Titranje

1 Zadatak: Najveći pomak u odnosu na ravnotežni položaj čestice koja harmonijski titra iznosi $x_{\max} = 5$ cm, a najveća brzina koju postiže je $v_{\max} = 12\ \mathrm{cm\,s^{-1}}$. Odredi iznos brzine u trenutku u kojem je pomak $x = 3$ cm.

Postupak: Otklon čestice pri harmonijskom titranju amplitudom a i kutnom brzinom ω može se napisati kao

$$x(t) = a \cos \omega t = x_{\max} \cos \omega t,$$

čemu odgovara brzina

$$v(t) = -\omega x_{\max} \sin \omega t = -v_{\max} \sin \omega t.$$

Iznos brzine slijedi kao

$$|v(t)| = v_{\max} |\sin \omega t| = v_{\max} \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = v_{\max} \sqrt{1 - (x(t)/x_{\max})^2}$$

Zadatak se može riješiti i korištenjem uvjeta očuvanja mehaničke energije,

$$E = T + U = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} k x_{\max}^2,$$

Odnosno uz oznaku $\omega_0^2 = k/m$,

$$v^2 + \omega_0^2 x^2 = v_{\max}^2 = \omega_0^2 x_{\max}^2.$$

Iz gornjeg sustava izlučimo v^2 uz eliminaciju ω_0^2,

$$v^2 = v_{\max}^2 - \omega_0^2 x^2 = v_{\max}^2 - \frac{v_{\max}^2}{x_{\max}^2} x^2.$$

Slijedi

$$v = v_{\max} \sqrt{1 - (x/x_{\max})^2}.$$

Rješenje: $v = v_{\max} \sqrt{1 - (x/x_{\max})^2} = 9.6\ \mathrm{cm\,s^{-1}}$

2 Zadatak: Objesimo li uteg o oprugu ona se produlji za $\Delta x_1 = 4\,\mathrm{cm}$. Objesimo li isti uteg o drugu oprugu ona se produlji za $\Delta x_2 = 6\,\mathrm{cm}$. Odredi periode kojima bi uteg titrao kada bismo ga objesili na te dvije opruge spojene u seriju i kada bismo ga objesili na te dvije opruge spojene paralelno. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Označimo li s m masu utega te s k_1 i k_2 konstante dvaju opruga, iz uvjeta ravnoteže utega kada on visi na tim oprugama slijedi

$$mg = k_1\,\Delta x_1 = k_2\,\Delta x_2.$$

Konstanta paralelnog spoja dvaju opruga je

$$k_\mathrm{p} = k_1 + k_2,$$

pa je odgovarajuća frekvencija titranja

$$\omega_\mathrm{p}^2 = \frac{k_\mathrm{p}}{m} = \frac{k_1}{m} + \frac{k_2}{m} = \frac{g}{\Delta x_1} + \frac{g}{\Delta x_2} = g\,\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1\,\Delta x_2}.$$

Konstanta serijskog spoja dvaju opruga je

$$k_\mathrm{s} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2},$$

pa je odgovarajuća frekvencija titranja

$$\omega_\mathrm{s}^2 = \frac{k_\mathrm{s}}{m} = \frac{k_1 k_2/m^2}{k_1/m + k_2/m} = \frac{g^2/\Delta x_1 \Delta x_2}{g/\Delta x_1 + g/\Delta x_2} = g\,\frac{1}{\Delta x_1 + \Delta x_2}.$$

Periode titranja računamo prema

$$T_\mathrm{p,s} = 2\pi\,\frac{1}{\omega_\mathrm{p,s}}.$$

Rješenje: $T_\mathrm{s} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{g}} \simeq 0.634\,\mathrm{s}$, $T_\mathrm{p} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{g\,(\Delta x_1 + \Delta x_2)}} \simeq 0.311\,\mathrm{s}$

3 Zadatak: Uteg leži na vodoravnoj podlozi koja titra u vodoravnom smjeru frekvencijom $f = 2\,\mathrm{Hz}$. Ako je koeficijent trenja između utega i podloge $\mu = 0.8$, odredi najveću amplitudu titranja podloge pri kojoj još ne dolazi do proklizavanja utega. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Pri harmonijskom titranju amplitudom A i frekvencijom ω najveća akceleracija tijela je $\omega^2 A$, pa je u skladu s time najveća sila koja na tijelo djeluje

$$m\omega^2 A.$$

Najveća bočna sila koju smijemo primijeniti na tijelo mase m, a da ono ne proklиže po vodoravnoj podlozi uz koeficijent trenja μ, jednaka je najvećoj sili koju može pružiti trenje, a to je

$$\mu m g.$$

Slijedi

$$m\omega^2 A \le \mu m g,$$

odnosno

$$A \le \frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{\mu g}{4\pi^2 f^2}.$$

Rješenje: $A_{\mathrm{max}} = \mu g/4\pi^2 f^2 \simeq 4.97\,\mathrm{cm}$

4 **Zadatak:** Uteg leži na vodoravnoj podlozi koja titra u uspravnom smjeru amplitudom $H = 1\,\mathrm{mm}$. Odredi najveću frekvenciju titranja podloge pri kojoj još ne dolazi do odvajanja utega od podloge. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: U neinercijskom sustavu vezanom uz vodoravnu podlogu koja se giba jednadžbu gibanja tijela mase m u smjeru okomitom na podlogu možemo napisati kao

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,y'(t) = -mg + N(t) - ma(t),$$

gdje je $y'(t)$ položaj tijela u odnosu na podlogu, g je ubrzanje gravitacijske sile, $N(t)$ je sila kojom podloga djeluje na tijelo i $a(t)$ je akceleracija neinercijskog sustava u odnosu na inercijski. Nju ćemo dobiti napišemo li visinu podloge koja titra amplitudom H i frekvencijom ω u inercijskom sustavu kao

$$h(t) = H\cos\omega t,$$

iz čega slijedi

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,h(t) = -\omega^2 H\cos\omega t.$$

Uvjet mirovanja tijela na podlozi sada možemo napisati u neinercijskom sustavu kao

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,y'(t) = 0 = -mg + N(t) + m\omega^2 H\cos\omega t.$$

Obzirom da $N(t)$ ne može biti negativna (jer podloga može gurati tijelo, ali ne i vući ga za sobom) slijedi uvjet

$$g - \omega^2 H\cos\omega t \geq 0,$$

a obzirom on mora biti ispunjen u svim trenucima vremena,

$$\omega^2 \leq g/H.$$

Najveća dopuštena frekvencija je dakle

$$\omega_{\max} = \sqrt{g/H}.$$

Rješenje: $\omega_{\max} = \sqrt{g/H} \simeq 99.0\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

5 Zadatak: Čestica mase m_1 i čestica mase m_2 povezane su oprugom konstante k. Odredi frekvenciju titranja tog sustava u slučaju kada čestice titraju duž pravca (tj. kada vrtnja para čestica u ravnini nije prisutna.)

Postupak: Neka su x_1 i $x_2 > x_1$ položaji čestica 1 i 2 na x-osi duž koje se odvija titranje. Jednadžbu gibanja možemo napisati kao

$$m\ddot{x}_1 = k\,(x_2 - x_1 - \ell) = -m\ddot{x}_2,$$

gdje je ℓ duljina opruge bez naprezanja. Uvedemo li varijablu

$$\xi = x_2 - x_1 - \ell,$$

što je produljenje opruge u odnosu na njenu duljinu bez naprezanja, imamo

$$\ddot{\xi} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\frac{k\xi}{m_2} - \frac{k\xi}{m_1} = -k\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\,\xi.$$

Jednadžbu gibanja u varijabli ξ možemo dakle napisati kao

$$\ddot{\xi} + k\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\,\xi = 0,$$

što prepoznajemo kao jednadžbu jednostavnog harmonijskog oscilatora s frekvencijom

$$\omega_0^2 = k\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}.$$

Rješenje: $\omega_0 = \sqrt{k(m_1 + m_2)/m_1 m_2}$

6 Zadatak: Čestica se giba u x, y-ravnini pod djelovanjem sile $\mathbf{F} = -k\,(x\,\mathbf{i} + 9y\,\mathbf{j})$. Napiši putanju čestice u obliku $y(x)$ ako je puštena u gibanje iz mirovanja u točki $\mathbf{r}_0 = x_0\,\mathbf{i} + y_0\,\mathbf{j}$.

Postupak: Jednadžba gibanja $m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ rastavljena na komponente vektora u ravnini daje

$$\begin{aligned} m\,\ddot{x}(t) &= -k\,x(t), \\ m\,\ddot{y}(t) &= -9k\,y(t), \end{aligned}$$

što su dvije nevezane jednadžbe gibanja. Prepoznajemo da je riječ o harmonijskom titranju u x-smjeru frekvencijom $\omega = \sqrt{k/m}$ te u y-smjeru tri puta većom većom frekvencijom. Položaj čestice u ravnini u skladu sa zadanim početnim uvjetima je

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos\omega t, \\ y(t) &= y_0 \cos 3\omega t \\ &= y_0 \left(\cos^3\omega t - 3\cos\omega t\,\sin^2\omega t\right) \\ &= y_0\,\cos\omega t\,\left(4\cos^2\omega t - 3\right). \end{aligned}$$

Eliminacijom $\cos\omega t$ iz gornjeg sustava slijedi

$$y(t) = y_0 \frac{x(t)}{x_0}\left(4\left(\frac{x(t)}{x_0}\right)^2 - 3\right).$$

Rješenje: $y(x) = y_0\,(x/x_0)\big(4(x/x_0)^2 - 3\big)$

7 Zadatak: Tijelo mase m_1 nalijeće brzinom v_1 na tijelo mase m_2 koje je oprugom konstante k spojeno za čvrsto uporište i miruje. Sudar je savršeno neelastičan. Odredi amplitudu titranja tijela nastalog u sudaru.

Postupak: Pretpostavimo li da se sudar odvija dovoljno brzo opruga nema utjecaj na odvijanje samog sudara (ona se ne stiže ni sabiti ni rastegnuti pa ne djeluje silom.) Stoga sudar razmatramo kao da se odvija među slobodnim česticama. U savršeno neelastičnom sudaru nastat će tijelo mase $m_1 + m_2$ koje će se u trenutku nakon sudara gibati brzinom v'. Tu brzinu ćemo odrediti iz uvjeta očuvanja količine gibanja,

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v'.$$

Slijedi da je kinetička energija tijela nastalog u sudaru u trenutku nakon sudara

$$T = \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\,v'^2 = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)},$$

što je, obzirom da se u tom trenutku tijelo nalazi u ravnotežnom položaju, ujedno i ukupna energija titranja. Amplitudu titranja A odredit ćemo iz uvjeta da je ukupna energija jednaka potencijalnoj kada je otklon sustava od ravnotežnog položaja najveći, dakle jednak samoj amplitudi,

$$E = \frac{m_1^2 v_1^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{1}{2}\,k\,A^2,$$

odnosno,

$$A = \frac{m_1 v_1}{\sqrt{k(m_1 + m_2)}}.$$

Rješenje: $A = m_1 v_1 / \sqrt{k(m_1 + m_2)}$

8 **Zadatak:** Tijelo mase m nalijeće brzinom v na tijelo mase $2m$ koje je oprugom konstante k spojeno za čvrsto uporište i miruje. Sudar je savršeno elastičan. Odredi amplitudu kojom tijelo mase $2m$ titra nakon sudara.

Postupak: Sudar razmatramo kao da se odvija među slobodnim česticama. (Ako se sudar odvija dovoljno brzo onda opruga nema utjecaj na odvijanje samog sudara jer se ona ne stiže ni sabiti ni rastegnuti pa ne djeluje silom.) Brzinu tijela mase m u trenutku nakon sudara označimo s v', a brzinu tijela mase $2m$ s w'. Te brzine su određene uvjetima očuvanja količine gibanja,

$$mv = mv' + (2m)w',$$

i očuvanja kinetičke energije,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}(2m)w'^2.$$

Eliminacijom v' iz sustava slijedi

$$w = \frac{2}{3}v.$$

Kinetička energija tijela mase $2m$ u trenutku nakon sudara je

$$T = \frac{1}{2}\,(2m)\,w^2 = \frac{4}{9}mv^2,$$

što je, obzirom da se u tom trenutku tijelo nalazi u ravnotežnom položaju, ujedno i ukupna energija titranja. Amplitudu titranja A odredit ćemo iz uvjeta da je ukupna energija jednaka potencijalnoj kada je otklon sustava od ravnotežnog položaja najveći, dakle jednak samoj amplitudi,

$$E = \frac{4}{9}mv^2 = \frac{1}{2}\,k\,A^2,$$

odnosno,

$$A = v\sqrt{\frac{8m}{9k}}.$$

Rješenje: $A = v\sqrt{8m/9k}$

9 Zadatak: Tijelo mase $m = 10\,\mathrm{g}$ leži na vodoravnoj podlozi s kojom ima koeficijent trenja $\mu = 0.1$ i oprugom konstante $k = 1\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ je pričvršćeno za uporište. Pustimo li tijelo u gibanje iz mirovanja iz točke koja je $x_0 = 10\,\mathrm{cm}$ udaljena od točke u kojoj sila opruge iščezava, odredi put koji će ono prevaliti do trenutka u kojem će se po prvi puta zaustaviti. (Ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Uvedimo najprije x-os tako da $x = 0$ odgovara položaju tijela u kojem sila opruge iščezava, x_0 je položaj iz kojeg kreće u gibanje, a x_1 neka je položaj u kojem će se po prvi puta zaustaviti. Ukupna energija sustava u trenutku u kojem puštamo tijelo u gibanje je potencijalna energija opruge,

$$E = \frac{1}{2}kx_0^2.$$

U trenutku u kojem će se tijelo ponovo zaustaviti ta energija će se dijelom utrošiti na savladavanje sile trenja, a dijelom će biti prisutna u obliku potencijalne energije opruge,

$$E = \mu\, mg\, |x_1 - x_0| + \frac{1}{2}kx_1^2.$$

Obzirom da se tijelo giba u smjeru negativne x-osi prevaljeni put je

$$s = |x_1 - x_0| = x_0 - x_1,$$

te izjednačavanjem gornjih izraza za energiju imamo

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \mu\, mg\,(x_0 - x_1) + \frac{1}{2}kx_1^2.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe po x_1 slijedi

$$x_1 = -x_0 + 2mg\mu/k$$

(te kao drugo ovdje nezanimljivo rješenje $x_1 = x_0$.) Konačno, prevaljeni put je

$$s = |x_1 - x_0| = x_0 - x_1 = 2x_0 - 2mg\mu/k.$$

Rješenje: $s = 2x_0 - 2mg\mu/k = 18.04\,\mathrm{cm}$

10 Zadatak: Položaj čestice u x, y-ravnini opisan je vektorom $\mathbf{r}(t) = A\,(\sin\omega t\;\mathbf{i} + \cos 2\omega t\;\mathbf{j})$. Odredi najveći iznos brzine koju čestica postiže tokom gibanja.

Postupak: Vektor brzine možemo napisati kao

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathbf{r}(t) &= \omega A\,(\cos\omega t\;\mathbf{i} - 2\cos 2\omega t\;\mathbf{j}) \\ &= \omega A\,(\cos\omega t\;\mathbf{i} - 4\cos\omega t\;\sin\omega t\;\mathbf{j}),\end{aligned}$$

te kvadrat njena iznosa kao

$$\begin{aligned}v^2(t) &= \omega^2 A^2\,(\cos^2\omega t + 16\cos^2\omega t\;\sin^2\omega t) \\ &= \omega^2 A^2 \cos^2\omega t\,(17 - 16\cos^2\omega t).\end{aligned}$$

Slijedi postupak pronalaženja maksimuma funkcije v^2. Uvedemo li varijablu

$$u = \cos^2\omega t,$$

potražit ćemo ekstreme funkcije $v^2(u)$ u intervalu $u \in [0, 1]$,

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,v^2(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\omega^2 A^2 u\,(17 - 16u) = \omega^2 A^2\,(17 - 32u),$$

dakle ekstrem imamo pri

$$u = 17/32,$$

što je maksimum (jer za $u = 0$ imamo $v = 0$.) Konačno,

$$v_{\mathrm{max}} = \frac{17}{8}\,\omega A.$$

Rješenje: $v_{\mathrm{max}} = (17/8)\,\omega A$

11 Zadatak: Matematičko njihalo duljine ℓ visi u kolicima koja uz koeficijent trenja μ klize niz kosinu nagiba α. Masa njihala neznatna je u odnosu na masu kolica. Odredi frekvenciju njihala. (Ubrzanje gavitacijske sile označite s g.)

Postupak: Postavimo li pravokutni koordinatni sustav (x, y) vezan uz kosinu tako da je x-os paralelna kosini i usmjerena niz nju, dok je y-os okomina na kosinu i gleda uvis (ovaj sustav shvaćamo kao inercijski), ubrzanje gravitacijske sile je

$$\mathbf{g} = g\,(\sin\alpha\;\mathbf{i} - \cos\alpha\;\mathbf{j}),$$

dok je akceleracija kolica (vidi ranije zadatke iz mehanike) koja klize niz kosinu uz trenje u tom sustavu

$$\mathbf{a}_0 = g\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\;\mathbf{i}.$$

Akceleracija kolica $\mathbf{a}_0$ ujedno je i akceleracija sustava (x', y') vezanog uz kolica u odnosu na sustav (x, y). (Osi x' i y' tog sustava neka su paralelne osima x i y, tako da se jedinični vektori podudaraju.) Shvatimo li sustav vezan uz kolica kao neinercijski, općenitu jednadžbu gibanja čestice mase m u tom sustavu možemo napisati (s pomoću D'Alambertova principa) kao

$$\begin{aligned} m\,\mathbf{a}' &= -m\,\mathbf{a}_0 + m\,\mathbf{g} + \mathbf{F}, \\ &= m\,g\cos\alpha\,(\mu\;\mathbf{i} - \mathbf{j}) + \mathbf{F} \end{aligned}$$

gdje je $-m\,\mathbf{a}_0$ inercijska sila, $m\,\mathbf{g}$ je težina, a $\mathbf{F}$ uključuje sve ostale realne sile. Vidimo da je jednadžba gibanja u sustavu kolica ekvivalentna jednadžbi gibanja u polju gravitacijske sile s ubrzanjem

$$\mathbf{g}' = g\;\cos\alpha\,(\mu\;\mathbf{i} - \mathbf{j}),$$

odnosno iznosa $g' = g\cos\alpha\sqrt{1+\mu^2}$. Obzirom da je poznato da matematičko njihalo duljine ℓ u gravitacijskom polju ubrzanja g ima frekvenciju $\omega = \sqrt{g/\ell}$, u sustavu kolica ćemo imati

$$\omega'^2 = \frac{g'}{\ell} = \frac{g}{\ell}\;\cos\alpha\sqrt{1+\mu^2}.$$

Rješenje: $\omega' = \sqrt{(g/\ell)\cos\alpha\sqrt{1+\mu^2}}$

12 Zadatak: Homogena kugla polumjera r obješena je o strop s pomoću niti duljine d (kraj niti učvršćen je za točku na površini kugle.) Odredite relativnu pogrešku koju bismo napravili izračunamo li period njihanja kugle pretpostavljajući da je sva masa kugle sažeta u njenu središtu, tj. da se radi o matematičkom njihalu duljine $\ell = d + r$. (Konačni rezultat izrazi s pomoću parametara r i ℓ.)

Postupak: Period matematičkog njihala duljine ℓ je

$$T_{\text{mat.}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

dok za period fizičkog njihala koristimo poznati izraz

$$T_{\text{fiz.}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m g\, b}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\text{cm}} + m\, b^2}{m g\, b}},$$

gdje je I_{cm} moment tromosti njihala u odnosu na os koja je paralelna osi njihanja a prolazi središtem mase, m je masa njihala, a b je udaljenost središta mase od osi njihanja. U našem slučaju

$$b = \ell,$$

te ozbirom da se radi o homogenoj kugli

$$I_{\text{cm}} = \frac{2}{5}\, m r^2.$$

Relativnu pogrešku možemo napisati kao

$$\epsilon = \frac{T_{\text{mat.}} - T_{\text{fiz.}}}{T_{\text{fiz.}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2r^2/5\ell^2}} - 1 \simeq -\frac{r^2}{5\ell^2}.$$

Rješenje: $\epsilon = (T_{\text{mat.}} - T_{\text{fiz.}})/T_{\text{fiz.}} = (1 + 2r^2/5\ell^2)^{-1/2} - 1 \simeq -r^2/5\ell^2$

13 Zadatak: Odredite udaljenost od središta homogenog štapa duljine ℓ na kojoj treba postaviti vodoravnu os da bi period njegovog (malog) njihanja oko te osi bio najkraći.

Postupak: Period njihala koje njiše oko vodoravne osi može se napisati kao

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\mathrm{cm}} + mb^2}{mgb}}$$

gdje je I_{cm} moment tromosti u odnosu na paralelnu os koja prolazi središtem mase, m je masa njihala, a b je udaljenost osi njihanja od središta mase. Ekstrem perioda pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}T = \frac{1 - I_{\mathrm{cm}}/b^2 m}{2Tg},$$

koji je ispunjen za

$$b^2 = I_{\mathrm{cm}}/m,$$

što odgovara minimumu jer $T \to \infty$ za $b \to 0$ kao i za $b \to \infty$. Za homogeni štap $I_{\mathrm{cm}} = m\ell^2/12$, pa slijedi

$$b = \frac{\ell}{2\sqrt{3}}.$$

Rješenje: $b = \ell/2\sqrt{3}$

14 Zadatak: Homogena kugla polumjera r i mase m položena je u dno sferne udubine polumjera zakrivljenosti $R > r$. Odredi frekvenciju malih titraja ako kugla bez klizanja "njiše" oko ravnotežnog položaja.

Postupak: Jednadžbu gibanja, te iz nje frekvenciju titranja, dobit ćemo iz uvjeta očuvanja energije, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Gravitacijsku potencijalnu energiju kugle možemo napisati koristeći kut Φ koji mjeri otklon kugle iz ravnotežnog položaja kako ga vidimo iz središta zakrivljenosti sferne udubine,

$$U = mg(R-r)(1-\cos\Phi) \simeq mg(R-r)\Phi^2/2.$$

Kinetičku energiju napisat ćemo kao doprinos uslijed gibanja središta mase kugle brzinom v_{cm} i doprinos uslijed vrtnje kugle oko osi kroz središte mase kutnom brzinom $\dot\varphi$,

$$T = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{cm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{cm}}\dot\varphi^2.$$

Iz geometrije sustava slijedi da brzinu središta mase možemo napisati kao $v_{\mathrm{cm}} = (R-r)\dot\Phi$, dok za kutnu brzinu vrijedi $r\dot\varphi = (R-r)\dot\Phi$, te uz $I_{\mathrm{cm}} = \frac{2}{5}mr^2$ za homogenu kuglu, imamo

$$T = \frac{1}{2}m\Big((R-r)\dot\Phi\Big)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{R-r}{r}\dot\Phi\right)^2 = \frac{7}{10}m(R-r)^2\dot\Phi^2.$$

Uvjet očuvanja energije glasi

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U) = \Big(g\Phi + \frac{7}{5}(R-r)\ddot\Phi\Big)(R-r)m\dot\Phi,$$

odnosno,

$$\ddot\Phi + \frac{5g}{7(R-r)}\Phi = 0,$$

što prepoznajemo kao jednadžbu gibanja jednostavnog harmonijskog titranja frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{5g}{7(R-r)}.$$

Rješenje: $\omega_0 = \sqrt{5g/7(R-r)}$

15 Zadatak: Kada kruto tijelo njiše oko čvrste vodoravne osi (fizičko njihalo) njegov period pri malim titrajima neka je T. Koliki će biti period istog njihala ako se i tijelo i os nagnu tako da os zatvara kut α s vodoravnom ravninom.

Postupak: Jednadžba gibanja za njihanje tijela oko čvrste vodoravne osi je

$$I\ddot{\phi} = -mgb\sin\phi \simeq -mgb\,\phi,$$

gdje je I moment tromosti tijela oko osi, ϕ je kut otklona od ravnotežnog položaja, mg je težina njihala i b je udaljenost središta mase njihala od osi. Pri malim otklonima $\sin\phi \simeq \phi$, te je frekvencija titranja $\omega_0^2 = mgb/I$, odnosno period je

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{I/mgb}.$$

Obzirom da se radi o gibanju tijela oko čvrste osi, od važnosti su jedino zakretni momenti čiji smjer se podudara sa smjerom osi, a do njih dovode isključivo sile koje su okomite na os. Kada je os vodoravna, težina tijela mg je okomita na os. Kada os zatvara kut α s vodoravnom osi, komponenta težine njihala okomita na os je $mg\cos\alpha$, pa zaključujemo da jednadžba gibanja glasi

$$I\ddot{\phi} = -(mg\cos\alpha)b\sin\phi \simeq -mgb\cos\alpha\,\phi,$$

frekvencija je ${\omega'}_0^2 = mgb\cos\alpha/I$, odnosno period

$$T' = 2\pi/{\omega'}_0 = 2\pi\sqrt{I/mgb\cos\alpha} = T/\sqrt{\cos\alpha}$$

Rješenje: $T' = T/\sqrt{\cos\alpha}$

16 Zadatak: U cijevi u obliku slova 'U' površine poprečnog presjeka $S = 1\,\mathrm{cm}^2$ nalazi se $m = 20\,\mathrm{g}$ vode. Odredite period titranja razine vode. Pretpostavite da je obujam koljena cijevi zanemariv, da nema trenja pri protjecanju vode kroz cijevi te da je vanjski tlak jednak u oba dva kraka cijevi. (Gustoća vode $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.)

Postupak: Jednadžbu gibanja te iz nje frekvenciju titranja dobit ćemo na osnovu uvjeta očuvanja energije, $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$. Uvedimo uspravnu y-os tako da $y = 0$ odgovara razini tekućine u ravnoteži. Dubina vode u "U-cijevi" je

$$d = \frac{V}{2S} = \frac{m}{2S\rho},$$

odnosno, dno cijevi se nalazi na $y = -d$. Kada se voda u lijevom stupcu podigne na visinu $y = h$, a u lijevom se spusti na $y = -h$, gravitacijsku potencijalnu energiju vode možemo napisati kao

$$U = \frac{d+h}{d}\frac{mg}{2}\left(-\frac{d}{2}+\frac{h}{2}\right) + \frac{d-h}{d}\frac{mg}{2}\left(-\frac{d}{2}-\frac{h}{2}\right),$$

gdje prvi član odgovara stupcu u kojem se voda podigla na visinu $y = h$, faktor $\frac{d+h}{d}\frac{mg}{2}$ je težina vode u tom stupcu, a $-\frac{d}{2}+\frac{h}{2}$ je visina na kojoj se nalazi središte mase. Sređivanjem izraza,

$$U = \frac{mg}{2d}\,h^2 + \mathrm{const.}$$

Kinetička energija vode koja teče kroz cijev brzinom $v = \dot{h}$ je

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{h}^2.$$

Uvjet očuvanja energije daje

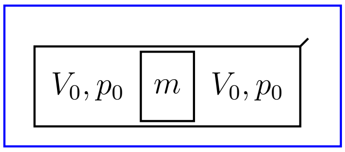
$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U) = m\dot{h}\,(\ddot{h} + \frac{g}{d}h),$$

u čemu prepoznajemo jednadžbu gibanja jednostavnog harmonijskog titranja frekvencijom $\omega_0^2 = g/d$, odnosno s periodom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2S\rho g}}.$$

Rješenje: $T = 2\pi\sqrt{m/2S\rho g} \simeq 0.634\,\mathrm{s}$

17 Zadatak: Pomični klip mase m i površine poprečnog presijeka S nalazi se u nepomičnom cilindru zatvorenom na oba kraja. Sa svake strane klipa nalazi se jednaka količina plina adijabatske konstante γ. Kada je klip u ravnotežnom stanju, plin s jedne i s druge strane klipa je pri istoj temperaturi i zauzima obujam V_0 pri tlaku p_0. Pretpostavljajući da klip klizi bez trenja, da plin ne protječe pored klipa, te da je proces sažimanja i širenja plina adijabatski, odredi frekvenciju malih titraja klipa oko ravnotežnog položaja.



Postupak: Postavimo x-os usmjerenu duž cilindra tako da $x = 0$ odgovara ravnotežnom položaju klipa, a $x > 0$ neka odgovara pomaku klina nadesno. Jednadžba gibanja klipa glasi

$$m\ddot{x} = S\,(p_1(x) - p_2(x)),$$

gdje je p_1 tlak s lijeve, a p_2 tlak s desne strane Pri adijabatskom procesu vrijedi $pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$, pa ovdje imamo

$$p_1(x)\,(V_0 + Sx)^\gamma = p_0 V_0^\gamma = p_2(x)\,(V_0 - Sx)^\gamma,$$

odnosno, uz razvoj u red po (malom) parametru x,

$$p_{1,2}(x) = p_0 \frac{V_0^\gamma}{(V_0 \pm Sx)^\gamma} = p_0 \mp \frac{p_0 S\gamma}{V_0}\,x + \mathcal{O}(x^2).$$

Sada uzimamo $p_1(x) - p_2(x) = -2\,p_0 S\gamma/V_0$, pa jednadžba gibanja glasi

$$\ddot{x} + \frac{2S^2 p_0\gamma}{mV_0}\,x = 0,$$

što je jednadžba jednostavnog harmonijskog titranja frekvencijom

$$\omega_0^2 = \frac{2S^2 p_0\gamma}{mV_0}.$$

Rješenje: $\omega_0 = \sqrt{2S^2 p_0\gamma/mV_0}$

Prigušeno titranje

18 **Zadatak:** Položaj čestice koja prigušeno titra želimo opisati izrazom $x(t) = A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t - \phi)$. Ako je poznato da u trenutku $t = 0$ čestica miruje pri otklonu $x = x_0$, odredi amplitudu A i fazni pomak ϕ.

Postupak: Ako je položaj opisan izrazom

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t - \phi),$$

onda brzinu možemo napisati kao

$$\dot{x}(t) = -(\delta + \omega\tan(\omega t + \phi))x(t).$$

Početni uvjeti su

$$x(0) = A\cos\phi = x_0,$$
$$\dot{x}(0) = -(\delta + \omega\tan\phi)x_0 = 0.$$

Iz uvjeta za brzinu zaključujemo

$$\tan\phi = -\delta/\omega.$$

Napišemo li

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\delta/\omega)^2}},$$

iz uvjeta za položaj slijedi

$$A = \frac{x_0}{\cos\phi} = x_0\sqrt{1+(\delta/\omega)^2}.$$

Rješenje: $\tan\phi = -\delta/\omega,\ A = x_0\sqrt{1+(\delta/\omega)^2}$

19 Zadatak: Koordinate triju uzastopnih krajnjih položaja čestice koja prigušeno titra su $x_1 = 20\,\mathrm{cm}$, $x_2 = 5.6\,\mathrm{cm}$ i $x_3 = 12.8\,\mathrm{cm}$. Odredi koordinatu ravnotežnog položaja.

Postupak: Položaj čestice koja prigušeno titra duž x-osi možemo općenito napisati kao

$$x(t) = x_\infty + A\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t + \phi),$$

gdje je x_∞ koordinata ravnotežnog položaja. Lako je pokazati da se čestica nalazi u krajnjim položajima u trenucima koji su u vremenu razmaknuti polovicu perioda prigušenog titranja, pa slijedi da za koordinate dvaju uzastopnih krajnjih položaja vrijedi

$$\frac{x_{n+1} - x_\infty}{x_n - x_\infty} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)}.$$

U našem slučaju imamo

$$\frac{x_\infty - x_2}{x_1 - x_\infty} = \mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)} = \frac{x_3 - x_\infty}{x_\infty - x_2},$$

odnosno

$$(x_1 - x_\infty)(x_3 - x_\infty) = (x_\infty - x_2)^2.$$

Konačno

$$x_\infty = \frac{x_1 x_3 - x_2^2}{x_1 - 2x_2 + x_3}.$$

Rješenje: $x_\infty = (x_1 x_3 - x_2^2)/(x_1 - 2x_2 + x_3) = 10.4\,\mathrm{cm}$

20 Zadatak: Čestica koja prigušeno titra s logaritamskim dekrementom prigušenja $\lambda = 0.002$ puštena je u gibanje iz mirovanja pri otklonu $x_0 = 1\,\mathrm{cm}$ u odnosu na ravnotežni položaj. Odredi ukupni put koji će čestica preći do "konačnog zaustavljanja".

Postupak: Ako $x = 0$ odgovara ranvotežnom položaju, uzastopni krajnji položaji čestice koja prigušeno titra zadovoljavaju relaciju

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = -\mathrm{e}^{-\delta\,(T/2)} = -\mathrm{e}^{-\lambda/2},$$

gdje je x_n položaj n-tog krajnjeg položaja, δ je koeficijent prigušenja, T je period prigušenog titranja, a $\lambda = \delta T$ je logaritamski dekrement prigušenja. Ukupan put koji čestica pravaljuje titrajući, krene li iz mirovanja pri otklonu x_0, možemo napisati kao

$$\begin{aligned} s &= |x_0| + 2|x_1| + 2|x_2| + 2|x_3| + \cdots \\ &= x_0 + 2x_0\mathrm{e}^{-\lambda/2} + 2x_0\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^2 + 2x_0\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^3 + \cdots \\ &= x_0\Big(-1 + 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^k\Big). \end{aligned}$$

Sumu prepoznajemo kao geometrijski red,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\lambda/2}\right)^k = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda/2}},$$

te je prevaljeni put

$$s = x_0\left(\frac{2}{1-\mathrm{e}^{-\lambda/2}} - 1\right).$$

Rješenje: $s = x_0\left(2/(1-\mathrm{e}^{-\lambda/2}) - 1\right) \simeq 4x_0/\lambda \simeq 20\,\mathrm{m}$

21 Zadatak: Muzička vilica u zraku titra frekvencijom $f = 440\,\mathrm{Hz}$, a amplituda titranja joj se smanjuje na jednu polovinu početne vrijednosti u vremenu $\tau_{1/2} = 4\,\mathrm{s}$. Odredi koliko bi se smanjila frekvencija titranja iste vilice kada bi ona titrala u sredstvu zbog kojeg bi se amplituda smanjivala na jednu polovinu u vremenu $\tau'_{1/2} = 3\,\mathrm{s}$.

Postupak: Pri slabom prigušenju amplituda titranja se smanjuje u vremenu razmjerno s $\exp(-\delta t)$ pa vrijedi $\exp(-\delta\tau_{1/2}) = 1/2$, odnosno

$$\delta\tau_{1/2} = \ln 2,$$

gdje je δ koeficijent prigušenja. U zraku vilica titra frekvencijom

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2, \qquad \delta = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}}$$

dok u sredstvu s jačim prigušenjem imamo

$$\omega'^2 = \omega_0^2 - \delta'^2, \qquad \delta' = \frac{\ln 2}{\tau'_{1/2}},$$

gdje je ω_0 vlastita frekvencija vilice. Eliminacijom ω_0 iz gornjeg sustava slijedi

$$\omega'^2 = \omega^2 - (\delta'^2 - \delta^2)$$

Razlika frekvencija je

$$\Delta\omega = \omega' - \omega = \omega\left(\sqrt{1 - \frac{\delta'^2 - \delta^2}{\omega^2}} - 1\right).$$

Uzmemo li u obzir $\delta < \delta' \ll \omega$,

$$\Delta\omega \simeq -\frac{\delta'^2 - \delta^2}{2\omega} = \frac{(\ln 2)^2}{2\omega}\left({\tau_{1/2}}^{-2} - {\tau'_{1/2}}^{-2}\right).$$

Konačno uz $\omega = 2\pi f$,

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{(\ln 2)^2}{8\pi^2 f}\left({\tau_{1/2}}^{-2} - {\tau'_{1/2}}^{-2}\right).$$

Rješenje: $\Delta f = \frac{(\ln 2)^2}{8\pi^2 f}\left(\tau_{1/2}^{-2} - {\tau'_{1/2}}^{-2}\right) \simeq -6.72 \times 10^{-7}\,\mathrm{Hz}$

22 Zadatak: Kritično prigušeni oscilator vlastite frekvencije ω_0 pokrenut je u gibanje iz ravnotežnog položaja početnom brzinom v_0. Odredi maksimalni otklon u odnosu na početni položaj koji će oscilator postići.

Postupak: Opće rješenje jednadžbe gibanja kritično prigušenog oscilatora (koeficijent prigušenja δ jednak je vlastitoj frekvenciji ω_0) ima oblik

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{-\omega_0 t},$$

Koeficijenti $c_{1,2}$ su određeni zadanim početnim uvjetima, $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = v_0$, slijedi

$$x(t) = v_0 t\, \mathrm{e}^{-\omega_0 t}.$$

Ekstrem nalazimo uvjetom

$$0 = \dot{x}(t) = v_0\,(1 - \omega_0 t)\mathrm{e}^{-\omega_0 t},$$

što je ispunjeno za $t = 1/\omega_0$. Konačno,

$$x_{\mathrm{max}} = \frac{v_0}{\mathrm{e}\omega_0}.$$

Rješenje: $x_{\mathrm{max}} = v_0/\mathrm{e}\omega_0$

23 Zadatak: Njihalo se sastoji od aluminijske kuglice promjera $2r = 1\,\mathrm{cm}$ koja visi, uronjena u vodu, na niti duljine $\ell = 1\,\mathrm{m}$. Nit je nerastezljiva i zanemarive je mase. Odredi frekvenciju prigušenog titranja i logaritamski dekrement prigušenja pri njihanju kuglice malom amplitudom pretpostavljajući da je sva masa kuglice koncentrirana u njenu središtu, uzimajući u obzir učinak uzgona, pretpostavljajući da je sila otpora koja djeluje na kuglicu opisana Stokesovim zakonom, a zanemarujući silu otpora koja djeluje na nit pri njenom prodiranju kroz vodu. (Gustoća aluminija $\rho_{\mathrm{Al}} = 2.7\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, gustoća vode $\rho_{\mathrm{v}} = 1.0\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, ubrzanje gravitacijske sile $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, viskoznost vode $\eta = 1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$.)

Postupak: Na osnovu načela očuvanja ukupne energije doći ćemo do jednadžbe gibanja u kojoj ćemo prepoznati vlastitu frekvenciju i koeficijent prigušenja titranja. Kinetička energija je

$$T = m_{\mathrm{Al}} v^2/2 = m_{\mathrm{Al}}(\ell\dot{\phi})^2/2,$$

gdje je $m_{Al} = \frac{4}{3} r^3 \pi \rho_{\mathrm{Al}}$ masa kuglice a ϕ je kut otklona njihala. Potencijalna energija je

$$U = (m_{\mathrm{Al}} - m_{\mathrm{v}})gh = (m_{\mathrm{Al}} - m_{\mathrm{v}})g\ell(1 - \cos\phi) \simeq (m_{\mathrm{Al}} - m_{\mathrm{v}})g\ell\phi^2/2,$$

gdje je $m_{\mathrm{v}} = \frac{4}{3} r^3 \pi \rho_{\mathrm{v}}$ masa istisnute vode. Promjena ukupne energije u vremenu,

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+U) = m_{\mathrm{Al}}\ell^2\dot{\phi}\left(\ddot{\phi} + \frac{m_{\mathrm{Al}} - m_{\mathrm{v}}}{m_{\mathrm{Al}}}\frac{g}{\ell}\phi\right) = m_{\mathrm{Al}}\ell^2\dot{\phi}\left(\ddot{\phi} + \left(1 - \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho_{\mathrm{Al}}}\right)\frac{g}{\ell}\phi\right),$$

mora biti jednaka snazi kojom sila otpora djeluje na njihalo,

$$P_\eta = \mathbf{F}_\eta \cdot \mathbf{v} = -(6\pi\eta r v)\, v = -6\pi\eta r(\ell\dot{\phi})^2,$$

gdje je negativni predznak prisutan jer sila otpora i brzina imaju obrnuti smjer, a faktor u zagradama je iznos Stokesove sile. Slijedi

$$\ddot{\phi} + \frac{6\pi\eta r}{m_{\mathrm{Al}}}\dot{\phi} + \left(1 - \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho_{\mathrm{Al}}}\right)\frac{g}{\ell}\phi = 0$$

što prepoznajemo jednadžbu prigušenog titranja s vlastitom frekvencijom ω_0 i koeficijent prigušenja 2δ,

$$\omega_0^2 = \left(1 - \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho_{\mathrm{Al}}}\right)\frac{g}{\ell}, \qquad 2\delta = \frac{6\pi\eta r}{m_{\mathrm{Al}}} = \frac{9\eta}{2r^2\rho_{\mathrm{Al}}}.$$

Frekvencija prigušenog titranja ω te logaritamski dekrement prigušenja λ dani su izrazima

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2, \qquad \lambda = 2\pi\delta/\omega.$$

Rješenje: $\omega_0 = \sqrt{(1 - \rho_{\mathrm{v}}/\rho_{\mathrm{Al}})(g/\ell)} \simeq 2.485\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $\delta = 9\mu/4r^2\rho_{\mathrm{Al}} \simeq 3.333 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \simeq \omega_0$, $\lambda = 2\pi\delta/\omega \simeq 8.427 \times 10^{-2}$.

Prisilno titranje

24 Zadatak: Automobil mase $m = 1000\,\mathrm{kg}$ vozi po neravninama koje možemo opisati visinom $h(s) = h_0 \cos(2\pi s/\lambda)$, gdje je s prevaljeni put, $h_0 = 2\,\mathrm{cm}$ je amplituda visine, a λ je "valna duljina" neravnina. Ovjes automobila ima tri puta manji koeficijent prigušenja od onog koji bi odgovarao kritičnom prigušenju. Odredi amplitudu titranja automobila kada on vozi brzinom koja dovodi do rezonancije u amplitudi. (Masu kotača i ostalih dijelova ovjesa smatramo zanemarivom.)

Postupak: Sustav shvaćamo kao oscilator koji se sastoji od mase m oslonjene na oprugu konstante k uz koeficijent trenja b, čemu odgovaraja vlastita frekvencija $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ i koeficijent gušenja $\delta = b/2m$. Kritičnom prigušenju odgovaralo bi $\delta = \omega_0$, pa obzirom da je ovdje prigušenje $q = 3$ puta slabije od kritičnog, imamo

$$\delta = \frac{\omega_0}{q}.$$

Vanjska sila se prenosi na oscilator tako što donji kraj njegove vlastite opruge prati putanju ceste i tako titra amplitudom h_0. Amplituda sile je stoga

$$F_0 = kh_0 = m\omega_0^2 h_0.$$

U rezonanciji amplitude, amplituda je dana izrazom

$$A_\mathrm{r} = \frac{F_0/m}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

Uvrštavanjem izraza za F_0 i δ,

$$A_\mathrm{r} = \frac{q^2 h_0}{2\sqrt{q^2-1}} = \frac{9h_0}{4\sqrt{2}}.$$

Rješenje: $A_\mathrm{r} = 9h_0/4\sqrt{2} \simeq 3.2\,\mathrm{cm}$