Elastičnost

1 Zadatak: Bakreni štap duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$ obješen je jednim krajem o strop. Odredite koliko će se štap produljiti zbog djelovanja sile teže. (Youngov modul bakra $E = 130\,\mathrm{GPa}$, gustoća bakra $\rho = 8960\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Napetost štapa na visini h iznad donjeg kraja je težina dijela štapa koji se nalazi ispod te visine,

$$T(h) = \rho\, S h\, g,$$

gdje je S površina poprečnog presjeka štapa. Relativna deformacija na toj visini je

$$\delta(h) = \frac{T(h)/S}{E} = \frac{\rho g}{E}\, h.$$

Produljenje elementa duljine štapa $\mathrm{d}h$ je $\delta(h)\,\mathrm{d}h$, dok je ukupno produljenje integral preko čitavog štapa,

$$\Delta\ell = \int_0^\ell \delta(h)\,\mathrm{d}h = \frac{\rho g}{E}\int_0^\ell h\,\mathrm{d}h = \frac{\rho g \ell^2}{2E}.$$

Rješenje: $\Delta\ell = \rho g \ell^2/2E \simeq 3.38 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$

2 Zadatak: Homogeni štap duljine 2ℓ načinjen od materijala gustoće ρ i Youngova modula E okreće se kutnom brzinom ω oko osi koja je okomita na štap i prolazi njegovim polovištem. Odredi produljenje štapa do kojeg dolazi zbog djelovanja centrifugalne sile.

Postupak: Element centrifugalne sile koja djeluje na element štapa duljine $\mathrm{d}r$ na udaljenosti r od njegova središta je

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}m\,\omega^2\,r = \rho\,S\mathrm{d}r\,\omega^2\,r,$$

gdje je S površina poprečnog presjeka štapa. Napetost štapa u točki udaljenoj r od njegova polovišta je integral centrifugalne sile po dijelu štapa koji se nalazi na udaljenosti većoj od r,

$$T(r) = \int \mathrm{d}F = \rho S\omega^2 \int_r^\ell r'\,\mathrm{d}r' = \frac{\rho S\omega^2}{2}\left(\ell^2 - r^2\right),$$

a naprezanje štapa u toj točki je $\delta(r) = T(r)/SE$. Produljenje elementa $\mathrm{d}r$ je $\delta(r)\,\mathrm{d}r$, a ukupno produljenje štapa je integral te veličine preko oba kraka štapa,

$$\Delta\ell = 2\int_0^\ell \delta(r)\,\mathrm{d}r = \frac{\rho\omega^2}{E}\int_0^\ell \left(\ell^2 - r^2\right)\,\mathrm{d}r = \frac{2\rho\ell^3\omega^2}{3E}.$$

Rješenje: $\Delta\ell = 2\rho\ell^3\omega^2/3E$

3 Zadatak: Odredite rad koji je potrebno obaviti da bismo čeličnu žicu promjera $d = 1\,\mathrm{mm}$, duljine $\ell = 2\,\mathrm{m}$ i napetosti $T_0 = 150\,\mathrm{N}$ naprezanjem produljili za $\Delta x = 3\,\mathrm{mm}$. (Youngov modul čelika $E = 200\,\mathrm{GPa}$.)

Postupak: Pri produljenju u elastičnom području žica je ekvivalentna je opruzi konstante

$$k = \frac{SE}{\ell} = \frac{d^2 \pi E}{4\ell}$$

($S = d^2\pi/4$ je površina poprečnog presjeka žice.) Označimo li s x produljenje žice, njena napetost je $T(x) = kx$. Početnoj napetosti T_0 neka odgovara produljenje x_0. Tada možemo napisati

$$T(x) = kx = kx_0 + k(x - x_0) = T_0 + k(x - x_0).$$

Rad koji obavljamo pri produljujući žicu od x_0 do $x_0 + \Delta x$ je

$$W = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} T(x)\,\mathrm{d}x = T_0 \Delta x + \frac{1}{2} k (\Delta x)^2 = T_0 \Delta x + \frac{d^2 \pi E}{8\ell} (\Delta x)^2.$$

Rješenje: $E = T_0 \Delta x + (d^2 \pi E / 8\ell)(\Delta x)^2 \simeq 0.803\,\mathrm{J}$

4 Zadatak: Uteg mase $m = 10\,\mathrm{kg}$ visi na čeličnoj žici duljine $\ell = 5\,\mathrm{m}$ i promjera $d = 0.5\,\mathrm{mm}$. Podignemo li uteg iz tog položaja za $\Delta h = 0.5\,\mathrm{m}$ (čime olabavimo žicu) i pustimo li ga da padne (napne žicu 'na trzaj'), kolika će biti najveća napetost žice tokom zaustavljanja utega (trzaja)? (Pretpostavljamo da se sva naprezanja nalaze unutar područja elastičnosti. Youngov modul čelika $E = 200\,\mathrm{GPa}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Uvedimo uspravnu x-os, usmjerenu prema dolje, tako da $x = 0$ odgovara položaju utega kada žica nije rastegnuta. Gravitacijska potencijalna energija utega može se napisati kao

$$U_{\mathrm{grav.}}(x) = -mgx.$$

Pri elastičnom rastezanju žica je ekvivalentna opruzi konstante

$$k = \frac{SE}{\ell} = \frac{d^2\pi E}{4\ell},$$

njena napetost i potencijalna energija deformacije pri rastezanju su

$$T(x) = kx, \quad U_{\mathrm{def.}}(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad \text{za} \quad x \geq 0.$$

(Za $x < 0$ imamo $T = 0$ i $U_{\mathrm{def.}} = 0$ jer se žica olabavi i savije, a ne sabija se poput opruge.) Kada uteg mirno visi njegov položaj x_0 slijedi iz uvjeta ravnoteže,

$$x_0 = \frac{mg}{k}.$$

Kada ga podignemo za Δh njegov položaj je

$$x_1 = x_0 - \Delta h.$$

Ako je $\Delta h > x_0$ žica je labava (ispunjeno za zadane vrijednosti) te je ukupna energija sustava

$$E = U_{\mathrm{grav.}}(x_1).$$

Kada uteg padne, maksimalno napne žicu i na trenutak se zaustavi prije nego što će se opet uspinjati ukupna energija je

$$E = U_{\mathrm{grav.}}(x_{\mathrm{max}}) + U_{\mathrm{def.}}(x_{\mathrm{max}}).$$

Na osnovu očuvanja energije možemo odrediti x_{max}, odnosno

$$T_{\mathrm{max}} = T(x_{\mathrm{max}}) = kx_{\mathrm{max}} = mg\left(1 + \sqrt{(2k\Delta h/mg) - 1}\right).$$

Rješenje: $T_{\mathrm{max}} = mg\left(1 + \sqrt{(2k\Delta h/mg) - 1}\right)$ gdje je $k = d^2\pi E/4\ell$, $T_{\mathrm{max}} \simeq 970\,\mathrm{N}$

5 Zadatak: Odredite dubinu na kojoj će uslijed hidrostatskog tlaka gustoća slatke vode porasti za $\delta_\rho = 1\%$ u odnosu na gustoću vode na površini. (Kompresibilnost vode $\kappa = 4.9 \times 10^{-10}\,\mathrm{Pa}^{-1}$, gustoća vode pri atmosferskom tlaku (na površini) $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Volumni modul elastičnosti B, kompresibilnost κ, relativna promjena obujma $\delta_V = \Delta V/V$ i naprezanje σ povezani su relacijom

$$B = \frac{1}{\kappa} = -\frac{\sigma}{\delta_V}.$$

Ovdje je σ razlika tlaka na dubini d i tlaka na površini vode (hidrostatski tlak),

$$\sigma = p(d) - p(0) = \rho g d.$$

Slijedi

$$d = -\frac{\delta_V}{\rho g \kappa}.$$

Gustoća $\rho = m/V$ pa za relativne promjene vrijedi $\Delta\rho/\rho = -\Delta V/V$, odnosno $\delta_\rho = -\delta_V$. Konačno,

$$d = \frac{\delta_\rho}{\rho g \kappa}.$$

Rješenje: $d = \delta_\rho/\rho g \kappa \simeq 2080\,\mathrm{m}$

6 Zadatak: Čelična žica duljine $\ell = 2\,\mathrm{m}$ i promjera $d = 0.5\,\mathrm{mm}$ napeta je silom $T_0 = 100\,\mathrm{N}$ nakon čega su njeni krajevi učvršćeni. Odredi jakost sile kojom treba djelovati okomito na žicu pri sredini njezina raspona pa da otklon žice od ravnotežnog položaja bude $x = 10\,\mathrm{cm}$. (Youngov modul čelika $E = 200\,\mathrm{GPa}$)

Postupak: Shvatimo li svaku polovicu žice kao oprugu konstante

$$k = \frac{SE}{\ell/2} = \frac{d^2\pi E}{2\ell}$$

(S je površina poprečnog presjeka žice), napetost žice u ovisnosti o otklonu njenog polovišta x možemo napisati kao

$$T(x) = T_0 + k\left(\sqrt{(\ell/2)^2 + x^2} - \ell/2\right)$$

(izraz u zagradama je produljenje polovice žice.) Rezultantna sila kojom obje polovice žice povlače polovište prema ravnotežnom položaju je zbroj projekcija njihovih napetosti na os okomitu na žicu,

$$\begin{aligned} F(x) &= 2\,T(x)\,\frac{x}{\sqrt{(\ell/2)^2 + x^2}} \\ &= 2kx\left(1 - \left(1 + 4x^2/\ell^2\right)^{-1/2}\right) + \frac{4T_0 x}{\ell}\left(1 + 4x^2/\ell^2\right)^{-1/2} \\ &= \frac{d^2\pi E}{2}\,\xi\left(1 - \left(1 + \xi^2\right)^{-1/2}\right) + 2T_0\,\xi\left(1 + \xi^2\right)^{-1/2}, \end{aligned}$$

gdje je

$$\xi = \frac{2x}{\ell}.$$

Rješenje: $F = (d^2\pi E/2)\,\xi\left(1 - \left(1 + \xi^2\right)^{-1/2}\right) + 2T_0\,\xi\left(1 + \xi^2\right)^{-1/2}$ gdje je $\xi = 2x/\ell$, $F = 58.9\,\mathrm{N}$

7 Zadatak: Odredi kut zakreta osovine koja povezuje brodski motor i elisu ako motor pri kutnoj brzini $\omega = 180 \times 2\pi\,\mathrm{rad\,min}^{-1}$ razvija snagu $P = 12\,\mathrm{kW}$. Duljina osovine je $L = 2\,\mathrm{m}$, promjer $2R = 3\mathrm{cm}$, a nacinjena je od celika modula torzije $G = 80\,\mathrm{GPa}$.

Postupak: Konstanta torzije homogene šipke polumjera R i duljine L dana je izrazom

$$D = \frac{M}{\phi} = \frac{\pi R^4 G}{2L},$$

gdje je M moment sile koji djeluje na šipku, a ϕ je kut zakreta. Snaga kojom motor djeluje na osovinu može se napisati kao

$$P = M\omega,$$

slijedi

$$\phi = \frac{M}{D} = \frac{2LP}{\pi R^4 G\omega}.$$

Rješenje: $\phi = 2LP/\pi R^4 G\omega \simeq 0.2\,\mathrm{rad} \simeq 11.5^\circ$