

9. predavanje iz OE

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



SNAGA I ENERGIJA U KRUGOVIMA IZMJENIČNE STRUJE

(obradio prof.dr.sc. Armin Pavić)

1

Snaga u krugovima izmjenične struje (ponavljanje)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Električna snaga P u krugovima istosmjerne struje jednaka je umnošku napona i struje:

$$P = U \cdot I$$

- ♦ Kada su napon i struja vremenski promjenjivi (krugovi izmjenične struje), tada se i snaga vremenski mijenja, pa je u pojedinom trenutku t (trenutačna) snaga jednaka:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- ♦ Odnos između snage $p(t)$ i energije $W(t)$ je sljedeći:

$$p(t) = \frac{dW(t)}{dt}$$

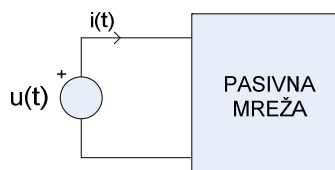
2

Snaga u krugovima izmjenične struje (ponavljanje)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Na slici su prikazani referentni smjerovi napona i struje:



- ♦ Predznak snage i smjer toka energije
 - U intervalima kad je $p(t) > 0$ energije pasivne mreže (trošila) se povećava, tj. **energija se prenosi od izvora prema trošilu.**
 - U intervalima kada je $p(t) < 0$ energija trošila se smanjuje, tj. **energija ide u smjeru od trošila prema izvoru.**

3

Srednja (ili radna) snaga

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Ukupna primljena energija u intervalu od t_1 do t_2 iznosi:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt$$

- ♦ Uvodimo i pojam **srednje snage P (radna snaga)**:

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt$$

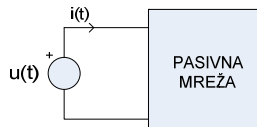
- ♦ Ukupna primljena energija u tom intervalu može se izračunati pomoću srednje snage ovako:

$$W = P(t_2 - t_1)$$

4

Trenutačna snaga

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Trenutačni napon i struju na priključnicama mreže na slici (ili bilo kojega dvopola) možemo izraziti na sljedeći način

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha_u)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha_i) \quad \text{Gdje je } \alpha_u - \alpha_i = \varphi$$

Uzmemo li za početak promatranja ($t=0$) trenutak kada je $\alpha_u=0$, u tom slučaju možemo napisati $\alpha_i = -\varphi$, pa možemo pisati:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

5

Trenutačna snaga

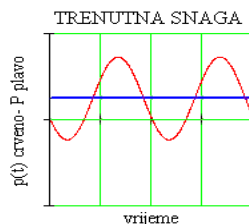
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Trenutačna snaga jednaka je umnošku trenutačnih vrijednosti napona i struje

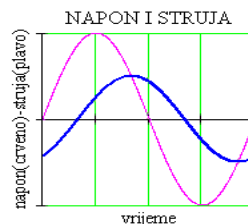
$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = U_m \sin(\omega t) \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) \quad (1)$$

DIJAGRAM SNAGE, NAPONA I STRUJE OVISNO O FAZNOM KUTU TROŠILA



$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

izradio: J. Felja



FAZNI KUT: $\varphi = 60$

negativan kut : kapacitivno

pozitivan kut : induktivno

6

Značajke krivulje trenutačne snage

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Izraz:

$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = U_m \sin(\omega t) \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

možemo transformirati koristeći formulu

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = 0,5 (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

pa uz $(U_m I_m)/2 = UI$ dobivamo:

$$p(t) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) \quad (2)$$

Prvi član u izrazu (2) ne ovisi o vremenu i predstavlja srednju vrijednost funkcije $p(t)$

$$p_{sr} = P = U \cdot I \cos \varphi = \text{konst.}$$

oko koje s frekvencijom 2ω i amplitudom UI titra drugi (sinusoidni) član, kako je prikazano na prethodnoj slici.

7

Osnovne značajke krivulje trenutačne snage

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Analizom funkcije $p(t)$ možemo zaključiti sljedeće:

- ♦ krivulja $p(t)$ je **sinusoida dvostruke frekvencije**, koja stoga ima dvostruko veći broj nultočaka, u odnosu na sinusoidu napona i struje $u(t)$ i $i(t)$.
- ♦ Površina između krivulje $p(t)$ i vremenske osi predstavlja energiju koju mreža prima (površina iznad osi - pozitivna) ili daje (površina ispod osi - negativna)
- ♦ **Srednja vrijednost** funkcije $p(t)$ (istosmjerna komponenta) je ona vrijednost oko koje titra sinusoida trenutačne snage i **jednaka je radnoj snazi P** .
Srednja vrijednost je veća od nule (radna snaga postoji) kada je pozitivna površina između krivulje $p(t)$ i vremenske osi veća od negativne površine (tada je $-90^\circ < \varphi < 90^\circ$).

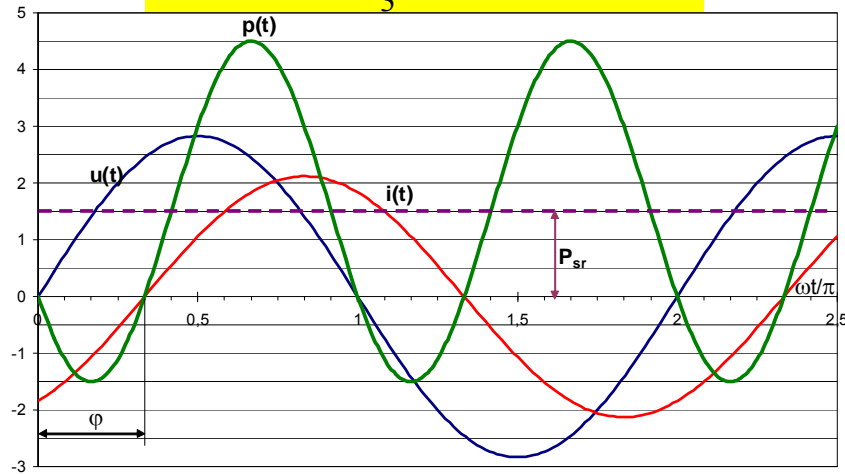
8

Valni oblici napona, struje i trenutačne snage

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$\dot{U} = 2 \angle 0^\circ ; \underline{Z} = \frac{4}{3} \angle 60^\circ ; \dot{I} = 1,5 \angle -60^\circ$$



9

Radna snaga i faktor snage

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Srednja vrijednost trenutačne snage naziva se **radna** (djelatna, ili korisna) **snaga** i označava s P

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

- ♦ Radna snaga P jednaka je umnošku efektivnih vrijednosti napona i struje te faktora $\cos \varphi$.
- ♦ $\cos \varphi$ nazivamo **faktor snage** a poprima vrijednost od 0 do 1 ($P \leq UI$)
- ♦ Fazni kut φ određen je za pasivnu mrežu (spoj elemenata R , L , C) impedancijom dvopola \underline{Z}
- ♦ Radnu snagu P izražavamo u vatima W.

$$[P] = (VA =) W \text{ (vat)}$$

10

Prividna snaga

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Za razliku od krugova istosmjerne struje, u krugu izmjenične struje, **umnožak efektivnih vrijednosti napona i struje** samo prividno predočava snagu u krugu, pa se naziva **prividna snaga S**:

$$S = U \cdot I$$

- ♦ Prividna snaga S izražava se u voltamperima:
[S]=VA (voltamper)
- ♦ Prividna snaga $S=UI$ jednaka je amplitudi s kojom trenutačna snaga titra oko svoje srednje vrijednosti.
- ♦ *Faktor snage* povezuje radnu i prividnu snagu ovako:

$$\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I} = \frac{P}{S}$$

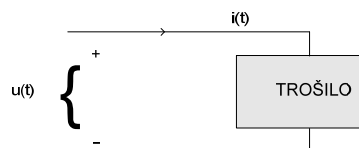
11

Primjer 1. (ponavljanje)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Na priključnicama triju trošila, uz $\omega = 1000 \text{ rad/s}^{-1}$, izmjereni su naponi i struje (u skladu s označenim referentnim smjerom struje i polaritetom napona) kako sljede:



a) $u(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t)$

$i(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t)$

b) $u(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t)$

$i(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$

c) $u(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t)$

$i(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

Prikažite analitički i grafički funkciju trenutačne snage i izračunajte srednju snagu na svakom od trošila te odredite koji su elementi u trošilima.

12

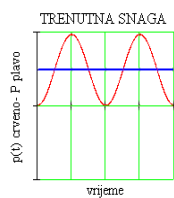
Rješenje Primjera 1. (a)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



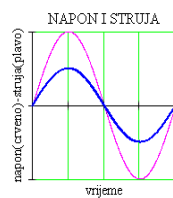
$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = U_m \sin(\omega t) \cdot I_m \sin(\omega t) = U_m \cdot I_m \sin^2(\omega t) = U \cdot I (1 - \cos(2\omega t)) = 1000(1 - \cos(2000t)) \text{ VA}$$

DIJAGRAM SNAGE, NAPONA I STRUJE OVISNO O FAZNOM KUTU TROŠILA



$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

izradio: I. Fejta



FAZNI KUT: $\varphi = 0$

negativan kut: kapacitivno

pozitivan kut: induktivno

$$p_{sr} = P = \frac{1}{T} \int_0^T 1000 [1 - \cos(2\omega t)] dt$$

$$P = 1000 \text{ W}$$

$$\dot{U} = 100 \angle 0^\circ \text{ V}, \quad \dot{I} = 10 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = 10 \Omega = R$$

Energija se na otporu troši (obavlja se rad), zato se **snaga na otporu naziva radna (ili djelatna) snaga**.

13

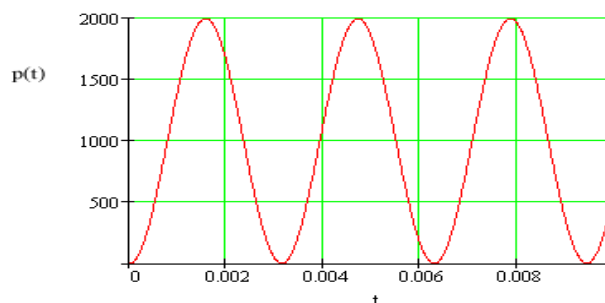
Rješenje Primjera 1. (a)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



♦ Trenutnačna snaga na otporu.

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = 10 \angle 0^\circ \Omega = R$$



Trenutnačna vrijednost snage ni u jednom trenutku nije negativna, dakle tok energije je od izvora prema otporu.

14

Rješenje Primjera 1. (b)

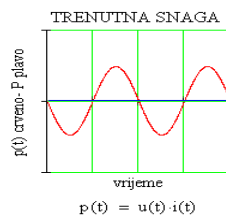
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



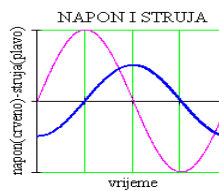
$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = U_m \sin(\omega t) \cdot I_m \sin(\omega t - 90^\circ) = -U_m \cdot I_m \sin(\omega t) \cos(\omega t) = -U \cdot I \sin(2\omega t) = -1000 \sin(2000t)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (-UI) \cdot \sin(2\omega t) dt = 0$$

DIJAGRAM SNAGE, NAPONA I STRUJE OVISNO O FAZNOM KUTU TROŠILA



izradio: I. Fejta



FAZNI KUT: $\varphi = 90$
negativan kut : kapacitivno
pozitivan kut : induktivno

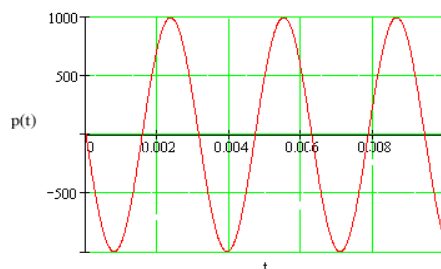
15

Rješenje Primjera 1. (b)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \angle 0^\circ}{I \angle -90^\circ} = \frac{100 \angle 0^\circ}{10 \angle -90^\circ} = 10 \angle 90^\circ \Omega = \underline{X}_L \text{ (induktivitet)}$$



U ovom slučaju **srednja snaga jednaka je 0**, tj. **energija titra između izvora i induktiviteta**. Kako ova energija ne obavlja koristan rad, snaga na induktivitetu naziva se **jalova snaga**.

Induktivitet vraća energiju u krug, pa se naziva i reaktivnim elementom, a snaga na njemu još se naziva i **reaktivna snaga**.

16

Rješenje Primjera 1. (c)

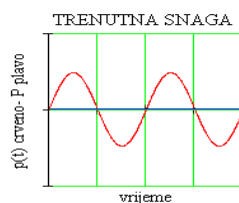
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



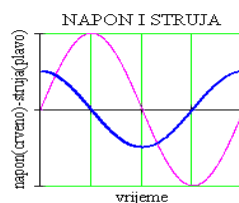
$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = U_m \sin(\omega t) \cdot I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = U_m \cdot I_m \sin(\omega t) \cos(\omega t) = U \cdot I \sin(2\omega t) = 1000 \sin(2000t)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (UI) \cdot \sin(2\omega t) dt = 0$$

DIJAGRAM SNAGE, NAPONA I STRUJE OVISNO O FAZNOM KUTU TROŠILA



izradio: J. Felja



FAZNI KUT: $\varphi = -90$
negativan kut : kapacitivno
pozitivan kut : induktivno

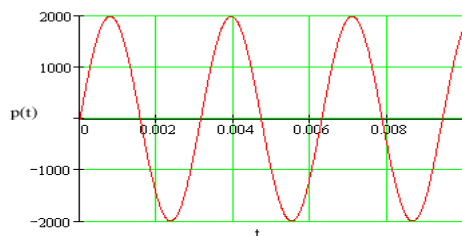
17

Rješenje Primjera 1. (c)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \angle 0^\circ}{I \angle 90^\circ} = \frac{100 \angle 0^\circ}{10 \angle 90^\circ} = 10 \angle -90^\circ \Omega = \underline{X}_C \text{ (kapacitet)}$$



I u ovom slučaju **srednja snaga jednaka je 0**, tj. **energija titra između izvora i kapaciteta**. Snagu na kapacitetu nazivamo **kapacitivna jalova snaga**.

L i C su **reaktivni elementi**, X_L i X_C su **reaktivni otpori**, a snaga na njima je **jalova** ili **reaktivna snaga**.

Jalova (ili reaktivna) snaga označava se slovom Q i izražava jedinicom **voltamper reaktivni (VAR)**: $[Q] = \text{VAR}$

18

Rekapitulacija Primjera 1.



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

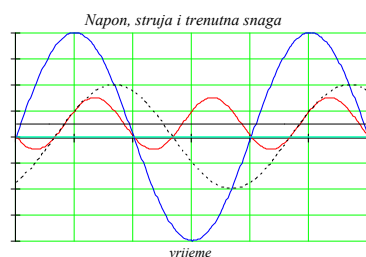
- ♦ **Trenutačna snaga** pokazuje tok energije između izvora i nekog elementa (ili spoja elemenata).
- ♦ U intervalima kad je $p(t) > 0$ tok energije je **od izvora k trošilu**, dok je u intervalima kada je $p(t) < 0$ **obrnut**.
- ♦ **Radna snaga P** je *srednja vrijednost trenutačne snage*, a određuje električnu energiju koja se (bespovratno) troši.
- ♦ **Na otporu R** tok energije je (uvijek) od izvora prema otporu, gdje se pretvara u toplinu (**radna snaga $P \geq 0$**).
- ♦ **Reaktivni elementi (L i C)** naizmjenično akumuliraju energiju (L - magnetskog polja, a C - električnog polja) pa je vraćaju natrag u krug. Srednja vrijednost snage na njima jednaka je 0, pa je to **jalova** (ili reaktivna) **snaga**.
- ♦ **Kapacitivna i induktivna jalova snaga** u svakom času su međusobno **suprotnih predznaka** (što to znači za energiju?).

19

Primjer 2.* (Komponente trenutačne snage)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Slika prikazuje funkciju trenutačne snage za koji je početni fazni kut napona nula, a trošilo je induktivno s faznim kutem $\varphi = 60^\circ$.

Drugi dio izraza (2): $p(t) = U \cdot I \cos \varphi - U \cdot I \cos(2\omega t - \varphi)$

možemo transformirati koristeći formulu

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

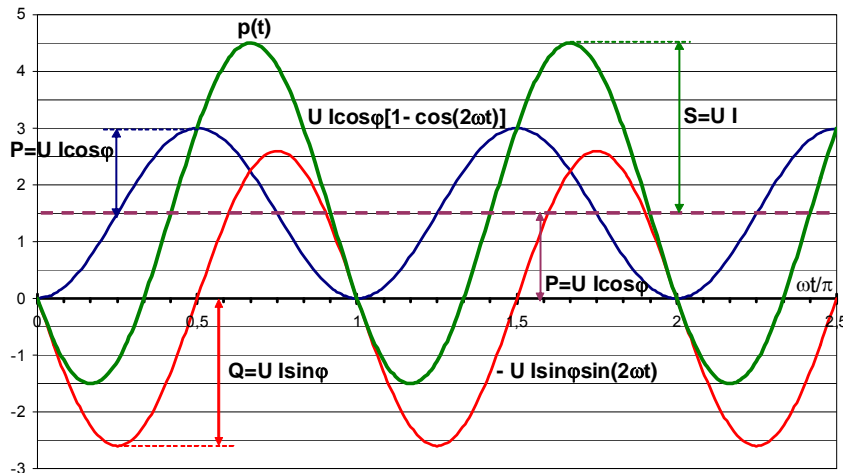
Dobijemo:

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot [1 - \cos(2\omega t)] - U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(2\omega t) \quad (3)$$

20

Primjer 2.* (Komponente trenutačne snage, $\varphi = 60^\circ$)

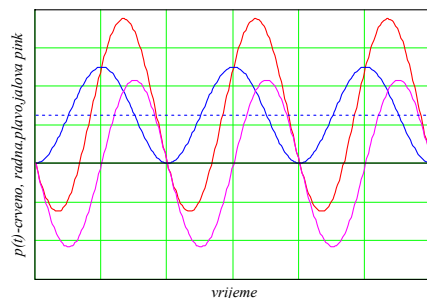
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



21

Komponente trenutačne snage*

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Rastavljanjem funkcije ukupne trenutačne snage $p(t)$ (crvena), koja titra s amplitudom $UI = S$ (oko srednje vrijednosti $UI \cos \varphi$), dobijemo dvije komponente:

Prva komponenta (plava) nema negativne vrijednosti i titra s amplitudom $UI \cos \varphi = P$ (oko srednje vrijednosti $UI \cos \varphi$). Ona predstavlja **trenutačnu vrijednost snage na otporima**. Označimo je s $p_r(t)$.

Druga komponenta (pink) titra oko apscisne osi s amplitudom $UI \sin \varphi$ i njena srednja vrijednost je nula. Ova komponenta predstavlja **trenutačnu vrijednost snage na reaktivnim elementima $p_j(t)$** . Amplituda ove komponente određuje ukupnu jalovu snagu $UI \sin \varphi = Q$

22

Jalova snaga kao komponenta trenutačne snage*



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Ponovimo: jednadžbu (3)

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot [1 - \cos(2\omega t)] - U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(2\omega t)$$

možemo napisati ovako:

$$p(t) = p_r(t) + p_j(t)$$

gdje je

$$p_r(t) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot [1 - \cos(2\omega t)]$$

$$p_j(t) = - U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(2\omega t)$$

Maksimalna vrijednost (amplituda) ukupne trenutačne snage $p_j(t)$ na reaktivnim elementima kruga predstavlja **ukupnu jalovu** (ili reaktivnu) **snagu** koju označavamo s Q

$$Q = UI \sin \varphi$$

23

Značajke jalove snage



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ **Ukupna jalova snaga Q** nekog kruga (ili spoja elemenata) može se odrediti kao: $Q = UI \sin \varphi$
gdje su U i I efektivne vrijednosti ukupnog napona i struje, a φ je kut ukupne impedancije kruga (ili spoja elemenata)
- ♦ Faktor $\sin \varphi$ naziva se još i **faktor jalove snage**
- ♦ Uz $\varphi > 0$: $Q = Q_L$ - induktivna jalova snaga (uzimamo da je $Q_L > 0$)
- ♦ Uz $\varphi < 0$: $Q = Q_C$ - kapacitivna jalova snaga (uzimamo da je $Q_C < 0$)
- ♦ **Ukupna induktivna jalova snaga Q_L** je zbroj snaga Q_{L_i} na svim induktivitetima kruga: $Q_L = \sum Q_{L_i}$
- ♦ **Ukupna kapacitivna jalova snaga Q_C** je zbroj snaga Q_{C_i} na svim kapacitetima kruga: $Q_C = \sum Q_{C_i}$
- ♦ **Ukupna jalova snaga kruga Q** jednaka je razlici ukupne induktivne i ukupne kapacitivne jalove snage: $Q = Q_L - Q_C$

24

Veza radne, jalove i prividne snage

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Kvadriramo li i međusobno zbrojimo izraze za radnu ($UI\cos\varphi$) i jalovu ($UI\sin\varphi$) snagu, dobivamo

$$(UI\cos\varphi)^2 + (UI\sin\varphi)^2 = (UI)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = (UI)^2$$

tj.

$$P^2 + Q^2 = (UI)^2 = S^2$$

Odnos između P , Q i S možemo, dakle, napisati na sljedeći način:

$$P^2 + Q^2 = S^2 \quad (4)$$

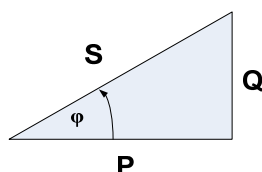
25

Trokut snage

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Relacija (4) slikovito se može prikazati *trokutom snage*, gdje predznak kuta φ određuje tip trošila (ili spoja).



$$S = UI$$

$$P = S \cos \varphi$$

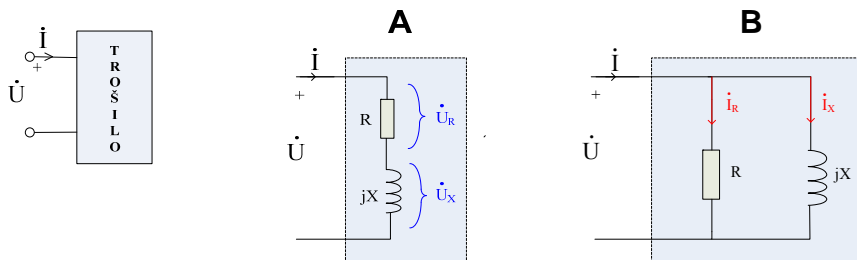
$$Q = S \sin \varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

26

Određivanje snage na pojedinim elementima

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = (U \cdot \cos \varphi) \cdot I = U \cdot (I \cdot \cos \varphi)$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = (U \cdot \sin \varphi) \cdot I = U \cdot (I \cdot \sin \varphi)$$

$$\dot{U}_R = I \cdot R$$

$$\dot{U}_X = I \cdot jX$$

$$\dot{I}_R = \dot{U} / R$$

$$\dot{I}_X = \dot{U} / jX$$

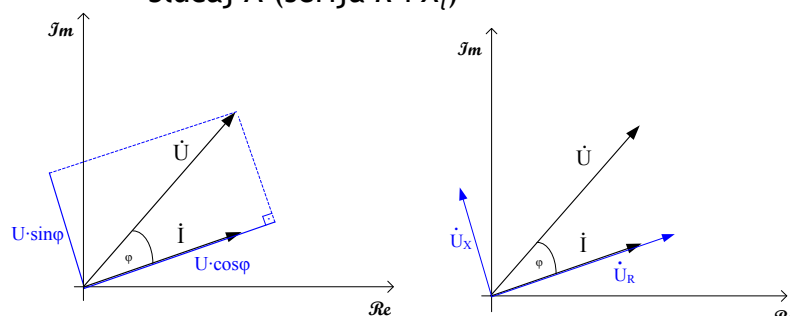
27

Određivanje snage na pojedinim elementima

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Slučaj A (serija R i X_L)



$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_X \quad U_R = U \cdot \cos \varphi \quad U_X = U \cdot \sin \varphi$$

$$P = (U \cdot \cos \varphi) \cdot I = U_R \cdot I = I \cdot R \cdot I = I^2 \cdot R$$

$$Q = (U \cdot \sin \varphi) \cdot I = U_X \cdot I = I \cdot X \cdot I = I^2 \cdot X$$

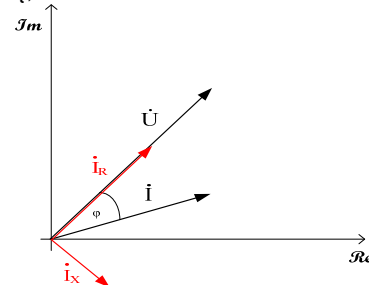
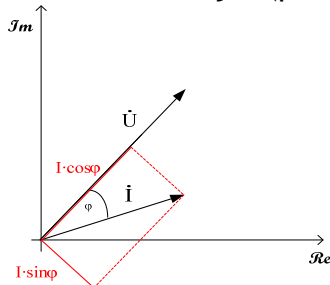
28

Određivanje snage na pojedinim elementima

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Slučaj B (paralela R i X_L)

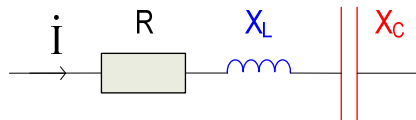


$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_R + \dot{I}_X & I_R &= I \cdot \cos \varphi & I_X &= I \cdot \sin \varphi \\ P &= U \cdot (I \cdot \cos \varphi) = U \cdot I_R = \frac{U^2}{R} = U^2 \cdot G \\ Q &= U \cdot (I \cdot \sin \varphi) = U \cdot I_X = \frac{U^2}{X} = U^2 \cdot B \end{aligned}$$

29

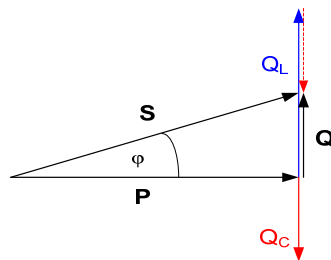
Određivanje ukupne radne, jalove i prividne snage

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$P = \sum_{i=1}^n P_i$$

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i (= Q_L - Q_C)$$



$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \neq \sum_{i=1}^n S_i$$

Q_L - jalova snaga na induktivitetu, pozitivna

Q_C - jalova snaga na kapacitetu, negativna

(Pažnja: snage nisu vektori!)

30

Primjer 3.

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Na izvor su paralelno priključena tri trošila:

- ♦ 1° 250 VA, $\cos \varphi = 0,5$ (induktivno)
 - ♦ 2° 180 W, $\cos \varphi = 0,8$ (kapacitivno)
 - ♦ 3° 300 VA, 100 VAR (induktivno)
- ♦ Odredite ukupnu prividnu, radnu i jalovu snagu, faktor snage te nacrtajte trokut snage (za svako pojedino trošilo i ukupno).

31

Primjer 3. (Rješenje)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



1° $S_1 = 250 \text{ VA}$, $\cos \varphi_1 = 0,5$ (ind)

$$P_1 = S_1 \cos \varphi_1 = 125 \text{ W}$$

$$\varphi_1 = 60^\circ$$

$$Q_1 = S_1 \sin \varphi_1 = 216 \text{ VAR (ind)}$$

2° $P_2 = 180 \text{ W}$, $\cos \varphi_2 = 0,8$ (kap)

$$S_2 = \frac{P_2}{\cos \varphi_2} = 225 \text{ VA}$$

$$Q_2 = - \sqrt{S_2^2 - P_2^2} = -135 \text{ VAR}$$

3° $S_3 = 300 \text{ VA}$, $Q_3 = 100 \text{ VAR}$

$$P_3 = \sqrt{S_3^2 - Q_3^2} = 283 \text{ W}$$

32

Primjer 3. (Rješenje)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



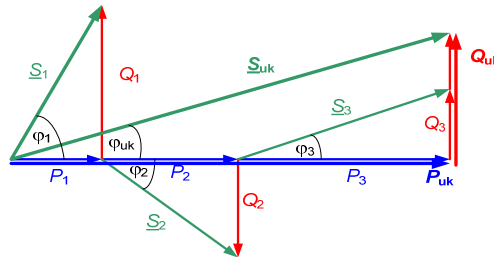
Ukupne snage su:

$$P_{uk} = P_1 + P_2 + P_3 = 125 + 180 + 283 = 588 \text{ W}$$

$$Q_{uk} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 216 - 135 + 100 = 181 \text{ VAr (ind)}$$

$$S_{uk} = \sqrt{P_{uk}^2 + Q_{uk}^2} = 616 \text{ VA}$$

$$\cos \varphi_{uk} = P_{uk} / S_{uk} = 588 / 616 = 0,955$$



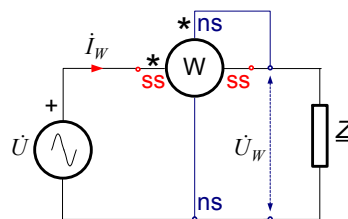
33

Mjerenje snage kod izmjenične struje

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Radna snaga mjeri se vatmetrom (u spoju prema slici) čije pokazivanje P_W je određeno izrazom:



$$P_W = U_W \cdot I_W \cdot \cos \angle \dot{U}_W, \dot{I}_W$$

zvjezdice * označavaju referentne priključnice polariteta (+) napona i smjera (ulaza) struje

- Pokazivanje vatmetra jednako je umnošku napona na naponskoj grani vatmetra U , struje kroz strujnu granu vatmetra I i kosinusa kuta između fazora tih veličina

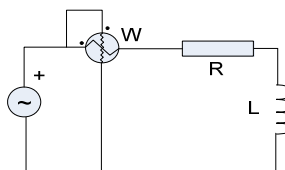
34

Primjer 4.

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Što se dogodi s pokazivanjem vatmetra u spoju prema slici ako se poveća frekvencija naponskog izvora?



Vatmetar u ovakvom spoju mjeri radnu snagu ukupnog spoja, a to je snaga na otporu koja se može izraziti ovako

$$P = I^2 \cdot R.$$

S povećanjem frekvencije povećava se impedancija (zašto?), pa se smanji struja, a time i radna snaga.

(Pokazivanje vatmetra se smanji.)

❖ Bi li odgovor bio isti da je umjesto naponskog strujni izvor?

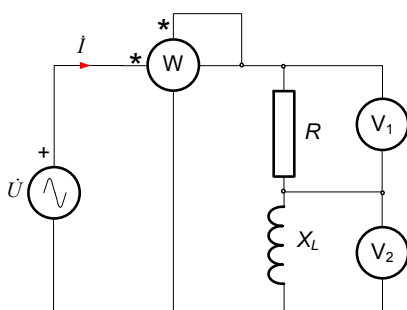
35

Primjer 5.

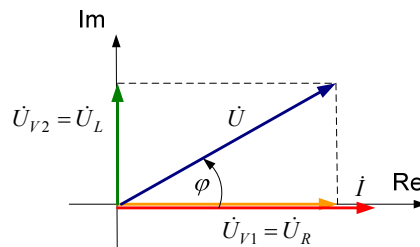
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Ako instrumenti u krugu na slici pokazuju $U_{V1}=40\text{ V}$, $U_{V2}=30\text{ V}$ i $P_W=30\text{ W}$, odrediti R , X_L , napon U i faktor snage izvora.



Pomoć u rješavanju:
(vektorski dijagram)



❖ Kako bismo zadatak mogli riješiti bez razmatranja i uporabe vektorskog dijagrama napona?

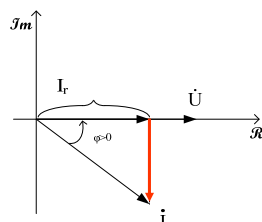
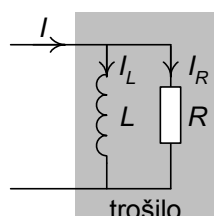
36

Kompenzacija jalove snage

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Jalova snaga određuje jalovu energiju koja oscilira između izvora i trošila te opterećuje elektroenergetski (EE) sustav (prijenosne vodove), pa se nastoji minimizirati.
- ♦ Slika prikazuje nadomjesni spoj jednog elektromotora, a vektorski dijagram pokazuje kako induktivna struja I_L povećava ukupnu struju I koja kroz vod dolazi do trošila.



- ❖ Kako bismo smanjili jalovu snagu ne mijenjajući ni napon niti elemente spoja?

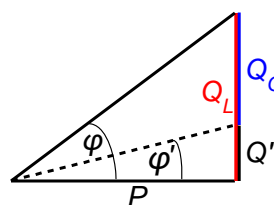
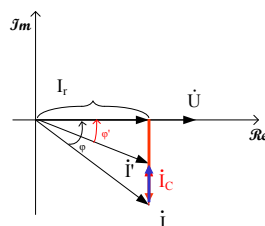
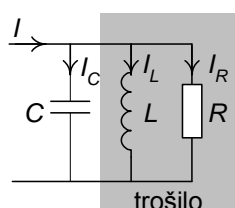
37

Kompenzacija jalove snage

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Dodavanjem u spoj kapaciteta, smanjuje se ukupna jalova snaga spoja (*kompenzira se induktivna snaga trošila*). Jalova energija ne vraća se više iz induktiviteta u izvor, nego titra (lokalno) između induktiviteta i kapaciteta.



- ♦ Dimenzioniranje kompenzacijskog kapaciteta:

$$Q_c = Q_L - Q' = P \tan \varphi - P \tan \varphi' = P(\tan \varphi - \tan \varphi')$$

$$Q_c = U^2 B_c = U^2 \omega C$$

$$C = \frac{Q_c}{\omega \cdot U^2}$$

38

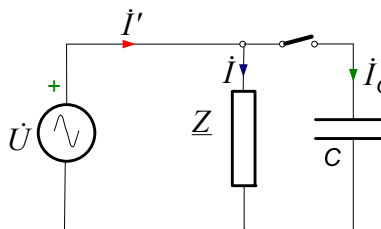
Primjer 6.

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Odrediti koliki treba biti kapacitet C kondenzatora kojega treba spojiti paralelno trošilu impedancije $Z = 20 \angle 30^\circ \Omega$ da bi se faktor snage spoja povećao na 0,95?

Napon izvora U je 110V/60Hz.



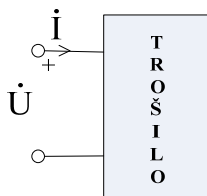
Rješenje: 28,6 μF

- ❖ Da li je isti faktor snage moguće postići i s nekom drugom veličinom kapaciteta? Kojom?
- ❖ Koliki bi trebao biti kapacitivni otpor X_C za potpunu kompenzaciju jalove snage trošila.

39

Određivanje snage pomoću fazora napona i struje

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$\dot{U} = U \angle 0^\circ \quad \dot{I} = I \angle -\varphi$$

$$\dot{I}^* = I \angle \varphi$$

$$\dot{U} \dot{I}^* = U \cdot I \angle (0 + \varphi) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) + j \cdot U \cdot I \cdot \sin(\varphi)$$

$$P = \text{Re} \{ \dot{U} \cdot \dot{I}^* \}$$

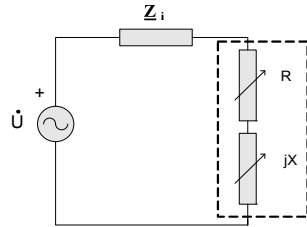
$$Q = \text{Im} \{ \dot{U} \cdot \dot{I}^* \}$$

$$S = | \dot{U} \cdot \dot{I}^* |$$

40

Prilagođenje trošila na najveću snagu

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$\underline{Z}_i = R_i + jX_i \quad ; \quad \underline{Z} = R + jX$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_i + \underline{Z}} = \frac{\dot{U}}{(R_i + R) + j(X_i + X)}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2}}$$

Snaga P na impedanciji Z je funkcija dviju varijabli (R, X) .

$$P = \frac{U^2 \cdot R}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2} = P(R, X)$$

41

Prilagođenje trošila na najveću snagu

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



U slučaju kada su R i X promjenjivi, maksimalnu snagu dobit ćemo ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{[(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2] \cdot U^2 - 2 \cdot (R_i + R) \cdot R \cdot U^2}{[(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2]^2} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{-2RU^2(X_i + X)}{[(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2]^2} = 0 \quad (5)$$

42

Prilagođenje trošila na najveću snagu

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Iz izraza (5) dobijemo da je $-2R(X_i + X) = 0$
- ♦ samo u slučaju $X = -X_i$ dobijemo realno rješenje (R mora biti veći od nule da bi se na njemu uopće razvila korisna snaga).
- ♦ Uvrstimo $X = -X_i$
u izraz (4) te dobijemo

$$R = R_i$$

Dakle

$$\underline{Z} = R + jX = R_i - jX_i = \underline{Z}_i^*$$

- ♦ Maksimalna snaga na impedanciji se dobije kad je impedancija trošila jednaka konjugirano kompleksnoj vrijednosti impedancije izvora. U tom slučaju je krug u rezonanciji ($X = -X_i$) i ($R = R_i$).

43

Prilagođenje trošila na najveću snagu

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ U slučaju da možemo mijenjati samo otpor R , maksimalna snaga razvit će se ako s vrijednošću R zadovoljimo izraz (4). To će biti postignuto u sljedećem slučaju

$$R = \sqrt{(X_i + X)^2 + R_i^2}$$

- ♦ U slučaju da možemo mijenjati samo X , na otporu R biti će maksimalna snaga uz najveću struju, a to se postiže ako krug dovedemo u rezonanciju. Uvjet za to je

$$X = -X_i$$

44

Primjer 7.

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Na priključnicama nekog trošila zadani su sljedeći napon i struja:

$$u(t) = 100\sqrt{2} \sin(1000t) \text{ [V]}$$

$$i(t) = 10\sqrt{2} \sin(1000t - 30^\circ) \text{ [A]}.$$

Treba:

- Prikazati analitički i grafički funkciju trenutačne snage, izračunati srednju vrijednost trenutačne snage.
- Odrediti radnu, jalovu i prividnu snagu.
- Odrediti koliku energiju primi trošilo tijekom 1 sata.
- Nadomjestiti trošilo serijskom i paralelnom kombinacijom otpora R i reaktancije X te izračunati snagu na svakom od tih elemenata.
- S pomoću fazora napona i struje izračunati radnu, jalovu i prividnu snagu.

45

Primjer 7. (Rješenje)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Zadano:

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t) = 100\sqrt{2} \sin(1000t) \dots \dot{U} = 100 \angle 0^\circ$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = 10\sqrt{2} \sin(1000t - 30^\circ) \dots \dot{I} = 10 \angle -30^\circ$$

$$\varphi = 30^\circ$$

a)

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m \cdot \sin(\omega t) \cdot I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) - U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)$$

$$p(t) = 500\sqrt{3} - 1000 \cdot \cos(2000t - 30^\circ)$$

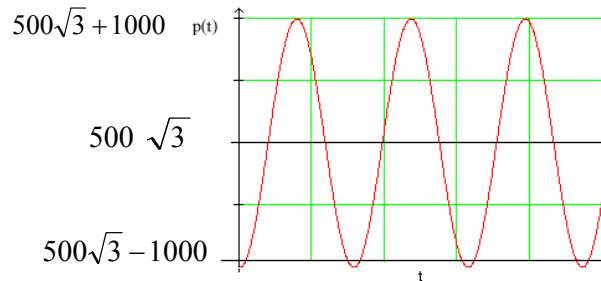
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot dt - \frac{1}{T} \int_0^T U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi) \cdot dt$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = 500 \sqrt{3} = 866 \text{ W}$$

46

Primjer 7. (Rješenje)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



b)

$$S = U \cdot I = 1000 \text{ VA}$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = S \cdot \cos(\varphi) = 500\sqrt{3} = 866 \text{ W}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = S \cdot \sin(\varphi) = 500 \text{ VAR (induktivno).}$$

47

Primjer 7. (Rješenje)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



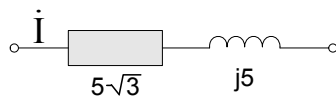
c)

$$W = P \cdot t = t \cdot U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = 3600 \cdot 500 \sqrt{3} = 3,12 \text{ MWs} = 866 \text{ Wh}$$

d)

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U \angle 0}{I \angle -\varphi} = Z \angle \varphi = Z \cos(\varphi) + j \cdot Z \sin(\varphi) =$$

$$= R_S + j \cdot X_S = 10 \angle 30^\circ \Omega = 5\sqrt{3} + j \cdot 5 \Omega$$



$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = [U \cdot \cos(\varphi)] \cdot I = U_R \cdot I = I^2 \cdot R_S = 100 \cdot 5 \sqrt{3} = 500 \sqrt{3} \text{ W}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = [U \cdot \sin(\varphi)] \cdot I = U_L \cdot I = I^2 \cdot X_S = 100 \cdot 5 = 500 \text{ VAR}$$

$$S = U \cdot I = Z \cdot I^2 = 10 \cdot 100 = 1000 \text{ VA}$$

48

Primjer 7. (Rješenje)

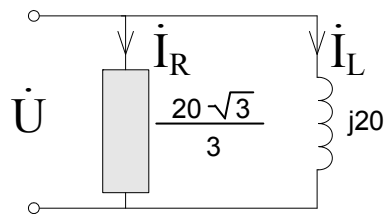
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I \angle -\varphi}{U \angle 0} = Y \angle -\varphi = Y \cdot \cos(-\varphi) + j \cdot Y \cdot \sin(-\varphi) =$$

$$= \frac{1}{R_p} - j \cdot \frac{1}{X_p} = 0,05 \cdot \sqrt{3} - j \cdot 0,05 \text{ [S]}$$

$$R_p = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Omega, \quad X_p = 20 \Omega$$



49

Primjer 7. (Rješenje)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = U \cdot [I \cdot \cos(\varphi)] = U \cdot I_R = \frac{U^2}{R_p} = 500\sqrt{3} \text{ W}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = U \cdot [I \cdot \sin(\varphi)] = U \cdot I_L = \frac{U^2}{X_p} = 500 \text{ VAR}$$

$$S = U \cdot I = U^2 \cdot Y = 1000 \text{ VA}$$

e)

$$\dot{U} \cdot \dot{I}^* = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) + j \cdot U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = 500\sqrt{3} + j \cdot 500$$

$$P = \text{Re} \{ \dot{U} \cdot \dot{I}^* \} = 500\sqrt{3} \text{ W}$$

$$Q = \text{Im} \{ \dot{U} \cdot \dot{I}^* \} = 500 \text{ VAR}$$

$$S = |\dot{U} \cdot \dot{I}^*| = \sqrt{(500\sqrt{3})^2 + (500)^2} = 1000 \text{ VA}$$

50

Primjer 8.

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

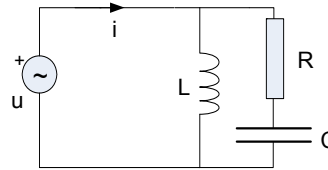


U spoju prema slici zadano je:

$$u(t) = 100\sin(500t) ,$$

$$i(t) = 2,5\sin(500t),$$

$$R = 20 \, \Omega.$$



Treba odrediti veličine L i C .

51

Primjer 8. (Rješenje)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



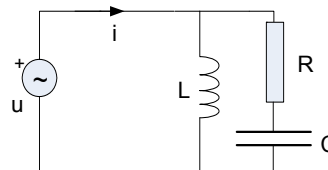
U spoju prema slici zadano je

$$u(t) = 100\sin(500t) ,$$

$$i(t) = 2,5\sin(500t),$$

$$R = 20 \, \Omega.$$

$$L, C = ?$$



Rješenje:

Snaga koju predaje izvor iznosi

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2,5}{\sqrt{2}} \cos 0 = 125 \, \text{W}$$

Snaga se troši na otporu R

$$P = I_R^2 \cdot R \qquad I_R = \sqrt{\frac{P}{R}} = 2,5 \, \text{A}$$

52

Primjer 8. (Rješenje)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Impedancija grane s otporom iznosi

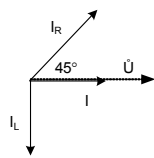
$$Z_R = \frac{U}{I_R} = 20 \sqrt{2} \Omega$$

Dalje slijedi

$$X_C = \sqrt{Z_R^2 - R^2} = 20 \Omega$$

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = 100 \mu\text{F}$$

Na vektorskom dijagramu prikazan je odnos struja za ovaj spoj (strujna rezonancija) iz kojeg odredimo struju I_L i induktivitet L .



$$X_L = \frac{U}{I_L} = 40 \Omega$$

$$I_L = I_R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = 0,08 \text{ H}$$

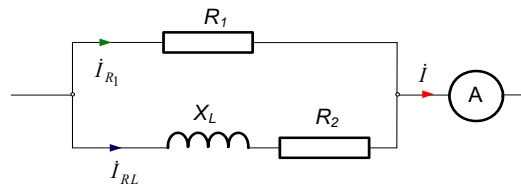
53

Primjeri za vježbu

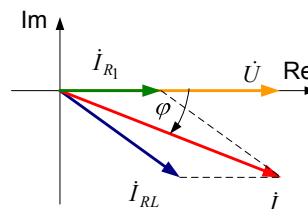
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



9. Kolika je struja ampermetra u krugu na slici ako je ukupna radna snaga $P_{uk}=1100 \text{ W}$? Zadano je: $R_1=10 \Omega$, $R_2=3 \Omega$, $X_L=4 \Omega$.



Pomoć: vektorski dijagram



54

Primjeri za vježbu

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



10. Na izvor napona $\dot{U} = 100 \angle 30^\circ \text{ V}$ priključena je impedancija $Z = 3 + j4 \, \Omega$. Odredite radnu, jalovu i prividnu snagu.
11. Paralelno su spojene dvije impedancije $Z_1 = 2 - j5 \, \Omega$ i $Z_2 = 1 + j \, \Omega$. Snaga na realnom dijelu (otporu) impedancije Z_1 je 20 W. Odredite ukupnu jalovu snagu.
12. Napon i struja nekog dvopola su:
 $u(t) = 100 \sin(\omega t) \text{ V} \quad ; \quad i(t) = 5 \sin(\omega t - \pi / 3) \text{ A}$
Odredite impedanciju dvopola, prividnu, radnu i jalovu snagu.
13. Trenutačna snaga trošila doseže najvišu vrijednost od 900 VA i najnižu vrijednost od -100 VA. Odredite: radnu, prividnu i jalovu snagu te faktor snage trošila.