Zadaci s masovnih kojih nema u bilješkama (2. dio):

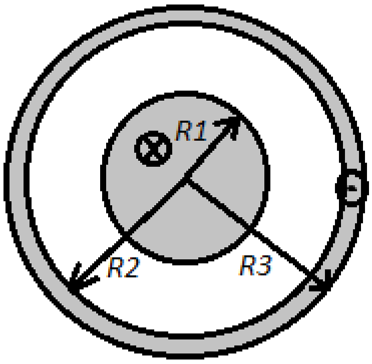
Maxwellove jednadžbe

2.

Uglavnom, ako kažu da nađete iznos magnetskog polja, tu se obično misli na jakost magnetskog polja *H*. Takvi zadaci obično dolaze sa cilindrom zbog linijskih integrala i tako toga... Uglavnom, treba znati formulu (to jest ne treba znati, nego pročitati sa šalabahtera):

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I = \iint \vec{J} d\vec{S}$$

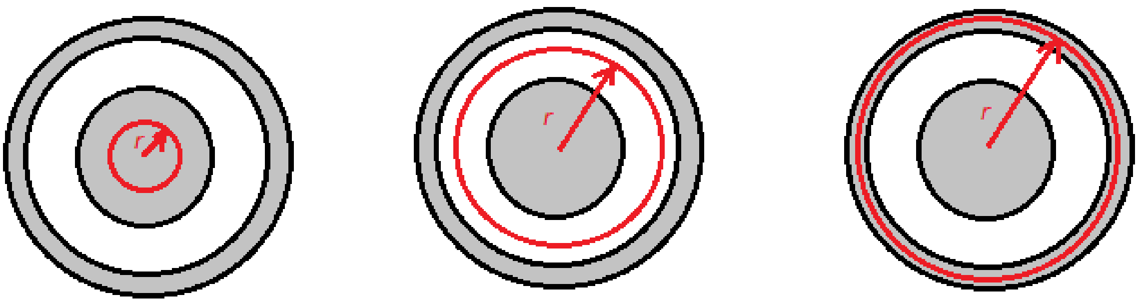
E sad, šta vam predstavlja prvi dio izraza? Pogledajte sljedeću sliku najprije:



To je naš cilindar, sivi dijelovi predstavljaju gdje „ima" struje, i ovi znakići pokazuju da je u unutarnjem dijelu smjer struje drugačiji od ovoga u vanjskome dijelu. E sad, nadalje, u onom prvom dijelu izraza, integral

$$\oint \vec{H} d\vec{l}$$

govori koliko ste struje obuhvatili sa nekim proizvoljnim radijusom. Kako znamo da nam to znači koliko smo struje obuhvatili? Pa zato što je s desne strane $\sum I = \iint \vec{J} d\vec{S}$, odnosno zbroj struja, ili ako govorimo o integralu, onda gustoća struje * površina = struja. Svejedno je.
E sad, promotrimo sljedeće tri slike:



Ovisno o tome koji *r* odaberete, obuhvatit ćete manju ili veću sivu površinu, odnosno manje ili više struje. E sad, imamo sljedeće slučajeve:

$$0 < r < R_1$$

Kada nam se taj naš *r* nalazi samo u unutarnjem dijelu cilindra. Obzirom da nećemo obuhvatiti cijelu unutarnju površinu, onda radimo sa ovom formulom:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \iint \vec{J} d\vec{S}$$

$$H \cdot 2r\pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r rJdr$$

Ovo vam je uvijek ovako i to si zapamtite. *J* je gustoća struje. Ona može ovisiti o *r* ali ne mora. U našem slučaju ne ovisi jer kaže da je struja konstantna. Onda je *J* = struja / površina:

$$J = \frac{I}{R_1^2 \pi}$$

$$H \cdot 2r\pi = \frac{I}{R_1^2 \pi} 2\pi \frac{r^2}{2} \to H = \frac{Ir}{2R_1^2 \pi}$$

$$R_1 < r < R_2$$

Kada se nalazimo u ovom bijelom dijelu cilindra. Kakav god *r* tu odabrali, uvijek ćemo obuhvatiti cijelu unutrašnju sivu površinu, jer u bijeloj površini nema struje i to nam ništa ne mijenja. Dakle, ovdje je suma struja samo *I* jer smo obuhvatili cijelu unutarnju struju:

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I$$

$$H \cdot 2r\pi = I \to H = \frac{I}{2r\pi}$$

$$R_2 < r < R_3$$

E sad se nalazimo u onom drugom dijelu cilindra. Obuhvatili smo cijelu unutarnju struju, no ovisno o *r*, obuhvatili smo samo određeni dio ove druge struje.

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I - \iint \vec{J} d\vec{S} = I - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_2}^r rJdr$$

Ovdje je *J* malo drugačiji, jer je tu površina zapravo kružni vijenac:

$$J = \frac{I}{(R_3^2 - R_2^2)\pi}$$

$$H \cdot 2r\pi = I - \frac{I}{(R_3^2 - R_2^2)\pi} 2\pi \frac{r^2}{2}\bigg|_{R_2}^{r}$$

Minus ide jer su struje suprotnih smjerova!

$$H \cdot 2r\pi = I - \frac{I}{(R_3^2 - R_2^2)\pi} 2\pi \frac{r^2 - R_2^2}{2} = I - I\frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = I\frac{R_3^2 - R_2^2 - r^2 + R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = I\frac{R_3^2 - r^2}{R_3^2 - R_2^2}$$

$$H = \frac{I(R_3^2 - r^2)}{2r\pi(R_3^2 - R_2^2)}$$

I konačno:

$$r > R_3$$

Izašli smo van iz cilindra, obuhvatili smo sveukupno obadvije struje, suprotnih predznaka, pa je zbroj jednak 0!

$$H = 0$$

4.

Električni tok je *D*. Imate još i gustoću naboja. To je obična Maxwellova jednadžba:

$$\iint \vec{D} d\vec{S} = \iiint \rho dV$$

Obzirom da se radi o sferi, onda vam je to uvijek ovako:

$$D \cdot 4r^2\pi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_1^2 \rho r^2 dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_1^2 5r^2 \sin^2\theta \, r^2 dr$$

$$D \cdot 4r^2\pi = 5\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \int_1^2 r^4 dr$$

$$D \cdot 4r^2\pi = 5 \cdot 2\pi \cdot \frac{r^5}{5}\bigg|_1^2 \cdot \frac{1}{12}(\cos(3\theta) - 9\cos\theta)\bigg|_0^{\pi} = 2\pi \cdot (32 - 1) \cdot \frac{4}{3}$$

$$D = \frac{62}{3r^2}$$

Eto, valjda nisam nekaj fulao :D