

Značajke periodički promjenjivih električkih veličina i Prijelazne pojave

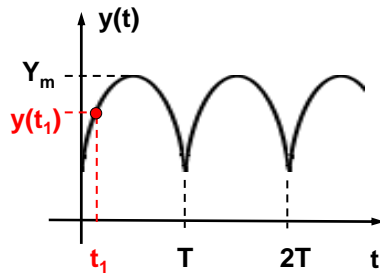
(uredio prof.dr.sc. Armin Pavić)

Oblici vremenske ovisnosti električnih veličina

- ♦ S obzirom na vremensku ovisnost, električni naponi i struje mogu biti:
 - **vremenski stalni (konstantni)** ili
 - **vremenski promjenjivi.**
- ♦ Razlikujemo vremenski promjenjive:
 - **periodičke veličine** kod kojih se oblik promjene trenutačnih vrijednosti tijekom vremena periodički ponavlja; i
 - **neperiodičke veličine** - npr. struja nabijanja kondenzatora (koji se preko otpora spaja na izvor stalnog napona)
- ♦ Oblike vremenske promjene periodičkih električkih veličina nazivamo **valni oblici**.
- ❖ Koji valni oblik smo do sada proučavali?

Periodički promjenjiva veličina

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ $y(t_1)$ - **trenutačna vrijednost**.
- ♦ T - **perioda** (vrijeme ponavljanja) u sekundama.
- ♦ $f=1/T$ - **frekvencija** u Hz (Broj perioda u sekundi)
- ♦ Y_m - **vršna, tjemena (ili maksimalna) vrijednost**.
(Najveća vrijednost koju veličina postigne u jednoj periodi).
- ♦ Periodičnost neke veličine (vremenske funkcije) izražava se matematički ovako: $y(t) = y(t+T) = \dots = y(t+kT)$, $k \in \mathbb{N}$
gdje je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

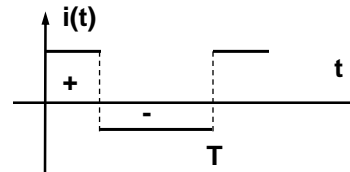
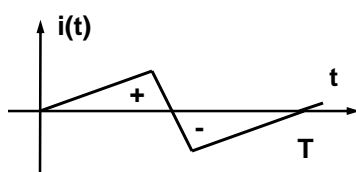
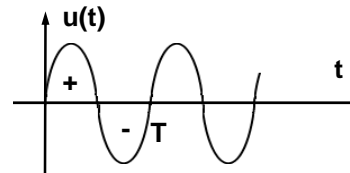
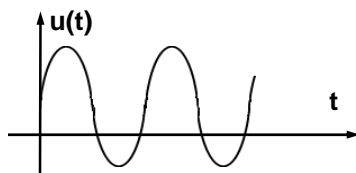
3

Izmjenične električne veličine

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Periodički promjenjive napone ili struje, koji tijekom jedne periode promijene svoj predznak (poprimaju pozitivne i negativne trenutačne vrijednosti) nazivamo **izmjenične električne veličine**.
- ♦ Čest je slučaj da valni oblik izmjenične veličine u jednoj periodi ima jednake pozitivne i negativne površine (čista izmjenična veličina).



4

Parametri periodičkih električnih veličina

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

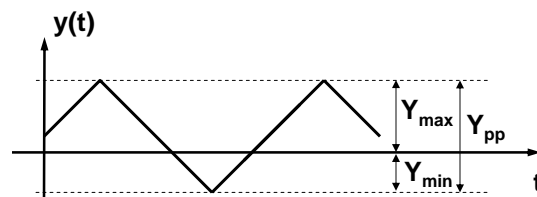


- ♦ Vremenski nepromjenjive (stalne) električne veličine mogu se opisati samo pomoću jednog parametra npr. napon baterije $U=1,5\text{ V}$ ili akumulatora $U=12\text{ V}$.
- ♦ Opis periodički promjenjivih električnih veličina pomoću trenutačnih vrijednosti (kojih ima beskonačno mnogo) bio bi nepraktičan pa se umjesto toga rabe sljedeći parametri:
 - ♦ maksimalna (najveća, vršna ili tjemena) vrijednost,
 - ♦ minimalna (najmanja) vrijednost,
 - ♦ vrijednost od vrha do dna,
 - ♦ srednja vrijednost (istosmjerna komponenta),
 - ♦ efektivna vrijednost te
 - ♦ omjerni faktori.

5

Maksimalna, minimalna i vrijednost od vrha do dna

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Y_{pp} je oznaka parametra kojega nazivamo **vrijednost od vrha do dna** (engl. **peak to peak**). Ovaj parametar računa se kao razlika max i min vrijednosti periodičke veličine ($Y_{pp}=Y_{max} - Y_{min}$) i ne mijenja s promjenom srednje vrijednosti (istosmjerne komponente) valnog oblika.
- ❖ Primjer: uz $U_{max}=4\text{ V}$ i $U_{min}=-2\text{ V}$, $U_{pp} = U_{max}-U_{min} = 6\text{ V}$.

6

Srednja vrijednost (definicija)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Srednja vrijednost struje/napona definira se kao:

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt \qquad U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

i predstavlja matematičku srednju vrijednost odnosno prosječnu vrijednost periodičke veličine u vremenskom intervalu T.

Grafički: *ona vrijednost koja površinu ispod krivulje u jednoj periodi valnog oblika dijeli na dva jednaka dijela.*

7

Srednja vrijednost struje (fizikalni smisao)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

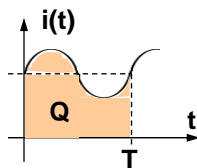


- ♦ Količina naboja koja se u periodu T prenese strujom $i(t)$ jednaka je:
- ♦ Ista količina naboja prenijela bi se u istom vremenu T konstantnom strujom I_{sr} :

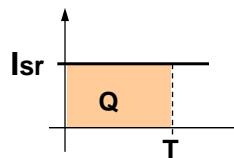
$$Q = \int_0^T i(t) dt$$

$$Q = I_{sr} \cdot T$$

- ♦ Dakle vrijedi:



$$\int_0^T i(t) dt = I_{sr} \cdot T$$



I_{sr} naziva se **istosmjerna komponenta** struje. Općenito:

- ♦ Srednja vrijednost = istosmjerna komponenta period. veličine

8

Elektrolitička srednja vrijednost

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Elektrolitička srednja vrijednost struje/napona definira se kao:

$$I_{el} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt \quad U_{el} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$$

i predstavlja srednju vrijednost (apsolutnog) *iznosa* izmjenične veličine.

9

Efektivna vrijednost (definicija)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Efektivna vrijednost struje/napona definira se kao:

$$I_{ef} = I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad U_{ef} = U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

10

Efektivna vrijednost struje (fizikalni smisao)



■ OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ Efektivnu vrijednost periodički promjenjive struje $i(t)$ određujemo usporedbom topline koju ta struja stvori na otporu R , s toplinom koju bi na istom otporu stvorila stalna, istosmjerna struja u istom vremenu T .
- ♦ Toplina koju razvija vremenski promjenjiva struja $i(t)$ jednaka je:
- ♦ Jednaka količina topline koju daje istosmjerna struja I_{ef} :

$$W = \int_0^T i^2(t) \cdot R \cdot dt \quad \rightarrow \quad \text{Diagram 1: Resistor R with current } i(t) \text{ and heat } W$$

$$= \quad \text{Diagram 2: Resistor R with average current } I_{ef} \text{ and heat } W$$

$$W = I_{ef}^2 \cdot R \cdot T$$

Dakle vrijedi: $\int_0^T i^2(t) \cdot R \cdot dt = I_{ef}^2 \cdot R \cdot T \Rightarrow I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$

11

Omjerni faktori



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ **Tjemeni faktor σ (sigma)** jednak je omjeru maksimalne i efektivne vrijednosti:

$$\sigma = \frac{I_m}{I_{ef}} \qquad \sigma = \frac{U_m}{U_{ef}}$$

- Za sinusni valni oblik vrijedi: $\sigma = \sqrt{2}$ (rabi se za usporedbu izobličenja neke veličine u odnosu na sinusni valni oblik)

- ♦ **Faktor oblika ξ (ksi)** jednak je omjeru efektivne i srednje vrijednosti:

$$\xi = \frac{I_{ef}}{I_{sr}} \qquad \xi = \frac{U_{ef}}{U_{sr}}$$

- ♦ (rabi se određivanje efektivnih vrijednosti kod električnih mjernih instrumenata sa srednjim odklonom)

12

Osnovni valni oblici

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

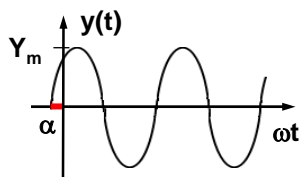


- ♦ Najčešće se u praksi koriste sljedeći valni oblici:
 - sinusni,
 - pilasti i
 - vremenski nepromjenjivi - stalni
(krugovi istosmjerne struje - DC).

13

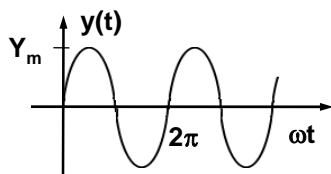
Sinusni valni oblik

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Sinusni valni oblik karakterizira:
 - amplituda Y_m ,
 - kružna frekvencija $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ (u rad/s) te
 - početni kut (fazni pomak) α u odnosu na ishodište.

$$y(t) = Y_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) = Y_m \sin(\omega t + \alpha)$$



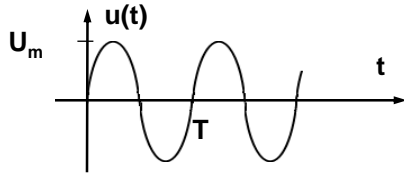
- ♦ Ako je $\alpha=0$, sinusoida prolazi kroz ishodište (čista sinusna funkcija).

$$y(t) = Y_m \sin \frac{2\pi}{T}t = Y_m \sin \omega t$$

14

Primjer: parametri sinusnog valnog oblika

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Srednja vrijednost:

$$U_{sr} = 0$$

- ♦ Efektivna vrijednost:

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{U_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt =$$

$$\frac{U_m^2}{2T} \left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right] = \frac{U_m^2}{2T} \cdot T \Rightarrow U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

- ♦ Tjemeni faktor: $\sigma = \frac{U_m}{U} = \sqrt{2}$

15

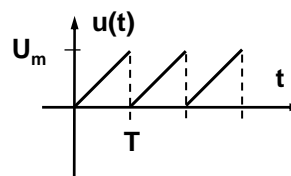
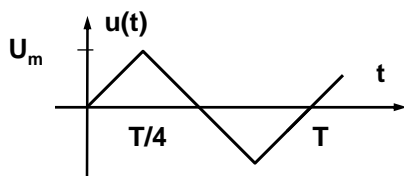
Pilasti valni oblik

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Izmjenična verzija

Istosmjerna verzija



$$u(t) = \frac{4U_{\max}}{T} t \quad \text{za } 0 < t < T/4$$

$$u(t) = \frac{U_{\max}}{T} t$$

$$u(t) = -\frac{4U_m}{T} t + 2U_m \quad \text{za } T/4 < t < 3T/4$$

$$u(t) = \frac{4U_m}{T} t - 4U_m \quad \text{za } 3T/4 < t < T$$

16

Primjer: parametri pilastog valnog oblika (1)

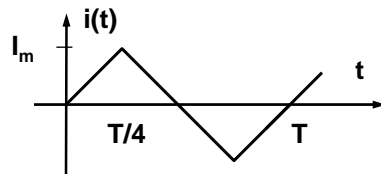


OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Izmjenična verzija

♦ Srednja vrijednost:

$$I_{sr} = 0$$



♦ Efektivna vrijednost: $I = \frac{I_m}{\sqrt{3}}$

♦ Tjemeni faktor: $\sigma = \frac{I_m}{I} = \sqrt{3}$

17

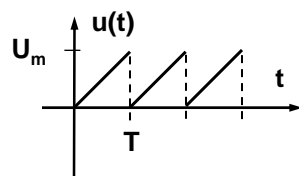
Primjer: parametri pilastog valnog oblika (2)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Istosmjerna verzija

♦ Srednja vrijednost: $U_{sr} = \frac{U_m}{2}$



♦ Faktor oblika: $\xi = \frac{U}{U_{sr}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

♦ Efektivna vrijednost: $U = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$

♦ Tjemeni faktor: $\sigma = \frac{U_m}{U} = \sqrt{3}$

$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{U_m}{T} t \right)^2 dt = \frac{U_m^2}{T^3} \int_0^T t^2 dt = \frac{U_m^2}{3T^3} T^3 = \frac{U_m^2}{3} \Rightarrow U = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$$

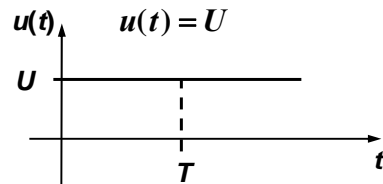
18

Vremenski stalni valni oblik (konstanta)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Vremenski stalna električna veličina (konstanta) može se promatrati kao periodički valni oblik. U ovom slučaju, vrijednost periode T može se odabrati **proizvoljno**.



♦ Srednja vrijednost: $U_{sr} = U$

♦ Efektivna vrijednost: $U_{ef} = U$

$$U_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U^2 dt = \frac{1}{T} U^2 \int_0^T dt = \frac{1}{T} U^2 T = U^2 \Rightarrow U_{ef} = U$$

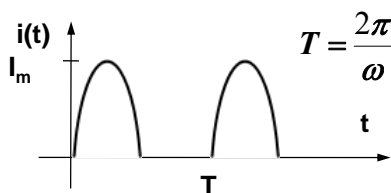
19

Primjer: ispravljeni sinusni valni oblik

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Poluvalno ispravljena sinusoida

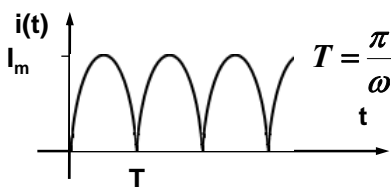


$$I_{sr} = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin(\omega t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 dt \right) =$$

$$\frac{2I_m}{T\omega} = \frac{I_m}{\pi} = 0,318 I_m$$

$$I = \frac{I_m}{2}$$

- ♦ Punovalno ispravljena sinusoida



$$I_{sr} = \frac{2I_m}{\pi} = 0,637 I_m$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

20

Primjer: Valni oblik kao **periodički niz impulsa**

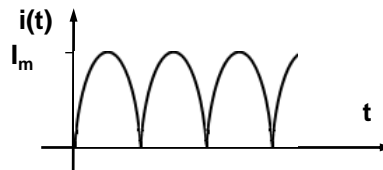
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ T = perioda niza impulsa τ = dio periode ispunjen impulsima
 $\frac{\tau}{T}$ = faktor popunjenosti (*duty cycle*)

■ neprekinuti niz impulsa ($\tau = T$)

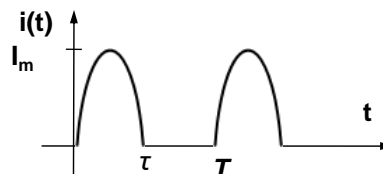
$$I_{sr0} = \frac{I_m}{\pi/2} \quad I_{ef0} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$



■ isprekidani niz impulsa ($\tau < T$)

$$I_{sr} = \frac{I_m}{\pi} = \frac{1}{2} I_{sr0} = \frac{\tau}{T} \cdot I_{sr0}$$

$$I_{ef} = \frac{I_m}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_{ef0} = \sqrt{\frac{\tau}{T}} \cdot I_{ef0}$$



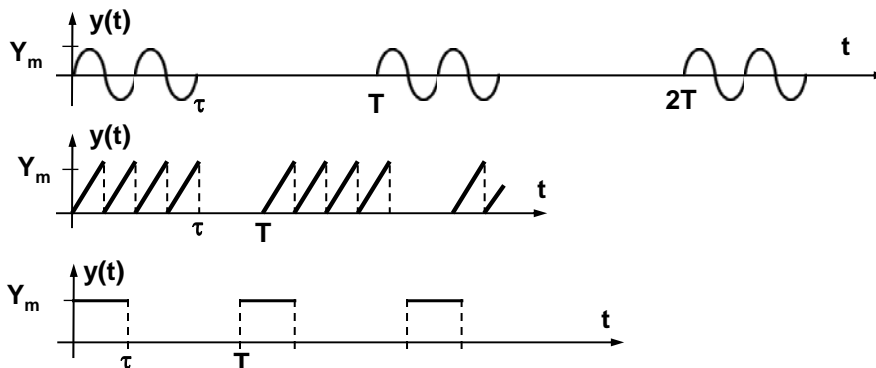
21

Isprekidani niz impulsa

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Isprekidani (periodički) niz impulsa $y(t)$ dobije se tako da se osnovni valni oblik (neprekinuti niz impulsa) prekida ("gasi") u određenim dijelovima periode. Na taj način dobiva se **isprekidani niz impulsa** (npr. sinusoidnih, pilastih ili pravokutnih, kao na slici).



22

Parametri periodičkog niza impulsa



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ Niz impulsa karakteriziraju dva vremenska parametra, i to:
 - **perioda (ponavljanja) T** i
 - **dio periode ispunjen impulsima τ** .
- ♦ Omjer τ/T = **faktor popunjenosti** (engl. **duty cycle**)
- ♦ Poznavajući efektivnu i srednju vrijednost *osnovnog valnog oblika* (neprekinutog niza impulsa), jednostavno možemo izračunati efektivnu i srednju vrijednost isprekidanog niza impulsa, pomoću slijedećih jednažbi:
 - **Efektivna vrijednost isprekidanog niza impulsa:** $Y_{ef} = Y_{ef\text{ osnovno}} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}}$
 - **Srednja vrijednost isprekidanog niza impulsa:** $Y_{sr} = Y_{sr\text{ osnovno}} \cdot \frac{\tau}{T}$
- ♦ Za $\tau = T$ – neprekinuti niz impulsa (osnovni valni oblik).

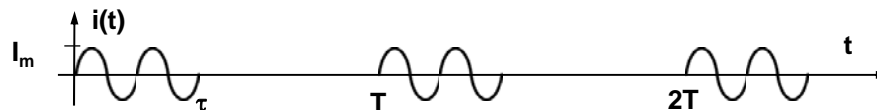
23

Primjer: parametri niza sinusnih impulsa



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ Za niz sinusnih strujnih impulsa poznat je omjer $\frac{\tau}{T} = 0,4$.
Odredite efektivnu i srednju vrijednost takvih impulsa.
Odredite također snagu koju bi takva struja razvijala prolazeći kroz otpor $R = 4 \Omega$. Zadano: $I_m = 2 \text{ A}$.



$$I_{ef} = I_{ef\text{ osnovno}} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\tau}{T}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} 0,632$$

$$P = I_{ef}^2 R$$

- ♦ Srednja vrijednost impulsa: $I_{sr} = I_{sr\text{ osnovno}} \cdot \frac{\tau}{T} = 0$

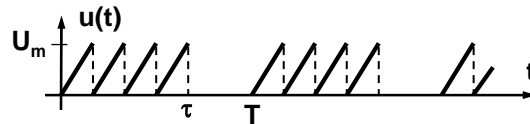
24

Primjer: parametri niza pilastih impulsa



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ Odredite efektivnu i srednju vrijednost niza pilastih impulsa zadanog dijagramom ako je poznato: $\frac{\tau}{T} = 0,667$.



- ♦ Efektivna vrijednost impulsa:

$$U_{ef} = U_{ef \text{ osnovno}} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = \frac{U_m}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = \frac{U_m}{\sqrt{3}} \cdot 0,816$$

- ♦ Srednja vrijednost impulsa:

$$U_{sr} = U_{sr \text{ osnovno}} \cdot \frac{\tau}{T} = \frac{U_m}{2} \cdot 0,666$$

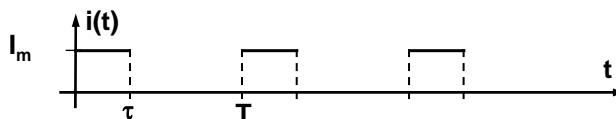
25

Primjer: parametri niza pravokutnih impulsa



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ Odredite efektivnu i srednju vrijednost niza pravokutnih impulsa zadanog dijagramom ako je poznato: $\frac{\tau}{T} = 0,33$.



- ♦ Efektivna vrijednost impulsa:

$$I_{ef} = I_{ef \text{ osnovno}} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = I_m \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = I_m \cdot 0,577$$

- ♦ Srednja vrijednost impulsa:

$$I_{sr} = I_{sr \text{ osnovno}} \cdot \frac{\tau}{T} = I_m \cdot 0,333$$

26

Složeni (sastavljeni ili kombinirani) valni oblici

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Složenim valnim oblikom nazivamo onaj koji se može izraziti (prikazati) kao zbroj više (osnovnih) valnih oblika koje nazivamo **komponente**: $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_N(t)$.
- ♦ Komponente složenog valnog oblika imaju svoje efektivne vrijednosti (Y_{1ef} , Y_{2ef} , .., Y_{Nef}), iz kojih se (na temelju superpozicije snaga) može odrediti efektivna vrijednost Y_{ef} složenog valnog oblika koristeći opću jednadžbu

$$Y_{ef} = \sqrt{Y_{1ef}^2 + Y_{2ef}^2 + \dots + Y_{Nef}^2}$$

- ♦ Ovo pojednostavljuje određivanje parametara nekih prepoznatljivih složenih valnih oblika, kao što su: **zbroj po vremenu nepreklapajućih (disjunktnih) impulsnih nizova**, ili (miješani) **valni oblik sastavljen od istosmjerne i izmjenične komponente**.

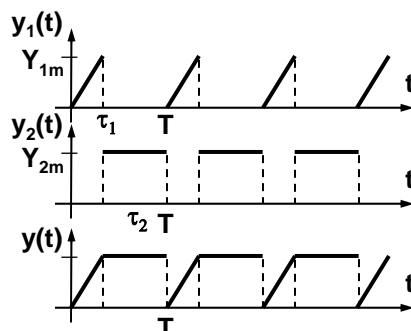
27

Zbroj N po vremenu nepreklapajućih impulsnih nizova

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Za impulse koji se ne preklapaju u vremenu vrijedi: kad je jedan aktivan, svi ostali moraju biti "ugašeni". Zbrajanjem N takvih impulsa dobije se složeni valni oblik: $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_N(t)$.
- ♦ Može se dokazati da općenito vrijedi: kvadrat efektivne vrijednosti takvog složenog oblika jednak je zbroju kvadrata efektivnih vrijednosti komponenata tj.: $Y_{ef} = \sqrt{Y_{1ef}^2 + Y_{2ef}^2 + \dots + Y_{Nef}^2}$
- ❖ **Primjer**: složeni valni oblik sastavljen od 2 komponente:



$$Y_{1ef} = \frac{Y_{1m}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\tau_1}{T}}$$

$$Y_{2ef} = Y_{2m} \sqrt{\frac{\tau_2}{T}}$$

$$Y_{ef} = \sqrt{Y_{1ef}^2 + Y_{2ef}^2}$$

28

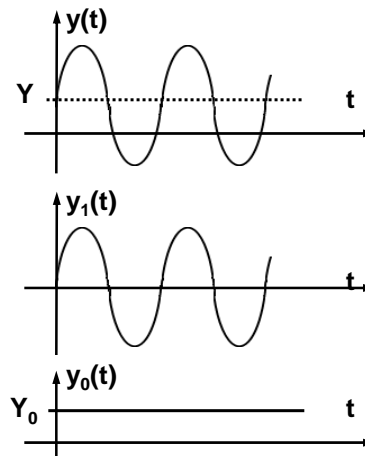
Zbroj istosmjerne i izmjenične komponente (miješani valni oblik)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Ako se valni oblik $y(t)$ može izraziti kao $y(t) = y_0(t) + y_1(t)$ gdje je $y_1(t)$ čista izmjenična komponenta efektivne vrijednosti Y_{1ef} a istosmjerna komponenta $y_0(t) = Y_0$ moguće je dokazati da za efektivnu vrijednost ovakvog valnog oblika vrijedi izraz:

$$Y_{ef} = \sqrt{Y_{0ef}^2 + Y_{1ef}^2}$$



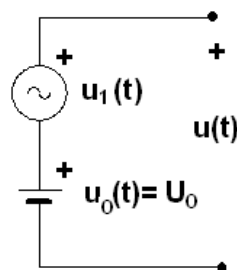
29

Primjer: zbroj istosmjerne i (čiste) izmjenične komponente

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Odredi efektivnu vrijednost napona $u(t)$ dobivenog serijskim spojem dvaju izvora prema slici.



$$u_1(t) = U_{1m} \sin \omega t$$

$$u(t) = U_0 + u_1(t)$$

- Efektivna vrijednost:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{1m}^2}{2}}$$

30

Prikaz nesinusoidne periodičke veličine sinusoidama

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ **Fourier, Jean Baptiste Joseph (1768-1830)**
- ♦ Svaki periodički valni oblik može se izraziti kao zbroj (niz) sastavljen od jedne istosmjerne i više sinusoidnih (harmoničkih) komponenata.
- ♦ Rastavljanje na komponente (harmonike) = harmonička (ili Fourierova) analiza.
- ♦ Istosmjerna komponenta (nulti član) predstavlja srednju vrijednost valnog oblika.
- ♦ Sinusoidne komponente (harmonici) imaju različite amplitude, a frekvencije su im ***cjelobrojni višekratnici frekvencije prvog (osnovnog) harmonika***: $\omega_n = n \omega_1$ ($n \in \mathbb{N}$)

31

Značajke Fourierove (harmoničke) analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Harmonička (Fourierova) analiza obavlja se danas pretežno uz pomoć računala.
- ♦ Sadržaj harmonika pokazuje *stupanj izobličenosti nesinusoidne veličine* (u odnosu na sinusni valni oblik).
- ♦ Harmonička analiza omogućava da se učinci nesinusoidne struje (i napona) u električnom krugu određuju primjenom fazorske metode (na pojedine komponente).
- ♦ Efektivna vrijednost harmonički rastavljene nesinusoidne veličine jednaka je korijenu iz zbroja kvadrata efektivnih vrijednosti svih komponenata:

$$Y_{ef} = \sqrt{Y_{Oef}^2 + Y_{1ef}^2 + Y_{2ef}^2 + \dots + Y_{Nef}^2}$$

32

33

34

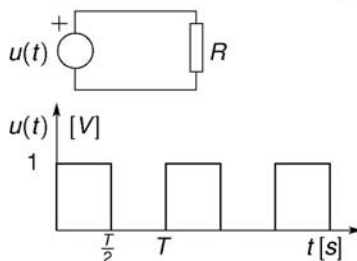
Primjena rezultata Fourierove analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Uvodni primjer

Neka je zadan $u(t)$ prema slici. Potrebno je odrediti efektivnu vrijednost i spektar napona $u(t)$ te snagu na otporu $R = 600\Omega$.



- a) bez Fourierove analize—koristeći ranije navedeno
- b) primjenom Fourierovih redova u analizi periodički promjenjivih funkcija

35

Primjena rezultata Fourierove analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Uvodni primjer—(a)

- od ranije je poznato ($T_i = \frac{T}{2}$):

$$U_{eff} = U_{max} \sqrt{\frac{T_i}{T}} = 0.707V$$

$$P = \frac{U_{eff}^2}{R} = 0.833mW$$

36

Primjena rezultata Fourierove analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Uvodni primjer–primjenom Fourierove analize

- ... pravokutni napon $u(t)$ prikazujemo u obliku beskonačnog reda kao:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \omega t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{2}{5\pi} \sin 5\omega t + \frac{2}{7\pi} \sin 7\omega t \dots$$

$$u(t) = 0.5 + 0.637 \sin \omega t + 0.212 \sin 3\omega t + 0.127 \sin 5\omega t + 0.091 \sin 7\omega t \dots$$

gdje su:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ kružna frekvencija osnovnog ($n = 1$) harmonika periode T

$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2}$ istosmjerna komponenta – srednja vrijednost napona $u(t)$

Fourierovi koeficijenti:

$$A_n = 0$$

$$B_n = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

Navigation icons

37

Primjena rezultata Fourierove analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Efektivna vrijednost napona za prvih $k = 20$ harmonika je:

$$U_{eff} = \sqrt{0.5^2 + \frac{1}{2}(0.637^2 + 0.212^2 + 0.127^2 + \dots)} = 0.703518 V$$

- Snaga je:

$$P = \frac{U_{eff}^2}{R} = 0.825 mW$$

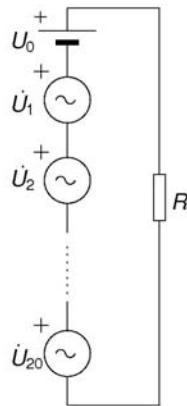
- Rasprava: usporedba rezultata, kako broj harmonika k utječe na točnost?

Navigation icons

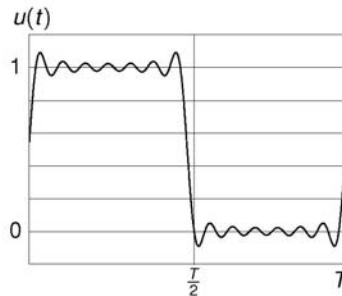
38

Primjena rezultata Fourierove analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- $u(t)$ predstavljen kao suma istosmjernog i sinusoidnih izvora
- "originalni" pravokutni impuls nadomješten sa prvih 20 harmonika:



Navigation icons

39

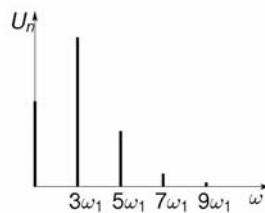
Primjena rezultata Fourierove analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Spektar

- spektar prikazuje doprinose pojedinih frekvencija zadanog valnog oblika $u(t)$



detaljnije simulacije mogu se vidjeti na:

<http://osnove.tel.fer.hr/simupokusi/fourier/nesinusni.htm>

<http://osnove.tel.fer.hr/simupokusi/fourier/primjer-RC.htm>

Navigation icons

40

Primjena rezultata Fourierove analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



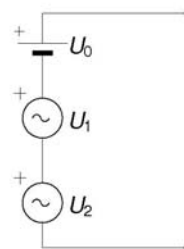
Primjer 1

Nesinusoidalni napon efektivne vrijednosti $U = 200\text{ V}$ može se prikazati u obliku $u(t) = U_0 + U_{m1} \sin \omega t - U_{m3} \sin 3\omega t$. Ako je $U_{m1} = 0.8U_0$, $U_{m3} = 0.5U_0$ izračunajte U_0 !

Rješenje:

$u(t)$ može se prikazati kao serijski spoj tri izvora:

- U_0 za istosmjernu komponentu
- U_1 za kružnu frekvenciju ω
- U_3 za kružnu frekvenciju 3ω



Navigation icons

41

Primjena rezultata Fourierove analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Primjer1 - nastavak

- Efektivnu vrijednost nesinusoidnog napona $u(t)$ računamo kao:

$$U_{eff} = 200 = \sqrt{U_0^2 + U_{1eff}^2 + U_{3eff}^2}$$

- Rješavanjem po U_0 dobija se:

$$U_0 = 166.38\text{ V}$$

42

Primjena rezultata Fourierove analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

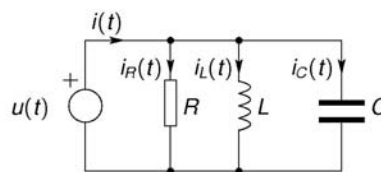


Primjer 2

Za mrežu prema slici odrediti:

- a) efektivnu vrijednost napona izvora $u(t)$
- b) efektivne vrijednosti struja $i_R(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$
- c) $i_R(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$ u vremenskoj domeni

Zadano: $\omega = 1000 \frac{1}{s}$, $R = 100 \Omega$, $L = 0.1 H$, $C = 10 \mu F$ i
 $u(t) = 100 \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) + 30 \sin(3\omega t) + 10 \sin(5\omega t - \frac{3\pi}{4})$



Navigation icons

43

Primjena rezultata Fourierove analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Primjer 2 – nastavak

Rješenje:

a)

$$U_{eff} = \sqrt{U_{1eff}^2 + U_{3eff}^2 + U_{5eff}^2}$$
$$U_{eff} = \sqrt{\left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$U_{eff} = 74.162 V$$

44

Primjer 2 – nastavak

b) za $i_R(t)$ vrijedi:

$$I_{Reff} = \sqrt{I_{R1eff}^2 + I_{R3eff}^2 + I_{R5eff}^2}$$

$$I_{Reff} = \sqrt{\left(\frac{100}{100 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30}{100 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{100 \cdot \sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I_{Reff} = 0.741 A$$

Primjer 2 – nastavak

- za prividni otpor X_L vrijedi $X_L = n \cdot \omega L$ gdje je n broj harmonika
- za $n = 1$ (osnovni harmonik) $\omega L = 100 \Omega$
- $i_L(t)$ je:

$$I_{Leff} = \sqrt{I_{L1eff}^2 + I_{L3eff}^2 + I_{L5eff}^2}$$

$$I_{Leff} = \sqrt{\left(\frac{100}{100 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30}{100 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{100 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I_{Leff} = 0.711 A$$

- za prividni otpor X_C vrijedi $X_C = \frac{1}{n \cdot \omega C}$ gdje je n broj harmonika
- za $n = 1$ (osnovni harmonik) $\frac{1}{\omega C} = 100 \Omega$
- $i_L(t)$ je:

$$I_{Ceff} = \sqrt{I_{C1eff}^2 + I_{C3eff}^2 + I_{C5eff}^2}$$

$$I_{Ceff} = \sqrt{\left(\frac{100}{100 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30}{100 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I_{Ceff} = 1.015 A$$

Primjer 2 – nastavak

- $i_R(t), i_L(t), i_C(t)$:

$$i_R(t) = 1 \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) + 0.30 \cdot \sin(3\omega t) + 0.10 \cdot \sin(5\omega t - \frac{3\pi}{4})$$

$$i_L(t) = 1 \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{3}) + 0.10 \cdot \sin(3\omega t - \frac{\pi}{2}) + 0.02 \cdot \sin(5\omega t + \frac{3\pi}{4})$$

$$i_C(t) = 1 \cdot \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) + 0.90 \cdot \sin(3\omega t + \frac{\pi}{2}) + 0.50 \cdot \sin(5\omega t - \frac{\pi}{4})$$

- o Za vježbu: nacrtati spektre izračunatih struja i napona !
- o nacrtati vektorske dijagrama za svaku od frekvencija !
- o Rasprava: ovisnost $i_R(t)$, $i_L(t)$ i $i_C(t)$ o frekvenciji
- o Rasprava: postoji li rezonancija ?

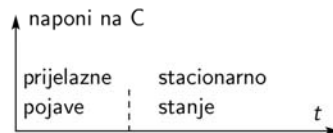
Prijelazne pojave

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Ponavljjanje

- definicija kapaciteta: $C = \frac{Q}{U}$
- jedinica za kapacitet je Farad [F], zbog praktičnih razloga koriste se dijelovi jedinice (μF nF pF)
- kapacitet postoji između elektroda na koje je doveden naboj tako da između njih vlada razlika potencijala
- idealni kondenzator je pasivni dvopol koji realizira željeni iznos kapaciteta
- realni kondenzator osim kapaciteta posjeduje i omski otpor. Za većinu praktičnih slučajeva je taj otpor dovoljno malen tako da se može zanemariti
- prelazno i stacionarno stanje



49

Spajanje kapaciteta na izvor stalnog napona

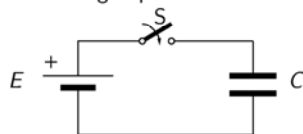
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Priključak nenabijenog kondenzatora na izvor konstantnog napona

U idealnom električnom krugu na slici zanemarujemo otpor i uzimamo da se kondenzator nabije trenutačno.

- priključak *nenabijenog* ($U_{CO} = 0$) kondenzatora C na izvor konstantnog napona:



kondenzator se nabije na napon izvora (izvor preda odgovarajuću količinu naboja kondenzatoru):
 $E = U_C = \frac{Q}{C}$ (prema IIKZ)

U realnom strujnom krugu, međutim, postoji otpor i uspostava konačnog (stacionarnog) napona na kondenzatoru traje neko vrijeme, tijekom kojeg je krug u **prijelaznom stanju**. Vremenske promjene napona i struja kruga u prijelaznom stanju nazivamo **prijelazne pojave (tranzijenti)**.

50

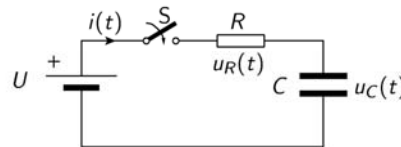
Spajanje kapaciteta na izvor stalnog napona

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Prelazna pojava sa kondenzatorom: serija otpornika R i kondenzatora C

- prethodno nenabijeni $U_{CO} = 0$ kondenzator C spajamo preko otpornika R na idealni naponski izvor U
- napon na kondenzatoru ne dostiže trenutno iznos napona izvora $U = U_C$
- prelazna pojava: vrijeme od trenutka $t = 0^+$ do uspostave stacionarnog stanja
- u stacionarnom stanju vrijedi $i(t) = 0$ i $u_C(t) = U$ uz $t \rightarrow \infty$
- trajanje prelazne pojave: uzima se $5 \cdot \tau$ ili $3 \cdot \tau$ (teoretski prelazna pojava traje beskonačno dugo)



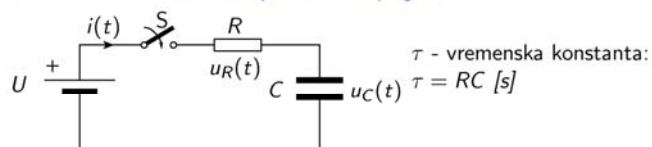
51

Spajanje kapaciteta na izvor stalnog napona

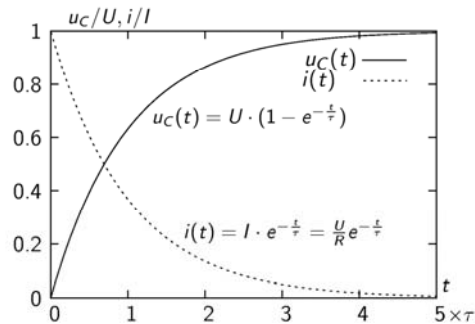
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Vremenske ovisnosti kod prelaznih pojava



τ - vremenska konstanta:
 $\tau = RC [s]$



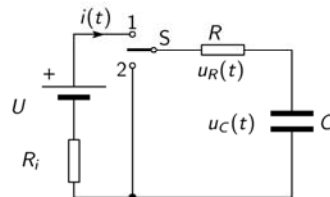
52

Primjer: nabijanje i izbijanje kondenzatora

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Primjer prelazne pojave



U krugu prema slici treba odrediti (kondenzator je bio prethodno nenabijen):

- napone $u_R(t)$ i $u_C(t)$ te struju $i(t)$ 90ms poslije prebacivanja sklopke u položaj 1
- nacrtati promjene struja i napona na kondenzatoru za vrijeme od $t = 0$ do $t = 5\tau$

Zadano: $E = 500V$, $R_i = 100\Omega$, $R = 800\Omega$, $C = 100\mu F$

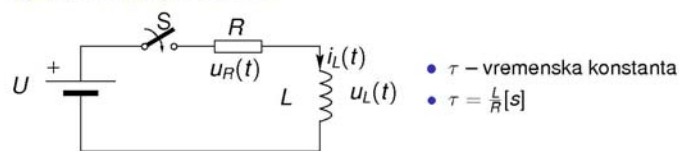
53

Spajanje induktiviteta na izvor stalnog napona

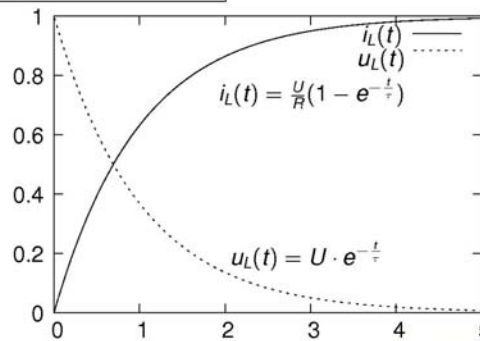
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Prijelazna pojava na L



- τ – vremenska konstanta
- $\tau = \frac{L}{R} [s]$



54