Fizika 2: Zadaci za vježbu 1/7 (elastičnost i harmonički oscilator)

1 Zadatak: Odredi rad koji je potrebno obaviti kako bismo čelični štap duljine $\ell = 2\,\mathrm{m}$, površine poprečnog presjeka $S = 1\,\mathrm{cm}^2$ i početne napetosti $T_0 = 5000\,\mathrm{N}$, dodatnim naprezanjem produljili za $\Delta\ell = 2\,\mathrm{mm}$. (Youngov modul čelika $E = 200\,\mathrm{GPa}$.)

Postupak: U linearnom području elastičnih deformacija, promjena napetosti štapa ΔT razmjerna je njegovu produljenju $\Delta\ell$,

$$\Delta T = \frac{SE}{\ell}\,\Delta\ell.$$

Uvedemo li koordinatu x koja opisuje produljenje štapa u odnosu na njegovu duljinu pri kojoj je njegova napetost $T = 0$, napetost štapa možemo opisati izrazom

$$T[x] = kx,$$

gdje je

$$k = \frac{SE}{\ell}$$

tzv. konstanta elastičnosti štapa (štap možemo shvatiti kao oprugu konstante k). Označimo li s $x = x_0$ produljenje štapa kojem odgovara napetost T_0, mora vrijediti $T_0 = T[x_0] = kx_0$, odnosno

$$x_0 = \frac{T_0}{k}.$$

Rad potreban za produljenje štapa od $x = x_0$ do $x = x_0 + \Delta\ell$ dobivamo integracijom

$$W = \int \mathrm{d}W = \int_{x_0}^{x_0+\Delta\ell} T[x]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,kx^2\Big|_{x_0}^{x_0+\Delta\ell} = \cdots = T_0\,\Delta\ell + \frac{SE}{2\ell}(\Delta\ell)^2.$$

Za zadane vrijednosti parametara ℓ, T_0, $\Delta\ell$, S i E dobivamo $W = 30\,\mathrm{J}$.

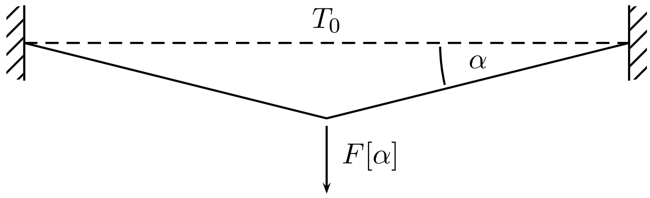
Umjesto izravnom integracijom rada, zadatak se može riješiti i korištenjem činjenice da je obavljeni rad jednak promjeni potencijalne energije. Možemo pisati

$$W = \Delta E_{\mathrm{pot.}} = E_{\mathrm{pot.}}[x_0 + \Delta x] - E_{\mathrm{pot.}}[x_0] = \frac{1}{2}k(x_0 + \Delta x)^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 = \cdots\,,$$

gdje smo koristili poznati izraz za potencijalnu energiju opruge, $E_{\mathrm{pot.}} = \frac{1}{2}kx^2$.

Rješenje: $W = T_0\Delta x + SE(\Delta x)^2/2\ell = 30\,\mathrm{J}$

2 Zadatak: Čelična žica promjera $d = 0.5\,\mathrm{mm}$ napeta je silom $T_0 = 100\,\mathrm{N}$ nakon čega su njeni krajevi učvršćeni. Odredi jakost sile F kojom treba djelovati okomito na žicu pri sredini njezina raspona kako bi ju se otklonilo za kut $\alpha = 5°$ od njezina prvobitna položaja (vidi sliku). (Youngov modul čelika $E = 200\,\mathrm{GPa}$.)



Postupak: Traženi iznos sile $F[\alpha]$ jednak je iznosu zbroja sila kojima dvije polovice žice djeluju na samo polovište. Označimo li s $T[\alpha]$ napetost žice pri otklonu α,

$$F[\alpha] = 2T[\alpha]\sin\alpha.$$

U području elastičnih deformacija, napetost žice pri otklonu α možemo napisati kao

$$T[\alpha] = T_0 + k(\ell[\alpha] - \ell_0),$$

gdje je ℓ_0 duljina neotklonjene žice čija je napetost T_0, $\ell[\alpha]$ je duljina žice pri otklonu α, te izraz u zagradama opisuje produljenje žice uslijed otklona α. Konstanta k dana je izrazom

$$k = \frac{SE}{\ell_0} = \frac{d^2\pi E}{4\ell_0}$$

($S = (d/2)^2\pi$ je površina poprečnog presjeka žice). Duljinu rastegnute žice možemo napisati kao

$$\ell[\alpha] = \frac{\ell_0}{\cos\alpha}.$$

Slijedi

$$F[\alpha] = 2\left(T_0 + k\ell_0\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\right)\sin\alpha = 2\left(T_0 + \frac{d^2\pi E}{4}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\right)\sin\alpha.$$

Za zadane vrijednosti parametara T_0, d i E dobivamo $F \simeq 43.6\,\mathrm{N}$.

Rješenje: $F = 2\left(T_0 + d^2\pi E\left(1/\cos\alpha - 1\right)/4\right)\sin\alpha \simeq 43.6\,\mathrm{N}$

3 Zadatak: Uteg mase $m = 10\,\mathrm{kg}$ visi na čeličnoj žici duljine $\ell = 5\,\mathrm{m}$ i promjera $d = 0.5\,\mathrm{mm}$. Podignemo li taj uteg na visinu $h = 0.5\,\mathrm{m}$ iznad položaja u kojem napetost žice iščezava i pustimo li ga da padne, kolika će biti najveća napetost žice tokom zaustavljanja utega? (Pretpostavljamo da se sva naprezanja nalaze unutar linearnog područja elastičnosti, Youngov modul čelika $E = 200\,\mathrm{GPa}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Zadatak rješavamo s pomoću načela očuvanja mehaničke energije. Kao referentnu visinu utega uzimamo najmanju visinu pri kojoj napetost žice iščezava. Kada uteg miruje na visini h u odnosu na referentnu visinu, kinetička energija u sustavu je jednaka nuli, a potencijalna energija se, s obzirom da žica nije napeta, sastoji isključivo od gravitacijske potencijalne energije utega. Slijedi da ukupnu energiju možemo napisati kao

$$E = mgh.$$

Kad uteg pustimo u gibanja, on najprije slobodno pada do visine $h = 0$, a nakon toga on počne rastezati žicu. Napetost žice je najveća u trenutku u kojem se uteg zaustavi. U tom je trenutku kinetička energija jednaka nuli, a potencijalna se energija sastoji od gravitacijske energije utega i od elastične energije napete žice. Označimo li s $\Delta\ell$ produljenje žice, energiju možemo napisati kao

$$E = mg\,(-\Delta\ell) + \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2,$$

gdje

$$k = \frac{SE}{\ell} = \frac{d^2\pi E}{4\ell}$$

je konstanta elastičnosti žice. Na osnovu očuvanja energije slijedi kvadratna jednadžba

$$\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 - mg\,\Delta\ell - mgh = 0,$$

iz koje, odbacimo li negativno rješenje, dobivamo

$$\Delta\ell = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{\frac{2kh}{mg} + 1}\right).$$

Tom produljenju žice odgovara napetost

$$F = k\,\Delta\ell = mg\left(1 + \sqrt{\frac{2kh}{mg} + 1}\right) = mg\left(1 + \sqrt{\frac{d^2\pi Eh}{2mg\ell} + 1}\right)$$

Za zadane vrijednosti parametara $T_{\max} \simeq 981\,\mathrm{N}$

Rješenje: $T_{\max} = mg\left(1 + \sqrt{d^2\pi Eh/2mg\ell + 1}\right) \simeq 981\,\mathrm{N}$

4 Zadatak: Homogena gumena vrpca slobodno visi o jednom svom kraju te uslijed naprezanja izazvanog njezinom težinom dolazi do njezina produljenja. Odredi ukupno produljenje vrpce ako duljina nenapregnute vrpce iznosi $\ell = 25\,\mathrm{m}$, Youngov modul gume je $E = 4.00 \times 10^6\,\mathrm{Pa}$, a gustoća gume je $\rho = 1500\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

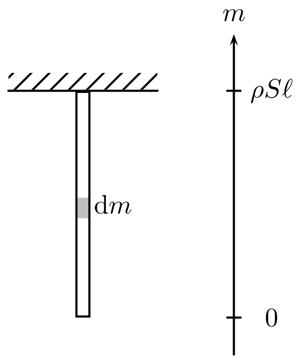
Postupak: Naprezanje vrpce najveće je pri njenom gornjem kraju gdje je ono izazvano ukupnom težinom vrpce, dok pri donjem kraju vrpce naprezanje iščezava. Općenito, naprezanje u nekoj točki vrpce dano je omjerom težine dijela vrpce koji se nalazi ispod te točke i površine poprečnog presjeka vrpce. Naprezanje možemo napisati kao

$$\sigma = \frac{mg}{S},$$

gdje je m masa vrpce koja se nalazi ispod promatrane točke, a S je površina poprečnog presjeka. Tom naprezanju odgovara relativno produljenje elementa vrpce

$$\delta_L = \frac{\mathrm{d}\ell' - \mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\sigma_L}{E} = \frac{mg}{SE},$$

gdje je $\mathrm{d}\ell$ duljina elementa nenapregnute vrpce, a $\mathrm{d}\ell'$ je duljina istog elementa pri naprezanju σ_L.



Nadalje, s obzirom da masu i duljinu nenapregnutog elementa vrpce povezuje relacija

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V = \rho S\,\mathrm{d}\ell,$$

produljenje elementa možemo napisati kao

$$\mathrm{d}\ell' - \mathrm{d}\ell = \frac{mg}{SE}\,\mathrm{d}\ell = \frac{mg}{S^2E\rho}\,\mathrm{d}m.$$

Konačno, ukupno produljenje vrpce $\Delta\ell$ dobit ćemo integrirajući produljenje elementa vrpce po masi vrpce m koja se nalazi ispod promatrane točke, počevši od donjeg kraja gdje je $m = 0$, pa do gornjeg kraja gdje je $m = \rho S\ell$,

$$\Delta\ell = \ell' - \ell = \int(\mathrm{d}\ell' - \mathrm{d}\ell) = \int_0^{\rho S\ell} \frac{mg}{S^2E\rho}\,\mathrm{d}m = \frac{g}{S^2E\rho}\frac{m^2}{2}\Big|_0^{\rho S\ell} = \frac{\rho g\ell^2}{2E},$$

što za zadane vrijednosti parametara ρ, ℓ i E daje $\Delta\ell \simeq 1.15\,\mathrm{m}$.

Rješenje: $\Delta\ell = \rho g\ell^2/2E \simeq 1.15\,\mathrm{m}$

5 Zadatak: Objesimo li uteg o oprugu br. 1 ona se produlji za $\Delta x_1 = 4\,\mathrm{cm}$. Objesimo li isti uteg o oprugu br. 2 ona se produlji za $\Delta x_2 = 6\,\mathrm{cm}$. Odredi periode kojima bi uteg titrao kad bismo ga objesili na te dvije opruge spojene u seriju i kad bismo ga objesili na te dvije opruge spojene paralelno. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Označimo li masu utega s m te konstante dvaju opruga s k_1 i k_2, iz uvjeta ravnoteže utega kada on visi na tim oprugama imamo $mg = k_1\,\Delta x_1 = k_2\,\Delta x_2$, odnosno

$$k_1 = \frac{mg}{\Delta x_1}, \qquad k_2 = \frac{mg}{\Delta x_2}.$$

Konstanta paralelnog spoja dvaju opruga čije su konstante k_1 i k_2 je

$$k_\mathrm{p} = k_1 + k_2 = mg\,\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1\,\Delta x_2}$$

te je, na osnovu poznatog rješenja jednadžbe gibanja za masu na opruzi (harmonički oscilator), frekvencija titranja ω_p dana izrazom

$$\omega_\mathrm{p}^2 = \frac{k_\mathrm{p}}{m} = g\,\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1\,\Delta x_2}.$$

Tome odgovara period

$$T_\mathrm{s} = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{s}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{g}}$$

što za zadane vrijednosti daje $T_\mathrm{s} \simeq 0.634\,\mathrm{s}$. Konstanta serijskog spoja dvaju opruga je

$$k_\mathrm{s} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = mg\,\frac{1}{\Delta x_1 + \Delta x_2},$$

te je odgovarajuća frekvencija titranja ω_s dana izrazom

$$\omega_\mathrm{s}^2 = \frac{k_\mathrm{s}}{m} = g\,\frac{1}{\Delta x_1 + \Delta x_2}.$$

Period titranja je

$$T_\mathrm{p} = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{p}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{g\,(\Delta x_1 + \Delta x_2)}}.$$

Za zadane vrijednosti $T_\mathrm{p} \simeq 0.311\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $T_\mathrm{s} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{g}} \simeq 0.634\,\mathrm{s}$, $T_\mathrm{p} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{g\,(\Delta x_1 + \Delta x_2)}} \simeq 0.311\,\mathrm{s}$

6 Zadatak: Uteg je obješen o donji kraj dinamometra i titra u uspravnom smjeru. Najmanja i najveća vrijednost sile koju očitavamo na dinamometru tokom titranja su $T_{\min} = 3\,\mathrm{N}$ i $T_{\max} = 7\,\mathrm{N}$, a kružna frekvencija titranja iznosi $\omega_0 = 2\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. Odredi masu utega i amplitudu titranja. (Dinamometar možemo smatrati oprugom zanemarive mase. Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Neka je y-os uspravna i orijentirana uvis. Položaj utega možemo napisati kao

$$y[t] = y_0 + A\cos[\omega_0 t],$$

gdje je y_0 koordinata ravnotežnog položaja, a A je amplituda titranja. Prema Newtonovu aksiomu, sila koja osigurava to gibanje je

$$F_y[t] = ma_y[t] = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y[t] = -m\omega_0^2 A\cos[\omega t],$$

gdje je m masa utega. Ta se sila sastoji od gravitacijske sile i od sile dinamometra,

$$F_y[t] = -mg + T[t].$$

Slijedi

$$T[t] = mg - m\omega_0^2 A\cos[\omega t],$$

gdje prepoznajemo

$$T_{\max} = mg + m\omega_0^2 A,$$

$$T_{\min} = mg - m\omega_0^2 A.$$

Iz gornjih dviju jednadžbi možemo izračunati m i A:

$$m = \frac{T_{\max} + T_{\min}}{2g},$$

$$A = \frac{g}{\omega_0^2}\frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}}.$$

Za zadane vrijednosti parametara dobivamo $m \simeq 0.510\,\mathrm{kg}$, $A \simeq 9.94\,\mathrm{cm}$.

Rješenje: $m = (T_{\max} + T_{\min})/2g \simeq 0.510\,\mathrm{kg}$, $A = g\omega_0^{-2}(T_{\max} - T_{\min})/(T_{\max} + T_{\min}) \simeq 9.94\,\mathrm{cm}$

7 Zadatak: Najveći iznos brzine koju čestica postiže pri harmoničkom titranju je $v_{\max} = 5\ \mathrm{cm\,s^{-1}}$, a najveći iznos akceleracije koju postiže je $a_{\max} = 10\ \mathrm{cm\,s^{-2}}$. Odredi amplitudu A i kružnu frekvenciju titranja ω_0. Zatim odredi iznos brzine u trenutku u kojem otklon čestice od ravnotežnog (središnjeg) položaja iznosi $x = A/2$.

Postupak: Napišemo li otklon čestice koja harmonički titra amplitudom A i kutnom frekvencijom ω_0 kao

$$x[t] = A\cos[\omega_0 t],$$

brzina i akceleracija čestice dane su izrazima

$$v[t] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x[t] = -\omega_0 A\sin[\omega_0 t], \qquad a[t] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x[t] = -\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t].$$

Kao maksimalni iznos brzine i maksimalni iznos akceleracije prepoznajemo

$$v_{\max} = \omega_0 A, \qquad a_{\max} = \omega_0^2 A.$$

Iz gornjih dviju jednadžbi slijedi

$$\omega_0 = \frac{a_{\max}}{v_{\max}}, \qquad A = \frac{v_{\max}}{\omega_0} = \frac{v_{\max}^2}{a_{\max}}.$$

Za zadane vrijednosti $v_{\max}$ i $a_{\max}$ dobivamo $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $A = 2.5\,\mathrm{cm}$. Ovisnost iznosa brzine o otklonu dobit ćemo pišući izraz za brzinu u obliku

$$v^2 = \omega_0^2 A^2\sin^2[\omega_0 t] = \omega_0^2 A^2(1-\cos^2[\omega_0 t]),$$

gdje sada možemo iskoristiti izraz za položaj čestice kako bismo eliminirali $\cos[\omega_0 t]$. Slijedi

$$v^2 = \omega_0^2 A^2\left(1-\left(\frac{x}{A}\right)^2\right) = \omega_0^2(A^2-x^2).$$

(Važno je uočiti da gornja relacija govori o kvadratima veličina v i x, što znači da ona govori isključivo o iznosima (modulima) brzine i otklona, a ne o njihovim predznacima.) Pri otklonu $x = A/2$ dobivamo

$$v_{x=A/2} = \omega_0 A\sqrt{1-(1/2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\omega_0 A = \frac{\sqrt{3}}{2}\,v_{\max}$$

što za zadane vrijednosti daje $v_{x=A/2} \simeq 4.33\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$.

Napomena: Relaciju koja povezuje v^2 i x^2 se može dobiti i na osnovu izraza za ukupnu energiju pri harmoničkom titranju mase m na opruzi konstante elastičnosti k,

$$E = E_{\mathrm{kin.}} + E_{\mathrm{pot.}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Posebno, pri maksimalnom otklonu imamo $v = 0$ i $x = A$, pa možemo pisati

$$E = \frac{1}{2}kA^2.$$

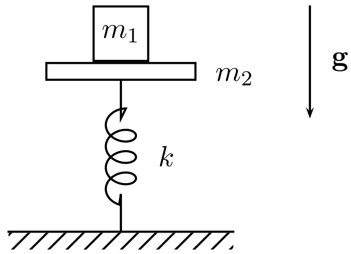
Iz gornjih izraza za energiju slijedi

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2,$$

gdje dijeleći s m i uzimajući u obzir da vrijedi $\omega_0^2 = k/m$ dobivamo $v^2 = \omega_0^2(A^2-x^2)$ kao i ranije.

Rješenje: $\omega_0 = a_{\max}/v_{\max} = 2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $A = v_{\max}^2/a_{\max} = 2.5\,\mathrm{cm}$, $v_{x=A/2} = v_{\max}\sqrt{3}/2 \simeq 4.33\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$

8 Zadatak: Tijelo mase $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ položeno je na tijelo mase $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$ koje je s pomoću opruge konstante $k = 5 \times 10^3\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ oslonjeno o čvrsto tlo (vidi sliku). Odredi najveću amplitudu titranja sustava pri kojoj ne dolazi do međusobnog odvajanja tijela m_1 i m_2. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)



Postupak: Neka je y-os uspravna i orijentirana uvis. Pod pretpostavkom da pri titranju ne dolazi do odvajanja tijela m_1 i m_2, njihovu visinu nad tlom možamo napisati kao

$$y[t] = y_0 + A\cos[\omega_0 t],$$

gdje je y_0 ravnotežna visina, A je amplituda, a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

je kružna frekvencija titranja. Akceleracija masa m_1 i m_2 tada je

$$a_y[t] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} y[t] = -\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t],$$

a silu koja djeluje na m_1 možemo napisati kao

$$F_y[t] = m_1 a_y[t] = m_1 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = -m_1\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t].$$

Ta se sila sastoji od gravitacijske sile iznosa $m_1 g$ koja djeluje prema dolje te od sile N usmjerene uvis kojom tijelo m_2 djeluje na m_1,

$$F_y[t] = -m_1 g + N[t].$$

Slijedi

$$N[t] = m_1 g - m_1\omega_0^2 A\cos[\omega_0 t].$$

Uvjet ne-odvajanja tijela m_1 i m_2 možemo izraziti kao zahtjev da sila N bude pozitivna ili jednaka nuli, tj. da bude usmjerena prema gore ili da iščezne, što vodi na

$$g \geq \omega_0^2 A\cos[\omega_0 t].$$

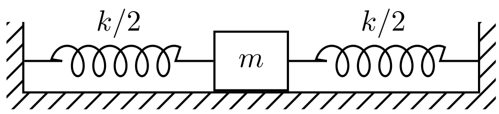
Taj je uvjet ispunjen za

$$A \leq \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{g(m_1 + m_2)}{k}.$$

Zaključujemo da je najveća amplituda titranja pri kojoj ne dolazi do odvajanja masa $A = g(m_1 + m_2)/k$. Za zadane vrijednosti parametara dobivamo $A \simeq 0.98\,\mathrm{cm}$.

Rješenje: $A = g(m_1 + m_2)/k \simeq 0.98\,\mathrm{cm}$

9 Zadatak: Tijelo mase m leži na vodoravnoj podlozi s kojom ima koeficijent trenja μ i dvjema je oprugama čije su konstante $k/2$ pričvršćeno za uporišta (vidi sliku). Tijelo puštamo u gibanje iz mirovanja s neke udaljenosti od središnjeg položaja. Odredi najveću dopuštenu udaljenost želimo li da tijelo, nakon što se prvi puta zaustavi, ostane mirovati.



Postupak: Neka se gibanje tijela odvija duž x-osi gdje $x = 0$ odgovara središnjem položaju sustava (opruge djeluju silama jednakog iznosa). Silu kojom opruge djeluju na tijelo te potencijalnu energiju opruga možemo napisati kao

$$F_{\mathrm{opr}}[x] = -kx, \qquad E_{\mathrm{pot.}}[x] = \frac{1}{2}kx^2.$$

Kako bi tijelo koje miruje pri $x = x_0$ krenulo u gibanje, sila kojom na njega djeluju opruge mora biti po iznosu veća od najvećeg mogućeg iznosa sile trenja. Koristeći izraz za silu opruga te $F_{\mathrm{tr}} = \mu mg$ slijedi $k|x_0| > \mu mg$, odnosno

$$|x_0| > \mu mg/k.$$

Koordinatu točke u kojoj će se tijelo zaustaviti dobit ćemo razmatranjem energije u sustavu. U početnom trenutku energija se sastoji isključivo od potencijalne energine opruga,

$$E = E_{\mathrm{pot.}}[x_0] = \frac{1}{2}kx_0^2,$$

dok u trenutku kada se tijelo nakon gibanja zaustavi pri $x = x_1$ imamo

$$E = E_{\mathrm{pot.}}[x_1] + \mu mg|x_1 - x_0|,$$

gdje drugi član na desnoj strani opisuje rad obavljen savladavajući silu trenja. Pretpostavimo li da je $x_1 > x_0$, odnosno $x_0 < 0$, slijedi

$$x_1 = -x_0 - 2mg\mu/k.$$

Kako bi tijelo u tom položaju nastavilo mirovati, sila opruga mora biti manja ili jednaka najvećem iznosu sile trenja, $k|x_1| \le \mu mg$, što vodi na

$$|-x_0 - 2mg\mu/k| \le mg\mu/k.$$

Napišemo li sada $x_0 = -s$ (ranije smo pretpostavili $x_0 < 0$), gdje je s tražena udaljenost, gornje se razmatranje svodi na sustav nejednakosti

$$s > b > 0, \qquad |s - 2b| \le b,$$

gdje je $b = mg\mu/k$. Sustav se svodi na

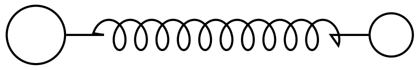
$$0 < b < s \le 3b.$$

Slijedi da je najveća dopuštena udaljenost

$$s_{\max} = 3b = 3mg\mu/k.$$

Rješenje: $s_{\max} = 3mg\mu/k$

10 Zadatak: Čestica mase m_1 i čestica mase m_2 povezane su oprugom konstante k. Odredi kružnu frekvenciju titranja tog sustava.



Postupak: Neka se gibanje čestica odvija duž x-osi; x_1 neka je koordinata čestice m_1, a x_2 neka je koordinata čestice m_2. Neka je u ravnoteži $x_2 > x_1$. Označimo li s ℓ_0 ravnotežnu duljinu opruge, promjenu njene duljine uslijed gibanja čestica možemo napisati kao

$$\xi = x_2 - x_1 - \ell_0.$$

Jednadžbe gibanja čestica sada možemo napisati kao

$$m_1\ddot{x}_1 = k\xi, \qquad m_2\ddot{x}_2 = -k\xi.$$

Napišemo li sada jednadžbu gibanja za varijablu ξ, dobit ćemo

$$\ddot{\xi} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{k\xi}{m_1} + \frac{k\xi}{m_2},$$

odnosno

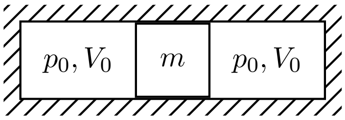
$$\ddot{\xi} + k\,\frac{m_2 + m_2}{m_1 m_2}\,\xi = 0,$$

što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja harmoničkog oscilatora s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = k\,\frac{m_2 + m_2}{m_1 m_2}.$$

Rješenje: $\omega_0 = \sqrt{k(m_1 + m_2)/m_1 m_2}$

11 Zadatak: U nepomičnom, s obje strane zatvorenom, toplinski izoliranom cilindru, nalazi se pomični klip mase $m = 3\,\mathrm{kg}$ i površine poprečnog presijeka $S = 10\,\mathrm{cm}^2$ (vidi sliku). Sa svake strane klipa nalazi se jednaka količina idealnog plina adijabatske konstante $\gamma = 1.4$. Kada je klip u ravnotežnom stanju, plin s jedne i s druge strane klipa je pri istoj temperaturi te zauzima obujam $V_0 = 5\,\mathrm{dm}^3$ pri tlaku $p_0 = 2 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$. Pretpostavljajući da je proces sažimanja i širenja plina adijabatski, odredi frekvenciju malih titraja klipa oko ravnotežnog položaja. (Za $\epsilon \ll 1$ može se koristiti razvoj $(1 \pm \epsilon)^\alpha \simeq 1 \pm \alpha\epsilon$.)



Postupak: Postavimo x-os duž osi cilindra, tako da $x = 0$ odgovara ravnotežnom položaju klipa, a $x > 0$ neka odgovara pomaku klipa nadesno. Jednadžba gibanja klipa glasi

$$m\ddot{x} = (p_1[x] - p_2[x])\, S,$$

gdje je p_1 tlak s lijeve, a p_2 tlak s desne strane. Pri adijabatskom procesu vrijedi $pV^\gamma = \mathrm{const.}$, odnosno

$$p_1 V_1^\gamma = p_0 V_0^\gamma = p_2 V_2^\gamma,$$

pa ovdje imamo

$$p_1[x]\,(V_0 + Sx)^\gamma = p_0 V_0^\gamma = p_2[x]\,(V_0 - Sx)^\gamma\,,$$

što još možemo napisati u obliku

$$p_{1,2}[x] = p_0 \frac{V_0^\gamma}{(V_0 \pm Sx)^\gamma} = p_0 \left(1 \pm \frac{Sx}{V_0}\right)^{-\gamma}.$$

Pod pretpostavkom da je $Sx/V_0 \ll 1$, što odgovara malim oscilacijama, možemo koristiti $(1 \pm \epsilon)^\alpha \simeq 1 \pm \alpha\epsilon$, te pišemo

$$p_{1,2}[x] = p_0 \mp p_0\gamma\,\frac{Sx}{V_0}.$$

Slijedi

$$p_1[x] - p_2[x] = -2p_0\gamma S/V_0$$

te jednadžba gibanja glasi

$$\ddot{x} + \frac{2p_0\gamma S^2}{mV_0}\,x = 0,$$

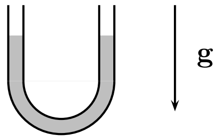
što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja jednostavnog harmoničkog titranja s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{2p_0\gamma S^2}{mV_0}.$$

Za zadane vrijednosti parametara dobivamo $\omega_0 \simeq 6.11\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Rješenje: $\omega_0 = \sqrt{2p_0\gamma S^2/mV_0} \simeq 6.11\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

12 Zadatak: U cijevi u obliku slova 'U' površine poprečnog presjeka $S = 1\,\mathrm{cm}^2$, s oba otvorena kraja, nalazi se $m = 20\,\mathrm{g}$ vode (vidi sliku). Odredite period titranja razine vode.



(Gustoća vode $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Jednadžbu gibanja te iz nje frekvenciju titranja dobit ćemo na osnovu uvjeta očuvanja energije, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Pretpostavimo li da se u nekom trenutku razina vode u lijevom stupcu nalazi na visini $y > 0$ iznad ravnotežne visine, slijedi da je u lijevom stupcu došlo do povećanja mase vode u iznosu

$$\Delta m = \rho S y,$$

dok je istovremeno u desnom stupcu došlo do smanjenja mase vode u tom iznosu. Shvatimo li tu situaciju kao da je masa vode Δm premještena iz desnog u lijevi stupac, pri čemu je njeno središte mase podignuto za y, promjenu gravitacijske potencijalne energije možemo napisati kao

$$E_{\mathrm{pot.}} = \Delta m g y = \rho S g y^2.$$

Kinetička energija vode u cijevi može se napisati kao

$$E_{\mathrm{kin.}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}^2.$$

Ukupna mehanička energija,

$$E = E_{\mathrm{pot.}} + E_{\mathrm{kin.}} = \rho S g y^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2,$$

očuvana je veličina pa slijedi

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E = 2\rho S g y \dot{y} + m \dot{y} \ddot{y} = m \dot{y} \left(\ddot{y} + \frac{2\rho S g}{m} y \right),$$

što je ispunjeno za $\dot{y} = 0$ (mirovanje u ravnoteži) ili za

$$\ddot{y} + \frac{2\rho S g}{m} y = 0,$$

što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja harmoničkog oscilatora s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{2\rho S g}{m}.$$

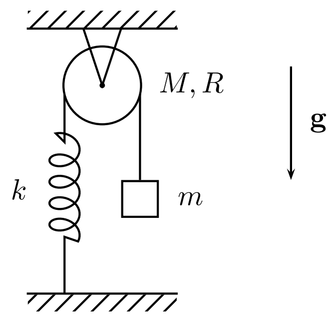
Odgovarajući period je

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\rho S g}}.$$

Za zadane parametre dobivamo $T \simeq 0.634\,\mathrm{s}$.

Rješenje: $T = 2\pi\sqrt{m/2\rho S g} \simeq 0.634\,\mathrm{s}$

13 Zadatak: Tanka nerastezljiva nit zanemarive mase prebačena je preko koloture mase M i polumjera R koju smatramo homogenim diskom. Jedan kraj niti oprugom je povezan s čvrstim uporištem, dok na drugom kraju visi uteg mase m. Odredi period malih oscilacija u ovom sustavu.



Postupak: Jednadžbu gibanja sustava dobit ćemo iz uvjeta očuvanja ukupne mehaničke energije, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Uvodimo uspravnu x-os usmjerenu prema dolje, tako da $x = 0$ odgovara položaju utega pri kojem napetost opruge iščezava, a $x = x_0$ odgovara ravnotežnom položaju utega. Iz uvjeta ravnoteže imamo relaciju $kx_0 = mg$, a zbog jednostavnosti daljnjeg računa uvodimo koordinatu

$$\xi = x - x_0 = x - mg/k$$

koja opisuje pomak sustava iz ravnoteže. Potencijalnu energiju sustava možemo napisati kao zbroj potencijalne energije opruge i gravitacijske potencijalne energije utega,

$$E_{\text{pot.}} = \frac{1}{2}kx^2 - mgx = \frac{1}{2}k(\xi + mg/k)^2 - mg(\xi + mg/k) = \frac{1}{2}k\xi^2 - \frac{m^2k^2}{2k}.$$

Kinetičkoj energiji sustava doprinose translacija utega i vrtnja koloture,

$$E_{\text{kin.}} = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2,$$

gdje je $I = \frac{1}{2}MR^2$ moment tromosti koloture (disk mase M i polumjera R), a ϕ je kut zakreta koloture koji odgovara pomaku ξ. Iz geometrije sustava slijedi da su ϕ i ξ povezani relacijom $\xi = R\phi$, odnosno kad je riječ o brzinama, $\dot{\xi} = R\dot{\phi}$. Slijedi

$$E_{\text{kin.}} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{\xi}^2.$$

Iz uvjeta očuvanja mehaničke energije sada imamo

$$0 = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_{\text{kin.}} + E_{\text{pot.}}) = \left(m + \frac{M}{2}\right)\dot{\xi}\left(\ddot{\xi} + \frac{k}{m + M/2}\xi\right).$$

Gornji izraz mora biti jedank nuli u svim trenucima vremena pa slijedi da vrijedi jednakost

$$\ddot{\xi} + \frac{k}{m + M/2}\,\xi = 0,$$

što je jednadžba gibanja harmoničkog oscilatora s kružnom frekvencijom

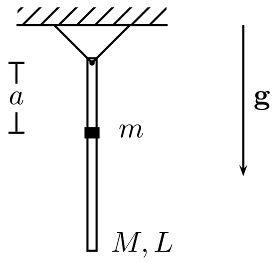
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m + M/2}},$$

a kojoj odgovara period

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m + M/2}{k}}.$$

Rješenje: $T = 2\pi\sqrt{(m + M/2)/k}$

14 Zadatak: Tanki homogeni štap duljine L i mase M poduprt je tako da može slobodno njihati oko jednog kraja. Odredi udaljenost a od gronjeg kraja štapa na kojoj treba pričvrstiti sitan uteg mase m (vidi sliku) kako bi period pri njihanju čitavog sustava malom amplitudom bio najkraći. Posebno razmotri granični slučaj $m/M \to 0$.



Postupak: Jednadžbu gibanja sustava dobit ćemo na osnovu uvjeta očuvanja mehaničke energije, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Neka kut ϕ opisuje otklon njihala od njegova ravnotežna položaja. Potencijalnu energiju sustava možemo napisati kao

$$E_{\text{pot.}} = Mg\frac{L}{2}(1-\cos\phi) + mga(1-\cos\phi) \simeq \left(M\,\frac{L}{2} + ma\right) g\,\frac{\phi^2}{2},$$

gdje je a udaljenost utega m od gornjeg kraja štapa, te gdje smo, s obzirom da razmatramo mali kut ϕ, koristili razvoj $\cos\phi \simeq 1 - \phi^2/2$. Kinetičku energiju možemo napisati kao

$$E_{\text{kin.}} = \frac{1}{2}I\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ML^2 + ma^2\right).$$

Uvjet očuvanja energije daje

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_{\text{kin.}} + E_{\text{pot.}}) = \left(\frac{1}{3}ML^2 + ma^2\right)\dot{\phi}\left(\ddot{\phi} + \frac{g(ML/2+ma)}{ML^2/3+ma^2}\phi\right).$$

Gornji uvjet mora biti ispunjen u svim trenucima vremena, dakle mora vrijediti

$$\ddot{\phi} + \frac{g(ML/2+ma)}{ML^2/3+ma^2}\phi = 0$$

što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja oscilatora s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{(ML/2+ma)g}{ML^2/3+ma^2}.$$

Minimum perioda podudara se s maksimumom frekvencije, kao i njena kvadrata, pa odgovarajuću vrijednost udaljenosti a pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}\omega_0^2}{\mathrm{d}a} = \frac{m(ML^2/3 - MLa - ma^2)}{(ML^2/3+ma^2)^2},$$

iz čega dobivamo

$$a_{1,2} = \frac{ML}{2m}\left(-1 \pm \sqrt{1+\frac{4m}{3M}}\right).$$

S obzirom da se uteg mora nalaziti ispod objesišta odabiremo pozitivno rješenje, odnosno rješenje s pozitivnim predznakom ispred korijena, dakle

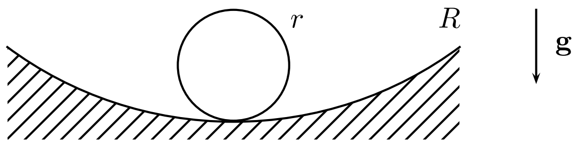
$$a = \frac{ML}{2m}\left(-1 + \sqrt{1+\frac{4m}{3M}}\right).$$

U graničnom slučaju $m/M \to 0$ dobivamo

$$\lim_{m/M\to 0} a = L/3$$

Rješenje: $a = (ML/2m)(-1 + \sqrt{1+4m/3M})$, $\lim_{m/M\to 0} a = L/3$

15 Zadatak: Homogena kugla polumjera r položena je u dno sferne udubine polumjera zakrivljenosti $R > r$ (vidi sliku). Odredi frekvenciju malih titraja kada kugla kotrljajući se bez proklizavanja "njiše" oko ravnotežnog položaja.



Postupak: Jednadžbu gibanja te iz nje frekvenciju titranja dobit ćemo iz uvjeta očuvanja mehaničke energije, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Kako bismo opisali potencijalnu i kinetičku energiju sustava uvodimo dvije kutne koordinate; Kut Φ opisuje otklon središta kugle od ravnotežnog položaja kako ga vidimo iz središta zakrivljenosti sferne udubine (središte se giba po luku polumjera zakrivljenosti $R - r$), a kut ϕ opisuje zakret same kugle. Kuteve Φ i ϕ povezujemo tako što pomak središta kugle $\mathrm{d}s$ najprije izražavamo s pomoću $\mathrm{d}\Phi$, a zatim s pomoću $\mathrm{d}\phi$,

$$\mathrm{d}s = (R - r)\,\mathrm{d}\Phi = r\,\mathrm{d}\phi.$$

Integracijom slijedi relacija $(R - r)\Phi = r\phi$, dok dijeljenjem gornje jednakosti s $\mathrm{d}t$ dobivamo odnos brzine središta kugle v i kutnih brzina $\dot{\Phi}$ i $\dot{\phi}$,

$$v = (R - r)\dot{\Phi} = r\dot{\phi}.$$

Kinetičku energiju homogene kugle čiji je moment tromosti $I = \frac{2}{5}mr^2$ sada možemo zapisati kao

$$E_{\text{kin.}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m(r\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\dot{\phi}^2 = \frac{7}{10}mr^2\dot{\phi}^2.$$

Pri kutnom otklonu Φ središte kugle se, u odnosu na njegov ravnotežni položaj, podiže na visinu $(R - r)(1 - \cos\Phi)$ te gravitacijsku potencijalnu energiju kugle možemo napisati kao

$$E_{\text{pot.}} = mg(R - r)(1 - \cos\Phi) \simeq mg(R - r)\frac{\Phi^2}{2},$$

gdje smo, s obzirom da kut Φ pri malim titrajima poprima male vrijednosti, koristili razvoj $\cos\Phi \simeq 1 - \Phi^2/2$. Prelaskom s kuta Φ na kut $\phi = (R - r)\Phi/r$, potencijalnu energiju pišemo kao

$$E_{\text{pot.}} = \frac{mgr^2}{2(R - r)}\phi^2.$$

Uvjet očuvanja mehaničke energije daje

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E_{\text{kin.}} + E_{\text{pot.}}) = \cdots = \frac{7}{5}\dot{\phi}\left(\ddot{\phi} + \frac{5g}{7(R - r)}\phi\right).$$

S obzirom da gornja jednakost mora vrijediti u svim trenucima vremena, slijedi

$$\ddot{\phi} + \frac{5g}{7(R - r)}\phi = 0,$$

što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja jednostavnog harmonijskog titranja s kružnom frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{5g}{7(R - r)}.$$

Rješenje: $\omega_0 = \sqrt{5g/7(R - r)}$