5 Zadatak: U kolicima mase m_1 koja mogu bez trenja klizati po vodoravnoj podlozi visi matematičko njihalo duljine ℓ i mase m_2. Odredi kružnu frekvenciju njihala pri malim oscilacijama. (Ubrzanje gravitacijske sile označi s g.)

Postupak: Neka se sva gibanja odvijaju u x, y-ravnini pri čemu je y-os usmjerena uvis. Na kolica s njihalom ne djeluje vodoravna vanjska sila pa slijedi da je x-komponenta ukupne količine gibanja očuvana. To znači da je x-komponenta brzine središta mase stalna, odnosno, da referentni sustav možemo odabrati tako da je ta brzina jednaka nuli. Nadalje, možemo uzeti

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0,$$

odnosno

$$x_2 = -\frac{m_1}{m_2} x_1, \qquad \dot{x}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \dot{x}_2.$$

Na osnovu geometrije sustava te pretpostavljajući male oscilacije možemo pisati

$$x_2 - x_1 = \ell \sin \phi \simeq \ell \phi,$$

gdje je ϕ kut otklona niti od uspravne osi. Gornje izraze koristimo kako bismo napisali kinetičku energiju,

$$E_{\mathrm{kin.}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \dot{x}_2 \right)^2 = \frac{m_1 (m_1 + m_2)}{2 m_2} \dot{x}_1^2,$$

te potencijalnu energiju sustava,

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{pot.}} = m_2 g y_2 = m_2 g \ell (1 - \cos \phi) \simeq m_2 g \ell \frac{\phi^2}{2} &= \frac{m_2 g}{2\ell} (x_2 - x_1)^2 \\ = \frac{m_2 g}{2\ell} \left(-\frac{m_1}{m_2} x_1 - x_1 \right)^2 &= \frac{g (m_1 + m_2)^2}{2 \ell m_2} x_1^2. \end{aligned}$$

Ukupna energija u ovom sustavu je očuvana pa imamo

$$0 = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (E_{\mathrm{kin.}} + E_{\mathrm{pot.}}) = \ldots = \frac{m_1 (m_1 + m_2)}{m_2} \dot{x}_1 \left(\ddot{x}_1 + \frac{g (m_1 + m_2)}{\ell m_1} x_1 \right).$$

S obzirom da je gornji izraz jednak nuli u svim trenucima vremena slijedi

$$\ddot{x}_1 + \frac{g (m_1 + m_2)}{\ell m_1} x_1 = 0,$$

što je jednadžba gibanja harmoničkog oscilatora s kružnom frekvencijom

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g (m_1 + m_2)}{\ell m_1}}.$$

Rješenje: $\omega_0 = \sqrt{g (m_1 + m_2) / m_1 \ell}$