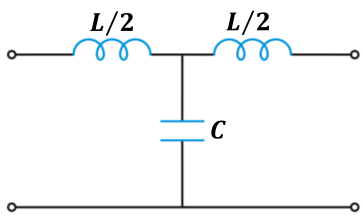
Zadatak 1.

1.1. (2 boda) Filterska ćelija niskih učestanosti K tipa realizovana je u obliku T simetričnog četveropola čija je karakteristična impedansa za nultu učestanost $R = 600\ (\Omega)$. Odredite karakterističnu impedansu ovog filtra za učestanost $f = 800\ (Hz)$, ako su parametri ćelije $L = 68{,}0\ (mH)$, $C = 0{,}189\ (\mu F)$. Izraz za karakterističnu impedansu filtra je:



$$\mathcal{Z}_{cT} = \sqrt{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2\left(1+\frac{\mathcal{Z}_1}{4\mathcal{Z}_2}\right)} = R\sqrt{1-\left(\frac{f}{f_c}\right)^2}.$$

Rješenje:

Za dati tip filtra važi: $\mathcal{Z}_1 = j\omega L, \quad \mathcal{Z}_2 = -j\dfrac{1}{\omega C}$

Granice propusnog opsega filtra mogu se odrediti koristeći dvostruku nejednakost:

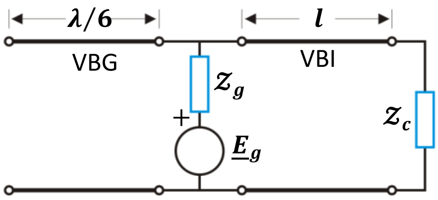
$-1 \le \dfrac{\mathcal{Z}_1}{4\mathcal{Z}_2} \le 0,$ odnosno: $-1 \le -\omega^2\dfrac{LC}{4} \le 0$

Zajedničko rješenje lijeve i desne strane je: $0 \le \omega \le \dfrac{2}{\sqrt{LC}} = \omega_c$

odnosno: $0 \le f \le \dfrac{2}{\pi\sqrt{LC}} = f_c$

Karakteristična impedansa za T ćeliju je: $\mathcal{Z}_{cT} = 600\sqrt{1-\left(\dfrac{800}{2803{,}7}\right)^2} = 575{,}06\ (\Omega)$

1.2. (3 boda) Za vod bez izobličenja poznati su podužni parametri:
$R' = 0{,}04\ (\Omega/km), G' = 1\ (\mu S/km), L' = 1\ (mH/km)$.
Ulazna impedansa otvorenog voda je $\mathcal{Z}_{u1} = -j200\ (\Omega)$. Odredite unutrašnju impedansu generatora efektivne vrijednosti elektromotorne sile $E_g = 250\ (V)$, ako se zna da se paralelnim vezivanjem otvorenog voda bez gubitaka postiže da aktivna snaga na ulazu paralelne veze bude maksimalna. Potom odredite aktivnu snagu potrošača. Dužina voda bez izobličenja je $l = 100\ (km)$.



Rješenje:

Impedansa potrošača koga napaja generator se dobija kao paralelna veza ulazne impedanse voda bez izobličenja:

$$\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_C = \sqrt{\frac{R'}{G'}} = 200\ (\Omega)$$

i ulazne impedanse otvorenog voda bez gubitaka date u zadatku.

Prema tome je: $$\mathcal{Z}_1 = \frac{\mathcal{Z}_u \mathcal{Z}_{u1}}{\mathcal{Z}_u + \mathcal{Z}_{u1}} = 100 - j100\ (\Omega)$$

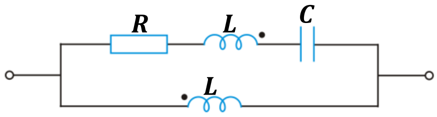
Iz uslova predaje najveće aktivne snage izračunavamo: $\mathcal{Z}_g = \mathcal{Z}_1^* = 100 + j100\ (\Omega)$

Aktivna snaga koja se predaje na kraj voda bez izobličenja iznosi: $P_2 = P_1 e^{-2\alpha l} = \dfrac{E_g^2}{4R_g} e^{-2\alpha l}$

Podužna konstanta slabljenja je: $\alpha = \sqrt{R' G'} = 0{,}0002\ (Np/km)$

Konačno se dobija: $P_2 = 150\ (W)$

1.3. (3 boda) Posmatra se kolo prema slici. Odredite kružnu učestanost prave antirezonancije. Poznato je: $R = 5\ (\Omega), X_L = 8\ (\Omega), X_M = 2\ (\Omega), X_C = 10\ (\Omega)$, $\omega = 5000\ (rad/s)$.



Rješenje:

Kružna učestanost prave antirezonancije određuje se na osnovu slobodnog radnog režima kola čiji su ulazni krajevi otvoreni. Ovako dobijeno kolo odgovara rezonantnom RLC kolu sa ekvivalentnom induktivnom reaktansom:

$$X_e = 2(X_L + X_M) = 20\ (\Omega)$$

Iz jednačina kola napisanih preko KZ nije teško zaključiti da je sopstveni odziv kola opisan diferencijalnom jednačinom:

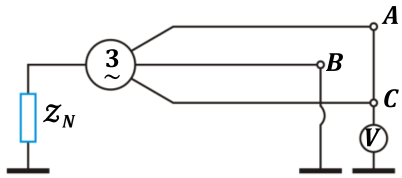
$$L_e C \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0$$

Rješenja karakteristične jednačine su: $p_{1,2} = -\frac{R}{2L_e} \pm j\omega\sqrt{\frac{X_C}{X_e} - \left(\frac{R}{2X_e}\right)^2}$

Kružna učestanost prave antirezonancije je: $\omega_{pa} = \omega\sqrt{\frac{X_C}{X_e} - \left(\frac{R}{2X_e}\right)^2} = 3479{,}85\ (rad/s)$

1.4. (4 boda) U trofaznoj mreži sa slike došlo je do složenog kratkog spoja. Odredite pokazivanje naznačenog voltmetra. Poznato je:
$\mathcal{Z}_0 = j2\ (\Omega), \mathcal{Z}_d = \mathcal{Z}_i = j1\ (\Omega), \mathcal{Z}_N = 1(\Omega), E = 220\ (V)$.
Direktna komponenta napona je data izrazom:

$$\underline{U}_d = \frac{\mathcal{Z}_i(\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_N)\underline{E}}{(\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_N)(\mathcal{Z}_d + \mathcal{Z}_i) + 4\mathcal{Z}_d\mathcal{Z}_i}.$$



Rješenje:

Jednačine simetričnog dijela su:

$$\underline{U}_0 + (\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_N)\underline{I}_0 = 0, \quad \underline{U}_d + \mathcal{Z}_d\underline{I}_d = \underline{E}, \quad \underline{U}_i + \mathcal{Z}_i\underline{I}_i = 0 \tag{1}$$

Jednačine nesimetričnog dijela su:

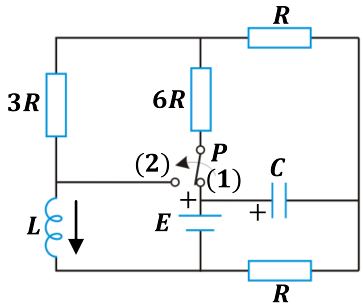
$$\underline{U}_A = \underline{U}_C, \quad \underline{I}_A = -\underline{I}_C, \quad \underline{U}_B = 0 \tag{2}$$

Koristeći prvu i drugu jednačinu sistema (2) dobija se: $\underline{U}_i = a\underline{U}_d, \quad \underline{U}_0 = -2a^2\underline{U}_d$

Fazor napona $\underline{U}_C$ je: $\underline{U}_C = \underline{U}_0 + a\underline{U}_d + a^2\underline{U}_i = -3a^2\underline{U}_d = \frac{-3a^2\mathcal{Z}_i(\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_N)\underline{E}}{(\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_N)(\mathcal{Z}_d + \mathcal{Z}_i) + 4\mathcal{Z}_d\mathcal{Z}_i}$

Pokazivanje naznačenog voltmetra je: $|\underline{U}_C| = \frac{3\cdot|3+j2|\cdot 1\cdot 220}{|-8+j6|} = 234\ (V)$

Zadatak 2.



2. **(16 bodova)** U kolu na slici, u trenutku $t = 0$ prekidač P prebacuje se iz položaja (1) u položaj (2). Odredite vremensku promjenu $u_c(t)$ za napon na krajevima kondenzatora i vremensku promjenu $i_L(t)$ za struju kroz zavojnicu poslije komutacije. Poznato je:

$E = 12\ (V), R = \dfrac{10}{3}\ (\Omega), L = 10\ (H), C = 0{,}1\ (F).$

Rješenje:

Nezavisni početni uslovi su:

$$i_L(0) = \frac{2E}{36R} = 0{,}2\ (A) \qquad u_c(0) = \frac{11E}{12} = 11\ (V)$$

Nakon komutacije vrijedi:

$$3Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = E - u_c(t) \tag{1}$$

$$RC\frac{du_c(t)}{dt} - Ri_L(t) = E - u_c(t) \tag{2}$$

Iz relacije (2) slijedi: $\quad i_L(t) = -\dfrac{E}{R} + \dfrac{u_c(t)}{R} + C\dfrac{du_c(t)}{dt}$ (3)

Iz relacije (3) je: $\quad L\dfrac{di_L(t)}{dt} = \dfrac{L}{R}\dfrac{du_c(t)}{dt} + LC\dfrac{d^2u_c(t)}{dt^2}$ (4)

Uvrštavanjem relacija (3) i (4) u relaciju (1), dobija se:

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \left(3RC + \frac{L}{R}\right)\frac{du_c(t)}{dt} + 4u_c(t) = 4E$$

Za date parametre, korijeni karakteristične jednačine su: $\quad p_{1,2} = -2\ (1/s)$

Zavisni početni uslov je: $\quad \dfrac{du_c(0)}{dt} = \dfrac{i_L(0)}{C} - \dfrac{u_c(0) - E}{RC} = 5\ (V/s)$

Opšte rješenje ima oblik: $\quad u_c(t) = 12 + (A + Bt)e^{-2t}\ (V)$

Integracione konstante su: $\quad A = -1\ (V), \quad B = 3\ (V/s)$

Traženo rješenje je: $\quad u_c(t) = 12 - (1 - 3t)e^{-2t}\ (V), \quad t \geq 0$

Vremenska promjena struje kroz zavojnicu može se odrediti iz: $\quad i_L(t) = \dfrac{u_c(t) - E}{R} + C\dfrac{du_c(t)}{dt}$

Traženo rješenje je: $\quad i_L(t) = (0{,}2 + 0{,}3t)e^{-2t}\ (A), \quad t \geq 0$

Zadatak 3.

3.1. (2 boda) Na ulazu voda bez izobličenja vezan je generator unutrašnje otpornosti $R_g = 14{,}6\ (\Omega)$. Na izlaznom pristupu voda bez izobličenja vezan je potrošač čiji je zahtjev za aktivnom snagom P_2. Ako na ulaznom pristupu voda bez izobličenja generator daje aktivnu snagu od $100\ (W)$, te ako je podužna konstanta slabljenja $0{,}0002\ (Np/km)$, a dužina voda $l = 100\ (km)$, odredite snagu P_2.

$a)\ P_2 = 67{,}03\ (W)$ $b)\ P_2 = 99{,}99\ (W)$ $\boxed{c)\ P_2 = 96{,}08\ (W)}$ $d)\ P_2 = 99{,}60\ (W)$

Rješenje:

Aktivna snaga koja se predaje na kraj voda bez izobličenja iznosi: $P_2 = P_1 e^{-2\alpha l}$

Konačno se dobija: $P_2 = 96{,}08\ (W)$

3.2 (3 boda) Kolo dato na slici priključeno je na složenoperiodični generator napona:

$u(t) = 270 \cdot sin(\omega t) + 21\sqrt{2} \cdot sin(2\omega t) +$
$+90\sqrt{2} \cdot sin(3\omega t)\ (V).$

Poznate su reaktanse elemenata za osnovni harmonik:

$\omega L_1 = 24\ (\Omega), \omega L_2 = 24\ (\Omega), \omega L_3 = 8\ (\Omega),$

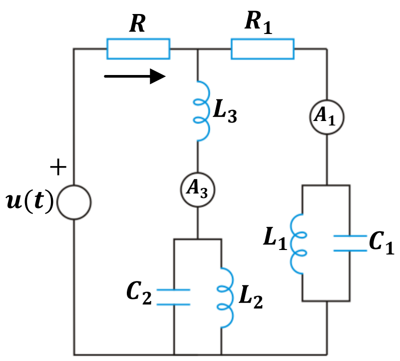
$\frac{1}{\omega C_1} = 216\ (\Omega), \frac{1}{\omega C_2} = 24\ (\Omega).$

Otpornosti naznačenih otpornika su: $R = 15\ (\Omega)$, $R_1 = 12\ (\Omega)$. Fazori ulazne struje za prvi, drugi i treći harmonik su:

$\underline{I}^{(1)} = 5e^{-j45^\circ}\ (A)$, $\underline{I}^{(2)} = 1{,}4\ (A)$,

$\underline{I}^{(3)} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ}\ (A).$

Odredite pokazivanje ampermetra A_1.



$\boxed{a)\ 5\ (A)}$ $b)\ 4{,}47\ (A)$ $c)\ 8{,}53\ (A)$ $d)\ 1{,}4\ (A)$

Rješenje:

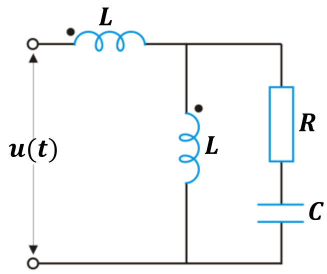
Za prvi harmonik paralelno kolo (L_2, C_2) je u antirezonanciji, pa je struja kroz otpornik R_1 jednaka ulaznoj struji.

Za drugi harmonik serijsko paralelna grana $(L_3, L_2, C_2\ )$ je u rezonanciji. Struja korz otpornik R_1 jednaka je nuli.

Za treći harmonik paralelno kolo (L_1, C_1) je u antirezonanciji pa kroz otpornik R_1 ne teče struja.

Pokazivnaje ampermetra A_1 je prema tome: $5\ (A)$

3.3. (3 boda) Koji odnosi trebaju biti između reaktansi zavojnice i kondenzatora pa da je u kolu moguće ostvariti faznu rezonanciju samo promjenom koeficijenta induktivne sprege k. Poznato je:



$$b = \frac{R}{X_C} = \sqrt{\frac{5}{8}}, \qquad k = \frac{2R^2 + (X_L - X_C)(X_L - 2X_C)}{X_L(X_L - X_C)}$$

$\boxed{a)\ \frac{X_L}{X_C} \geq \frac{13}{8}}$ $\quad b)\ \frac{X_L}{X_C} \geq \frac{12}{5}$ $\quad c)\ \frac{X_L}{X_C} \leq \frac{13}{8}$ $\quad d)\ \frac{X_L}{X_C} \leq \frac{12}{5}$

Rješenje:

Uvodeći smjenu: $a = \dfrac{X_L}{X_C}$

Uz dati odnos u zadatku, dobija se: $k = \dfrac{8a^2 - 24a + 26}{8a(a-1)}$

Imajući u vidu da je $0 < k \leq 1$, granice promjena vrijednosti uvedenog parametra a određujemo kao rješenje sistema nejednačina:

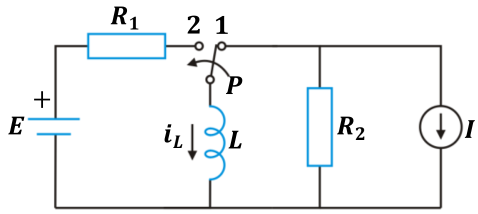
$$0 < \frac{8a^2 - 24a + 26}{8a(a-1)} \leq 1$$

Brojnik gornje nejednačine je pozitivan za svako a, pa je lijeva strana nejednačine zadovoljena za $a > 1$. Imajući u vidu uslov koji određuje lijeva strana, desna strana nejednačine je zadovoljena za:

$$8a^2 - 24a + 26 \leq 8a^2 - 8a$$

$a \geq \dfrac{13}{8}$ Ovo je ujedno i traženo rješenje sistema nejednačina.

3.4. (4 boda) Prekidač P u kolu sa slike je bio u položaju (1) dovoljno dugo da se može smatrati da je uspostavljen stacionarni režim. U trenutku $t = 0$, prekidač P trenutno se prebacuje u položaj (2). Koliko milisekundi poslije prebacivanja prekidača u položaj (2) je potrebno da protekne da bi napon na zavojnici dostigao vrijednost od $24\ (V)$. Poznato je:
$I = 8\ (A), E = 24\ (V), L = 200\ (mH), R_1 = 2\ (\Omega),$
$R_2 = 10\ (\Omega).$



$\boxed{a)\ t = 51{,}08\ (ms)}$ $b)\ t = 60\ (ms)$ $c)\ t = 98{,}08\ (ms)$ $d)\ t = 28{,}77\ (ms)$

Rješenje:

Za $t < 0$ zavojnica se ponaša kao da je kratko spojena pa je $i_L(0) = -8\ (A)$.

Za $t \geq 0$ prekidač je u položaju 2, primjenom KZ može se dobiti vremenska promjena struje kroz zavojnicu:

$$i_L(t) = 12 - 20e^{-10t}\ (A)$$

Napon na zavojnici je određen relacijom: $u_L(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt} = 40e^{-10t}\ (V) \quad t \geq 0_+$

$$u_L(t) = 40e^{-10t} = 24$$

Odavde je: $t = \dfrac{1}{10} ln\dfrac{40}{24} = 51{,}08\ (ms)$