



## OSNOVNE VELIČINE ELEKTRIČKIH KRUGOVA. KIRCHHOFFOVI ZAKONI

### Sadržaj:

Strujni krug  
Struktura električne mreže  
Referentni smjerovi i polariteti  
Kirchhoffovi zakoni (pravila)  
Rješavanje mreža primjenom Kirchhoffovih zakona

## Strujni krug



- ♦ Električni uređaji i naprave su složeni fizički objekti u kojima su odnosi između električnih veličina određeni fizikalnim zakonima.
- ♦ Složene odnose u stvarnim električnim uređajima i napravama analiziramo tako da dijelove tih uređaja i naprava modeliramo **koncentriranim, bezdimenzionalnim** elementima koji imaju jedno dominantno svojstvo: otpora, kapaciteta ili induktiviteta, s električnim vezama između njih. Takvi elementi su idealizirani prikaz stvarnog fizikalnog stanja. Pri tome ćemo uzimati da su odnosi između električnih veličina u svim elementima **linearni**.
- ♦ Npr. realni otpornik od namotane žice posjeduje dominantno svojstvo otpora, premda postoje i kapaciteti i induktiviteti u stvarnom otporniku. Zbog toga ćemo ga modelirati **idealnim** elementom - otporom  $R$ .



- ♦ Realni kondenzator posjeduje dominantno svojstvo kapaciteta. Zbog toga ćemo ga modelirati **idealnim** elementom - kapacitetom  $C$ .

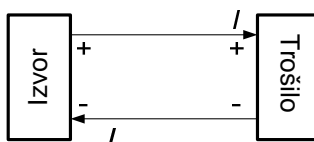
Promjenjivi kondenzator



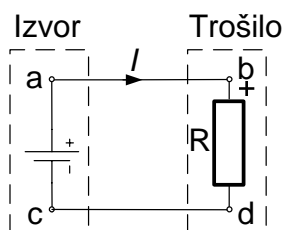
- ♦ Takav pristup u rješavanju naziva se koncept **krugova**, koji se temelji se na **bezdimezionalnom** prikazu realnih, fizikalnih stanja u električkim uređajima i napravama, pri čemu je opis stanja sadržan u koncentriranim elementima kruga. Bezdimenzionalnost omogućava lakše rješavanje, a točnost ovisi o točnosti modeliranja pojedinih dijelova električnih uređaja i naprava koje predstavljamo elementima.
- ♦ Električki **strujni krug** (mreža) je dakle bezdimenzionalni električki sustav u kojemu su, na različite načine, povezani elementi sustava. **Aktivni** elementi su izvori, a **pasivni** otpori, kapaciteti i induktiviteti.

- ♦ U električnim mrežama rješavaju se dvije zadaće:
  - Analiza električne mreže: za električnu mrežu sa svim zadanim elementima i međusobnim vezama između elemenata određuju se struje i naponi
  - Sinteza električne mreže: potrebno je odrediti elemente električne mreže i veze između njih kako bi ta električna mreža zadovoljavala unaprijed definirano ponašanje
- ♦ U okviru ovog kolegija bavit ćemo se samo **analizom linearnih električnih mreža** (sastavljenih od linearnih elemenata)
- ♦ Da bi kontinuirano tekla struja, potrebno je imati cjelovit, tj. **zatvoren** vodljivi **krug** s izvorom koji stalno daje struju u krugu.
- ♦ Jednostavni strujni krug sastoji se iz izvora, spojnih vodiča i trošila.

- ♦ Spojna shema



- ♦ **spojnu shemu** pretvaramo u **električku shemu**: izvor i trošilo prikazani kao koncentrirani elementi, a veze između njih su bezdimenzionalne
- ♦ Električka shema



- ♦ Bezdimenzionalnost: točke *a* i *b*, te točke *c* i *d* u električkom smislu **identične** točke.
- ♦ Struja može teći samo u **zatvorenom** strujnom krugu:
  - od + stezaljke izvora kroz trošilo prema - stezaljci izvora,
  - kroz izvor od - stezaljke do + stezaljke izvora.
- ♦ Prekid kruga: **otvoreni** krug - ne teče struja
- ♦ **Trošilo** (teret, opterećenje): vanjski dio kruga u kojemu se samo troši električna energija koju daje izvor. U krugovima istosmjerne struje (istosmjerni krugovi - mreže) trošilo je predstavljeno otporom.

## Struktura električke mreže

- ♦ Za analizu električke mreže kao sustava treba specificirati **variable** koje opisuju stanje sustava.
- ♦ Variable su međusobno povezane različitim **relacijama**:
  - Relacije koje povezuju **variable različitoga tipa**, a proizilaze iz prirode varijabli te su utemeljene ili na prirodnim zakonima ili u prihvaćenim definicijama:

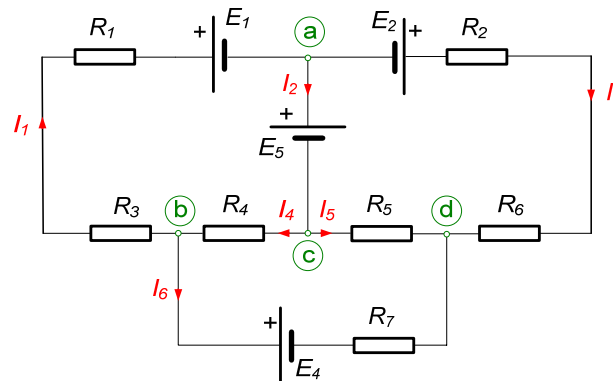
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad - \text{definicija}$$

$$U = I \cdot R \quad - \text{Ohmov zakon u istosmjernoj mreži}$$

$$u(t) = i(t)R \quad - \text{Ohmov zakon za vremenski promjenjive struje i napone}$$

- Relacije koje se odnose na nekoliko **varijabli istoga tipa**, a posljedica su načina na koji su elementi mreže međusobno povezani, tj. posljedica su **konfiguracije** odnosno **topologije** mreže.
- ◆ Osnovne definicije iz topologije:
  - **Grana** mreže: dio električne mreže koji se sastoji samo od izvora i trošila povezanih u nizu (serijski) kroz koje teče struja iste jakosti.
  - **Čvor** (glavni): točka ili mjesto na kojem se sastaju tri ili više vodiča mreže; točka u kojoj se sastaju barem 3 grane.
  - Sporedni čvor: u kojem se sastaju samo dva vodiča.
  - **Kontura** ili petlja: zatvoreni put sastavljen od više grana mreže
    - krenemo od jednog čvora i prolazimo zatvoreni put bez prolaženja kroz bilo koji element ili čvor mreže više od jedanput, a završetak prolaska je na početnom čvoru.

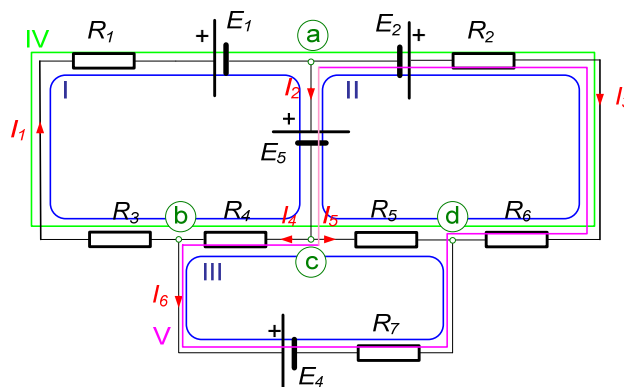
- **Nezavisna kontura** (petlja) od svih drugih razlikuje se za barem jednu granu.
- ◆ Primjer:



- ♦ U mreži prema slici uočavamo:
  - 4 čvora: a, b, c i d
  - 6 grana: između čvorova a i b - grana 1 protjecana strujom  $I_1$   
 između čvorova a i c - grana 2 protjecana strujom  $I_2$   
 između čvorova a i d - grana 3 protjecana strujom  $I_3$   
 između čvorova b i c - grana 4 protjecana strujom  $I_4$   
 između čvorova c i d - grana 5 protjecana strujom  $I_5$   
 između čvorova b i d - grana 6 protjecana strujom  $I_6$
- ♦ Uz zadane sve elemente u mreži (svi naponi izvora i svi otpori) struje grana  $I_1$  do  $I_6$  su nepoznate, kako po iznosu tako i po smjeru. Osnovna zadaća **analize** mreža je određivanje tih nepoznatih struja grana (po iznosu i smjeru).

11

- ♦ U mreži na slici možemo postaviti više nezavisnih kontura:

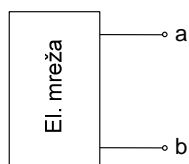


- Kontura I: kroz grane 1, 2 i 4      Kontura II: kroz grane 2, 3 i 5
- Kontura III: kroz grane 4, 5 i 6      Kontura IV: kroz grane 1, 3, 5 i 4
- Kontura V: kroz grane 2, 3, 6 i 4

12

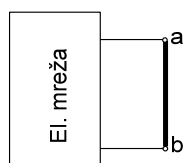
# Dva su osnovna stanja u mreži:

## ■ **otvoren krug (prazni hod)**



- između čvorova a i b mreža je otvorena; ne teče struja između čvorova a i b
- mreža je u “**praznom hodu**”
- karakteristična veličina: napon praznog hoda između čvorova a i b

## ■ **kratki spoj**



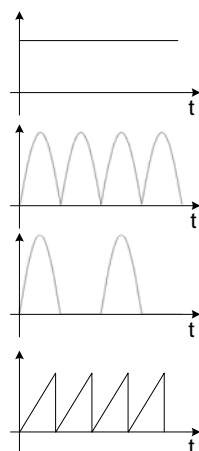
- između čvorova a i b mreža je kratko spojena; potencijali točaka a i b su jednaki
- mreža je u “**kratkom spoju**”
- karakteristična veličina: struja kratkog spoja između čvorova a i b

# Referentni smjerovi i polariteti

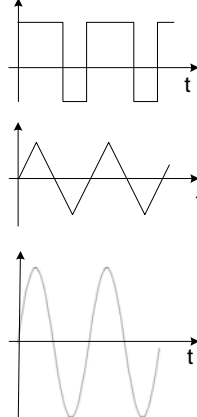
- ♦ Za fizikalne veličine koje su funkcije vremena ili su istosmjerne, ali su im smjerovi odnosno polariteti neodređeni uvodimo **referentne smjerove i polaritete**.
- ♦ Referentni smjer (polaritet) definiramo **konvencijom (proizvoljno)** a stvarni smjer (polaritet) iskazujemo pozitivnim odnosno negativnim predznakom u odnosu na referentni.

# Klasifikacija vremenskih ovisnosti napona i struje (valnih oblika)

## Istosmjerni napon (struja)

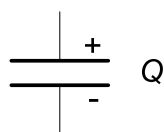
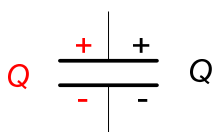
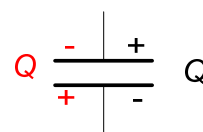


## Izmjenični napon (struja)

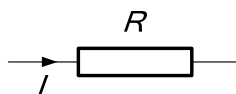
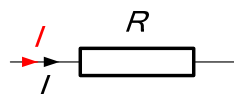
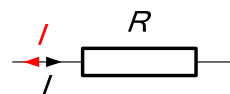


15

## ♦ Referentni polaritet za naboj


Referentni  
polaritet

Stvarni polaritet  
 $Q > 0$ 

Stvarni polaritet  
 $Q < 0$ 

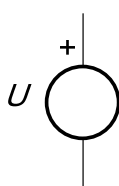
## ♦ Referentni smjer struje


Referentni  
smjer

Stvarni smjer  
 $I > 0$ 

Stvarni smjer  
 $I < 0$ 

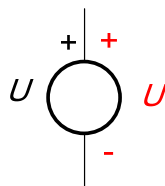
16



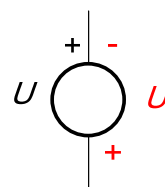
### ♦ Referentni polaritet za napon



Referentni  
polaritet



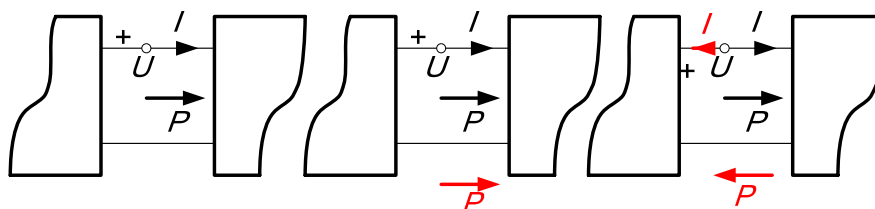
Stvarni polaritet  
 $U > 0$



Stvarni polaritet  
 $U < 0$

### ♦ Referentni smjer za snagu

- treba uzeti u obzir referentni polaritet napona i referentni smjer struje



Referentni  
smjer

Stvarni smjer  
 $P > 0$

Stvarni smjer  
 $P < 0$

- ♦ Referentni smjerovi i polariteti za dvopolne elemente
- ♦ Dvopolni elementi: **udruženi** referentni smjerovi struje i polariteti napona

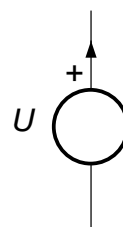
- za otpor



- struja ulazi na “+” stezaljku otpora:  $U_{ab} = I \cdot R$

- za izvor

- **naponski izvor**: na stezaljkama ima stalno isti napon
- **strujni izvor**: u vanjski krug daje stalno istu struju
- struja izlazi iz “+” stezaljke izvora



## Kirchhoffovi zakoni (pravila)

- ♦ Prvi Kirchhoffov zakon – za struje (**KZS**):

- u čvoru je **n** grana
- za svaki čvor vrijedi:

$$\sum_{j=1}^n I_j = 0$$

- ako je **n<sub>ul</sub>** struja **I<sub>ul</sub>** koje ulaze u čvor: predznak “+”
- ako je **n<sub>iz</sub>** struja **I<sub>iz</sub>** koje izlaze iz čvora: predznak “–”

- ♦ KZS se onda se može pisati i kao:

$$\sum_{j=1}^{n_{ul}} I_{ul} = \sum_{k=1}^{n_{iz}} I_{iz}$$

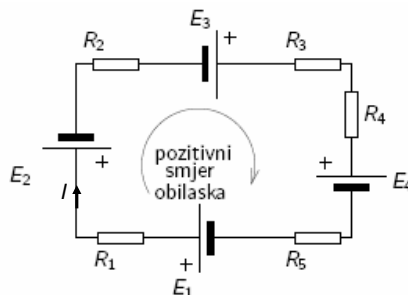
♦ Drugi Kirchhoffov zakon – za napone (KZN):

- U zatvorenoj konturi je  $n_{iz}$  izvora napona  $U_{iz}$  i  $n_R$  otpornika na kojima su naponi  $U_R$
- Za svaku zatvorenu konturu vrijedi:

$$\sum_{j=1}^{n_{iz}} U_{iz} = \sum_{k=1}^{n_R} U_R = \sum_{k=1}^{n_R} I_k \cdot R_k$$

- gdje su  $R_k$  i  $I_k$  otpori i struje kroz pojedine otpornike
- Primjenjuje se uz proizvoljan smjer obilaska konture:
  - Izvori čiji smjer djelovanja (smjer u kojem nastoje potjerati struju) je podudaran sa smjerom obilaska: predznak “+”
  - Naponi na otpornicima kroz koje je referentni smjer struje podudaran sa smjerom obilaska: predznak “+”

- ♦ Primjer postavljanja jednadžbe KZN za jednostavni strujni krug koji ima jednu zatvorenu konturu



$$E_1 - E_2 + E_3 - E_4 = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 + I \cdot R_4 + I \cdot R_5$$

$$I = \frac{E_1 - E_2 + E_3 - E_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5}$$

## Rješavanje primjenom Kirchhoffovih zakona

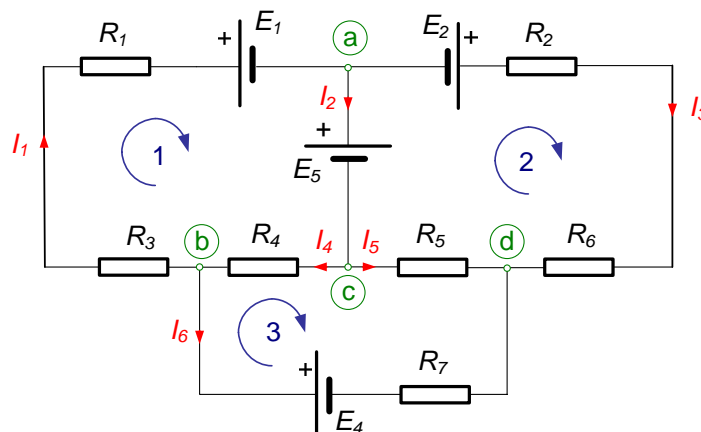


OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ U mreži je  $g$  grana s nepoznatim strujama grana (referentnih, tj. proizvoljnih) smjerova
  - treba postaviti  $g$  nezavisnih jednažbi KZS i KZN
- ♦ Ako mreža ima  $\check{c}$  čvorova onda se može postaviti  $\check{c}-1$  nezavisna jednažba KZS (za  $\check{c}$ -ti čvor jednažba nije nezavisna; jednaka je zbroju svih prethodnih  $\check{c}-1$  jednažbi)
- ♦ Za preostali broj potrebnih jednažbi  $g-(\check{c}-1)$  postavljaju se jednažbe KZN za nezavisne konture
- ♦ Smjerovi obilaska po nezavisnim konturama su proizvoljni
- ♦ Rješenje sustava jednažbi daje struje grana:
  - + predznak: smjer struje identičan s referentnim
  - - predznak: smjer struje suprotan od referentnog

23

1. Odrediti struje grana u mreži. Zadano je:  $R_1=4\ \Omega$ ,  $R_2=6\ \Omega$ ,  $R_3=5\ \Omega$ ,  $R_4=1\ \Omega$ ,  $R_5=2\ \Omega$ ,  $R_6=10\ \Omega$ ,  $R_7=3\ \Omega$ ,  $E_1=12\text{ V}$ ,  $E_2=4\text{ V}$ ,  $E_4=12\text{ V}$ ,  $E_5=10\text{ V}$ .



24



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ broj grana:  $g=6$
- ♦ broj čvorova:  $\check{c}=4$
- ♦  $\check{c}-1=3$  jednađžbe KZS
- ♦  $g-(\check{c}-1)=3$  jednađžbe KZN
- ♦ Jednađžbe KZS za čvorove a, b i c:

$$\text{čvor a: } I_1 = I_2 + I_3$$

$$\text{čvor b: } I_4 = I_1 + I_6$$

$$\text{čvor c: } I_2 = I_4 + I_5$$

- ♦ Jednađžba za čvor d jednaka je zbroju jednađžbi za čvorove a, b i c:

$$\text{čvor d: } I_3 + I_5 + I_6 = 0$$

- ♦ Jednađžbe KZN za konture 1, 2 i 3:

$$\text{petlja 1: } I_1 \cdot R_1 + I_4 \cdot R_4 + I_1 \cdot R_3 = -E_1 - E_5$$

$$\text{petlja 2: } I_3 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_6 - I_5 \cdot R_5 = E_2 + E_5$$

$$\text{petlja 3: } I_5 \cdot R_5 - I_6 \cdot R_7 - I_4 \cdot R_4 = E_4$$

- ♦ Dobije se sustav jednađžbi koji je u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ (R_1+R_3) & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (R_2+R_6) & 0 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 & -R_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -E_1 - E_5 \\ E_2 + E_5 \\ E_4 \end{bmatrix}$$

- ♦ ili:

$$\underline{R} \cdot \underline{I} = \underline{U}$$

- ♦ Ovo je **Ohmov zakon u matričnom obliku**. Struje se dobivaju određivanjem matrice  $[\underline{R}]^{-1}$ , inverzne matrice matrici  $[\underline{R}]$ , uz poznate vrijednosti napona izvora  $[\underline{U}]$ :

$$\underline{I} = \underline{R}^{-1} \cdot \underline{U}$$

- ♦ U iole složenijoj mreži za rješavanje je potrebno primjeniti računalo.
- ♦ Rješavanjem se dobiju rješenja:  
 $I_1 = -2 \text{ A}$ ,  $I_2 = -3 \text{ A}$ ,  $I_3 = 1 \text{ A}$ ,  
 $I_4 = -4 \text{ A}$ ,  $I_5 = 1 \text{ A}$ ,  $I_6 = -2 \text{ A}$ .
- ♦ Negativni predznaci za struje  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_4$  i  $I_6$  označavaju da su te struje smjerova suprotnih od referentnih na slici.