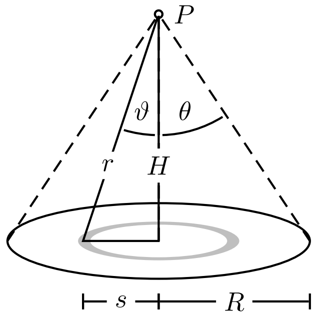
# Fizika 2: Zadaci za vježbu 5/7 (fotometrija i geometrijska optika)

**1 Zadatak:** Odredi prostorni kut koji baza stošca zauzima u odnosu na vrh stošca, ako je polumjer baze stošca $R$, a njegova visina je $H$. Zatim taj prostorni kut izrazi preko kuta $\theta$ koji plašt stošca zatvara s njegovom visinom (vrijedi $\tan\theta = R/H$).

**Postupak:** Općenito, Element prostornog kuta koji element plohe $\mathrm{d}S$ zauzima u odnosu na točku $P$ može se napisati kao

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{r^2}\cos\vartheta,$$

gdje je $r$ udaljenost između $P$ i $\mathrm{d}S$, a $\vartheta$ je kut koji pravac koji prolazi kroz $P$ i $\mathrm{d}S$ zatvara s okomicom na $\mathrm{d}S$. Ovdje kao element plohe odabiremo kružnu stazu polumjera $s$ i širine $\mathrm{d}s$:




Površina kružne staze (sivo područje na gornjoj skici) je

$$\mathrm{d}S = 2s\pi\,\mathrm{d}s,$$

a iz geometrije prepoznajemo

$$r^2 = H^2 + s^2, \qquad \cos\vartheta = \frac{H}{r}.$$

Element prostornog kuta koji zauzima kružna staza je

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{2s\pi\,\mathrm{d}s}{r^2}\,\frac{H}{r} = 2\pi H\,\frac{s}{(H^2+s^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}s.$$

Ukupni prostorni kut koji zauzima baza stošca dobivamo integracijom od $s=0$ do $s=R$,

$$\Omega = \int \mathrm{d}\Omega = 2\pi H \int_0^R \frac{s}{(H^2+s^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}s = -2\pi H\,\frac{1}{\sqrt{H^2+s^2}}\Big|_0^R = 2\pi\left(1 - \frac{H}{\sqrt{H^2+R^2}}\right).$$

Konačno, iz geometrije prepoznajemo da je drugi član u zagradi jednak $\cos\theta$ te zaključujemo

$$\Omega = 2\pi(1-\cos\theta).$$

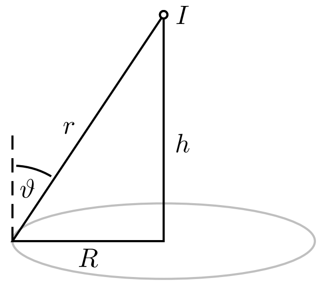
**Rješenje:** $\Omega = 2\pi\big(1 - H/\sqrt{H^2+R^2}\big) = 2\pi(1-\cos\theta)$

**2 Zadatak:** Okrugli stol polumjera $R$ osvijetljen je točkastim izotropnim izvorom svjetlosti koji se nalazi na visini $h$ iznad njegova središta. Odredi visinu $h$ kojom se postiže najveća osvijetljenost ruba stola.

**Postupak:** Općenito, osvijetljenost elementa plohe točkastim izvorom može napisati kao

$$E = \frac{I}{r^2} \cos\vartheta,$$

gdje je $I$ svjetlosna jakost izvora, $r$ je udaljenost izvora od elementa plohe, a $\vartheta$ je kut pod kojim svjetlost pada na plohu (u odnosu na okomicu). Izvor na visini $h$ nad središtem okruglog stola prikazujemo skicom:




Pri rubu stola imamo

$$r^2 = R^2 + h^2, \qquad \cos\vartheta = \frac{h}{r},$$

te osvjetljenost ruba stola pišemo kao

$$E = \frac{I}{r^2}\frac{h}{r} = I\,\frac{h}{(R^2+h^2)^{3/2}}.$$

Visinu $h$ kojom se postiže ekstrem osvijetljenosti $E$ pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}E = \left(\frac{1}{h} - \frac{3}{2}\frac{1}{R^2+h^2}\,2h\right) E = I\,\frac{R^2-2h^2}{(R^2+h^2)^{5/2}},$$

koji je ispunjen za

$$h = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Pronađeni ekstrem je nužno maksimum jer veičina $E \geq 0$ iščezava za $h \to 0$ kao i za $h \to \infty$.

**Rješenje:** $h = R/\sqrt{2}$

**3 Zadatak:** Dva točkasta izvora svjetlosti jednake jakosti nalaze se na visini $h$ iznad vodoravne ravnine, a razmak među njima je $d$. Za $d \gg h$ opaža se dva maksimuma osvijetljenosti ravnine, dok se za $d \ll h$ opaža samo jedan maksimum. Odredi graničnu vrijednost omjera $h/d$ pri kojoj se dva maksimuma osvijetljenosti ravnine stapaju u jedan.

**Postupak:** Neovisno o tome imamo li jedan ili dva maksimuma osvijetljenosti ravnine, oni se nalaze na pravcu koji leži ispod samih izvora (jer osvijetljenost nužno opada s udaljavanjem od tog pravca). Stoga u nastavku razmatramo isključivo osvijetljenost ravnine duž tog pravca. Za dovoljno malen omjer $h/d$, dva se maksimuma osvijetljenosti nalaze u točkama pravca približno ispod samih izvora, dok pri sredini razmaka imamo lokalni minimum osvijetljenosti na pravcu. S druge strane, za dovoljno velik omjer $h/d$, pri sredini razmaka među izvorima imamo maksimum osvijetljenosti. Slijedi da graničnu vrijednost omjera $h/d$ možemo odrediti na osnovu karaktera ekstrema osvijetljenosti ravnine u točki pri sredini razmaka među izvorima, odnosno, na osnovu toga radi li se o minimumu ili o maksimumu osvijetljenosti.

Općenito, osvijetljenost elementa plohe na udaljenosti $r$ od izvora jakosti $I$ opisana je s $E = (I/r^2)\cos\theta$, gdje je $\theta$ kut pod kojim svjetlost upada na plohu (u odnosu na okomicu). Ovdje krećemo od izraza za osvijetljenost elementa ravnine na vodoravnoj udaljenosti $x$ od izvora jakosti $I$ koji se nalazi na visini $h$. S obzirom da iz geometrije imamo

$$r^2 = h^2 + x^2, \qquad \cos\theta = \frac{h}{r},$$

osvijetljenost elementa ravnine opisujemo funkcijom

$$E_1[x] = \frac{Ih}{(h^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Uvedemo li sada dva takva izvora na međusobnom razmaku $d$, osvijetljenost plohe u točkama na pravcu koji leži ispod njih možemo opisati funkcijom

$$E_2[x] = E_1[d/2 + x] + E_1[d/2 - x] = \frac{Ih}{(h^2 + (d/2 + x)^2)^{3/2}} + \frac{Ih}{(h^2 + (d/2 - x)^2)^{3/2}},$$

gdje je $x$ udaljenost promatrane točke od točke pravca koja se nalazi pri sredini razmaka među izvorima. Prva derivacija gornje funkcije glasi

$$E_2'[x] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} E_2[x] = -\frac{3Ih(d/2 + x)}{(h^2 + (d/2 + x)^2)^{5/2}} + \frac{3Ih(d/2 - x)}{(h^2 + (d/2 - x)^2)^{5/2}},$$

gdje uočavamo očekivanu činjenicu da pri $x = 0$ vrijedi $E_2' = 0$, odnosno da pri sredini razmaka među izvorima imamo ekstrem osvijetljenosti (minimum ili maksimum), neovisno o vrijednosti omjera $h/d$. Sada je potrebno odrediti radi li se o minimumu ili o maksimumu. Druga derivacija funkcije $E_2$ glasi

$$E_2''[x] = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} E_2[x] = \frac{15Ih(d/2 + x)^2}{(h^2 + (d/2 + x)^2)^{7/2}} - \frac{3Ih}{(h^2 + (d/2 + x)^2)^{5/2}} + \frac{15Ih(d/2 - x)^2}{(h^2 + (d/2 - x)^2)^{7/2}} - \frac{3Ih}{(h^2 + (d/2 - x)^2)^{5/2}}.$$

Pri $x = 0$ ona se značajno pojednostavljuje,

$$E_2''[0] = \frac{30Ih(d/2)^2 - 6Ih(h^2 + (d/2)^2)}{(h^2 + (d/2)^2)^{7/2}} = \frac{6Ih(d^2 - h^2)}{(h^2 + (d/2)^2)^{7/2}}.$$

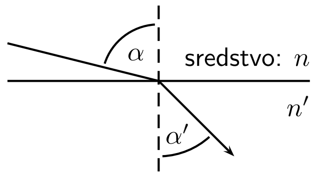
Uočavamo da za $d > h$ imamo $E''[0] > 0$, što znači da pri $x = 0$ imamo minimum osvijetljenosti, odnosno da postoje dva maksimuma osvijetljenosti, jedan s jedne, a drugi s druge strane ovog minimuma, dok za $d < h$ imamo $E''[0] < 0$, dakle maksimum osvijetljenosti pri $x = 0$. Kao granični slučaj prepoznajemo $h = d$, odnosno

$$h/d = 1.$$

**Rješenje:** $h/d = 1$

**4 Zadatak:** Traktor vozi ravnom cestom te u nekom trenutku silazi s nje i nastavlja vožnju poljem, kako bi u najkraćem mogućem vremenu stigao na odredište koje se nalazi u polju na nekoj udaljenosti od ceste. Odredi kut koji putanja traktora kroz polje zatvara s okomicom na cestu ako je iznos brzine traktora na cesti $v = 12\,\mathrm{km/h}$, dok je u polju iznos njegove brzine $v' = 6\,\mathrm{km/h}$.

**Postupak:** Problem je ekvivalentan putanji zrake svjetlosti koja iz optičkig sredstva indeksa loma $n$ prelazi u sredstvo indeksa loma $n'$:




Kut upada $\alpha$ i kut loma $\alpha'$ povezani su s indeksima loma optičkih sredstava Snellovim zakonom,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = \frac{n'}{n}.$$

Indeks loma je obrnuto razmjeran brzini propagacije svjetlosti u optičkom sredstvu pa možemo pisati

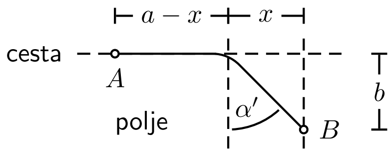
$$\frac{n'}{n} = \frac{v}{v'}.$$

Omjer brzina na desnoj strani ovdje možemo shvatiti kao omjer brzina traktora u dvama sredstvima (na cesti i u polju). Nadalje, kut upada traktora s ceste u polje ovdje je $\alpha = \pi/2$, što znači da imamo $\sin\alpha = 1$, a kut loma $\alpha'$ je traženi kut pod kojim se (u odnosu na okomicu na cestu) traktor giba poljem. Slijedi

$$\sin\alpha' = \frac{n}{n'} = \frac{v'}{v}$$

te za zadani omjer brzina dobivamo $\alpha' = 30°$.

Naravno, problem se može riješiti i izravnim razmatranjem kinematike. Neka traktor kreće iz točke $A$ koja je udaljena $a$ od one točke na cesti koja je najbliža odredištu $B$, a udaljenost odredišta od ceste neka je $b$. Neka je $x$ udaljenost točke u kojoj traktor silazi s ceste od točke ceste koja je najbliža odredištu.




Trajanje putovanja možemo napisati kao

$$t = \frac{a-x}{v} + \frac{\sqrt{x^2+b^2}}{v'}.$$

Ekstrem pronalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}t = -\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}} = -\frac{1}{v} + \frac{1}{v'}\sin\alpha',$$

iz čega slijedi

$$\sin\alpha' = \frac{v'}{v},$$

što se podudara s ranije dobivenim rezultatom.

**Rješenje:** $\alpha' = \arcsin[v'/v] = 30°$

**5 Zadatak:** Muha leti brzinom iznosa $v$ prema konkavnom zrcalu duž njegove optičke osi. Kada muha uđe u područje u kojem je njena udaljenost od tjemena zrcala manja od $R/2$, gdje je $R$ polumjer zakrivljenosti zrcala, ona vidi 'prividnu muhu' (vlastitu sliku) kako joj leti u susret. U trenutku u kojem udaljenost stvarne muhe od tjemena zrcala iznosi $a = R/3$, odredi (a) koliko se puta prividna muha pričinja većom od stvarne muhe, (b) udaljenost među muhama te (c) iznos (relativne) brzine prividne u odnosnu na stvarnu muhu.

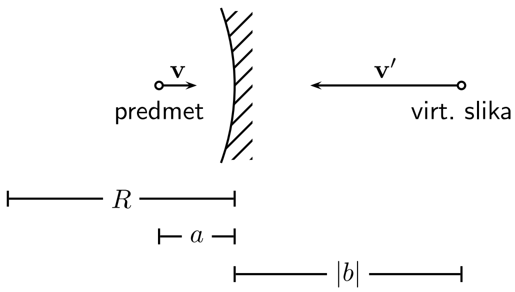
**Postupak:** Udaljenosti predmeta (ovdje stvarne muhe), $a > 0$, i njegove slike (ovdje prividne muhe), $b$, od tjemena konkavnog zrcala s polumjerom zakrivljenosti $R$ te lateralno povećanje slike u odnosu na predmet, $m$, povezani su poznatim izrazima

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}, \qquad m = -\frac{b}{a}.$$

Kada je $a < R/2$, gornje formule daju negativnu vrijednost udaljenosti $b$ te pozitivnu vrijednost povećanja $m$,

$$b = \frac{Ra}{2a - R} < 0, \quad m = \frac{R}{R - 2a} > 0 \quad \text{za} \quad a < \frac{R}{2},$$

a to znači da je slika virtuelna (nalazi se iza zrcala) te da je uspravna. Skica prikazuje položaj predmeta i virtuelne slike u slučaju $a < R/2$ te njihove smjerove gibanja kada se radi o muhama u ovom zadatku:




Slijedi da udaljenost između predmeta (stvarne muhe) i slike (prividne muhe) za $a < R/2$ možemo napisati kao

$$D = a + |b| = a - b = a - \frac{Ra}{2a - R} = \frac{2a(R - a)}{R - 2a},$$

a iznos relativne brzine slike (prividne muhe) u odnosu na predmet (stvarnu muhu) dobivamo deriviranjem te udaljenosti po vremenu,

$$v_{\text{rel.}} = \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}D\right| = \cdots = \left|2\,\frac{(R - a)^2 + a^2}{(R - 2a)^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a\right| = 2v\,\frac{(R - a)^2 + a^2}{(R - 2a)^2},$$

pri čemo smo udaljenost $a$ smatrali funkcijom vremena te smo koristili

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a\right| = v.$$

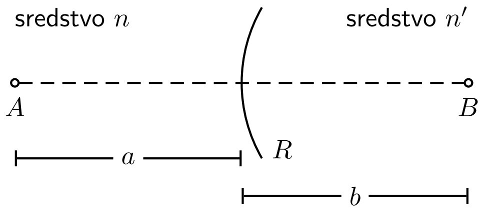
Konačno, za zadanu vrijednost udaljenosti $a = R/4$ dobivamo

$$m = 3, \qquad D = 4R/3, \qquad v_{\text{rel.}} = 10v.$$

**Rješenje:** (a) $m = R/(R - 2a) = 3$, (b) $D = 2a(R - a)/(R - 2a) = 4R/3$, (c) $v_{\text{rel.}} = 2v((R - a)^2 + a^2)/(R - 2a)^2 = 10v$

**6 Zadatak:** Odredi najmanju udaljenost između predmeta i njegove realne slike koja može nastati u sfernom dioptru polumjera zakrivljenosti $R$ ako su indeksi loma optičkih sredstava s dvaju strana dioptra $n$ i $n'$.

**Postupak:** Sferni dioptar koji stvara realnu sliku predmeta prikazujemo skicom:




Orijentacija zakrivljenosti granične plohe na gornjoj skici u skladu je s pretpostavkom da vrijedi $n' > n$ (dioptar je konvergentan, odn. može stvoriti realnu sliku, ako je granična ploha konveksna kada joj pristupamo iz optički rjeđeg sredstva). Točke $A$ i $B$ predstavljaju položaj predmeta i njegove realne slike (točke $A$ i $B$ mogu zamijeniti uloge). Udaljenosti točaka $A$ i $B$ od tjemena dioptra, $a$ i $b$, povezane su poznatim izrazom

$$\frac{n}{a} + \frac{n'}{b} = \frac{n' - n}{R} > 0,$$

a kako bi slika bila realna ($b$ pozitivno u gornjem izrazu), udaljenost $a$ mora biti dulja od odgovarajuće 'žarišne duljine' $f_a$,

$$a > f_a = \frac{n}{n' - n} R$$

(sličan uvjet se može formulirati i za udaljenost $b$). Međusobnu udaljenost točaka $A$ i $B$ možemo izraziti kao funkciju udaljenosti $a$,

$$D = a + b = a + n' \left( \frac{n' - n}{R} - \frac{n}{a} \right)^{-1} = \cdots = \frac{(n' - n)(R + a)a}{(n' - n)a - nR}$$

Ekstrem te udaljenosti nalazimo uvjetom

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} D = \cdots = (n' - n) \frac{(n' - n)a^2 - 2nRa - nR^2}{((n' - n)a - nR)^2}$$

koji je ispunjen za

$$a_{1,2} = \frac{n \pm \sqrt{n'n}}{n' - n} R.$$

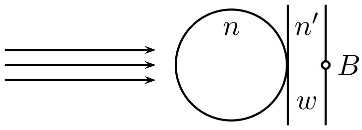
Uočavamo da vrijedi $a_2 < f_a$, zbog čega to rješenje odbacujemo, dok ono drugo prihvaćamo, jer vrijedi $a_1 > f_a$. Za $a = a_1$ udaljenost točaka $A$ i $B$ je

$$D = \cdots = \frac{\sqrt{n'} + \sqrt{n}}{\sqrt{n'} - \sqrt{n}} R.$$

Radi se o minimumu jer $D \to \infty$ za $a \to \infty$ kao i za $a \to f_a$.

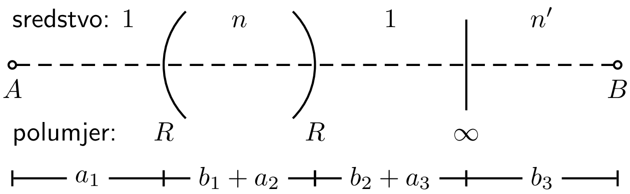
**Rješenje:** $D_{\min} = R(\sqrt{n'} + \sqrt{n})/(\sqrt{n'} - \sqrt{n})$

**7 Zadatak:** Snop paralelnih zraka svjetlosti pada na prozirnu kuglicu indeksa loma $n$ koja dodiruje planparalelnu prozirnu ploču debljine $w$ i indeksa loma $n'$ (vidi skicu).




Odredi promjer kuglice želimo li da snop bude fokusiran na izlaznoj plohi planparalelne ploče (točka $B$ na skici). Sustav se nalazi u zraku (indeks loma jednak jedinici).

**Postupak:** Ovaj optički sustav možemo shvatiti kao niz sfernih diptara pri čemu slika koja nastaje prolaskom svjetlosti kroz neki dioptar predstavlja predmet sljedećem dioptru u nizu. Prvi dioptar u nizu je ploha kroz koju svjetlost ulazi u kuglicu, drugi dioptar je ploha kroz koju svjetlost izlazi iz kuglice, treći dioptar je ploha kroz koju svjetlost ulazi u ploču. Plohu kroz koju svjetlost izlazi iz ploče ne moramo razmatrati jer fokusiranje svjetlosti na samom rubu ploče možemo shvatiti kao fokusiranje unutar ploče na udaljenosti $w$ od ulazne plohe. Tri dioptra koja razmatramo prikazujemo shemom:




Prva dva dioptra su konvergentna jer su obje granične plohe konveksne kada im pristupamo iz sredstva manjeg indeksa loma. Polumjer zakrivljenosti trećeg (ravnog) dioptra naveden je kao $\infty$ jer ravni dioptar možemo smatrati sfernim dioptrom čiji polumjer zakrivljenosti teži u beskonačnost. Tri dioptra opisana su uobičajenim jednadžbama,

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n}{b_1} = \frac{n-1}{R} > 0, \qquad \frac{n}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{n-1}{R} > 0, \qquad \frac{1}{a_3} + \frac{n'}{b_3} = \frac{n'-1}{\infty} = 0.$$

S obzirom da je upadna svjetlost snop paralelnih zraka, možemo smatrati da ona potječe od beskonačno udaljenog predmeta te uzeti

$$a_1 = \infty.$$

Kako je udaljenost između tjemenima prvog i drugog dioptra jednaka je promjeru kuglice, pišemo

$$b_1 + a_2 = 2R.$$

Zatim, s obzirom da kuglica dodiruje planparalelnu ploču, udaljenost između tjemena drugog dioptra i plohe trećeg dioptra jednaka je nuli te stavljamo

$$b_2 + a_3 = 0.$$

Konačno, s obzirom na zahtjev da se svjetlost, nakon što je ušla u planparalelnu ploču, fokusira na udaljenosti koja je jednaka debljini ploče, pišemo

$$b_3 = w.$$

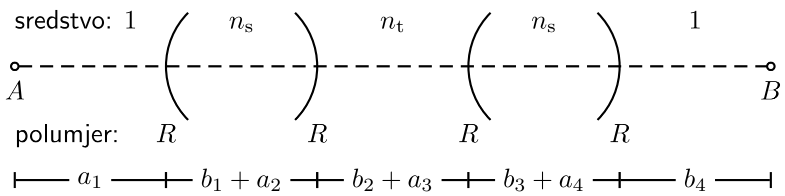
Eliminacijom veličina $a_{1,2,3}$ i $b_{1,2,3}$ iz gornjih jednadžbi dobivamo polumjer zakrivljenosti sfernih dioptara $R$, odnosno, traženi promjer kuglice,

$$2R = \frac{4(n-1)w}{(2-n)n'}.$$

**Rješenje:** $2R = 4w(n-1)/(2-n)n'$

**8 Zadatak:** Dvije jednake konvergentne simetrične tanke leće načinjene od stakla indeksa loma $n_\mathrm{s} = 1.5$ postavljene su jedna iza druge na zajedničku optičku os tako da im se tjemena dodiruju. Kada se u prostoru među lećama nalazi zrak (indeks loma jednak jedinici) one u zraku čine sustav žarišne duljine $f = 1\,\mathrm{m}$. Odredi žarišnu duljinu ovog sustava u zraku kada se prostor među lećama umjesto zrakom ispuni tekućinom indeksa loma $n_\mathrm{t} = 1.35$.

**Postupak:** Sustav dviju leća se sastoji od četiriju sfernih dioptara. U slučaju kada je među lećama sredstvo indeksa loma $n_\mathrm{t}$ možemo ga prikazati sljedećom shemom:




Udaljenosti predmeta i slika povezane su s poumjerom zakrivljenosti dioptara te s indeksima loma sredstava jednadžbama

$$\frac{1}{a_1} + \frac{n_\mathrm{s}}{b_1} = \frac{n_\mathrm{s} - 1}{R}, \qquad \frac{n_\mathrm{s}}{a_2} + \frac{n_\mathrm{t}}{b_2} = \frac{n_\mathrm{s} - n_\mathrm{t}}{R}, \qquad \frac{n_\mathrm{t}}{a_3} + \frac{n_\mathrm{s}}{b_3} = \frac{n_\mathrm{s} - n_\mathrm{t}}{R}, \qquad \frac{n_\mathrm{s}}{a_4} + \frac{1}{b_4} = \frac{n_\mathrm{s} - 1}{R},$$

a s obzirom da leće smatramo tankima te da se njihova tjemena dodiruju, uzimamo

$$b_1 + a_2 = 0, \qquad b_2 + a_3 = 0, \qquad b_3 + a_3 = 0.$$

Eliminacijom $a_{2,3,4}$ i $b_{1,2,3}$ iz gornjih jednadžbi računamo žarišnu duljinu sustava u slučaju u kojem je među lećama sredstvo indeksa loma $n_\mathrm{t}$,

$$f' = \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_4} \right)^{-1} = \cdots = \frac{R}{4n_\mathrm{s} - 2(n_\mathrm{t} + 1)}.$$

Stavimo li u gornjem izrazu $n_\mathrm{t} = 1$ dobivamo žarišnu duljina ovog sustava u slučaju u kojem je među lećama zrak,

$$f = \frac{R}{4(n_\mathrm{s} - 1)}.$$

Eliminacijom $R$ iz gornjih izraza za $f$ i $f'$ slijedi

$$f' = f\,\frac{2(n_\mathrm{s} - 1)}{2n_\mathrm{s} - n_\mathrm{t} - 1}.$$

Za zadane vrijednosti parametara $f$, $n_\mathrm{s}$ i $n_\mathrm{t}$ dobivamo $f' \simeq 1.538\,\mathrm{m}$.

**Rješenje:** $f' = 2f(n_\mathrm{s} - 1)/(2n_\mathrm{s} - n_\mathrm{t} - 1) \simeq 1.538\,\mathrm{m}$

**9 Zadatak:** Konvergentna leća žarišne duljine $f = 50\,\mathrm{cm}$ stvara sliku predmeta koja je udaljena $b = 3\,\mathrm{m}$ od leće. Primaknemo li predmet leći za $\Delta a = -5\,\mathrm{cm}$, koliko će se duž optičke osi pomaknuti njegova slika?

**Postupak:** Prema jednadžbi leće imamo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

gdje je $a$ udaljeost predmeta, a $b$ je udaljeost slike od leće žarišne duljine $f$. Slijedi

$$a = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{b}\right)^{-1} = \frac{fb}{b-f}.$$

Kada se predmet pomakne za $\Delta a$, slika se pomiče za $\Delta b$, te vrijedi

$$\frac{1}{a+\Delta a} + \frac{1}{b+\Delta b} = \frac{1}{f},$$

iz čega dobivamo

$$b + \Delta b = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{a+\Delta a}\right)^{-1} = \frac{f(a+\Delta a)}{a+\Delta a - f} = \frac{f(fb+\Delta a(b-f))}{fb+(\Delta a - f)(b-f)},$$

odnosno, nakon sređivanja izraza,

$$\Delta b = \cdots = -\Delta a\,\frac{(b-f)^2}{f^2+(b-f)\Delta a}.$$

Za zadane vrijednosti $f$, $b$ i $\Delta a$ dobivamo $\Delta b = 2.5\,\mathrm{m}$.

**Rješenje:** $\Delta b = -\Delta a\,(b-f)^2/(f^2+(b-f)\Delta a) = 2.5\,\mathrm{m}$

**10 Zadatak:** Lećom žarišne duljine $f$ i polumjera otvora $R_\mathrm{L} = f/4$ na zaslonu okomitom na optičku os stvaramo sliku Sunca. Odredi koliko je puta zaslon u području te slike jače osvijetljen nego što bi bio osvijetljen da je jednostavno izložen Sunčevoj svjetlosti. (Polumjer Sunca $R_\odot = 6.963 \times 10^8\,\mathrm{m}$, srednja udaljenost Sunca od Zemlje $a = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$)

**Postupak:** Koristeći jednadžbu leće žarišne duljine $f > 0$,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

gdje je $a > f$ udaljenost predmeta (ovdje Sunca) s jedne, a $b$ je udaljenost slike (ovdje zaslona) s njene druge strane, te jednadžbu za lateralno povećanje slike u odnosu na izvor

$$m = -\frac{b}{a},$$

polumjer slike Sunca na zastoru možemo napisati kao

$$R'_\odot = |m| R_\odot = R_\odot \frac{b}{a} = R_\odot \frac{f}{a-f}.$$

Površina te slike je

$$S' = {R'_\odot}^2 \pi = \frac{R_\odot^2 \pi f^2}{(a-f)^2}.$$

Osvijetljenost je općenito omjer snage zračenja i površine na koju ono pada. Ako je $E$ osvijetljenost bilo koje površine jednostavno izloženoe Suncu (podrazumijeva se da je površina okomita na smjer toka zračenja), onda snagu zračenja koju zahvaća leća možemo napisati kao

$$P_\mathrm{L} = E S_\mathrm{L} = E R_\mathrm{L}^2 \pi.$$

Kada je riječ o slici Sunca, ta snaga pada na površinu $S'$ te je osvijetljenost zaslona u području slike

$$E' = \frac{P_\mathrm{L}}{S'} = \frac{E R_\mathrm{L}^2 (a-f)^2}{R_\odot^2 f^2}.$$

Konačno, traženi omjer osvijetljenosti se može napisati kao

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{R_\mathrm{L} a}{R_\odot f}\right)^2 \left(1 - \frac{f}{a}\right)^2,$$

a s obzirom da je $f/a \ll 1$, možemo izostaviti faktor u okruglim zagradama i pisati

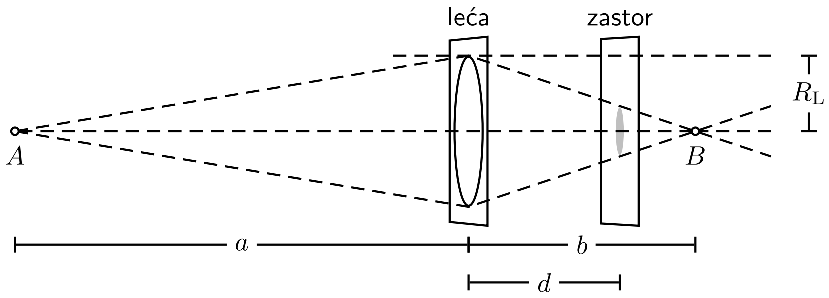
$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{R_\mathrm{L} a}{R_\odot f}\right)^2.$$

Za zadani omjer $R_\mathrm{L}/f$ te poznate astronomske konstante $a$ i $R_\odot$ dobivamo $E'/E \simeq 2.88 \times 10^3$.

**Rješenje:** $E'/E = (R_\mathrm{L} a/R_\odot f)^2 (1 - f/a)^2 \simeq (R_\mathrm{L} a/R_\odot f)^2 \simeq 2.88 \times 10^3$

**11 Zadatak:** S jedne strane tanke konvergentne leće kružnog otvora se na optičkoj osi na udaljenosti $a$ nalazi izotropni točkasti izvor svjetlosti snage $P$. Sa suprotne strane na udaljenosti $b$ od leće nastaje njegova realna slika. Postavimo li na slikovnoj strani leće na udaljenosti $d \neq b$ zastor okomit na optičku os, na njemu će nastati svijetla mrlja kružnog oblika. Odredi osvijetljenost zastora unutar svijetle mrlje pretpostavljajući da je udaljenost $a$ znatno veća od polumjera otvora leće.

**Postupak:** Skica prikazuje slučaj u kojem je $d < b$ (svijetla mrlja prikazana je sivo, $R_\mathrm{L}$ je polumjer otvora leće):




Polumjer svijetle mrlje $r$ slijedi iz sličnosti pravokutnih trokuta,

$$\frac{r}{b-d} = \frac{R_\mathrm{L}}{b},$$

a u općenitom slučaju možemo pisati

$$r = R_\mathrm{L} \left| 1 - \frac{d}{b} \right|$$

(uzimamo apsolutnu vrijednost kako bismo obuhvatili i slučaj $d > b$ koji nije prikazan na skici). Osvijetljenost mrlje $E$ je omjer snage svjetlosti $P_\mathrm{L}$ koja ulazi u leću i površine svijetle mrlje $S = r^2\pi$ koju ta svjetlost stvara na zastoru,

$$E = \frac{P_\mathrm{L}}{S} = \frac{P_\mathrm{L}}{r^2\pi} = \frac{P_\mathrm{L}}{R_\mathrm{L}^2\pi(1-d/b)^2}.$$

Omjer snage koja ulazi u leću $P_\mathrm{L}$ i ukupne snage izotropnog izvora $P$ jednak je omjeru prostornog kuta $\Omega_\mathrm{L}$ koji u odnosu na izvor svjetlosti zahvaća otvor leće i ukupnog prostornog kuta $4\pi$ u koji izvor zrači,

$$\frac{P_\mathrm{L}}{P} = \frac{\Omega_\mathrm{L}}{4\pi}.$$

Prostorni kut $\Omega_\mathrm{L}$ napisat ćemo s pomoću poznate formule za prostorni kut stošca visine $a$ i polumjera baze $R_\mathrm{L}$ (vidi raniji zadatak),

$$\Omega_\mathrm{L} = 2\pi \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R_\mathrm{L}^2}} \right) = 2\pi \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + (R_\mathrm{L}/a)^2}} \right).$$

S obzirom da je ovdje $R_\mathrm{L}/a \ll 1$, možemo koristiti razvoj $(1+\epsilon)^{-1/2} \simeq 1 - \epsilon/2$, čime se gornji izraz svodi na

$$\Omega_\mathrm{L} = R_\mathrm{L}^2\pi/a^2.$$

(Taj rezultat se može izravno dobiti uoči li se da, s obzirom da je $a \gg R_\mathrm{L}$, čitav otvor leće možemo smatrati okomitim na pravac izvor–leća.) Snagu zahvaćenu lećom sada možemo napisati kao

$$P_\mathrm{L} = \frac{P R_\mathrm{L}^2}{4a^2},$$

te za osvijetljenost svijetle mrlje na zastoru dobivamo

$$E = \frac{P}{4a^2\pi(1-d/b)^2}.$$

**Rješenje:** $E = (P/4a^2\pi)(1-d/b)^{-2}$

**12 Zadatak:** Predmet se nalazi na udaljenosti $a_1 = 20\,\mathrm{cm}$ ispred tanke konvergentne leće žarišne duljine $f_1 = 10\,\mathrm{cm}$. Iza te leće se na udaljenosti $D = 30\,\mathrm{cm}$ nalazi druga tanka konvergentna leća čija je žarišna duljina $f_2 = 12.5\,\mathrm{cm}$. Odredi karakter slike te njen položaj i lateralno povećanje u odnosu na predmet.

**Postupak:** Udaljenost predmeta i njegove slike od prve leće te odgovarajuće lateralno povećanje povezani su poznatim izrazima

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f_1}, \qquad m_1 = -\frac{b_1}{a_1}.$$

Istovjetni izrazi vrijede i za drugu leću,

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = \frac{1}{f_2}, \qquad m_2 = -\frac{b_2}{a_2}.$$

pri čemu slika koju stvara prva leća predstavlja predmet za drugu leću, a s obzirom da je razmak među lećama $D$, vrijedi

$$b_1 + a_2 = D.$$

Eliminacijom $b_1$ i $a_2$ iz gornjih jednadžbi računamo udaljenost slike od druge leće,

$$b_1 = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}, \qquad b_2 = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2} = \frac{(D - b_1) f_2}{(D - b_1) - f_2} = \cdots = \frac{a_1 (D - f_1) f_2 - D f_1 f_2}{a_1 (D - f_1 - f_2) - f_1 (D - f_2)}.$$

Kao ukupno lateralno povećanje slike u odnosu na predmet slijedi općenit izraz

$$m = m_2\, m_1 = \frac{b_1}{a_1} \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_1 b_2}{a_1 (D - b_1)} = \cdots = \frac{f_1 f_2}{a_1 (D - f_1 - f_2) - f_1 (D - f_2)}.$$

Za zadane vrijednosti $a_1$ i $f_1$ dobivamo $b_1 = 20\,\mathrm{cm}$, što znači da se predmet druge leće nalazi na udaljenosti $a_2 = D - b_1 = 10\,\mathrm{cm}$ od nje, gdje uočavamo da vrijedi $a_2 < f_2$, što pak znači da će druga leća tvoriti virtuelnu sliku. Za zadane vrijednosti $a_1$, $f_{1,2}$ i $D$ dobivamo $b_2 = -50\,\mathrm{cm}$, gdje predznak suprotan predznaku udaljenosti $a_2$ potvrđuje da se slika nalazi s iste strane leće kao i predmet, odnosno, da je ona virtuelna. Udaljenost slike koju stvara druga leća i predmeta prve leće je za zadane vriejdnosti parametara $a_1$, $f_{1,2}$ i $D$ jednaka nuli,

$$a_1 + D + b_1 = 0,$$

što znači da se položaj slike i predmeta u ovom slučaju podudaraju. Za ukupno lateralno povećanje dobivano $m = -5$, što znači da je slika ovdje preokrenuta i povećana.

**Rješenje:** $b_2 = (a_1(D - f_1) f_2 - D f_1 f_2)/(a_1(D - f_1 - f_2) - f_1(D - f_2)) = -50\,\mathrm{cm}$ (slika je virtuelna, njen se položaj podudara s položajem predmeta), $m = f_1 f_2/(a_1(D - f_1 - f_2) - f_1(D - f_2)) = -5$ (slika je uvećana i preokrenuta)

**13 Zadatak:** Fotografski teleobjektiv se sastoji od (prednje) konvergentne leće žarišne duljine $f_1 = 30\,\mathrm{cm}$ iza koje se na udaljenosti $D = 27.5\,\mathrm{cm}$ nalazi (stražnja) divergentna leća žarišne duljine $f_2 = -10\,\mathrm{cm}$. Odredi udaljenost između prednje leće teleobjektiva i slike predmeta, ako udaljenost predmeta od fotografskog aparata teži u beskonačno. Zatim odredi žarišnu duljinu leće koja daje jednako povećanje slike vrlo udaljenog predmeta kao i opisani teleobjektiv. (Sve leće smatramo tankim lećama.)

**Postupak:** Teleobjektiv je kombinacija dviju leća pa možemo koristiti općenite izraze za udaljenost slike od stražnje leće, $b_2$, te za ukupno lateralno povećanje slike, $m$, izvedene u prethodnom zadatku,

$$b_2 = \frac{a_1(D-f_1)f_2 - Df_1f_2}{a_1(D-f_1-f_2) - f_1(D-f_2)}, \qquad m = \frac{f_1f_2}{a_1(D-f_1-f_2) - f_1(D-f_2)}.$$

Udaljenost slike 'beskonačno dalekog' predmeta od prednje leće je

$$x_\infty = D + \lim_{a_1\to\infty} b_2 = D + \frac{(D-f_1)f_2}{D-f_1-f_2},$$

što za zadane vrijednosti $f_{1,2}$ i $D$ daje $x_\infty \simeq 30.83\,\mathrm{cm}$. Kada bismo umjesto teleobjektiva imali samo jednu leću žarišne duljine $f$ te predmet na udaljenosti $a_1$, pisali bismo

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}, \qquad m = -\frac{b_1}{a_1} = -\frac{f}{a_1 - f}.$$

Izjednačavajući izraze za povećanje slike u slučaju teleobjektiva i u slučaju jednostruke leće dobivamo

$$f = \frac{f_1f_2}{f_1 + f_2 - D(1 - f_1/a_1)}.$$

S obzirom da vrijedi $a_1 \gg f_1$ možemo uzeti

$$f = \frac{f_1f_2}{f_1+f_2-D},$$

što za zadane vrijednosti $f_{1,2}$ i $D$ daje $f \simeq 40\,\mathrm{cm}$.

**Rješenje:** $x = D + (D-f_1)f_2/(D-f_1-f_2) \simeq 30.83\,\mathrm{cm}$, $f = f_1f_2/(f_1+f_2-D) \simeq 40\,\mathrm{cm}$