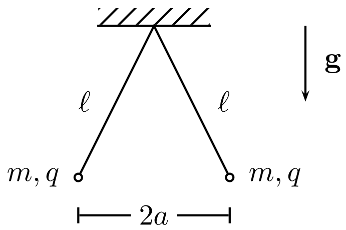
Fizika 2: Zadaci za vježbu 4/7 (elektromagnetizam)

1 Zadatak: Dvije metalne kuglice od kojih svaka ima masu $m = 10\,\mathrm{g}$ ovješene su jedna tik do druge o nevodljive niti duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$. Dovedemo li na kuglice ukupan naboj $2q$ koji se među njima ravnomjerno rasporedi, one će se zbog elektrostatskog odbijanja razmaknuti (vidi sliku). Odredi naboj q ako razmak među kuglicama iznosi $2a = 20\,\mathrm{cm}$ i izrazi ga u jedinicama elementarnog naboja q_e. (Permitivnost vakuuma $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, elementarni naboj $q_\mathrm{e} = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.)



Postupak: Neka je x-os vodoravna i usmjerena prema desno, a y-os neka je uspravna i usmjerena uvis. Na svaku od kuglica djeluje napetost niti,

$$\mathbf{T} = T(\pm \sin\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j}),$$

gdje je α kut otklona niti, a izbor predznaka x-komponente ovisi o tome promatramo li lijevu ili desnu kuglicu. Na kuglice također djeluje odbojna elektrostatska sila,

$$\mathbf{F}_\mathrm{e} = \mp F_\mathrm{e}\,\mathbf{i}, \qquad F_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q^2}{(2a)^2},$$

gdje ponovo izbor predznaka ovisi o tome promatramo li lijevu ili densu kuglicu, te s gravitacijska sila

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g} = -mg\,\mathbf{j}.$$

Uvjet ravnoteže kuglica možemo napisati kao

$$0 = T(\pm \sin\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j}) \mp F_\mathrm{e}\,\mathbf{i} - G\,\mathbf{j},$$

odnosno, raspisano po komponentama

$$F_\mathrm{e} = T\sin\alpha, \qquad G = T\cos\alpha.$$

Dijeljenjem gornjih jednadžbi dobivamo

$$\tan\alpha = \frac{F_\mathrm{e}}{G},$$

dok iz geometrije imamo

$$\tan\alpha = \frac{a}{\sqrt{\ell^2 - a^2}}.$$

Eliminacijom $\tan\alpha$ iz gornjih dviju jednadžbi te korištenjem izraza za F_e i G, slijedi

$$q^2 = 4\pi\epsilon_0\,mg\,\frac{4a^3}{\sqrt{\ell^2 - a^2}},$$

odnosno,

$$q = \pm 4a^{3/2}\sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 mg}{\sqrt{\ell^2 - a^2}}},$$

gdje predznak naboja q ostaje neodređen. Za zadane vrijednosti m, ℓ i a dobije se $q \simeq \pm 2.095 \times 10^{-7}\,\mathrm{C} \simeq \pm 1.308 \times 10^{12}\,q_\mathrm{e}$.

Rješenje: $q = \pm 4a^{3/2}\sqrt{\pi\epsilon_0\,mg/\sqrt{\ell^2 - a^2}} \simeq \pm 1.308 \times 10^{12}\,q_\mathrm{e}$

2 Zadatak: Dvije čestice naboja q učvršćene su na x-osi pri koordinatama $x_{1,2} = \pm a$. Odredi frekvenciju kojom bi oko ravnotežnog položaja $x = y = 0$ titrala čestica mase m i naboja q, ako je njeno gibanje ograničeno na x-os. Zatim odredi frekvenciju kojom bi duž y-osi, oko istog ravnotežnog položaja, titrala čestica mase m i naboja $-q$. (Pretpostavlja se male oscilacije i koristiti se razvoj $(1+\epsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\epsilon$.)

Postupak: Čestice mase m i naboja $\pm q$ gibaju se pod djelovanjem električne sile $\mathbf{F} = \pm q\mathbf{E}$. Električno polje $\mathbf{E}$ dvaju naboja q učvršćenih pri $\mathbf{r}_{1,2} = \pm a\,\mathbf{i}$ možemo u točki $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ napisati kao

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(x-a)\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}}{|(x-a)\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}|^3} + \frac{(x+a)\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}}{|(x+a)\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}|^3}\right)$$

Za gibanje naboja q duž x-osi odgovorna je x-komponenta električne sile. Uvrstimo li $y = 0$ u gornji izraz za električno polje, kao x-komponentu dobivamo

$$E_x[x] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{x-a}{|x-a|^3} + \frac{x+a}{|x+a|^3}\right).$$

S obzirom da razmatramo male oscilacije, vrijedi $|x| \ll a$, odnosno $|a \pm x| = a \pm x$, te možemo pisati

$$E_x[x] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-(a-x)^{-2} + (a+x)^{-2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(-(1-x/a)^{-2} + (1+x/a)^{-2}\right) \simeq -\frac{qx}{\pi\epsilon_0 a^3},$$

gdje smo u poslijednjem koraku koristili razvoj $(1\pm\epsilon)^{-2} \simeq 1 \mp 2\epsilon$. Jednadžbu gibanja čestice naboja q i mase m sada možemo napisati kao

$$m\ddot{x} = F_x = qE_x = -\frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a^3}\,x,$$

odnosno $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, gdje prepoznajemo jednadžbu gibanja harmoničkog oscilatora s frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a^3 m}.$$

Za gibanje naboja $-q$ duž y-osi odgovorna je y-komponenta električnoe sile. Uz $x = 0$ dobivamo

$$E_y[y] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{y}{|-a\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}|^3} + \frac{y}{|a\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}|^3}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2y}{(a^2+y^2)^{3/2}} = \frac{qy}{2\pi\epsilon_0 a^3}\frac{1}{(1+(y/a)^2)^{3/2}} \simeq \frac{qy}{2\pi\epsilon_0 a^3},$$

gdje smo, s obzirom da je pri malim oscilacijama vrijedi $|y| \ll a$, koristili razvoj $(1+\epsilon)^{-3/2} \simeq 1 - (3/2)\epsilon$. Jednadžbu gibanja pišemo kao

$$m\ddot{y} = F_y = -qE_y = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a^3}\,y,$$

odnosno $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$, gdje je frekvencija titranja

$$\omega_0^2 = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a^3 m}.$$

Rješenje: Titranje q duž x-osi: $\omega_0 = q/\sqrt{\pi\epsilon_0 a^3 m}$, titranje $-q$ duž y-osi: $\omega_0 = q/\sqrt{2\pi\epsilon_0 a^3 m}$

3 Zadatak: Električno polje opisano je izrazom

$$\mathbf{E}[\mathbf{r}] = \begin{cases} E_0(r/r_0)\,\hat{\mathbf{r}} & \text{za} \quad r \le r_0 \\ E_0(r_0/r)^2\,\hat{\mathbf{r}} & \text{za} \quad r > r_0, \end{cases}$$

gdje je $\mathbf{r}$ položaj točke u prostoru u odnosu na točku $\mathcal{O}$ (ishodište), r je udaljenost, $\hat{\mathbf{r}}$ je jedinični vektor, a E_0 i $r_0 > 0$ su konstante. Odredi količinu električnog naboja sadržanu unutar sfere polumjera r sa središtem u $\mathcal{O}$ te volumnu gustoću električnog naboja na udaljenosti r od točke $\mathcal{O}$.

Postupak: Prema Gaussovu zakonu za električno polje, količina naboja q unutar zatvorene plohe S razmjrena je toku električnog polja $\mathbf{E}$ kroz S,

$$q = \int_V \rho\,\mathrm{d}V = \epsilon_0 \oint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Kao S ovdje odabiremo sfernu plohu polumjera r sa središtem u $\mathcal{O}$. S obzirom da je zadano polje $\mathbf{E}$ svugdje okomito na tako odabranu plohu te da je svugdje na njoj jednakog iznosa, tok $\mathbf{E}$ kroz S jednak je produktu jakosti polja i ukupne površine plohe. Slijedi

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \begin{cases} E_0(r/r_0)\,4\pi r^2 & \text{za} \quad r \le r_0 \\ E_0(r_0/r)^2\,4\pi r^2 & \text{za} \quad r > r_0, \end{cases}$$

odnosno,

$$q[r] = \begin{cases} 4\pi\epsilon_0 E_0 r^3/r_0 & \text{za} \quad r \le r_0 \\ 4\pi\epsilon_0 E_0 r_0^2 & \text{za} \quad r > r_0. \end{cases}$$

Volumnu gustoću naboja na udaljenosti r od točke $\mathcal{O}$ dobit ćemo iz omjera naboja sadržanog između dviju sfernih ljuski čiji su polumjeri r i $r + \mathrm{d}r$ i volumena prostora među tim ljuskama,

$$\rho[r] = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} = \frac{q[r+\mathrm{d}r] - q[r]}{4\pi r^2\,\mathrm{d}r} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}q[r].$$

Slijedi

$$\rho[r] = \begin{cases} 3\epsilon_0 E_0/r_0 & \text{za} \quad r \le r_0 \\ 0 & \text{za} \quad r > r_0. \end{cases}$$

Prepoznajemo da je riječ o homogenoj raspodjeli naboja unutar sfere polumjera r_0 te o vakuumu izvan nje.

Gustoću naboja se također može odrediti iz Maxwellove jednadžbe, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. U pravokutnim koordinatama, pišući $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, unutar sfere polumjera $\mathbf{r}_0$ imamo

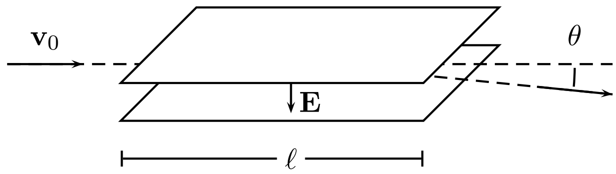
$$\rho = \epsilon_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \epsilon_0 \left(\mathbf{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \mathbf{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + \mathbf{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\cdot\left(\frac{E_0}{r_0}(\mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z)\right) = \cdots = \frac{3\epsilon E_0}{r_0},$$

dok izvan nje imamo

$$\rho = \epsilon_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \epsilon_0 \left(\mathbf{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \mathbf{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + \mathbf{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)\cdot\left(E_0 r_0^2 \frac{\mathbf{i}\,x + \mathbf{j}\,y + \mathbf{k}\,z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = \cdots = 0.$$

Rješenje: Za $r \le r_0$: $q[r] = 4\pi\epsilon_0 E_0 r^3/r_0$, $\rho[r] = 3\epsilon_0 E_0/r_0$, za $r > r_0$: $q = 4\pi\epsilon_0 E_0 r_0^2$, $\rho = 0$

4 Zadatak: Čestica mase m i naboja q ulijeće brzinom iznosa v_0 među paralelne ploče nabijenog kondenzatora. Prvobitan smjer gibanja čestice paralelan je s pločama, a duljina ploča u tom smjeru je ℓ (vidi sliku). Odredi kut otklona smjera gibanja čestice do kojeg dolazi uslijed prolaska kroz kondenzator ako je jakost homogenog električnog polja među pločama E. (Pretpostavljamo da čestica nije udarila u ploču kondenzatora.)



Postupak: Postavimo pravokutni koordinatni sustav tako da je ishodište u točki u kojoj čestica ulazi u kondenzator, orijentacija x-osi neka je podudarna s prvobitnim smjerom gibanja čestice, a y-os neka ima smjer obrnut u odnosu na smjer električnog polja. Jednadžba gibanja nabijene čestice u električnom polju, $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = q\mathbf{E}$, ovdje glasi

$$m\big(\ddot{x}[t]\,\mathbf{i} + \ddot{y}[t]\,\mathbf{j}\big) = -qE\,\mathbf{j}.$$

Uz pokratu

$$\gamma = qE/m$$

jednadžba gibanja svodi se na

$$\ddot{x}[t] = 0, \qquad \ddot{y}[t] = -\gamma,$$

što je podudarno s uobičajenim opisom gibanja čestice u homogenom polju gravitacijske sile ubrzanja $g = \gamma$. Integracijom jednadžbi gibanja uz početne uvjete u $t = 0$,

$$x[0] = y[0] = 0, \qquad \dot{x}[0] = v_0, \quad \dot{y}[0] = 0,$$

slijedi

$$x[t] = v_0 t, \qquad y[t] = -\frac{\gamma}{2}t^2,$$

što pak odgovara tzv. horizontalnom hitcu u homogenom polju gravitacijske sile. Čestica napušta kondenzator u trenutku $t = \tau$ u kojem vrijedi $x[\tau] = \ell$, odnosno

$$\tau = \ell/v_0.$$

Kut otkona slijedi iz

$$\tan\theta = -\frac{\dot{y}[\tau]}{\dot{x}[\tau]} = \frac{\gamma\tau}{v_0} = \frac{qE\ell}{mv_0^2}.$$

Rješenje: $\tan\theta = qE\ell/mv_0^2$

5 Zadatak: Čestica mase m i naboja q se slobodno giba kroz prostor u kojem nije prisutno elektromagnetsko polje. U trenutku $t = 0$ uključuje se homogeno magnetsko polje jakosti B i smjera okomitog na brzinu čestice, a u trenutku $t = \tau$ polje se gasi. Odredi otklon pravca gibanja čestice koji je nastupio uslijed prisutnosti magnetskog polja u tom vremenskom intervalu.

Postupak: Prije uključenja i nakon gašenja nagnetskog polja čestica se giba jednoliko pravocrtno, dok u vremenskom intervalu u kojem je prisutno polje $\mathbf{B}$ na nju djeluje magnetska komponenta Lorentzove sile,

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

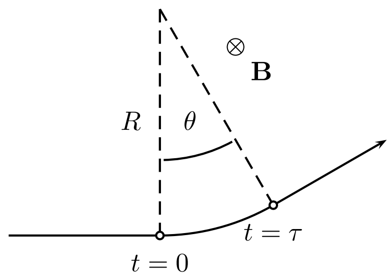
gdje je $\mathbf{v}$ brzina čestice. S obzirom da je početna brzina $\mathbf{v}$ okomita na $\mathbf{B}$, te da je $\mathbf{F}$ uvijek okomita na $\mathbf{B}$, slijedi da se gibanje odvija u ravnini okomitoj na $\mathbf{B}$. Nadalje, s obzirom da je $\mathbf{F}$ okomita na $\mathbf{v}$, slijedi da ona ima ulogu centripetalne sile koja mijenja smjer brzine $\mathbf{v}$, ali ne i njen iznos v. Iz svega navedenog slijedi da je riječ o gibanju u ravnini pod utjecajem centripetalne sile stalnog iznosa

$$F = |q|vB.$$

Takvoj sili odgovara kružno gibanje pri čemu vrijedi

$$F = \frac{mv^2}{R},$$

gdje je R polumjer putanje. Na skici koja slijedi smjer polja $\mathbf{B}$ je postavljen u skladu s pretpostavkom $q > 0$:



Kutnu brzinu ω možemo, na osnovu gornjih izraza za silu, napisati kao

$$\omega = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m},$$

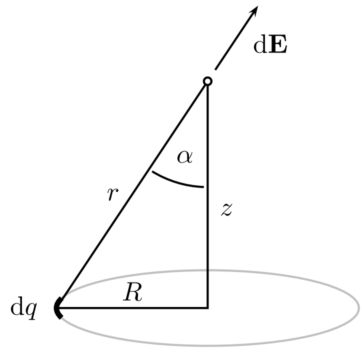
te kut otklona koji nastupa u vremenskom intervalu τ možemo napisati kao

$$\theta = \omega\tau = \frac{|q|B\tau}{m}.$$

Rješenje: $\theta = |q|B\tau/m$

6 Zadatak: Električni naboj jednoliko je raspoređen duž tankog obruča polumjera R. Odredi udaljenost od središta obruča onih točaka na njegovoj osi u kojima je jakost električnog polja najveća.

Postupak: Zadatak se može riješiti izravnim računanjem jakosti električnog polja u točkama na njegovoj osi.



Element naboja $\mathrm{d}q$ na obruču doprinosi električnom polju $\mathbf{E}$ u točki udaljenoj z od središta obruča elementom polja $\mathrm{d}\mathbf{E}$ čija je jakost

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}.$$

Zbog simetrije je očigledno da je ukupno polje $\mathbf{E} = \int \mathrm{d}\mathbf{E}$ usmjereno duž osi obruža (komponente $\mathrm{d}\mathbf{E}$ okomite na os se poništavaju). Stoga nas zanima isključivo komponenta $\mathrm{d}\mathbf{E}$ usmjerena duž osi obruča. Njen iznos možemo napisati kao

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E\,\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}q,$$

gdje smo koristili $\cos\alpha = z/r$ te $r^2 = R^2 + z^2$. Integracijom preko čitavog obruča

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

gdje je q ukupan naboj. Ekstrem nalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}E_z[z] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^2-2z^2}{(R^2+z^2)^{5/2}},$$

koji je ispunjen za

$$z = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Očigledno je da se radi o maksimumu jakosti polja jer električno polje iščezava u središtu prstena (zbog simetrije), kao i pri beskonačnoj udaljenosti.

Umjesto izravnom integracijom, jakost električnog polja može se odrediti i preko elektrostatskog potencijala U kao $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}U$. Neka je z-os podudarna s osi simetrije obruča i neka $z = 0$ odgovara njegovu središtu. Za točke na z-osi elektrostatski potencijal možemo napisati kao

$$U[z] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}.$$

z-komponenta električnog polja sada je

$$E_z[z] = -\frac{\partial}{\partial z}U[z] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}},$$

što se podudara s ranije dobivenim rezultatom.

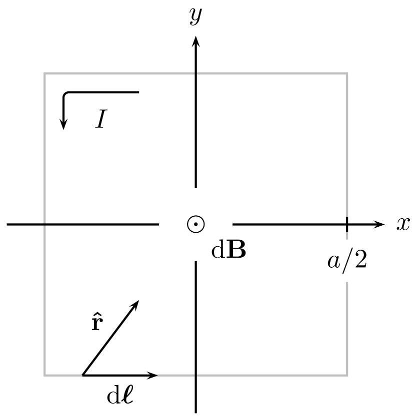
Rješenje: $z = R/\sqrt{2}$

7 Zadatak: Kvadratičnom petljom čija stranica ima duljinu $a = 10\,\mathrm{cm}$ teče struja jakosti $I = 1\,\mathrm{A}$. Primjenom Biot–Savartova pravila odredi jakost magnetskog polja B u sredini petlje. (Koristi se integral $\int (x^2 + c^2)^{-3/2}\,\mathrm{d}x = xc^{-2}(x^2 + c^2)^{-1/2}$, permeabilnost vakuuma $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-1}}$.)

Postupak: Prema Biot–Savartovu pravilu, element petlje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ kojim teče struja jakosti I doprinosi magnetskom polju u točki čiji je položaj u odnosu na $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ dan vektorom $\mathbf{r}$ kao

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}) \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

gdje je $r = |\mathbf{r}|$ udaljenost, a $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ je jedinični vektor. Skica prikazuje zadanu kvadratnu petlju smještenu u x, y-ravninu, element petlje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, te odgovarajući element polja $\mathrm{d}\mathbf{B}$ u središtu kvadrata i jedinični vektor $\hat{\mathbf{r}}$,



Element stranice kvadrata pri $y = -a/2$ (donja stranica na slici) možemo napisati kao

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mathbf{i}\,\mathrm{d}x.$$

Vektor položaja točke u kojoj računamo polje u odnosu na $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ je $\mathbf{r} = -x\,\mathbf{i} + (a/2)\,\mathbf{j}$ te udaljenost r i jedinični vektor $\hat{\mathbf{r}}$ pišemo kao

$$r = \sqrt{x^2 + (a/2)^2}, \qquad \hat{\mathbf{r}} = \frac{-x\,\mathbf{i} + (a/2)\,\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + (a/2)^2}}.$$

Slijedi

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \mathbf{k}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a/2}{(x^2 + (a/2)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$$

Doprinos čitave stranice kvadrata dobivamo integracijom,

$$\mathbf{B} = \int \mathrm{d}\mathbf{B} = \mathbf{k}\,\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{x=-a/2}^{a/2} \frac{a/2}{(x^2 + (a/2)^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{\mu_0 I}{\pi a \sqrt{2}}\,\mathbf{k}.$$

Konačno, s obzirom da sve četiri stranice kvadrata na jednak način doprinose polju u središtu kvadrata, ukupno polje dobivamo množenjem gornjeg izraza s četiri. Tražena jakost magnetskog polja je

$$B = 2\sqrt{2}\,\frac{\mu_0 I}{\pi a}.$$

Za zadane vrijednosti a i I dobivamo $B \simeq 1.132 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$.

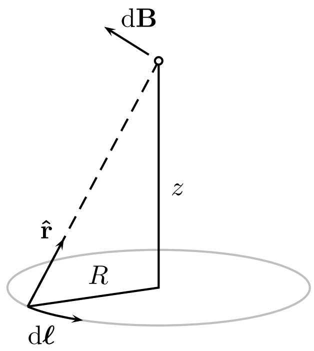
Rješenje: $B = 2\sqrt{2}\,\mu_0 I/\pi a \simeq 1.132 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$

8 Zadatak: Kružnom petljom teče električna struja stalne jakosti. Odredi polumjer petlje s kojim se postiže najveća jakost magnetskog polja u točki na osi petlje koja je udaljena z od središta petlje.

Postupak: Element magnetskog polja $\mathrm{d}\mathbf{B}$ u točki čiji je položaj u odnosu na element element struje $I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ dan s $\mathbf{r}$ opisan je Biot–Savartovim zakonom,

$$\mathrm{d}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}) \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

($r = |\mathbf{r}|$ je udaljenost, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ je jedinični vektor). Ovdje je $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ element kružnice polumjera R,



Na osnovu simetrije zaključujemo da je polje $\mathbf{B} = \int \mathrm{d}\mathbf{B}$ u točkama na osi petlje usmjereno duž same osi. Stoga je dovoljno integrirati uzdužnu komponentu $\mathrm{d}\mathbf{B}$ koju možemo napisati kao

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\mathrm{d}\ell}{r^2}\sin\phi = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{(z^2+R^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}\ell,$$

gdje je ϕ kut što ga $\hat{\mathbf{r}}$ zatvara s osi petlje, a zatim smo koristili $r = \sqrt{z^2+R^2}$ i $\sin\phi = R/r$. Integracijom po čitavoj petlji, uz $\int \mathrm{d}\ell = 2R\pi$, slijedi

$$B = B_z = \int \mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}.$$

Polumjer petlje R koji će dati najveći B za danu udaljenost z i jakost struje I dobivamo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}B = \cdots = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R(2z^2-R^2)}{(R^2+z^2)^{5/2}},$$

koji je izpunjen za

$$R = \sqrt{2}z.$$

Rješenje: $R = \sqrt{2}z$

9 Zadatak: Duž pravca kojim teče struja stalne jakosti I također je raspoređen naboj linijske gustoće λ. Odredi iznos brzine kojom se usporedno s tim pravcem mora gibati nabijena čestica kako bi elektromagnetska (Lorentzova) sila na česticu iščezla.

Postupak: Elektromagnetska (Lorentzova) sila na česticu naboja q koja se giba brzinom $\mathbf{v}$ u polju $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ dana je izrazom $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ te iščezava ako vrijedi

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0.$$

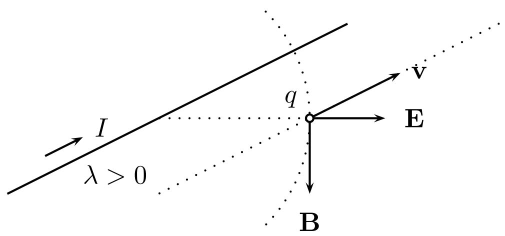
Električno polje naboja linijske gustoće λ raspoređenog po beskonačnom pravcu ima iznos

$$E[r] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r},$$

gdje je r udaljenost od pravca, a za $\lambda > 0$ je usjereno "radijalno prema van" u odnosu na pravac (taj rezultat slijedi iz primjene Gaussova zakona za električno polje). Magnetsko polje struje stvoreno strujom I koja teče beskonačnim pravcem ima jakost

$$B[r] = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r},$$

a smjer je određen "pravilom desne ruke" (rezultat slijedi iz primjene Ampèreova zakona). U ovom slučaju, pretpostavimo li da je pravac pozitivno nabijen te da struja teče u naznačenom smjeru, smjerove polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ možemo prikazati slikom:



Pretpostavimo li da se nabijena čestica giba u smjeru naznačenom na slici, s obzirom da su vektori $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ i $\mathbf{v}$ međusobno okomiti, uvjet za iščezavanje elektromagnetske sile se svodi na

$$E = vB,$$

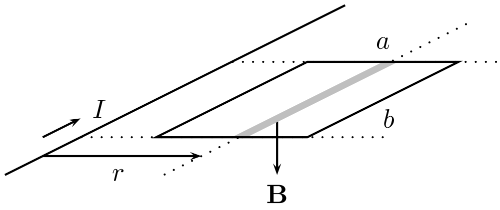
gdje su E, B i v iznosi tih vektora. Slijedi

$$v = \frac{E}{B} = \frac{\lambda c^2}{I}.$$

Rješenje: $v = \lambda c^2 / I$

10 Zadatak: Pravokutnik sa stranicama duljine $a = 2\,\mathrm{cm}$ i $b = 3\,\mathrm{cm}$ i beskonačni ravni vodič duž kojeg teče stalna struja jakosti $I = 5\,\mathrm{A}$ nalaze se u istoj ravnini. Vodiču je najbliža stranica pravokutnika duljine b, paralelna je s njim i nalazi se na udaljenosti $d = 1\,\mathrm{cm}$ od njega. Odredi tok magnetskog polja kroz prevokutnik. (Permeabilnost vakuuma $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$.)

Postupak: Vodič i kvadrat prikazujemo skicom:



Magnetsko polje okomito je na ravninu u kojoj leže vodič i petlja, a jakost polja ovisi o udaljenosti od vodiča r kao

$$B[r] = \frac{\mu_0 I}{2\pi\epsilon_0 r}$$

(gornji rezultat slijedi iz primjene Ampèreova zakona). Element toka magnetskog polja kroz plohu može se napisati kao

$$\mathrm{d}\Phi_B = B\,\mathrm{d}S,$$

gdje je $\mathrm{d}S$ element površine. Njega ovdje ovdje odabiremo kao vrpcu širine $\mathrm{d}r$ na udaljenosti r od vodiča (vrpca sive boje na gornjoj skici). Element toka sada je

$$\mathrm{d}\Phi_B = B[r]\,b\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I b}{2\pi r}\,\mathrm{d}r,$$

a integracijom preko čitavog pravolutnika slijedi

$$\Phi_B = \int \mathrm{d}\Phi_B = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I b}{2\pi r}\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left[\frac{d+a}{d}\right].$$

Za zadane vrijednosti a, b, d i I dobivamo $\Phi_B \simeq 3.29 \times 10^{-6}\,\mathrm{T\,m^2}$.

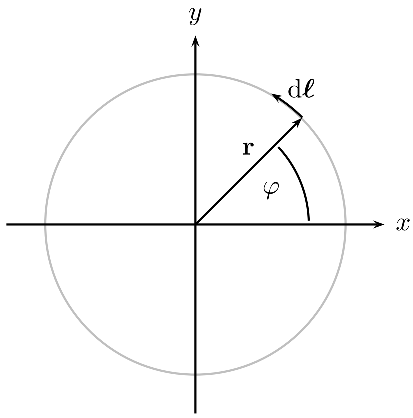
Rješenje: $\Phi_B = (\mu_0 I b/2\pi)\ln[(d+a)/d] \simeq 3.29 \times 10^{-6}\,\mathrm{T\,m^2}$

11 Zadatak: Odredi moment elektromagnetske sile koja djeluje na kružnu petlju polumjera R kojom teče struja jakosti I kada se ona nalazi u homogenom magnetskom polju jakosti B i smjera koji zatvara kut θ s okomicom na ravninu petlje.

Postupak: Element sile koja djeluje na element vodiča $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ kojim teče struja I u magnetskom polju $\mathbf{B}$ može se općenito napisati kao

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathrm{d}q\,(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = \mathrm{d}q\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{B}\right) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}) = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}.$$

Zadanu kružnu petlju ćemo smjestiti u ravninu $z=0$ kao što prikazuje slika:



Položaj elementa petlje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ možemo napisati kao

$$\mathbf{r} = R\,(\mathbf{i}\,\cos\varphi + \mathbf{j}\,\sin\varphi),$$

gdje je φ kutna koordinata, dok sam element krivulje možemo napisati kao

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = R\,\mathrm{d}\varphi\,(-\mathbf{i}\,\sin\varphi + \mathbf{j}\,\cos\varphi).$$

Magnetsko polje koje zatvara kut θ sa z-osi možemo napisati kao

$$\mathbf{B} = B\,(\mathbf{i}\,\sin\theta + \mathbf{k}\,\cos\theta).$$

Element momenta sile (u odnosu na ishodište) sada možemo napisati kao

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathbf{r}\times(I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}) &= (\mathbf{r}\cdot\mathbf{B})\,I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} - (\mathbf{r}\cdot I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell})\,\mathbf{B}\\ &= R^2 IB\,\mathrm{d}\varphi\,(-\mathbf{i}\,\cos\theta\,\cos\varphi\sin\varphi + \mathbf{j}\,\sin\theta\,\cos^2\varphi)\\ &= R^2 IB\,\mathrm{d}\varphi\left(-\mathbf{i}\,\cos\theta\,\frac{\sin 2\varphi}{2} + \mathbf{j}\,\sin\theta\,\cos^2\varphi\right),\end{aligned}$$

gdje smo najprije koristili opći vektorski identitet $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$, a zatim gornje izraze za $\mathbf{r}$, $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ i $\mathbf{B}$. Moment elektromagnetske sile slijedi integracijom gornjeg izraza preko čitave petlje. Očigledno je da će integral x-komponente biti jednak nuli jer se radi o oscilatornoj funkciji, dok je integral y-komponente također očigledan jer je srednja vrijednost kvadrata trigonometrijske funkcije na njenom punom periodu jednaka $1/2$. Slijedi

$$\mathbf{M} = \int \mathrm{d}\mathbf{M} = \mathbf{j}\,R^2\pi IB\,\sin\theta.$$

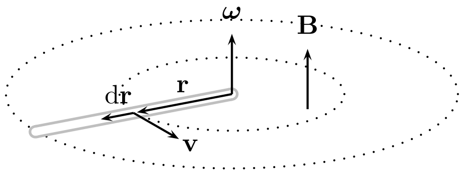
Rješenje: $M = R^2\pi IB\,\sin\theta$

12 Zadatak: Tanki vodljivi štap duljine ℓ okreće se oko svog kraja kutnom brzinom ω u ravnini okomitoj na homogeno magnetsko polje jakosti B. Odredi iznos inducirane elektromotorne sile na krajevima štapa.

Postupak: Elektromotorna sila je krivuljni integral sile koja djeluje na jedinični naboj,

$$\mathcal{E} = \int_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell},$$

gdje je $\mathbf{v}$ brzina elementa krivulje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$. Električno polje $\mathbf{E}$ u ovom slučaju nije prisutno, a odnos brzine elementa štapa $\mathbf{v}$ i magnetskog polja $\mathbf{B}$ prikazujemo slikom:



Vektor $\mathbf{r}$ pokazuje položaj elementa štapa u odnosu na os vrtnje. Brzinu elementa štapa može se napisati kao $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, a sam element kao $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \mathrm{d}\mathbf{r}$. Slijedi da možemo pisati

$$\mathcal{E} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = \int ((\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Koristeći opći identitet $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ te uzimajući u obzir da su $\mathbf{B}$ i $\boldsymbol{\omega}$ paralelni, dok su $\mathbf{B}$ i $\mathbf{r}$ okomiti, vektorski produkt iz gornjeg izraza za elektromotornu silu možemo raspisati kao

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} = B\omega\mathbf{r}.$$

Konačno

$$\mathcal{E} = \int B\omega\mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = B\omega \int_0^\ell r \,\mathrm{d}r = \frac{B\omega\ell^2}{2}.$$

Zadatak se može riješiti i primjenom Faradayeva zakona indukcije prema kojemu je elektromotorna sila inducirana u zatvorenoj petlji jednaka vremenskoj promjeni toka magnetskog polja kroz plohu omeđenu tom petljom. Ovdje uočavamo da krivulja koju razmatramo (štap) nije zatvorena, dakle ona ne omeđuje plohu, no moguć je sljedeći pristup. Kod homogenog i u vremenu stalnog polja jakosti B koje je okomito na plohu površine S možemo pisati

$$\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(BS) = B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}.$$

S obzirom da kraj štapa u vremenu $\mathrm{d}t$ napravi pomak $\ell\omega\,\mathrm{d}t$, površina koju štap prebriše jednaka je površini pravokutnog trokuta s katetama ℓ i $\ell\omega\,\mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\ell^2\omega\,\mathrm{d}t.$$

Slijedi $\mathcal{E} = B\omega\ell^2/2$, kao i ranije.

Rješenje: $\mathcal{E} = B\omega\ell^2/2$

13 Zadatak: Vodljiva žica duljine $L = 1\,\mathrm{m}$ s učvršćenim krajevima napeta je tako da frekvencija titranja transverzalnog stojnog vala u osnovnom modu iznosi $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$. Odredi amplitudu elektromotorne sile koja se inducira u toj žici kada na njoj titra stojni val amplitude $A = 1\,\mathrm{cm}$ u n-tom modu, a titranje se odvija u ravnini koja je okomita na homogeno magnetsko polje jakosti $B = 5 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$.

Postupak: Elektromotorna sila je definirana izrazom

$$\mathcal{E} = \int_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$$

gdje je $\mathbf{v}$ brzina elementa krivulje $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$, a $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ su električno i magnetsko polje. U zadanoj situaciji električno polje nije prisutno, a $\mathbf{v}$ je brzina kojom se žica giba pri titranju. Pravokutni koordinatni sustav postavljamo tako da žica leži na x-osi s krajevima pri $x = 0$ i $x = L$, te uzimamo da se titranje stojnog vala odvija u $z = 0$ ravnini. Otklon žice od ravnotežnog položaja opisujemo valnom funkcijom

$$y[x, t] = A \sin[n\pi x/L] \sin[n\omega_1 t + \phi]$$

gdje $n = 1, 2, \ldots$ odgovara različitim modovima titranja, a ϕ je općenit pomak u fazi. Takvom titranju odgovara brzina

$$\mathbf{v}[x, t] = \dot{y}[x, t]\,\mathbf{j} = An\omega_1 \sin[n\pi x/L] \cos[n\omega_1 t + \phi]\,\mathbf{j}.$$

Homogeno magnetsko polje je okomito na ravninu titranja pa pišemo

$$\mathbf{B} = B\,\mathbf{k}.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} &= \int_{x=0}^{L} \big((An\omega_1 \sin[n\pi x/L] \cos[n\omega_1 t + \phi]\,\mathbf{j}) \times (B\,\mathbf{k}) \big) \cdot (\mathbf{i}\,\mathrm{d}x) \\
&= ABn\omega_1 \cos[n\omega_1 t + \phi] \int_0^L \sin[n\pi x/L]\,\mathrm{d}x \\
&= ABn\omega_1 \frac{L}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \cos[n\omega_1 t + \phi].
\end{aligned}$$

Pišući $\cos n\pi = (-1)^n$, elektromotornu silu možemo napisati kao

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_n \cos(n\omega_1 t + \phi),$$

gdje je

$$\mathcal{E}_n = \frac{AB\omega_1 L}{\pi}(1 - (-1)^n)$$

amplituda elektromotorne sile pri titranju žice u n-tom modu. Važno je uočiti da ona iščezava za parne modove titranja. Za neparne modove, te za zadane vrijednosti parametara, amplituda elektromotorne sile je

$$\mathcal{E}_{1,3,\ldots} = \frac{2AB\omega_1 L}{\pi} = 4ABf_1 L \simeq 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{V}.$$

Rješenje: $\mathcal{E}_{1,3,\ldots} = 4ABf_1 L = 2 \times 10^{-4}\,\mathrm{V}$, $\mathcal{E}_{2,4,\ldots} = 0$

14 Zadatak: Homogeno ali o vremenu ovisno magnetsko polje ima stalan iznos B_0 te smjer koji leži u ravnini $z = 0$ i jednoliko se okreće kutnom brzinom ω. Odredi amplitudu titranja elektromotorne sile inducirane u zatvorenoj petlji koja leži u ravnini okomitoj na vektor $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ te omeđuje površinu S.

Postupak: Prema Faradayevu zakonu, inducirana elektromotorna sila jednaka je negativnoj vremenskoj promjeni toka magnetskog polja kroz petlju,

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Zadano magnetsko polje možemo napisati kao

$$\mathbf{B}[t] = B_0(\mathbf{i}\,\cos[\omega t + \phi] \pm \mathbf{j}\,\sin[\omega t + \phi]),$$

gdje pozitivni (negativni) predznak odgovara pozitivnom (negativnom) smjeru vrtnje vektora $\mathbf{B}$, a ϕ je fazni pomak. U nastavku ćemo odabrati pozitivan predznak (pozitivan smjer vrtnje) i fazni pomak $\phi = 0$. Vektorski element površine $\mathrm{d}\mathbf{S}$ je produkt iznosa površine $\mathrm{d}S$ i jediničnog vektora okomitog na nju. Ovdje možemo napisati

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{14}}\,\mathrm{d}S.$$

Za tok magnetskog polja dobivamo

$$\Phi_B[t] = \int_S \mathbf{B}[t]\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{B_0}{\sqrt{14}}\int_S(\cos[\omega t] + 2\sin[\omega t])\,\mathrm{d}S = \frac{B_0 S}{\sqrt{14}}(\cos[\omega t] + 2\sin[\omega t]),$$

te inducirana elektromotorna sila slijedi kao

$$\mathcal{E}[t] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B[t] = \frac{B_0 S\omega}{\sqrt{14}}(\sin[\omega t] - 2\cos[\omega t]).$$

Kako bismo u gornjem izrazu prepoznali amplitudu titranja, faktor u okruglim zagradama raspisujemo koristeći Eulerovu formulu za kompleksne brojeve,

$$\begin{aligned}\sin[\omega t] - 2\cos[\omega t] &= \cos[\omega t - \pi/2] - 2\cos[\omega t]\\ &= \mathrm{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \pi/2)} - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}]\\ &= \mathrm{Re}[-(\mathrm{i} + 2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}]\\ &= \mathrm{Re}[\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}]\\ &= \sqrt{5}\,\cos[\omega t + \psi].\end{aligned}$$

(Fazni pomak ψ u gornjem se izrazu pojavio kada smo kompleksni broj $-\mathrm{i} - 2$ napisali u obliku $\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$. Samu vrijednost faznog pomaka ψ ovdje nije potrebno posebno odrediti.) Slijedi da induciranu elektromotornu silu možemo napisati kao

$$\mathcal{E}[t] = \mathcal{E}_0\cos[\omega t + \psi],$$

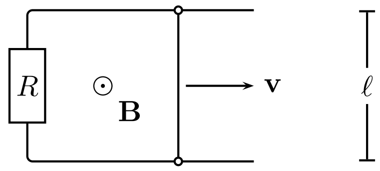
gdje je

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{5/14}\,B_0 S\omega$$

amplituda njenog titranja.

Rješenje: $\mathcal{E}_0 = \sqrt{5/14}\,B_0 S\omega$

15 Zadatak: Dvije paralelne vodljive tračnice leže u ravnini okomitoj na homogeno magnetsko polje jakosti B. Tračnice su povezane električnim otporom R, razmak među njima je ℓ, te po njima klizi vodljivi štap (vidi sliku). Odredi jakost sile koja mora djelovati na štap kako bi se on gibao stalnom brzinom iznosa v.



Postupak: Najprije ćemo odrediti induciranu elektromotornu silu, zatim struju koja teče petljom, te konačno silu koja djeluje na štap i koju treba uravnotežiti traženom vanjskom silom kako bi se štap gibao stalnom brzinom. Prema Faradayevu zakonu indukcije, elektromotorna sila inducirana u petlji koju čine tračnice, otpor i štap jednaka je (negativnoj) promjeni toka magnetskog polja kroz petlju. Ovdje možemo pisati

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}SB = -B\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t},$$

gdje je S površina petlje koja se u vremenu mijenja, a B je stalno magnetsko polje koje smo izlučili ispred operatora $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Pretpostavimo li da se štap giba brzinom iznosa v, on u vremenskom intervalu Δt napravi pomak $\Delta x = v\,\Delta t$, a time poveća površinu petlje za

$$\Delta S = \ell\,\Delta x = \ell v\,\Delta t.$$

Slijedi da možemo pisati

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \ell v,$$

odnosno

$$\mathcal{E} = -B\ell v.$$

Uslijed inducirane elektromotorne sile $\mathcal{E}$ petljom teće električna struja I čija je jakost određena električnim otporom R. Prema Ohmovu zakonu,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Silu koja djeluje na štap određujemo s pomoću izraza za element sile $\mathrm{d}\mathbf{F}$ koja djeluje na element vodiča $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}$ kojim teče struja I u polju $\mathbf{B}$,

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}.$$

Ovdje je ravni štap duljine ℓ okomit na homogeno polje te je jakost sile

$$F = I\ell B = \frac{\mathcal{E}\ell B}{R} = \frac{B^2\ell^2 v}{R}.$$

Tu je silu potrebno uravnotežiti traženom vanjskom silom kako bi štap bio u ravnoteži i gibao se stalnom brzinom iznosa v.

Rješenje: $F = B^2\ell^2 v/R$

16 Zadatak: Koaksijalni kabel se sastoji od vodljive jezgre polumjera $a = 1\,\mathrm{mm}$ i od vodljivog omotača polumjera $b = 2.5\,\mathrm{mm}$. Jezgra je nabijena linijskom gustoćom naboja $\lambda = 10^{-6}\,\mathrm{C\,m^{-1}}$, a omotač je nabijen linijskom gustoćom naboja jednakog iznosa ali suprotnog predznaka. Odredi energiju električnog polja po jedinici duljine kabla. (Permitivnost vakuuma $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$.)

Postupak: Volumna gustoća energije elektromagnetskog polja općenito je dana izrazom

$$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right),$$

gdje je E jakost električnog, a B je jakost magnetskog polja. Magnetsko polje ovdje nije prisutno, a električno polje u prostoru između jezgre i omotača možemo smatrati ekvivalentnim električnom polju beskonačnog pravca nabijenog linijskom gustoćom naboja λ. Jakost tog polja je

$$E[r] = \frac{\lambda}{2r\pi\epsilon_0}, \qquad a \le r \le b$$

(gornji izraz slijedi iz primjene Gaussova zakona za električno polje). Unutar same jezgre, kao i izvan omotača kabla, električno polje iščezava. Slijedi da je volumna gustoća energije elektromagnetskog polja unutar ovog kabla

$$w[r] = \frac{\epsilon_0}{2}E^2[r] = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_0 r^2}.$$

Energija sadržana u dijelu kabla duljine ℓ dobiva se integracijom po prostoru između jezgre kabla i omotača kabla. Element volumena $\mathrm{d}V$ možemo napisati kao umnožak površine omotača cilindra polumjera r i duljine ℓ, $A = 2r\pi\ell$, i radijalnog pomaka $\mathrm{d}r$,

$$\mathrm{d}V = 2r\pi\ell\,\mathrm{d}r.$$

Slijedi

$$E = \int_V w\,\mathrm{d}V = \int_a^b w[r]2r\pi\ell\,\mathrm{d}r = \int_a^b \frac{\lambda^2\ell}{4\pi\epsilon_0 r}\,\mathrm{d}r = \frac{\lambda^2\ell}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Energija polja po jedinici duljine kabla je

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\lambda^2}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Za zadane vrijednosti a, b i λ dobije se $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\ell \simeq 8.23 \times 10^{-3}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$.

Rješenje: $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\ell = (\lambda^2/4\pi\epsilon_0)\ln[b/a] \simeq 8.235 \times 10^{-3}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$

17 Zadatak: Koaksijalni kabel se sastoji od šuplje vodljive jezgre polumjera $a = 1\,\mathrm{mm}$ i vodljivog omotača polumjera $b = 5\,\mathrm{mm}$. Kroz vodiče u suprotnim smjerovima teku struje jednake jakosti $I = 1\,\mathrm{A}$. Odredi energiju magnetskog polja po jedinici duljine kabla. (Permeabilnost vakuuma $\mu_0 = 1.257 \times 10^{-6}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$.)

Postupak: Gustoća energije elektromagnetskog polja je općenito dana izrazom

$$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}V} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right).$$

U zadanoj situaciji električno polje nije prisutno, dok magnetsko polje iščezava unutar tanjeg vodiča jer kroz kružnu petlju polumjera $r < a$ ne teče struja, kao i izvan omotača jer se struje koje teku kroz kružnu petlju polumjera $r > b$ poništavaju. Jakosti magnetskog polja u prostoru između jezgre i omotača doprinosi struja koja teče jezgrom kabla. Prema Ampèreovu zakonu,

$$B[r] = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}, \qquad a \le r \le b.$$

Gustoća energije elektromagnetskog polja sada je

$$w[r] = \frac{1}{2\mu_0}B^2[r] = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}, \qquad a < r < b.$$

Energija sadržana u dijelu kabla duljine ℓ je

$$E = \int_V w\,\mathrm{d}V = \int_a^b w[r]\,2\pi r\ell\,\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Linijska gustoća energije kabla je

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\left[\frac{b}{a}\right].$$

Za zadane vrijednosti a, b i I dobije se $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\ell \simeq 1.61 \times 10^{-7}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$.

Rješenje: $\lambda = (\mu_0 I^2/4\pi)\ln[b/a] \simeq 1.61 \times 10^{-7}\,\mathrm{J\,m^{-1}}$

18 Zadatak: Ravni linearno polarizirani elektromagnetski val valne duljine λ širi se u vakuumu u smjeru jediničnog vektora $\mathbf{i}$. Amplituda titranja električnog polja tog vala je E_0, a smjer se podudara s vektorom $\mathbf{j}+\mathbf{k}$. Sastavi izraze koji opisuju pripadajuće magnetsko polje $\mathbf{B}$ te Poyntingov vektor $\mathbf{S}$.

Postupak: Općenit izraz za električno polje ravnog linearno polariziranog vala možemo napisati kao

$$\mathbf{E}[\mathbf{r},t] = \mathbf{E}_0 \cos[\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \phi],$$

gdje je $\mathbf{E}_0$ amplituda električnog polja (vektor), $\boldsymbol{\kappa}$ je valni vektor (vrijedi $\mathbf{E}_0\cdot\boldsymbol{\kappa} = 0$), $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ je položaj točke u prostoru, ω je frekvencija, t je vrijeme, a ϕ je fazni pomak. Za val valne duljine λ koji se u vakuumu širi u smjeru $\mathbf{i}$ imamo $\boldsymbol{\kappa} = \kappa\,\mathbf{i}$, $\kappa = 2\pi/\lambda$, $\omega = \kappa c$, te s obzirom na zadanu linearnu polarizaciju, $\mathbf{E}_0 = E_0\,(\mathbf{j}+\mathbf{k})/\sqrt{2}$. Slijedi

$$\mathbf{E}[x,t] = E_0\,\frac{\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}\,\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\phi\right].$$

Magnetsko polje dobivamo koristeći izraz $\mathbf{B} = \hat{\boldsymbol{\kappa}}\times(\mathbf{E}/c)$, gdje je u ovom slučaju $\hat{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{i}$. Slijedi

$$\mathbf{B}[x,t] = \frac{E_0}{c}\,\frac{-\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}\,\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\phi\right].$$

Poyntingov vektor, $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$, slijedi kao

$$\mathbf{S}[x,t] = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\,\mathbf{i}\,\cos^2\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\phi\right] = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\mathbf{i}\,\left(1+\cos\left[\frac{4\pi}{\lambda}(x-ct)+2\phi\right]\right).$$

Rješenje: $\mathbf{B}[x,t] = \frac{E_0}{c}\,\frac{-\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{2}}\,\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)+\phi]$, $\mathbf{S}[x,t] = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,\mathbf{i}\,(1+\cos[\frac{4\pi}{\lambda}(x-ct)+2\phi])$

19 Zadatak: Ukupna snaga Sunčeva zračenja je $L_\odot = 3.839 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$ (tzv. luminozitet Sunca), a srednja udaljenost Zemlje od Sunca je $a = 149.6 \times 10^9\,\mathrm{m}$ (tzv. astronomska jedinica). Odredi srednju vrijednost iznosa Poyntingova vektora na Zemlji. Zatim, pretpostavljajući da je Sunčevo zračenje ravni linearno polarizirani val, odredi amplitude kojima titraju električno i magnetsko polje.

Postupak: Srednja vrijednost iznosa Poyntingova vektora odgovara količini energije elektromagnetskog zračenja koja prolazi jediničnom plohom u jedinici vremena. Shvatimo li Sunce kao točkasti izvor snage $L_\odot$, srednju vrijednost iznosa Poyntingova vektora na udaljenosti a od Sunca možemo napisati kao

$$\langle S \rangle = \frac{L_\odot}{4a^2\pi} \simeq 1365\,\mathrm{W\,m^{-2}}.$$

Sam Poyntingov vektor definiran je izrazom

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

gdje su $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ električno i magnetsko polje. u ravnom valu $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ titraju u fazi, međusobno su okomiti, a za njihove amplitude E_0 i B_0 vrijedi

$$E_0 = cB_0.$$

Slijedi da iznos Poyntingova vektora u danoj točki prostora možemo napisati kao

$$S = \frac{1}{\mu_0}E_0B_0\cos^2[\omega t],$$

te s obzirom da je srednja vrijednost kvadrata trigonometrijske funkcije jednaka $1/2$, srednju vrijednost pišemo kao

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2\mu_0}E_0B_0.$$

Koristeći $E_0 = cB_0$ slijedi

$$E_0^2 = 2\mu_0 c\langle S \rangle = \frac{\mu_0 c L_\odot}{2a^2\pi},$$

odnosno,

$$B_0^2 = \frac{2\mu_0}{c}\langle S \rangle = \frac{\mu_0 L}{2ca^2\pi}.$$

Uz poznate konstante dobivamo vrijednosti $E_0 \simeq 1014\,\mathrm{V\,m^{-1}}$, $B_0 \simeq 3.383 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$.

Rješenje: $\langle S \rangle = L_\odot/4a^2\pi \simeq 1365\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, $E_0 = \sqrt{\mu_0 c L_\odot/2a^2\pi} \simeq 1014\,\mathrm{V\,m^{-1}}$, $B_0 = \sqrt{\mu_0 L_\odot/2ca^2\pi} \simeq 3.383 \times 10^{-6}\,\mathrm{T}$