1 **Zadatak:** Ravni linearno polarizirani elektromagnetski val valne duljine λ širi se u vakuumu u smjeru x-osi. Amplituda električnog polja tog vala je E_0, a smjer titranja električnog polja podudara se s vektorom $\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$. Sastavi izraze koji opisuju pripadajuće magnetsko polje $\mathbf{B}$ te Poyntingov vektor $\mathbf{S}$.

Postupak: Općenit izraz za električno polje ravnog linearno polariziranog vala možemo napisati kao

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}, t] = \mathbf{E}_0 \cos[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi],$$

gdje je $\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{x}} + y\,\hat{\mathbf{y}} + z\,\hat{\mathbf{z}}$ položaj točke u prostoru, t je vrijeme, $\mathbf{E}_0$ amplituda električnog polja (vektor), $\mathbf{k}$ je valni vektor (vrijedi $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$), ω je frekvencija, a ϕ je fazni pomak. Za val valne duljine λ koji se u vakuumu širi u $\hat{\mathbf{x}}$ smjeru imamo $\mathbf{k} = k\,\hat{\mathbf{x}}$, $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = kc$, te s obzirom na zadanu linearnu polarizaciju, $\mathbf{E}_0 = E_0\,(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}})/\sqrt{2}$. Slijedi

$$\mathbf{E}[x, t] = E_0\,\frac{\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{2}}\,\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \phi\right].$$

Magnetsko polje dobivamo koristeći izraz $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}} \times (\mathbf{E}/c)$, gdje je u ovom slučaju $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{x}}$. Slijedi

$$\mathbf{B}[x, t] = \frac{E_0}{c}\,\frac{-\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{2}}\,\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \phi\right].$$

Poyntingov vektor, $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, slijedi kao

$$\mathbf{S}[x, t] = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\,\hat{\mathbf{x}}\,\cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \phi\right] = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\hat{\mathbf{x}}\,\left(1 + \cos\left[\frac{4\pi}{\lambda}(x - ct) + 2\phi\right]\right).$$

Rješenje: $\mathbf{B}[x, t] = \frac{E_0}{c}\,\frac{-\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{2}}\,\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \phi]$, $\mathbf{S}[x.t] = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\hat{\mathbf{x}}\,(1 + \cos[\frac{4\pi}{\lambda}(x - ct) + 2\phi])$

2 Zadatak: Eliptično polarizirani ravni elektromagnetski val koji se širi u z-smjeru i čije je električno polje opisano izrazom

$$\mathbf{E}[z,t] = E_{0x}\,\hat{\mathbf{x}}\,\cos[kz-\omega t] + E_{0y}\,\hat{\mathbf{y}}\,\sin[kz-\omega t]$$

pada na polaroid koji propušta komponentu vala čije je električno polje usporedno s vektorom $3\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$. Odredi amplitudu titranja električnog polja nakon prolaska vala kroz polaroid.

Postupak: Komponenta upadnog elektromagnetskog vala čije je električno polje okomito na propusni smjer polaroida se pri prolasku kroz polaroid apsorbira, dok komponenta vala čije je električno polje usporedno s propusnim smjerom polaroida ostaje nepromijenjena. Komponentu upadnog električnog polja koja je usporedna s propusnim smjerom polaroida računamo kao projekciju upadnog polja na propusni smjer polaroida. Uvodimo jedinični vektor propusnog smjera polaroida,

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{3\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{10}},$$

te kao projekciju zadanog električnog polja na taj smjer dobivamo

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}} = \frac{3E_{0x}}{\sqrt{10}}\cos[kz-\omega t] + \frac{E_{0y}}{\sqrt{10}}\sin[kz-\omega t].$$

Kako bismo u gornjem izrazu prepoznali amplitudu titranja uvodimo oznake

$$a = \frac{3E_{0x}}{\sqrt{10}}, \qquad b = \frac{E_{0y}}{\sqrt{10}},$$

te gornji izraz za projekciju polja zapisujemo kao

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}} = a\cos[kz-\omega t] + b\cos[kz-\omega t-\pi/2].$$

Koristeći kompleksni zapis imamo

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{p}} = \mathrm{Re}\left[a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(kz-\omega t)}\right] + \mathrm{Re}\left[b\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(kz-\omega t-\pi/2)}\right] = \mathrm{Re}\left[(a-\mathrm{i}\,b)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(kz-\omega t)}\right],$$

gdje kao amplitudu titranja prepoznajemo

$$E_0 = |a-\mathrm{i}\,b| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{9}{10}E_{0x}^2 + \frac{1}{10}E_{0y}^2}.$$

Rješenje: $E_0 = \sqrt{(9E_{0x}^2+E_{0y}^2)/10}$

3 Zadatak: Na kojoj visini nad središtem okruglog stola polumjera R se mora nalaziti točkasti izotropni izvor svjetlosti želimo li da osvjetljenje ruba stola bude što je moguće jače?

Postupak: Osvjetljenje plohe točkastim izvorom je

$$E = I\,\frac{\cos\theta}{r^2},$$

gdje je I svjetlosna jakost izvora, r je udaljenost izvora od plohe, a θ je kut pod kojim svjetlost pada na plohu (u odnosu na okomicu). Označimo li s h visinu izvora nad središtem stola polumjera R, osvjetljenje ruba stola je

$$E = I\,\frac{1}{R^2+h^2}\,\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} = I\,\frac{h}{(R^2+h^2)^{3/2}}.$$

Ekstrem pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}E = \left(\frac{1}{h} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{R^2+h^2}\,2h\right)E,$$

koji je ispunjen za

$$h = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Ekstrem je maksimum jer veičina $E \geq 0$ iščezava za $h = 0$ te za $h \to \infty$.

Rješenje: $h = R/\sqrt{2}$

4 **Zadatak:** Odredi najmanju udaljenost između predmeta i njegove slike koju stvara tanka konvergentna leća žarišne duljine f.

Postupak: Označimo li s a udaljenost predmeta od leće te s b udaljenost slike od leće imamo relaciju

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

te udaljenost slike od predmeta možemo napisati kao

$$D = a + b = a + \frac{af}{a - f} = \frac{a^2}{a - f}.$$

Ekstrem veličine D naći ćemo izjednačavanjem derivacije po a nulom:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} D = \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{a - f} \right) D$$

što je ispunjeno za $a = 2f$. Radi se o minimumu jer $D \to \infty$ za $a \to \infty$ te za $a \to f$. Uvrštavanjem $a = 2f$ u izraz za D slijedi

$$D_{\mathrm{min}} = 4f.$$

Rješenje: $D_{\mathrm{min}} = 4f$

5 Zadatak: S jedne strane tanke konvergentne leće žarišne duljine $f = 1\,\mathrm{m}$ se na optičkoj osi na udaljenosti $a = 3f$ nalazi izotropni točkasti izvor svjetlosti snage $P = 100\,\mathrm{W}$. S druge strane se na udaljenosti $d = f$ od leće nalazi zastor okomit na optičku os. Odredi osvijetljenje zastora u području u kojem na njega pada svjetlost ako je promjer kružnog otvora leće $2R = f/4$.

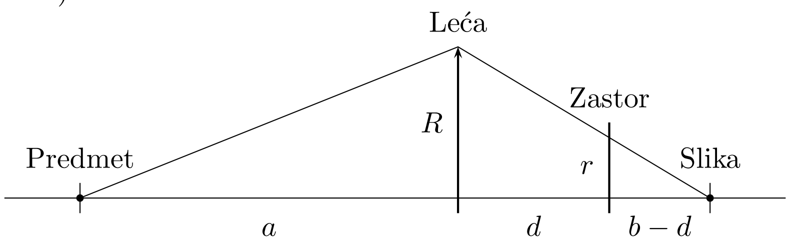
Postupak: Omjer snage svjetlosti $P_\circ$ koja ulazi u leću i potom osvijetljava zastor i ukupne snage zračenja izvora P jednak je omjeru prostornog kuta $\Omega_\circ$ koji u odnosu na izvor svjetlosti zahvaća otvor leće i ukupnog prostornog kuta 4π u koji izvor zrači:

$$\frac{P_\circ}{P} = \frac{\Omega_\circ}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\int_0^\theta 2\pi \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = -\frac{1}{2}\cos\vartheta \Big|_{\vartheta=0}^{\theta} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right).$$

Kada se predmet (ovdje točkasti izvor) nalazi na udaljenosti $a > f$ od konvergentne leće onda njegova slika (ovdje svijetla točka) nastaje na suprotnoj strani leće na udaljenosti

$$b = \frac{a}{a-f}\,f.$$

S obzirom da se ovdje zastor nalazi na udaljenosti $d = f \neq b$ čunj svjetlosti zahvaćen lećom kružnog otvora na zastoru stvara svijetao krug polumjera r (tzv. "mutnu sliku").



Iz sličnosti trokuta imamo $R/b = r/(b-d)$ te je površina svijetlog kruga na zastoru

$$S_\circ = r^2\pi = R^2\left(\frac{b-d}{b}\right)^2\pi = R^2\left(1 - \frac{d}{f} + \frac{d}{a}\right)^2\pi.$$

Osvijetljenje zastora unutar svijetlog kruga je

$$E = \frac{P_\circ}{S_\circ} = P\,\frac{1 - \left(1 + (R/a)^2\right)^{-1/2}}{2R^2(1 - d/f + d/a)^2\pi}.$$

Za zadane vrijednosti

$$E \simeq 7.947\ \mathrm{W\,m^{-2}}.$$

Rješenje: $E = P\big(1-(1+(R/a)^2)^{-1/2}\big)/\big(2R^2(1-d/f+d/a)^2\pi\big) \simeq 7.947\ \mathrm{W\,m^{-2}}$

6 Zadatak: Dvije jednake simetrične tanke leće načinjene od stakla indeksa loma $n_\mathrm{L} = 1.50$ postavljene su jedna iza druge (udaljenost među njima je zanemariva) na zajedničku optičku os. Kada se u prostoru među lećama nalazi zrak ($n = 1$) one u zraku čine sustav žarišne duljine $f_\mathrm{Z} = 1.00\,\mathrm{m}$. Odredi žarišnu duljinu ovog sustava u zraku kada se u prostor među lećama umjesto zrakom ispuni tekućinom indeksa loma $n_\mathrm{T} = 1.35$.

Postupak: Sustav dviju leća sastoji se od četiri sferna dioptra. Koristeći uobičajene konvencije zapisujemo sustav jednadžbi za općenit slučaj kada se među lećama nalazi sredstvo indeksa loma n_T:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n_\mathrm{L}}{b_1} = \frac{n_\mathrm{L} - 1}{R}, \qquad \frac{n_\mathrm{L}}{a_2} + \frac{n_\mathrm{T}}{b_2} = \frac{n_\mathrm{T} - n_\mathrm{L}}{(-R)},$$

$$\frac{n_\mathrm{T}}{a_3} + \frac{n_\mathrm{L}}{b_3} = \frac{n_\mathrm{L} - n_\mathrm{T}}{R}, \qquad \frac{n_\mathrm{L}}{a_4} + \frac{1}{b_4} = \frac{1 - n_\mathrm{L}}{(-R)},$$

Obzirom da se radi o tankim lećama, te da zanemarujemo udaljenost među njima, imamo:

$$a_2 = -b_1, \qquad a_3 = -b_2, \qquad a_4 = -b_3.$$

Eliminacijom $a_{4,3,2}$ i $b_{3,2,1}$ iz gornjih jednadžbi računamo žarišnu duljinu u općenitom slučaju:

$$f_\mathrm{T} = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_4}\right)^{-1} = \frac{R}{4n_\mathrm{L} - 2(n_\mathrm{T} + 1)}.$$

U posebnom slučaju kada se između leća nalazi zrak stavljamo $n_\mathrm{T} = 1$ te je žarišna duljina

$$f_\mathrm{Z} = \frac{R}{4(n_\mathrm{L} - 1)}.$$

Eliminacijom r iz gornjih izraza za f_T i f_Z slijedi

$$f_\mathrm{T} = f_\mathrm{Z}\,\frac{2(n_\mathrm{L} - 1)}{2n_\mathrm{L} - n_\mathrm{T} - 1}.$$

Za zadane vrijednosti

$$f_\mathrm{T} \simeq 1.538\,\mathrm{m}.$$

Rješenje: $f_\mathrm{T} = 2f_\mathrm{Z}(n_\mathrm{L} - 1)/(2n_\mathrm{L} - n_\mathrm{T} - 1) \simeq 1.538\,\mathrm{m}$

7 Zadatak: Odredi najmanju debljinu opne od sapunice (indeks loma $n = 4/3$) pri kojoj istovremeno dolazi do najslabije moguće refleksije plave svjetlosti (valna duljina u vakuumu $\lambda_\mathrm{B} = 480\,\mathrm{nm}$) i do najjače moguće refleksije crvene svjetlosti ($\lambda_\mathrm{R} = 640\,\mathrm{nm}$). Svjetlost upada okomito na opnu.

Postupak: Razlika u fazi svjetlosti vakuumske valne duljine λ reflektirane na prednjoj i one reflektirane na stražnjoj strani opne debljine d i indeksa loma n je

$$\phi = 2\pi \frac{s_2 - s_1}{\lambda} + \pi = 2\pi \frac{2nd}{\lambda} + \pi,$$

gdje je $s_2 - s_1 = 2nd$ razlika optičkih putova dvaju zraka, a član π je prisutan zbog toga što se jedna od dvije zrake reflektira od optički gušćeg sredstva. Uvjet destruktivne interferencije za plavu svjetlost glasi

$$\phi_\mathrm{B} = 2\pi \frac{2nd}{\lambda_\mathrm{B}} + \pi = (2k+1)\pi, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

odnosno

$$d = \frac{\lambda_\mathrm{B}}{2n} k = 180\,\mathrm{nm}, 360\,\mathrm{nm}, 540\,\mathrm{nm}, 720\,\mathrm{nm}, \ldots$$

Uvjet konstruktivne interferencije za crvenu svjetlost glasi

$$\phi_\mathrm{R} = 2\pi \frac{2nd}{\lambda_\mathrm{R}} + \pi = 2k'\pi, \qquad k' = 1, 2, \ldots$$

odnosno

$$d = \frac{\lambda_\mathrm{R}}{4n} \left(2k' - 1\right) = 120\,\mathrm{nm}, 360\,\mathrm{nm}, 600\,\mathrm{nm}, \ldots$$

Najmanja debljina opne koja zadovoljava oba uvjeta

$$d_\mathrm{min} = 360\,\mathrm{nm}.$$

Rješenje: $d_\mathrm{min} = 360\,\mathrm{nm}$

8 **Zadatak:** Tri izvora elektromagnetskog zračenja jednake snage i valne duljine λ pravilno su raspoređena duž pravca i titraju u fazi. Odredi namanji razmak među susjednim izvorima pri kojem zračenje duž pravca na kojem oni leže iščezava.

Postupak: Neka se izvori nalaze na x-osi pri koordinatama $x = -a, 0, a$, gdje je a razmak koji želimo odrediti. y ili z-komponentu električnog polja elektromagnetskog vala u točkama na x-osi možemo napisati kao

$$E[x,t] = E_0\big(\cos[\omega t - k(x+a)] + \cos[\omega t - kx] + \cos[\omega t - k(x-a)]\big),$$

gdje je $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ (općenit fazni pomak je izostavljen). Koristeći kompleksni zapis:

$$\begin{aligned}
E[x,t] &= E_0 \,\mathrm{Re}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k(x+a))} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k(x-a))}\big] \\
&= E_0 \,\mathrm{Re}\big[\big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka} + 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}ka}\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\big] \\
&= E_0 \,\mathrm{Re}\big[\big(1 + 2\cos[ka]\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - kx)}\big] \\
&= E_0 \,\big(1 + 2\cos[ka]\big)\cos[\omega t - kx],
\end{aligned}$$

gdje prepoznajemo titranje amplitudom $E_0(1 + 2\cos[ka])$. Gornje polje iščezava ako je ispunjeno

$$\cos[ka] = -\frac{1}{2},$$

odnosno,

$$a_{\min} = \frac{1}{k}\arccos\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{\lambda}{2\pi}\frac{2\pi}{3} = \frac{\lambda}{3}.$$

Rješenje: $a_{\min} = \frac{\lambda}{3}$