7.10.2. TREĆA MAXWELLOVA JEDNADŽBA

Faradayev zakon indukcije koji kaže da je inducirana EMS proporcionalna brzini promjene magnetskog toka $\varepsilon = -d\phi_B / dt$ možemo napisati u obliku 3. Maxwellove jednadžbe:

$$\oint_K \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

To je **integralni oblik 3. Maxwellove jednadžbe**.

S je ploha obuhvaćena zatvorenom krivuljom *K*.

Diferencijalni oblik 3. Maxwellove jednadžbe:

Površinu integracije, odnosno krivulju sužavamo na točku:

$$\oint_K \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \,/ : \Delta S \,/ \lim_{\Delta S \to 0}$$

SLIKA: UZ DEFINICIJU ROTACIJE VEKTORA – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 3.17. STR. 153.

Kao površinu ΔS uzimamo infinitenzimalno mali kvadrat, a kao krivulju *K* četiri stranice (opseg) kvadrata ABCD.

SLIKA: UZ IZRAČUNAVANJE ROTACIJE VEKTORA – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 3.18. STR. 153.

Prvo odabiremo kvadrat u *yz* ravnini i gledamo cirkulaciju vektora $\vec{E}$ po krivulji *K*.

$$\oint_{ABCDA} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{BC} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{CD} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{DA} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_y(z)dy$$

$$\int_{CD} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_y(z+dz)dy$$

Zbrojimo: $$E_y(z)dy - E_y(z+dz)dy = -\frac{\partial E_y}{\partial z} dydz$$

$$\int_{BC} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_z(y+dy)dz$$

$$\int_{DA} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E_z(y)dz$$

Zbrojimo: $E_z(y+dy)dz - E_z(y)dz = \frac{\partial E_z}{\partial y} dydz$

$$\oint_{ABCDA} \vec{E} \cdot d\vec{s} = (\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z})dydz$$

Magnetski tok vektora $\vec{B}$ kroz površinu kvadrata $d\vec{S}$ je:

$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_x dydz$ zbog $\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S B_n dS$

Slijedi: $\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$

Sličan postupak integracije imamo za površinu *dxdy* u *xy* ravnini i površinu *dxdz* u *xz* ravnini:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Na desnoj strani ovih jednadžbi imamo komponente vremenske derivacije vektora magnetske indukcije $\vec{B}$. Na lijevoj strani imamo komponente vektora koji zovemo ROTACIJOM ELEKTRIČNOG POLJA:

$$(rot\vec{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \qquad (rot\vec{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \qquad (rot\vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Diferencijalni oblik 3. Maxwellove jednadžbe: $rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Može i preko nable $\vec{\nabla}$: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Vektorski umnožak: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$, odnosno: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$

7.11. AMPEROV ZAKON. ČETVRTA MAXWELLOVA JEDNADŽBA

Ako neku veličinu u svakoj točki prostora opisujemo vektorom, onda govorimo o VEKTORSKOM POLJU te veličine (električno i magnetsko polje su vektorska polja).

CIRKULACIJA VEKTORSKOG POLJA je linijski integral po zatvorenoj krivulji pojekcije vektora na krivulju u svakoj njenoj točki.

Na primjer, cirkulacija vektora jakosti magnetskog polja po krivulji K: $\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s}$

SLIKA: IZRAČUNAVANJE CIRKULACIJE JAKOSTI MAGNETSKOG POLJA – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 3.12. STR. 144.

Računamo cirkulaciju vektora jakosti magnetskog polja dugog ravnog vodiča kojim teče struja I – neka je zatvorena krivulja kružnica oko vodiča. U svakoj točki kružnice magnetsko polje je tangencijalno na kružnicu i konstantno po iznosu $H = I/2\pi r$.

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \oint_K \frac{I}{2\pi r} ds = \frac{I}{2\pi r} \oint_K ds = \frac{I}{2\pi r} 2\pi r = I$$

gdje je $\oint_K ds$ opseg kružnice.

Ovo vrijedi za bilo koju krivulju. Ako krivulja obuhvaća više struja, onda je:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \sum I \qquad \text{ili} \qquad \oint_K \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \sum I$$

Amperov zakon ili zakon protjecanja

Magnetske silnice su zatvorene krivulje kroz koje protječe struja i obrnuto: struja oko sebe stvara zatvorene magnetske silnice.

STRUJA POMAKA

Promatramo nabijanje (a) i izbijanje (b) kondenzatora.

SLIKA: STRUJA POMAKA IZMEĐU PLOČAKONDENZATORA – HENČ-BARTOLIĆ, KULIŠIĆ – SL. 3.13. STR. 145.

Dok se kondenzator nabija (a), vodičem teče struja. Na pločama kondenzatora se skuplja naboj i pojačava električno polje među pločama kondenzatora gdje nema PROVODNE STRUJE I_{pr}.

I_{pr} koja vodičem dolazi do kondenzatora, nastavlja između ploča teći kao STRUJA POMAKA I_{pom}. Promjena električnog polja između ploča je struja pomaka. Da bi vrijedila jednadžba kontinuiteta struje, provodna struja i struja pomaka moraju biti jednake.

$$I_{pr} = dQ / dt = I_{pom}$$

Prema Gaussovom zakonu je: $\oint\!\!\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$

Slijedi: $I_{pom} = \frac{d}{dt} \oint\!\!\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{d\phi_D}{dt}$

Struja pomaka kroz odabranu površinu *S*: $I_{pom} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$

Promjenjiva provodna struja u vodovima nastavlja se kao struja pomaka u izolatoru (vakuumu) između ploča kondenzatora i tako zatvara strujni krug.

I provodna struja i struja pomaka uzrokuju magnetske efekte pa to moramo uključiti u Ampereov zakon:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_{pr} + I_{pom}$$

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = I + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$ POOPĆENI AMPEREOV ZAKON

Krivulja *K* je rub plohe površine *S*.

Provodnu struju možemo pisati gustoće struje: $I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$

Slijedi: $\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$ **Četvrta Maxwellova jednadžba u integralnom obliku**

Ako nema provodnih struja, to jest magnetsko polje nastaje samo promjenom električnog toka, onda je 4. Maxwellova jednadžba oblika:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

Diferencijalni oblik 4. Maxwellove jednadžbe - kao i u 3. Maxwellovoj jednadžbi integriramo po infinitenzimalno malom kvadratu u njegovoj površini:

$$rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ ili $$rot\vec{B} = \mu\vec{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$