet glasi $\Delta\phi = 2\pi(m + \sqrt{2})$, Uočavamo da se vrijednost faznog pomaka $\Delta\phi$ koja se nalazi unutar intervala $[-\pi, \pi]$ dobiva se uz $m = -1$ i ona je

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = 2\pi(\sqrt{2} - 1).$$

Ta je vrijednost pozitivna te zaključujemo da zapadni odašiljač mora prethoditi $\sqrt{2} - 1 \simeq 0.41$ punog ciklusa u odnosu na istočni odašiljač.

Rješenje: Zapadni odašiljač prethodi s $\Delta\phi = 2\pi(\sqrt{2} - 1)$

77 Zadatak: Tri koherentna izvora zračenja valne duljine λ leže na pravcu. Odredi namanji razmak d među susjednim izvorima kojime se postiže iščezavanje zračenja u točkama koje leže na istom pravcu kao i izvori na velikoj udaljenosti od izvora. (Podrazumijeva se da su izvori jednake jakosti te da titraju u fazi.)

Postupak: Neka izvori leže na x-osi pri koordinatama $x = 0, \pm d$. Na udaljenosti od izvora znatno većoj od d možemo smatrati da sva tri izvora doprinose poljima koja titraju jednakim amplitudama te ukupno električno polje u točkama na samoj x-osi možemo napisati kao

$$E[x,t] = E_0 \cos[\omega t - k(x+d)] + E_0 \cos[\omega t - kx] + E_0 \cos[\omega t - k(x-d)],$$

gdje je

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Koristeći kompleksni zapis imamo

$$\begin{aligned} E[x,t] &= E_0 \operatorname{Re}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k(x+d))} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k(x-d))}\big] \\ &= E_0 \operatorname{Re}\big[\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kd} + 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}kd}\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\big] \\ &= E_0 \operatorname{Re}\big[\big(1 + 2\cos[kd]\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\big] \\ &= E_0 \,\big(1 + 2\cos[kd]\big)\cos[\omega t - kx], \end{aligned}$$

gdje prepoznajemo titranje amplitudom $E_0(1 + 2\cos[kd])$ koja iščezava ako vrijedi

$$\cos[kd] = -\frac{1}{2}.$$

Najmanja vrijednost d koja zadovoljava gornji uvjet je

$$d_{\min} = \frac{1}{k}\arccos\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{2\pi}{3} = \frac{\lambda}{3}.$$

Isti rezultat se može dobiti i korištenjem poznatog izraza za intenzitet zračenja rešetke s N koherentnih izvora na međusobnom razmaku d,

$$I[\alpha] = I_0 \frac{\sin^2\left[N\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]}.$$

Ovdje je $N = 3$, a za točke na pravcu na kojem leže izvori stavljamo $\alpha = \pi/2$. Zahtijev da zračenje u tim točkama iščezne vodi na

$$\sin\left[\frac{\pi d}{\lambda}\right] \neq 0, \qquad \sin\left[3\frac{\pi d}{\lambda}\right] = 0,$$

odnosno

$$3\frac{\pi d}{\lambda} = \pi, 2\pi, \ldots$$

Najmanji d koji zadovoljava gornji uvjet je $d_{\min} = \lambda/3$.

Rješenje: $d_{\min} = \lambda/3$

78 Zadatak: Kontinuirani spektar zračenja s valnim duljinama u području od $\lambda_\mathrm{B} = 420\,\mathrm{nm}$ do $\lambda_\mathrm{R} = 680\,\mathrm{nm}$ (bijela svjetlost) pada okomito na optičku rešetku s razmakom $d = 5\,\mu\mathrm{m}$ među pukotinama. Odredi kutnu širinu razmaka (tamnog područja) između kraja prvog i početka drugog spektra u kutnoj raspodjeli zračenja rešetke. Zatim odredi valnu duljinu drugog spektra pri kojoj nastupa preklop s početkom trećeg spektra.

Postupak: Kutna raspodjela intenziteta svjetlosti valne duljine λ pri difrakciji na rešetki s razmakom među pukotinama d opisana je poznatim izrazom

$$I[\alpha] = I_0 \frac{\sin^2\left[N\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]},$$

a njeni se glavni maksimumi, $I_\mathrm{max} = N^2 I_0$, nalaze pri

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}m, \qquad m = 0, \pm1, \pm2\ldots,$$

gdje $m = 0$ odgovara središnjem ili nultom maksimumu, $m = \pm1$ odgovara prvom maksimumu itd. S obzirom da ovdje imamo kontinuirani spektar, prvi se maksimum ($m = 1$), odn. spektar prvog reda, proteže u području kuta α

$$\text{od} \quad \sin\alpha_{1B} = \frac{\lambda_\mathrm{B}}{d} \quad \text{do} \quad \sin\alpha_{1R} = \frac{\lambda_\mathrm{R}}{d},$$

Drugi maksimum ($m = 2$), odn. spektar u drugog reda, proteže u području kuta α

$$\text{od} \quad \sin\alpha_{2B} = \frac{2\lambda_\mathrm{B}}{d} \quad \text{do} \quad \sin\alpha_{2R} = \frac{2\lambda_\mathrm{R}}{d}.$$

S obzirom da za zadane granične valne duljine λ_B i λ_R vrijedi $2\lambda_\mathrm{B} > \lambda_\mathrm{R}$, slijedi $\alpha_{2B} > \alpha_{1R}$ te zaključujemo da zaista postoji razmak (tamno područje) između kraja spektra prvog i početka spektra drugog reda. Kutna širina tog razmaka je

$$\Delta\alpha = \alpha_{2B} - \alpha_{1R} = \arcsin\left[\frac{2\lambda_\mathrm{B}}{d}\right] - \arcsin\left[\frac{\lambda_\mathrm{R}}{d}\right],$$

što za zadane vrijednosti $\lambda_\mathrm{B,R}$ i d daje $\Delta\alpha \simeq 1.85°$. Treći maksimum ($m = 3$), odn. spektar trećeg reda, u kutnoj raspodjeli počinje pri

$$\sin\alpha_{3B} = \frac{3\lambda_\mathrm{B}}{d}.$$

S obzirom da za zadane valne duljine $\lambda_\mathrm{B,R}$ vrijedi $3\lambda_\mathrm{B} < 2\lambda_\mathrm{R}$, slijedi $\alpha_{3B} < \alpha_{2R}$, što potvrđuje da se početak trećeg spektra nalazi unutar spektra drugog reda. Valna duljina λ spektra drugog reda kojoj odgovara isti kut otklona kao i početku spektra trećeg reda slijedi iz uvjeta

$$\sin\alpha = \frac{2\lambda}{d} = \frac{3\lambda_\mathrm{B}}{d},$$

što daje

$$\lambda = \frac{3}{2}\lambda_\mathrm{B}.$$

Za zadane vrijednosti $\lambda = 630\,\mathrm{nm}$.

Rješenje: $\Delta\alpha = \arcsin[2\lambda_\mathrm{B}/d] - \arcsin[\lambda_\mathrm{R}/d] \simeq 1.85°$, $\lambda = 3\lambda_\mathrm{B}/2 = 630\,\mathrm{nm}$

79 Zadatak: Monokromatska svjetlost upada okomito na optičku rešetku koja se sastoji od niza pukotina širine a raspoređenih tako da je razmak među središtima susjednih pukotina d. Na zastoru promatramo svijetle i tamne pruge. Na mjestu gdje bismo očekivali treći po redu interferencijski maksimum pojavljuje se prvi po redu difrakcijski minimum. Odredi omjer širine pukotina a i razmaka među njihovim središtima d.

Postupak: Kutna raspodjela intenziteta zračenja pri interferenciji N točkastih koherentnih izvora valne duljine λ na međusobnom razmaku d opisana je poznatim izrazom

$$I[\alpha] = I_0 \frac{\sin^2\left[N\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\alpha\right]},$$

gdje glavne interferencijske maksimume iznosa $I_{\max} = N^2 I_0$ očekujemo pri kutu α za koji vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{\lambda}{d}m, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$$

Kut koji odgovara trećem po redu glavnom interferencijskom maksimumu dan je s

$$\sin\alpha_3 = \frac{3\lambda}{d}.$$

Svaki od koherentnih izvora ovdje je pukotina širine a te osim same interferencije izvora uzimamo u obzir i difrakciju. Kutna raspodjela intenziteta zračenja pri difrakciji svjetlosti valne duljine λ na pukotini širine a opisan je izrazom

$$I[\alpha'] = I_0 \frac{\sin^2\left[\frac{\pi a}{\lambda}\sin\alpha'\right]}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\alpha'\right)^2}.$$

Minimume očekujemo pri kutu α' koji zadovoljava

$$\sin\alpha' = \frac{\lambda}{a}m' \qquad m' = \pm1, \pm2, \ldots$$

Za prvi difrakcijski minimum uzimamo $m = 1$, odnosno

$$\sin\alpha_1' = \frac{\lambda}{a}.$$

Uvjet zadatka glasi

$$\alpha_3 = \alpha_1',$$

odnosno, napišemo li $\sin\alpha_3 = \sin\alpha_1'$, slijedi

$$\frac{3\lambda}{d} = \frac{\lambda}{a},$$

na osnovu čega je traženi omjer

$$\frac{a}{d} = \frac{1}{3}.$$

Rješenje: $a/d = 1/3$

80 Zadatak: Snop prirodne svjetlosti intenziteta I_0 upada na niz od tri polarizatora. Propusni smjer trećeg i propusni smjer prvog polarizatora zatvaraju kut θ_{31} dok se kut θ_{21} što ga zatvara propusni smjer drugog polarizatora s propusnim smjerom prvog polarizatora može podešavati. Odredi kut θ_{21} kojime se postiže najveći intenzitet snopa nakon njegova prolaska trećim polarizatorom te iznos največeg intenziteta.

Postupak: Intenzitet snopa nakon prolaska prvim polarizatorom jednak je jednoj polovini uparnog intenziteta,

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0,$$

jer polarizator apsorbira jedan od dvaju ravnomjerno zastupljenih smjerova polarizacije prirodne svjetlosti. Daljnji pad intenziteta nakon prolaska snopa drugim i trećim polarizatorom slijedi primjenom Malusova zakona,

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta_{21}, \qquad I_3 = I_2 \cos^2 \theta_{32},$$

gdje je θ_{21} traženi kut između drugog i prvog polarizatora, a θ_{32} je kut između trećeg i drugog polarizatora. Koristeći

$$\theta_{21} + \theta_{32} = \theta_{31}$$

možemo napisati

$$I_3 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta_{21} \cos^2 \theta_{32} = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \theta_{21} \cos^2 [\theta_{31} - \theta_{21}].$$

Kut θ_{21} s kojim se ostvaruje maksimum intenziteta I_3 pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}I_3}{\mathrm{d}\theta_{21}} = -2(\tan \theta_{21} - \tan[\theta_{31} - \theta_{21}]) I_3$$

koji je ispunjen kada je

$$\tan \theta_{21} = \tan[\theta_{31} - \theta_{21}],$$

odnosno za

$$\theta_{21} = \theta_{31}/2.$$

Maksimalni intenzitet je

$$(I_3)_{\max} = \frac{1}{2} I_0 \cos^4 [\theta_{31}/2].$$

Rješenje: $\theta_{21} = \theta_{31}/2$, $I_{\max} = I_0 \cos^4[\theta_{31}/2]/2$

9 Moderna fizika

81 Zadatak: Snaga zračenja točkastog izotropnog izvora monokromatske svjetlosti valne duljine $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$ je $P = 10\,\mathrm{W}$. Odredi najveću udaljenost na kojoj čovjek može primijetiti taj izvor ako njegovo oko reagira na svjetlosni tok od najmanje 60 fotona u sekundi, a promjer širom otvorene zjenice oka je $2r = 5\,\mathrm{mm}$. (Planckova konstanta $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Jakost točkastog izvora je

$$I = \frac{P}{4\pi},$$

a snagu koju zahvaća ljudsko oko na udaljenosti d od tog izvora je

$$P' = I\,\Omega',$$

gdje je

$$\Omega' = \frac{r^2\pi}{d^2}$$

prostorni kut koji otvor zjenice površine $r^2\pi$ zauzima u odnosu na izvor. Slijedi

$$P' = \frac{Pr^2}{4d^2}.$$

(Gornji rezultat možemo izravno napisati primijetimo li da se snaga koju zahvaća oko, P' i ukupna znaga izvora, P, odnose kao što se odnose površina otvora oka, $r^2\pi$, i površina sfere polumjera jednakog udaljenosti oka od izvora, $4d^2\pi$.) S obzirom da se svjetlost sastoji od fotona čija je energija

$$E_{\mathrm{fot.}} = \frac{hc}{\lambda},$$

snagu koju oko zahvaća također možemo napisati kao produkt frekvencije f' kojom fotoni ulaze u oko i energije fotona,

$$P' = fE_{\mathrm{fot.}} = f\frac{hc}{\lambda}.$$

Izjednačavanjem gornjih izraza za snagu P' slijedi

$$d^2 = \frac{Pr^2\lambda}{4fhc}.$$

Pragu osjetljivosti oka f_{min} odgovara maksimalna udaljenost s koje vidimo izvor,

$$d_{\mathrm{max}} = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{P\lambda}{hcf_{\mathrm{min}}}}.$$

Za zadane vrijednosti P, $f_{\mathrm{min}} = 60\,\mathrm{s^{-1}}$ i r dobivamo $d_{\mathrm{max}} \simeq 809\,\mathrm{km}$.

Rješenje: $d_{\mathrm{max}} = (r/2)\sqrt{P\lambda/hcf_{\mathrm{min}}} \simeq 809\,\mathrm{km}$

82 Zadatak: Žica duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$ i promjera $2r = 1\,\mathrm{mm}$ priključena je na napon $U = 6\,\mathrm{V}$ te njome teče struja $I = 0.2\,\mathrm{A}$, a nalazi se u okolini temperature $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. Odredi temperaturu žice pretpostavljajući da ona apsorbira i emitira termalno zračenje kao crno tijelo. (Štefan–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.)

Postupak: U stacionarnom stanju, tj. kada je temperatura žice stalna, količina energije koju u jedinici vremena žica prima jednaka je količini energije koju ona predaje. Pišemo

$$0 = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = UI + S\sigma T_0^4 - S\sigma T^4,$$

gdje je UI snaga kojom električna struja zagrijava (pozitivni predznak) žicu, $S\sigma T_0^4$ je snaga kojom žica apsorbira (pozitivni predznak) termalno zračenje iz okoline, a $S\sigma T^4$ je snaga termalne emisije (negativni predznak) žice. Ploha koja istovremeno apsorbira i emitira zračenje je plašt cilindra polumjera r i duljine ℓ čija je površina

$$S = 2r\pi\ell.$$

Slijedi

$$T^4 = T_0^4 + \frac{UI}{S\sigma} = T_0^4 + \frac{UI}{2r\pi\ell\sigma},$$

a za zadane vrijednosti parametara ℓ, r, U, I i T_0 dobivamo $T \simeq 349\,\mathrm{K}$.

Rješenje: $T = \left(T_0^4 + UI/2r\pi\ell\sigma\right)^{1/4} \simeq 349\,\mathrm{K}$

83 Zadatak: Čelična kuglica promjera $2r = 1\,\mathrm{cm}$ zagrijana je do temperature $T_0 = 1000\,\mathrm{K}$ i ostavljena je da se hladi termalnim zračenjem. Pretpostavljajući da kuglica zrači kao crno tijelo te zanemarujući apsorpciju zračenja iz okoline odredi za koliko vremena se temperatura kuglice spusti na $T_1 = 900\,\mathrm{K}$. (Toplinski kapacitet čelika $c = 466\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$, gustoća čelika $\rho = 7800\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, Štefan–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.)

Postupak: Toplinska energija sadržana u čeličnoj kuglici pri temperaturi T je

$$Q = mcT.$$

Ta se toplina u vremenu smanjuje zbog termičkog zračenja opisanog Štefan–Boltzmannovim zakonom,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q = mc\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T = -S\sigma T^4.$$

Gornja diferencijalna jednadžba dopušta separaciju varijabli te ju možemo napisati u obliku

$$-\frac{mc}{S\sigma}\frac{\mathrm{d}T}{T^4} = \mathrm{d}t,$$

a integracijom dobivamo

$$\frac{mc}{3S\sigma T^3} = t + C,$$

gdje je C integracijska konstanta. S obzirom da je u trenutku $t = t_0$ kuglica pri temperaturi $T = T_0$, a u trenutku t_1 je pri temperaturi T_2, imamo sustav

$$\frac{mc}{3S\sigma T_0^3} = t_0 + C, \qquad \frac{mc}{3S\sigma T_1^3} = t_1 + C.$$

Oduzimanjem lijeve od desne jednadžbe slijedi traženo vrijeme hlađenja,

$$\Delta t = t_1 - t_0 = \frac{mc}{3S\sigma}\left(\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_0^3}\right).$$

Kako bismo gornji izraz napisali s pomoću zadanih parametara, površinu kuglice i njenu masu pišemo kao

$$S = 4r^2\pi, \qquad m = \rho V = \rho\,\frac{4}{3}r^3\pi,$$

te za vrijeme hlađenja dobivamo

$$\Delta t = \frac{\rho c r}{9\sigma}\left(\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_0^3}\right).$$

Za zadane vrijednosti parametara r, T_{12} i konstanti ρ, c i σ dobivamo $\Delta t = 13.3\,\mathrm{s}$

Rješenje: $\Delta t = (\rho c r/9\sigma)(T_1^{-3} - T_0^{-3}) \simeq 13.3\,\mathrm{s}$

84 Zadatak: Srednja udaljenosti Zemlje od Sunca (tzv. astronomska jedinica) iznosi $a = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$, a ukupna snaga Sunčeva zračenja (tzv. luminozitet Sunca) je $P = L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$. Procijeni srednju temperaturu Zemlje na osnovu pretpostavke da ona apsorbira i emitira zračenje kao crno tijelo. (Štefan–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$.)

Postupak: Sunce možemo shvatiti kao izotropni izvor jakosti

$$I = \frac{P}{4\pi} = \frac{L_\odot}{4\pi},$$

a snagu zračenja koja pada na Zemlju i koje ona apsorbira možemo napisati kao

$$P_\mathrm{a} = I\Omega,$$

gdje je

$$\Omega = \frac{R_\mathrm{Z}^2\pi}{a^2}$$

prostorni kut koji Zemlja zauzuma u odnosu na Sunce, R_Z je polumjer Zemlje. Slijedi da snagu zračenja koju Zemlja apsorbira možemo napisati kao

$$P_\mathrm{a} = \frac{L_\odot R_\mathrm{Z}^2}{4a^2}.$$

Snagu zračenja koje Zemlja emitira opisujemo Štefan–Boltzmannovim zakonom,

$$P_\mathrm{e} = S\sigma T^4 = 4R_\mathrm{Z}^2\pi\sigma T^4,$$

gdje je $S = 4R_\mathrm{Z}^2\pi$ površina Zemlje, a T je njena srednja temperatura. S obzirom da nema drugih mehanizama grijanja i hlađenja te dvije snage moraju biti u ravnoteži,

$$P_\mathrm{a} = P_\mathrm{e}.$$

Slijedi

$$T^4 = \frac{L_\odot}{16\pi\sigma a^2},$$

što daje $T \simeq 278.7\,\mathrm{K}$.

Rješenje: $T = (L_\odot/16\pi\sigma a^2)^{1/4} \simeq 278.7\,\mathrm{K} \simeq 5.5°\mathrm{C}$

85 Zadatak: Na osnovu izraza za raspodjelu gustoće energije zračenja crnog tijela temperature T po valnim duljinama (Planckov zakon),

$$u_\lambda[\lambda] = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1},$$

izvedi izraz za raspodjelu gustoće energije zračenja po frekvencijama, $u_f[f]$, te odredi frekvenciju pri kojoj ta raspodjela ima maksimum. (Postupak zahtijeva pronalaženje nultočke funkcije numeričkim putem.)

Postupak: Širinu uskog spektralnog intervala u okolini valne duljine λ, odnosno frekvencije $f = c/\lambda$, možemo izraziti širinom intervala valnih duljina, $\Delta\lambda$, kao i širinom intervala frekvencija, Δf. Kada $\Delta\lambda \to 0$, širina uskog spektralnog intervala iskazana kao $\Delta\lambda$ i kao Δf odnose se kao

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta f} = \left|\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}f}\right| = \frac{c}{f^2}.$$

Gustoću energije sadržanu u tom spektralnom intervalu također možemo napisati bilo koristeći valnu duljinu, bilo koristeći frekvenciju, pri čemu mora vrijediti jednakost

$$u_\lambda[\lambda]\ \Delta\lambda = u_f[f]\ \Delta f.$$

Tražena funkcija raspodjele gustoće energije zračenja crnog tijela po frekvencijama slijedi kao

$$u_f[f] = \frac{\Delta\lambda}{\Delta f}\, u_\lambda[c/f] = \frac{c}{f^2} \frac{8\pi hc}{(c/f)^5} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{hf}{kT}} - 1} = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{hf}{kT}} - 1}.$$

Ekstrem gornje funkcije možemo pronaći uvjetom $0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} u_\lambda[\lambda]$. Zbog jednostavnosti računa uvodimo bezdimenzionalnu varijablu

$$x = \frac{hf}{kt}$$

te tražimo maksimum veličine

$$u_\lambda = k\, \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1},$$

gdje je k konstanta, u odnosu na variajblu x. Uvjet ekstrema daje

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_\lambda = \cdots = \frac{kx^2}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} \big(\mathrm{e}^x (3 - x) - 3\big),$$

što vodi na

$$x = 3(1 - \mathrm{e}^{-x}).$$

Vrijednost varijable x koja zadovoljava gornji uvjet nije moguće izraziti analitički pa koristimo numerički postupak koji daje $x \simeq 2.82144$. Očigledno je da se radi o maksimumu jer veličina $u_\lambda > 0$ iščezava za $x \to 0$ kao i za $x \to \infty$. Slijedi,

$$x_{\max} = \frac{hf_{\max}}{kT} \simeq 2.82144,$$

odnosno,

$$f_{\max} \simeq 2.82144 \times \frac{kT}{h}.$$

Rješenje: $u_f[f] = (8\pi hf^3/c^3)/(\mathrm{e}^{hf/kT} - 1)$, $f_{\max} \simeq 2.82144 \times kT/h$

86 Zadatak: Odredi silu kojom Sunčevo zračenje djeluje na Zemlju pretpostavljajući da Zemlja apsorbira svo zračenje koje na nju pada te koristeći podatke o ukupnoj snazi Sunčeva zračenja (luminozitet Sunca) $P = L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$, polumjeru Zemlje $R = 6371\,\mathrm{km}$ te srednjoj udaljenosti Zemlje od Sunca (astronomska jedinica) $a = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$. (Brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Na osnovu očuvanja količine gibanja mora vrijediti

$$\Delta\mathbf{p}_\mathrm{Z} + \Delta\mathbf{p}_\mathrm{aps.} = 0,$$

gdje je $\Delta\mathbf{p}_\mathrm{Z}$ promjena količine gibanja Zemlje, a $\Delta\mathbf{p}_\mathrm{aps.}$ je promjena količine gibanja zračenja uslijed apsorpcije. Promjenu količine gibanja Zemlje koja nastupa u vremenskom intervalu Δt možemo napisati kao

$$\Delta\mathbf{p}_\mathrm{Z} = \mathbf{F}\,\Delta t,$$

gdje je $\mathbf{F}$ sila koja djeluje na Zemlju. Promjenu količine gibanja zračenja u istom vremenskom intervalu možemo napisati kao zbroj promjena količina gibanja svih apsorbiranih fotona,

$$\Delta\mathbf{p}_\mathrm{aps.} = \sum_{i\in\Delta t}(\mathbf{p}_i' - \mathbf{p}_i) = -\sum_{i\in\Delta t}\mathbf{p}_i$$

(s obzirom da je riječ o apsorpciji imamo $\mathbf{p}_i' = 0$). S obzirom da je udaljenost Zemlja–Sunce znatno veća od polumjera Zemlje i Sunca vektori $\mathbf{p}_i$ su gotovo paralelni pa možemo računati s modulima vektora. Slijedi

$$F = \frac{\Delta p_\mathrm{Z}}{\Delta t} = \frac{\Delta p_\mathrm{aps.}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{i\in\Delta t} p_i.$$

Iznos količine gibanja fotona p_i povezan je s njegovom energijom E_i relativističkom relacijom

$$E_i = p_i c$$

s pomoću koje silu možemo napisati kao

$$F = \frac{1}{\Delta t}\sum_{i\in\Delta t}\frac{E_i}{c} = \frac{1}{c}\frac{\Delta E_\mathrm{a}}{\Delta t} = \frac{1}{c}P_\mathrm{a}$$

gdje je ΔE_a ukupna energija apsorbiranog zračenja u vremenskom intervalu Δt, a P_a snaga apsorbiranog zračenja. S obzirom da je polumjer Zemlje mnogo manji od udaljenosti Zemlja–Sunce omjer apsorbirane snage P_a i ukupne snage Sunčevog zračenja $L_\odot$ odgovara omjeru površine kruga polumjera R i površine sfere polumjera a,

$$\frac{P_\mathrm{a}}{L_\odot} = \frac{R^2\pi}{4a^2\pi} = \frac{R^2}{4a^2}$$

(detaljniji izvor gornje relacije vidi u ranijem zadatku). Konačno

$$F = \frac{R^2 L_\odot}{4a^2 c} \simeq 5.817 \times 10^8\,\mathrm{N}.$$

Rješenje: $F = R^2 L_\odot/4a^2c \simeq 5.817 \times 10^8\,\mathrm{N}$.

87 Zadatak: Pri raspršenju fotona na mirnom elektronu (Comptonovo raspršenje), energija fotona raspršenih pod kutem $\theta'_{\text{fot.}} = 60°$ je $E'_{\text{fot.}} = 0.7$ MeV. Odredi energiju fotona prije raspršenja. (Masa elektrona $m_e = 0.511\ \text{MeV}/c^2$.)

Postupak: Koristeći poznat izraz za razliku valnih duljina fotona pri Comptonovu raspršenju,

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}\big(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}}\big),$$

te izraz za energiju fotona frekvencije f, odn. valne duljine λ,

$$E_{\text{fot.}} = hf = \frac{hc}{\lambda},$$

imamo

$$\frac{hc}{E'_{\text{fot.}}} - \frac{hc}{E_{\text{fot.}}} = \frac{h}{m_e c}\big(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}}\big),$$

iz čega dobivamo

$$E_{\text{fot.}} = \frac{E'_{\text{fot.}}}{1 - (E'_{\text{fot.}}/m_e c^2)(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}})}.$$

Za zadane vrijednosti $E_{\text{fot.}} \simeq 2.222$ MeV.

Rješenje: $E_{\text{fot.}} = E'_{\text{fot.}}/\big(1 - (E'_{\text{fot.}}/m_e c^2)(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}})\big) \simeq 2.222$ MeV

88 Zadatak: Odredi najveću energiju koju elektron može primiti u Comptonovu raspršenju ako je valna duljina fotona prije raspršenja $\lambda = 0.1\,\mathrm{nm}$. (Planckova konstanta $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js}$, masa elektrona $m_e = 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, elementarni naboj $e = 1.602 \times 10^{-19}$.)

Postupak: Energija koju elektron u raspršenju primi jednaka je energiji koju foton izgubi,

$$\Delta E = E_{\text{fot.}} - E'_{\text{fot.}} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = hc\,\frac{\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)},$$

gdje je

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta'_{\text{fot.}})$$

razlika valne duljine fotona nakon i prije raspršenja pod kutem $\theta'_{\text{fot.}}$ (poznata formula za Comptonovo raspršenje). Iz gornjih izraza se vidi da je ΔE najveće kada je $\Delta\lambda$ najveće, pa pišemo

$$(\Delta E)_{\max} = hc\,\frac{(\Delta\lambda)_{\max}}{\lambda(\lambda + (\Delta\lambda)_{\max})},$$

a također se vidi da je $\Delta\lambda$ najveće pri $\theta'_{\text{fot.}} = \pi$ (raspršenje izravno unazad), odnosno,

$$(\Delta\lambda)_{\max} = \frac{2h}{m_e c}.$$

Slijedi

$$(\Delta E)_{\max} = \frac{2h^2 c}{\lambda(\lambda m_e c + 2h)}.$$

Za zadanu vrijednost λ,

$$(\Delta E)_{\max} \simeq 573.9\,\mathrm{eV}.$$

Rješenje: $(\Delta E)_{\max} = 2h^2 c/\lambda(\lambda m_e c + 2h) \simeq 573.9\,\mathrm{eV}$

89 Zadatak: Proučavanjem fotoelektričnog efekta na uzorku nekog metala uočeno je da svjetlost valne duljine $\lambda_1 = 410\,\mathrm{nm}$ s njegove površine izbacuje elektrone koji savladavaju zaustavni potencijal do $\Delta U_1 = 1\,\mathrm{V}$. Odredi gornju granicu na valnu duljinu svjetlosti koja bi proizvela fotone koji savladavaju zaustavni potencijal $\Delta U_2 = 2\,\mathrm{V}$. (Planckova konstanta $h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, elementarni naboj $e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.)

Postupak: Kako bi elektron izbačen s površine metala fotoelektričnim efektom savladao zaustavni potencijal ΔU energija fotona $E_{\mathrm{fot.}} = hf = hc/\lambda$ mora biti veća od, ili u graničnom slučaju jednaka zbroju izlaznog rada $W_{\mathrm{izl.}}$ za dani metal i rada $e\,\Delta U$ potrebnog za savladavanje zaustavnog potencijala,

$$E_{\mathrm{fot.}} = \frac{hc}{\lambda} \geq W_{\mathrm{izl.}} + e\,\Delta U.$$

Ovdje imamo granični slučaj

$$\frac{hc}{\lambda_1} = W_{\mathrm{izl.}} + e\,\Delta U_1$$

te zahtjev

$$\frac{hc}{\lambda_2} \geq W_{\mathrm{izl.}} + e\,\Delta U_2.$$

Eliminacijom $W_{\mathrm{izl.}}$ slijedi

$$\frac{hc}{\lambda_2} \geq \frac{hc}{\lambda_1} + e(\Delta U_2 - \Delta U_1),$$

odnosno,

$$\lambda_2 \leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{e}{hc}(\Delta U_2 - \Delta U_1)\right)^{-1}.$$

Za zadane vrijednosti $\lambda_2 \leq 308.1\,\mathrm{nm}$.

Rješenje: $\lambda_2 \leq (1/\lambda_1 + (e/hc)(\Delta U_2 - \Delta U_1))^{-1} \simeq 308.1\,\mathrm{nm}$

90 Zadatak: Pri prelasku elektrona iz stanja više u stanje niže energije u vodikovu atomu emitiran je foton valne duljine $\lambda \simeq 486\,\mathrm{nm}$. Odredi glavne kvantne brojeve tih dvaju stanja. (Energija ionizacije vodika $E_{\mathrm{I}} = 13.6\,\mathrm{eV}$)

Postupak: Energija emitiranog fotona

$$E_{\mathrm{fot.}} = \frac{hc}{\lambda} \simeq 2.55\,\mathrm{eV}$$

jednaka je razlici energija elektrona u početnom i konačnom stanju atoma. Energija elektrona dana je izrazom

$$E_n = -\frac{1}{n^2} E_{\mathrm{I}},$$

gdje je $n = 1, 2, \ldots$ glavni kvantni broj, a $E_{\mathrm{I}} \simeq 13.6\,\mathrm{eV}$ je energija ionizacije vodikova atoma. Za $n = 1, 2, 3, 4, 5$ dobivamo

$$E_n \simeq -13.6\,\mathrm{eV}, -3.40\,\mathrm{eV}, -1.51\,\mathrm{eV}, -0.85\,\mathrm{eV}, -0.54\,\mathrm{eV}.$$

Uočavamo da je

$$E_4 - E_2 \simeq 2.55\,\mathrm{eV} \simeq E_{\mathrm{fot.}},$$

te zaključujemo

$$n = 4, \qquad n' = 2.$$

Rješenje: $n = 4$, $n' = 2$

91 Zadatak: Čestica μ^- (mion) i proton mogu činiti vezano stanje nalik vodikovu atomu. Koristeći Bohrov model atoma procijeni energiju fotona emitiranog prilikom prelaska miona iz prvog pobuđenog u osnovno energijsko stanje na osnovu podataka da energija ionizacije vodikova atoma iznosi približno 13.6 eV te da je masa miona približno 207 puta veća od mase elektrona.

Postupak: U Bohrovom modelu vodikova atoma energija fotona emitiranog pri prelasku iz m-tog u n-to pobuđeno stanje dana je izrazom

$$E_{mn} = |E_m - E_n| = \left| \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right| E_\mathrm{I} \,,$$

gdje je E_I energija ionizacije vodikova atoma,

$$E_\mathrm{I} = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \simeq 13.6\,\mathrm{eV}.$$

Ovdje imamo $m = 2$ i $n = 1$, dakle

$$E_{21} = |E_2 - E_1| = \left| \frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right| E_\mathrm{I} = \frac{3}{4} E_\mathrm{I} \,.$$

U vezanom stanju miona i protona u gornjim izrazima potrebno je masu elektrona m_e zamijeniti masom miona,

$$m_e \longrightarrow m_\mu \simeq 207\, m_e.$$

Iz gornjih izraza je očigledno da je i energija ionizacije "mionskog H-atoma" približno 207 puta veća od energije ionizacije "običnog" vodikovog atoma te isto vrijedi i za energije fotona

$$E_{21}^{(\mu)} = \frac{3}{4} E_\mathrm{I}^{(\mu)} \simeq \frac{3}{4}\, 207\, E_\mathrm{I} \simeq 2.1\,\mathrm{keV}.$$

(Napomena: Stroži račun uzeo bi u obzir da na mjestu m_e u izrazu za E_I stoji tzv. reducirana masa elektrona, definirana izrazom $\mu_e = m_e m_p/(m_e + m_p)$. Zamjenom $\mu_e \to \mu_\mu$ dobili bismo $E_\mathrm{I}^{(\mu)} \simeq 186\, E_\mathrm{I}$, odnosno $E_{21}^{(\mu)} \simeq 1.9\,\mathrm{keV}$.)

Rješenje: $E_{21}^{(\mu)} \simeq 2.1\,\mathrm{keV}$

92 Zadatak: Pretpostavimo da se čestica mase m giba u kružnim orbitama pod djelovanjem privlačne centralne sile kojoj odgovara potencijalna energija čestice opisana izrazom

$$E_{\text{pot.}}[r] = \frac{1}{2}kr^2,$$

gdje je k konstanta, a r je udaljenost čestice od središta. U skladu s postulatom o kvantizaciji kutne količine gibanja, $L_n = n\hbar$, $n = 1, 2, \dots$, izvedi izraz za energijske nivoe čestice.

Postupak: Najprije prepoznajemo da zadana potencijalna energija odgovara harmoničkoj sili (sili opruge) čija jakost je

$$F = kr.$$

Ako se elektron giba u kružnoj orbiti polumjera r brzinom v, odnosno kutnom brzinom $\omega = v/r$, ta sila ima ulogu centripetalne sile i njena jakost mora biti

$$F = F_{\text{CP}} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r.$$

Slijedi relacija

$$\omega^2 = \frac{k}{m},$$

gdje uočavamo da kutna brzina ne ovisi o polumjeru orbite (slično kao što frekvencija titranja harmoničkog oscilatora ne ovisi o amplitudi). Energija čestice sastoji se od kinetičke i od potencijalne energije te imamo

$$E = K + U = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}(m\omega^2 + k)r^2 = kr^2.$$

Iznos kutne količine gibanja čestice u kružnoj orbiti je

$$L = pr = mvr = m\omega r^2$$

($p = mv$ je iznos linearne količine gibanja), a u skladu s postulatom o kvantizaciji ovdje stavljamo

$$L = L_n = m\omega_n r_n^2 = n\hbar, \qquad n = 1, 2, \dots$$

gdje su ω_n i r_n kutna brzina vrtnje i polumjer orbite za dani kvantni broj n. S obzirom da smo pokazali da kutna brzina ω ne ovisi o n stavljamo $\omega_n = \omega$ te slijedi izraz za polumjer orbite,

$$r_n^2 = \frac{n\hbar}{m\omega} = \frac{n\hbar}{\sqrt{mk}}, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Energija čestice za kvantni broj n slijedi kao

$$E_n = kr_n^2 = n\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Rješenje: $E_n = n\hbar\sqrt{k/m}$, $n = 1, 2, \dots$

93 Zadatak: Pretpostavljajući da sva energija Sunčeva zračenja potiče iz pretvorbe vodika ${}^1_1\mathrm{H}$ u helij ${}^4_2\mathrm{He}$, pritom zanemarujući energiju nastalih neutrina, procijeni masu vodika koju Sunce troši u jedinici vremena. (Ukupna snaga Sunčeva zračenja (tzv. luminozitet sunca) $P = L_\odot = 3.846 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$, masa vodikova atoma $m^*[{}^1_1\mathrm{H}] = 1.007825\,\mathrm{u}$, masa helijeva atoma $m^*[{}^2_4\mathrm{He}] = 4.002603\,\mathrm{u}$, brzina svjetlosti $c = 2.998 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.)

Postupak: Reakciju možemo sažeti kao

$$4\,{}^1_1\mathrm{H} \longrightarrow {}^4_2\mathrm{He} + 2\nu_e + \text{fotoni}.$$

Zanemarujući energiju neutrina nastalih u reakciji, energija zračenja (fotona) koja se oslobodi po jednom utrošenom vodikovu atomu je

$$E_\mathrm{H} = \Big(m^*[{}^1_1\mathrm{H}] - \frac{1}{4}\,m^*[{}^4_2\mathrm{He}]\Big)c^2,$$

odnosno, količina energije koja se oslobađa po jedinici mase potrošenog vodika je

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m} = \frac{E_\mathrm{H}}{m^*[{}^1_1\mathrm{H}]} = \left(1 - \frac{m^*[{}^4_2\mathrm{He}]}{4\,m^*[{}^1_1\mathrm{H}]}\right)c^2.$$

Masa vodika koju Sunce troši u jedinici vremena je

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}E}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m}\right)^{-1} L_\odot = \left(1 - \frac{m^*[{}^4_2\mathrm{He}]}{4\,m^*[{}^1_1\mathrm{H}]}\right)^{-1}\frac{L_\odot}{c^2}.$$

Za zadane vrijednosti

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \simeq 6.01 \times 10^{11}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}.$$

Rješenje: $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = (1 - m^*[{}^4_2\mathrm{He}]/4m^*[{}^1_1\mathrm{H}])^{-1}L_\odot/c^2 \simeq 6.01 \times 10^{11}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$

94 Zadatak: Nekim fizikalnim procesom čija aktivnost A_1 je stalna u vremenu nastaju jezgre aktivnog izotopa 2 s konstantom raspada λ_2. Odredi ovisnost aktivnosti izotopa 2 o vremenu ako je ona u početnom trenutku bila jednaka nuli.

Postupak: Populacija jezgara izotopa 2 podložna je raspadu, a doprinosi joj stalna aktivnost A_1, dakle

$$\mathrm{d}N_2 = -\lambda_2 N_2 \,\mathrm{d}t + A_1 \,\mathrm{d}t.$$

Separacijom varijabli,

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{-N_2 + A_1/\lambda_2} = \lambda_2 \,\mathrm{d}t,$$

te integracijom slijedi

$$-\ln[-N_2 + A_1/\lambda_2] = \lambda_2 t + C,$$

odnosno,

$$N_2[t] = \frac{A_1}{\lambda_2} - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t - C},$$

gdje je C integracijska konstanta. Njenu vrijednost određujemo iz početnog uvjeta $A_2[0] = \lambda_2 N_2[0] = 0$ što daje

$$\mathrm{e}^{-C} = \frac{A_1}{\lambda_2}.$$

Sada možemo napisati aktivnost izotopa 2 kao

$$A_2[t] = \lambda_2 N_2[t] = \cdots = A_1 \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right).$$

Rješenje: $A_2[t] = A_1 \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right)$

95 Zadatak: Pri raspadu jezgre aktivnog izotopa 1 nastaje jezgra aktivnog izotopa 2. Odgovarajuće konstante raspada su λ_1 i λ_2. Ako je u početnom trenutku aktivnost izotopa 1 u nekom uzorku različita od nule, a aktivnost izotopa 2 je jednaka nuli, odredi vrijeme nakon kojeg će aktivnost izotopa 2 doseći svoj maksimum.

Postupak: Populacije izotopa 1 i 2 ponašaju se u skladu sa zakonom radioaktivnog raspada pri čemu svaki raspad u populaciji izotopa 1 doprinosi populaciji izotopa 2. Možemo pisati

$$\begin{aligned} \mathrm{d}N_1 &= -\lambda_1 N_1 \,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}N_2 &= -\lambda_2 N_2 \,\mathrm{d}t - \mathrm{d}N_1, \end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N_1[t] + \lambda_1 N_1[t] &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N_2[t] + \lambda_2 N_2[t] &= \lambda_1 N_1[t], \end{aligned}$$

što su linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Jednadžba za populaciju N_1 je homogena i ima (dobro poznato) rješenje koje možemo napisati kao

$$N_1[t] = N_{10} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t},$$

gdje konstanta $N_{10} = N_1[0]$ opisuje populaciju izotopa 1 u početnom trenutku $t = 0$. Uvrštavanjem tog rješenja u diferencijalnu jednadžbu za N_2 imamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N_2[t] + \lambda_2 N_2[t] = \lambda_1 N_{10} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}.$$

Gornja jednadžba je nehomogena i njeno opće rješenje je zbroj rješenja njoj odgovarajuće homogene jednadžbe koje glasi $A\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$, gdje je A konstanta, i partikularnog rješenja nehomogene jednadžbe do kojeg dolazimo s pomoću probnog rješenja $B\mathrm{e}^{\beta t}$, gdje su B i β konstante. Uvrštavanjem slijedi

$$\beta B \mathrm{e}^{\beta t} + \lambda_2 B \mathrm{e}^{\beta t} = \lambda_1 N_{10} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t},$$

što je ispunjeno za $\beta = -\lambda_1$ i $B = \lambda_1 N_{10}/(\lambda_2 - \lambda_1)$. Opće rješenje je dakle

$$N_2[t] = A\mathrm{e}^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t}.$$

Konstanta A određena je početnim uvjetom $N_2[0] = 0$. Slijedi

$$N_2[t] = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} \right).$$

Maksimum populacije 2 pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N_2[t] = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(-\lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} \right),$$

koji je ispunjen u trenutku

$$t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Rješenje: $t = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \ln[\lambda_1/\lambda_2]$.

96 Zadatak: U Zemljinoj atmosferi, a time i u svim živim organizmima, udio aktivnog izotopa ^{14}C u ukupnoj populaciji ugljikovih atoma iznosi $\epsilon = (1.0 \pm 0.1) \times 10^{-12}$. Prestankom života organizma, izotop ^{14}C se raspada s vremenom poluraspada $T_{1/2} = (5730 \pm 40)$ god, dok su preostali izotopi ugljika stabilni. Izvedi izraz s pomoću kojeg se, na osnovu mjerenja specifične aktivnosti uzorka čistog ugljika, $a = A/m$, gdje je A aktivnost, a m je masa uzorka, može odrediti vrijeme koje je proteklo nakon prestanka života organizma. Zatim procijeni standardnu pogrešku pri određivanju "starosti uzorka" ako je standardna relativna pogreška pri određivanju specifične aktivnosti $\sigma_a/a = 0.001$, a očekivana starost je približno $T_{1/2}/\ln 2$.

Postupak: Uzimamo da uzorak čistog ugljika mase m sadrži

$$N = \frac{m}{m^*[\mathrm{C}]}$$

atoma ugljika, gdje $m^*[\mathrm{C}]$ označava srednju masu ugljikova atoma. Kako je početna zastupljenost aktivnog izotopa ^{14}C u uzorku jednaka atmosferskoj, početna aktivnost uzorka je

$$A_0 = \lambda\epsilon N = \frac{\lambda\epsilon m}{m^*[\mathrm{C}]},$$

gdje je

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

konstanta raspada. Aktivnost uzorka opada u vremenu u skladu sa zakonom o radioaktivnom raspadu; Ako je t vrijeme koje je proteklo nakon prestanka života organizma, aktivnost uzorka je

$$A[t] = A_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{\lambda\epsilon m}{m^*[\mathrm{C}]} = \frac{\lambda\epsilon m}{m^*[\mathrm{C}]}\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Specifična aktivnost slijedi kao

$$a[t] = \frac{A[t]}{m} = \frac{\lambda\epsilon}{m^*[\mathrm{C}]}\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

iz čega dobivamo starost uzorka,

$$t = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{\lambda\epsilon}{am^*[\mathrm{C}]}\right].$$

Standardnu pogrešku starosti računamo propagacijom pogrešaka koje se odnose na veličine ϵ, $T_{1/2}$, i a. Uobičajenim postupkom dobivamo

$$\begin{aligned}
\sigma_t &= \sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial\epsilon}\right)^2\sigma_\epsilon^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}T_{1/2}}\right)^2\sigma_{T_{1/2}}^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial a}\right)^2\sigma_a^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda\epsilon}\right)^2\sigma_\epsilon^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{t}{\lambda}\right)^2\left(\frac{\lambda}{T_{1/2}}\right)^2\sigma_{T_{1/2}}^2 + \left(\frac{1}{\lambda a}\right)^2\sigma_a^2} \\
&= \frac{1}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon}\right)^2 + (1-t\lambda)^2\left(\frac{\sigma_{T_{1/2}}}{T_{1/2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2} \\
&= \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon}\right)^2 + \left(1 - \frac{t\ln 2}{T_{1/2}}\right)^2\left(\frac{\sigma_{T_{1/2}}}{T_{1/2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Uočavamo da za $t \sim T_{1/2}/\ln 2 \sim 8000$ god srednji član pod korijenom iščezava te da za zadane vrijednosti doprinos prvog člana dominira nad doprinosom trećeg. Stoga standardnu pogrešku procijenjujemo na

$$\sigma_t \sim \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\frac{\sigma_\epsilon}{\epsilon} \sim 800\,\mathrm{god}.$$

Rješenje: $t = \lambda^{-1}\ln[\lambda\epsilon/am^*[\mathrm{C}]]$, $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$, $\sigma_t \sim T_{1/2}\sigma_\epsilon/(\ln 2)\epsilon \sim 800$ god