

12b. predavanje iz OE

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Značajke periodički promjenjivih električkih veličina

(uredio prof.dr.sc. Armin Pavić)

Oblici vremenske ovisnosti električnih veličina

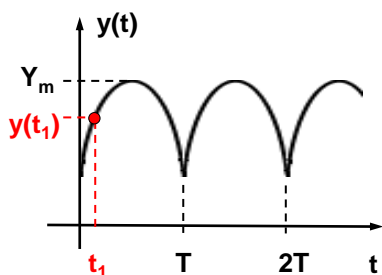
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ S obzirom na vremensku ovisnost, električni naponi i struje mogu biti:
 - **vremenski stalni (konstantni)** ili
 - **vremenski promjenjivi.**
- ♦ Razlikujemo vremenski promjenjive:
 - **periodičke veličine** kod kojih se oblik promjene trenutačnih vrijednosti tijekom vremena periodički ponavlja; i
 - **neperiodičke veličine** - npr. struja nabijanja kondenzatora (koji se preko otpora spaja na izvor stalnog napona)
- ♦ Oblike vremenske promjene periodičkih električkih veličina nazivamo **valni oblici**.
- ❖ Koji valni oblik smo do sada proučavali?

Periodički promjenjiva veličina

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ $y(t_1)$ - **trenutačna vrijednost**.
- ♦ T - **perioda** (vrijeme ponavljanja) u sekundama.
- ♦ $f=1/T$ - **frekvencija** u Hz (Broj perioda u sekundi)
- ♦ Y_m - **vršna, tjemena (ili maksimalna) vrijednost**. (Najveća vrijednost koju veličina postigne u jednoj periodi).
- ♦ Periodičnost neke veličine (vremenske funkcije) izražava se matematički ovako: $y(t) = y(t+T) = \dots = y(t+kT)$, $k \in \mathbb{N}$ gdje je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

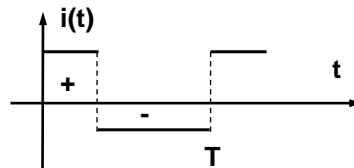
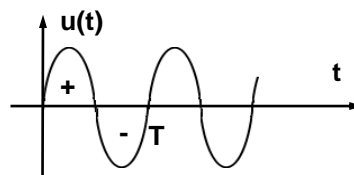
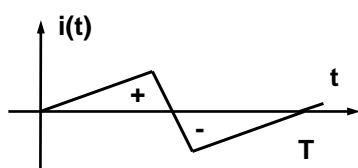
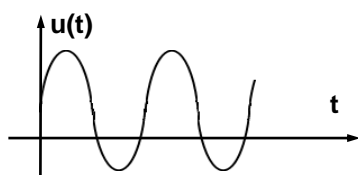
3

Izmjenične električne veličine

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Periodički promjenjive napone ili struje, koji tijekom jedne periode promijene svoj predznak (poprimaju pozitivne i negativne trenutačne vrijednosti) nazivamo **izmjenične električne veličine**.
- ♦ Čest je slučaj da valni oblik izmjenične veličine u jednoj periodi ima jednake pozitivne i negativne površine (čista izmjenična veličina).



4

Parametri periodičkih električnih veličina

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

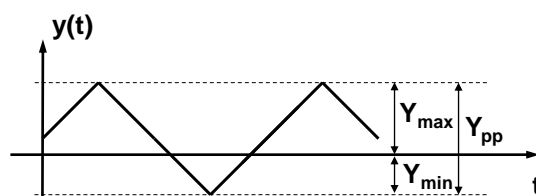


- ♦ Vremenski nepromjenjive (stalne) električne veličine mogu se opisati samo pomoću jednog parametra npr. napon baterije $U=1,5$ V ili akumulatora $U=12$ V.
- ♦ Opis periodički promjenjivih električnih veličina pomoću trenutanih vrijednosti (kojih ima beskonačno mnogo) bio bi nepraktičan pa se umjesto toga rabe sljedeći parametri:
 - ♦ maksimalna (najveća, vršna ili tjemena) vrijednost,
 - ♦ minimalna (najmanja) vrijednost,
 - ♦ vrijednost od vrha do dna,
 - ♦ srednja vrijednost (istosmjerna komponenta),
 - ♦ efektivna vrijednost te
 - ♦ omjerni faktori.

5

Maksimalna, minimalna i vrijednost od vrha do dna

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Y_{pp} je oznaka parametra kojega nazivamo **vrijednost od vrha do dna** (engl. *peak to peak*). Ovaj parametar računa se kao razlika max i min vrijednosti periodičke veličine ($Y_{pp}=Y_{max} - Y_{min}$) i ne mijenja s promjenom srednje vrijednosti (istosmjerne komponente) valnog oblika.
- ❖ Primjer: uz $U_{max}=4$ V i $U_{min}=-2$ V, $U_{pp} = U_{max}-U_{min} = 6$ V.

6

Srednja vrijednost (definicija)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Srednja vrijednost struje/napona definira se kao:

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$$

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

i predstavlja matematičku srednju vrijednost odnosno prosječnu vrijednost periodičke veličine u vremenskom intervalu T.

Grafički: *ona vrijednost koja površinu ispod krivulje u jednoj periodi valnog oblika dijeli na dva jednaka dijela.*

7

Srednja vrijednost struje (fizikalni smisao)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

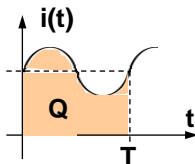


- ♦ Količina naboja koja se u periodi T prenese strujom $i(t)$ jednaka je:
- ♦ Ista količina naboja prenijela bi se u istom vremenu T konstantnom strujom I_{sr} :

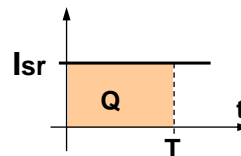
$$Q = \int_0^T i(t) dt$$

$$Q = I_{sr} \cdot T$$

- ♦ Dakle vrijedi:



$$\int_0^T i(t) dt = I_{sr} \cdot T$$



I_{sr} naziva se **istosmjerna komponenta** struje. Općenito:

- ♦ Srednja vrijednost = istosmjerna komponenta period. veličine

8

Elektrolitička srednja vrijednost

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ *Elektrolitička srednja vrijednost* struje/napona definira se kao:

$$I_{el} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt \qquad U_{el} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$$

i predstavlja *srednju vrijednost (apsolutnog) iznosa izmjenične veličine*.

Efektivna vrijednost (definicija)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Efektivna vrijednost struje/napona definira se kao:

$$I_{ef} = I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \qquad U_{ef} = U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

Efektivna vrijednost struje (fizikalni smisao)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Efektivnu vrijednost periodički promjenjive struje $i(t)$ određujemo usporedbom topline koju ta struja stvori na otporu R , s toplinom koju bi na istom otporu stvorila stalna, istosmjerna struja u istom vremenu T .
- ♦ Toplina koju razvija vremenski promjenjiva struja $i(t)$ jednaka je:
- ♦ Jednaka količina topline koju daje istosmjerna struja I_{ef} :

$$W = \int_0^T i^2(t) \cdot R \cdot dt \quad \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ i(t) \quad R \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow W \\ \searrow \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \text{---} \\ I_{ef} \quad R \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow W \\ \searrow \end{array} \quad W = I_{ef}^2 \cdot R \cdot T$$

Dakle vrijedi: $\int_0^T i^2(t) \cdot R \cdot dt = I_{ef}^2 \cdot R \cdot T \Rightarrow I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$

11

Omjerni faktori

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ **Tjemeni faktor σ (sigma)** jednak je omjeru maksimalne i efektivne vrijednosti:

$$\sigma = \frac{I_m}{I_{ef}} \quad \sigma = \frac{U_m}{U_{ef}}$$

- Za sinusni valni oblik vrijedi: $\sigma = \sqrt{2}$ (rabi se za usporedbu izobličenja neke veličine u odnosu na sinusni valni oblik)

- ♦ **Faktor oblika ξ (ksi)** jednak je omjeru efektivne i srednje vrijednosti:

$$\xi = \frac{I_{ef}}{I_{sr}} \quad \xi = \frac{U_{ef}}{U_{sr}}$$

- ♦ (rabi se određivanje efektivnih vrijednosti kod električnih mjernih instrumenata sa srednjim odklonom)

12

Osnovni valni oblici

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

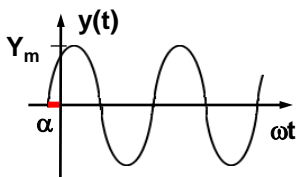


- ♦ Najčešće se u praksi koriste sljedeći valni oblici:
 - sinusni,
 - pilasti i
 - vremenski nepromjenjivi - stalni
(krugovi istosmjerne struje - DC).

13

Sinusni valni oblik

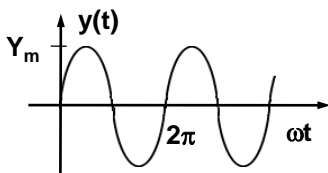
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Sinusni valni oblik karakterizira:

- amplituda Y_m ,
- kružna frekvencija $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ (u rad/s) te
- početni kut (fazni pomak) α u odnosu na ishodište.

$$y(t) = Y_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) = Y_m \sin(\omega t + \alpha)$$



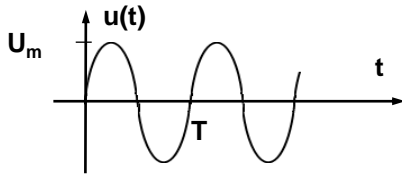
- ♦ Ako je $\alpha=0$, sinusoida prolazi kroz ishodište (čista sinusna funkcija).

$$y(t) = Y_m \sin \frac{2\pi}{T}t = Y_m \sin \omega t$$

14

Primjer: parametri sinusnog valnog oblika

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



♦ Srednja vrijednost:

$$U_{sr} = 0$$

♦ Efektivna vrijednost:

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{U_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt =$$

$$\frac{U_m^2}{2T} \left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right] = \frac{U_m^2}{2T} \cdot T \Rightarrow U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

♦ Tjemeni faktor: $\sigma = \frac{U_m}{U} = \sqrt{2}$

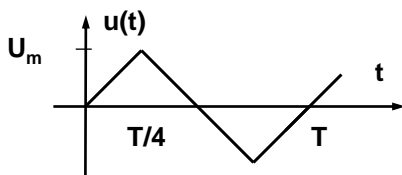
15

Pilasti valni oblik

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Izmjenična verzija

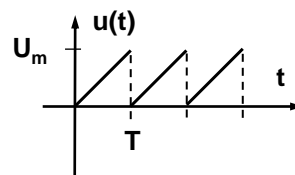


$$u(t) = \frac{4U_{\max}}{T} t \quad \text{za } 0 < t < T/4$$

$$u(t) = -\frac{4U_m}{T} t + 2U_m \quad \text{za } T/4 < t < 3T/4$$

$$u(t) = \frac{4U_m}{T} t - 4U_m \quad \text{za } 3T/4 < t < T$$

Istosmjerna verzija



$$u(t) = \frac{U_{\max}}{T} t$$

16

Primjer: parametri pilastog valnog oblika (1)

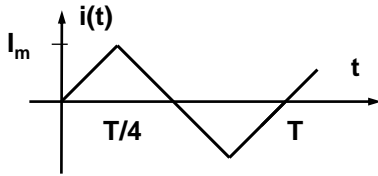
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Izmjenična verzija

♦ Srednja vrijednost:

$$I_{sr} = 0$$



♦ Efektivna vrijednost: $I = \frac{I_m}{\sqrt{3}}$

♦ Tjemeni faktor: $\sigma = \frac{I_m}{I} = \sqrt{3}$

17

Primjer: parametri pilastog valnog oblika (2)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



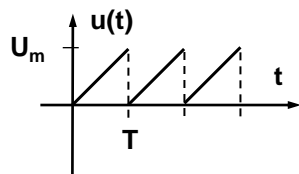
Istosmjerna verzija

♦ Srednja vrijednost: $U_{sr} = \frac{U_m}{2}$

♦ Faktor oblika: $\xi = \frac{U}{U_{sr}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

♦ Efektivna vrijednost: $U = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$

♦ Tjemeni faktor: $\sigma = \frac{U_m}{U} = \sqrt{3}$



$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{U_m}{T} t \right)^2 dt = \frac{U_m^2}{T^3} \int_0^T t^2 dt = \frac{U_m^2}{3T^3} T^3 = \frac{U_m^2}{3} \Rightarrow U = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$$

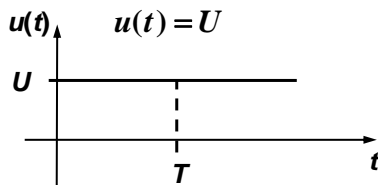
18

Vremenski stalni valni oblik (konstanta)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Vremenski stalna električka veličina (konstanta) može se promatrati kao periodički valni oblik. U ovom slučaju, vrijednost periode T može se odabrati **proizvoljno**.



♦ Srednja vrijednost: $U_{sr}=U$

♦ Efektivna vrijednost: $U_{ef}=U$

$$U_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U^2 dt = \frac{1}{T} U^2 \int_0^T dt = \frac{1}{T} U^2 T = U^2 \Rightarrow U_{ef} = U$$

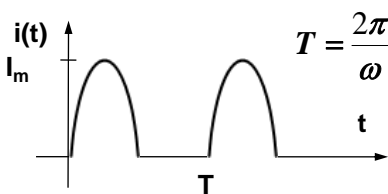
19

Primjer: ispravljeni sinusni valni oblik

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Poluvalno ispravljena sinusoida

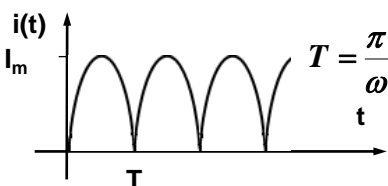


$$I_{sr} = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin(\omega t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 dt \right) =$$

$$\frac{2I_m}{T\omega} = \frac{I_m}{\pi} = 0,318I_m$$

$$I = \frac{I_m}{2}$$

- Punovalno ispravljena sinusoida



$$I_{sr} = \frac{2I_m}{\pi} = 0,637I_m$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

20

Primjer: Valni oblik kao **periodički niz impulsa**

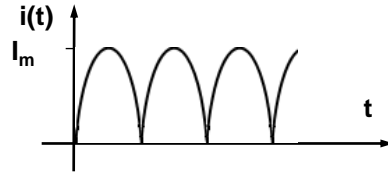
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ T = perioda niza impulsa τ = dio periode ispunjen impulsima
 $\frac{\tau}{T}$ = faktor popunjenosti (*duty cycle*)

■ neprekinuti niz impulsa ($\tau = T$)

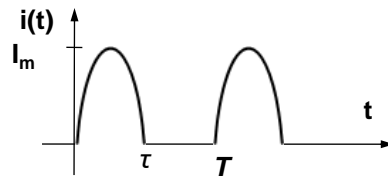
$$I_{sr0} = \frac{I_m}{\pi/2} \quad I_{ef0} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$



■ isprekidani niz impulsa ($\tau < T$)

$$I_{sr} = \frac{I_m}{\pi} = \frac{1}{2} I_{sr0} = \frac{\tau}{T} \cdot I_{sr0}$$

$$I_{ef} = \frac{I_m}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{ef0} = \sqrt{\frac{\tau}{T}} \cdot I_{ef0}$$



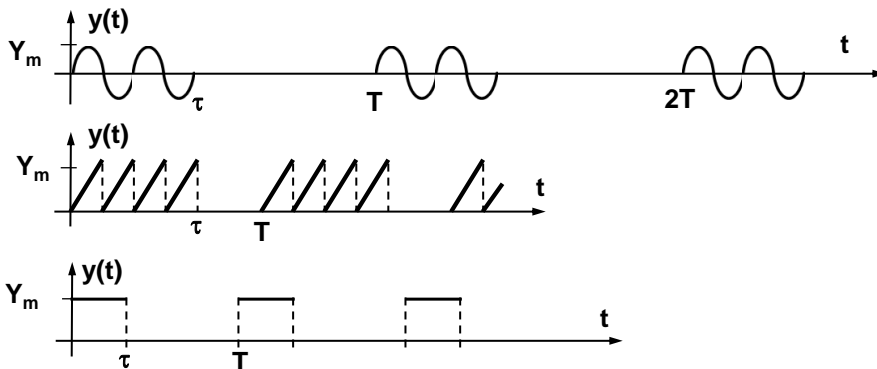
21

Isprekidani niz impulsa

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Isprekidani (periodički) niz impulsa $y(t)$ dobije se tako da se osnovni valni oblik (neprekinuti niz impulsa) prekida ("gasi") u određenim dijelovima periode. Na taj način dobiva se **isprekidani niz impulsa** (npr. sinusoidnih, pilastih ili pravokutnih, kao na slici).



22

Parametri periodičkog niza impulsa

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Niz impulsa karakteriziraju dva vremenska parametra, i to:
 - **perioda (ponavljanja) T** i
 - **dio periode ispunjen impulsima τ** .
- ♦ Omjer τ/T = **faktor popunjenosti** (engl. **duty cycle**)
- ♦ Poznavajući efektivnu i srednju vrijednost *osnovnog valnog oblika* (neprekinutog niza impulsa), jednostavno možemo izračunati efektivnu i srednju vrijednost isprekidanog niza impulsa, pomoću slijedećih jednažbi:
 - **Efektivna vrijednost isprekidanog niza impulsa:** $Y_{ef} = Y_{ef\ osnovno} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}}$
 - **Srednja vrijednost isprekidanog niza impulsa:** $Y_{sr} = Y_{sr\ osnovno} \cdot \frac{\tau}{T}$
- ♦ Za $\tau = T$ – neprekinuti niz impulsa (osnovni valni oblik).

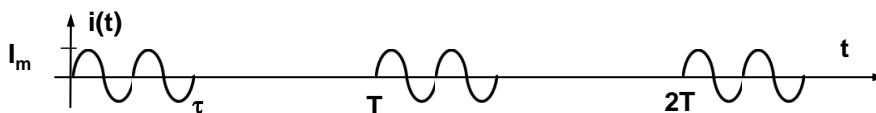
23

Primjer: parametri niza sinusnih impulsa

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Za niz sinusnih strujnih impulsa poznat je omjer $\frac{\tau}{T} = 0,4$.
Odredite efektivnu i srednju vrijednost takvih impulsa.
Odredite također snagu koju bi takva struja razvijala prolazeći kroz otpor $R = 4\ \Omega$. Zadano: $I_m = 2\text{ A}$.



$$I_{ef} = I_{ef\ osnovno} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\tau}{T}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} 0,632$$

$$P = I_{ef}^2 R$$

- ♦ Srednja vrijednost impulsa: $I_{sr} = I_{sr\ osnovno} \cdot \frac{\tau}{T} = 0$

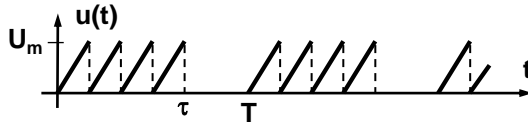
24

Primjer: parametri niza pilastih impulsa

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Odredite efektivnu i srednju vrijednost niza pilastih impulsa zadanog dijagramom ako je poznato: $\frac{\tau}{T} = 0,667$.



- ♦ Efektivna vrijednost impulsa:

$$U_{ef} = U_{ef \text{ osnovno}} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = \frac{U_m}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = \frac{U_m}{\sqrt{3}} \cdot 0,816$$

- ♦ Srednja vrijednost impulsa:

$$U_{sr} = U_{sr \text{ osnovno}} \cdot \frac{\tau}{T} = \frac{U_m}{2} \cdot 0,666$$

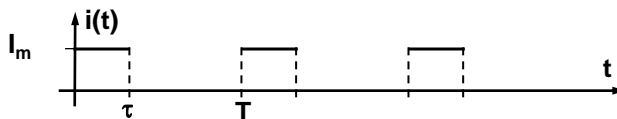
25

Primjer: parametri niza pravokutnih impulsa

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Odredite efektivnu i srednju vrijednost niza pravokutnih impulsa zadanog dijagramom ako je poznato: $\frac{\tau}{T} = 0,33$.



- ♦ Efektivna vrijednost impulsa:

$$I_{ef} = I_{ef \text{ osnovno}} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = I_m \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = I_m \cdot 0,577$$

- ♦ Srednja vrijednost impulsa:

$$I_{sr} = I_{sr \text{ osnovno}} \cdot \frac{\tau}{T} = I_m \cdot 0,333$$

26

Složeni (sastavljeni ili kombinirani) valni oblici

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Složenim valnim oblikom nazivamo onaj koji se može izraziti (prikazati) kao zbroj više (osnovnih) valnih oblika koje nazivamo **komponente**: $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_N(t)$.
- ♦ Komponente složenog valnog oblika imaju svoje efektivne vrijednosti (Y_{1ef} , Y_{2ef} , .., Y_{Nef}), iz kojih se (na temelju superpozicije snaga) može odrediti efektivna vrijednost Y_{ef} složenog valnog oblika koristeći opću jednadžbu

$$Y_{ef} = \sqrt{Y_{1ef}^2 + Y_{2ef}^2 + \dots + Y_{Nef}^2}$$

- ♦ Ovo pojednostavnjuje određivanje parametara nekih prepoznatljivih složenih valnih oblika, kao što su: **zbroj po vremenu nepreklapajućih (disjunktih) impulsnih nizova**, ili (miješani) **valni oblik sastavljen od istosmjerne i izmjenične komponente**.

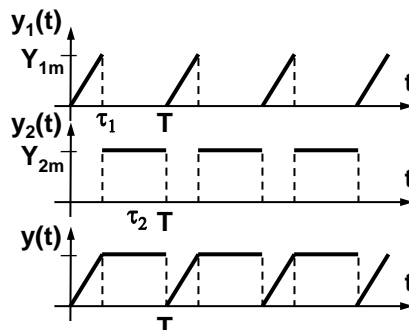
27

Zbroj N po vremenu nepreklapajućih impulsnih nizova

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Za impulse koji se ne preklapaju u vremenu vrijedi: kad je jedan aktivan, svi ostali moraju biti "ugašeni". Zbrajanjem N takvih impulsa dobije se složeni valni oblik: $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_N(t)$.
- ♦ Može se dokazati da općenito vrijedi: kvadrat efektivne vrijednosti takvog složenog oblika jednak je zbroju kvadrata efektivnih vrijednosti komponenata tj.: $Y_{ef} = \sqrt{Y_{1ef}^2 + Y_{2ef}^2 + \dots + Y_{Nef}^2}$
- ❖ **Primjer**: složeni valni oblik sastavljen od 2 komponente:



$$Y_{1ef} = \frac{Y_{1m}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\tau_1}{T}}$$

$$Y_{2ef} = Y_{2m} \sqrt{\frac{\tau_2}{T}}$$

$$Y_{ef} = \sqrt{Y_{1ef}^2 + Y_{2ef}^2}$$

28

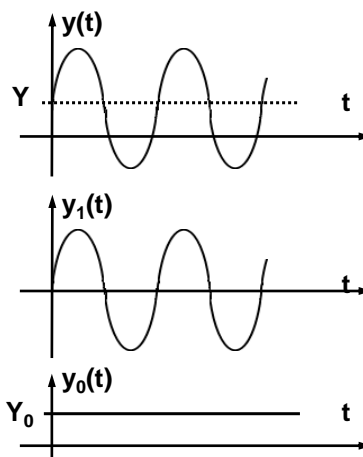
Zbroj istosmjerne i izmjenične komponente (miješani valni oblik)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Ako se valni oblik $y(t)$ može izraziti kao $y(t) = y_0(t) + y_1(t)$ gdje je $y_1(t)$ čista izmjenična komponenta efektivne vrijednosti Y_{1ef} a istosmjerna komponenta $y_0(t) = Y_0$ moguće je dokazati da za efektivnu vrijednost ovakvog valnog oblika vrijedi izraz:

$$Y_{ef} = \sqrt{Y_{0ef}^2 + Y_{1ef}^2}$$



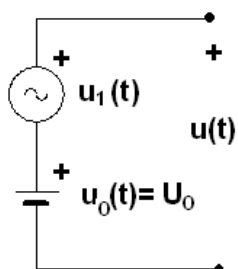
29

Primjer: zbroj istosmjerne i (čiste) izmjenične komponente

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Odredi efektivnu vrijednost napona $u(t)$ dobivenog serijskim spojem dvaju izvora prema slici.



$$u_1(t) = U_{1m} \sin \omega t$$

$$u(t) = U_0 + u_1(t)$$

- Efektivna vrijednost:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{1m}^2}{2}}$$

30