

FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE SVEUČILIŠTA U ZAGREBU
Katedra za strojarsku automatiku

Mario Essert:

ELEKTROTEHNIKA

- pristup modeliranjem -

Zagreb, 2004.

Predgovor

Ova skripta nastala je kompilacijom nekoliko izvrsnih knjiga koje su navedene u literaturi. Ona donosi značajnu novost u dosadašnju poduku elektrotehnike studentima Fakulteta strojarstva i brodogradnje u novoj, preskromnoj (2+2) satnici: pristup modeliranjem i to upotrebom kompjutorskih programa pisanih u Matlabu (Octave, Scilab). Zahvaljujući tomu bilo je moguće razinu poduke značajno podignuti. Tako je rješavanje električnih mreža obrađeno metodama čvorišta i petlji preko matričnog računa, strujni krugovi se rješavaju u vremenskoj (diferencijalni račun) i frekvencijskoj domeni (Laplace-ova transformacija), dotaknuta su područja obrade signala (Fourier-ova analiza i filtriranje) i sl. Elektronika je obrađena od fizike poluvodiča preko osnovnih elemenata: diode, tranzistora i računskog pojačala. Povezivanje elemenata u sklopove, njihova analiza i sinteza, ostavljeni su elektroničkim predmetima. Na sličan način obrađene su i osnove električnih strojeva: protumačene su samo osnove elektromagnetizma i načela rada strojeva, njihove podjele po funkcionalnosti i primjeni. Student upoznaje djelovanje električnih motora i generatora, kao i posebne vrste električnih strojeva.

Za praćenje predmeta studentu je potrebno predznanje fizike srednje škole – osnove električne struje i elektromagnetizma. S obzirom da je korišten matematički alat s matricama i integrodiferencijalnim jednažbama, pretpostavlja se također poznavanje tih područja više matematike.

Predmet Elektrotehnika koji se izvodi po ovom materijalu na Fakultetu strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu, zamišljen je kao čvrsta sprega predavanja, auditornih, kompjutorskih i laboratorijskih vježbi. Za auditorne, kompjutorske i laboratorijske vježbe postoji posebna skripta. Na predavanjima se uči teorijska podloga, na auditornim sluša kako načiniti model, na kompjutorskim i modelarskim se izvodi simulacija modela, a na laboratorijskim se provjerava simulirani model u praksi. Kompjutorske vježbe održavaju se u kompjutorskim učionicama (svaki student radi na svom računalu) ili od kuće, a laboratorijske vježbe u *Laboratoriju za elektrotehniku* s priređenim električkim pločama i modulima. Rad od kuće moguć je za sve polaznike kolegija putem *Scriptrunner* programa.

Iako su kompjutorski primjeri pokazani u Matlab programskom jeziku, svi se mogu izvoditi i nekomercijalnim (Scilab i Octave) matematičkim alatima. Studentima se posebno preporučuje upoznavanje *Scilab* programa <http://scilabsoft.inria.fr/>.

Nadam se da će ovakav modelarski pristup elektrotehnici, preko teorije sustava i obrade signala, studentima biti zanimljiv, a njegovim svladavanjem i koristan: naučit će osnove elektrotehnike, svladat će pisanje programa u Matlabu, te upoznati matematičke modele i vještine koje su izuzetno korisne u kolegijima automatske regulacije, modeliranja i mjerenja.

Želio bih da ta zanimljivost donese plod i u radosti.

Zagreb, 1. listopada 2004.

Sadržaj

1. ISTOSMJERNA (DC) ANALIZA	1
1.1 Analiza čvorišta	1
1.2 Analiza petlje	6
2. PRIJELAZNE POJAVE	14
2.1. RC mreža	14
2.2. RL mreža	17
2.3. RLC serijski spoj	20
2.4. Pristup preko varijabli stanja (state space variable)	24
3. IZMJENIČNA (AC) ANALIZA I MREŽNE FUNKCIJE	35
3.1. Izmjenična snaga	35
3.2. Jednofazni i trofazni izmjenični krugovi	38
3.3. Trofazni sustav	44
3.4. Mrežne karakteristike	47
3.5. Frekvencijski odziv	52
3.6. Fourierova analiza	56
3.6.1 <i>Fourier-ov niz</i>	56
3.6.2 <i>Fourier-ova transformacija</i>	63
3.6.3 <i>Svojstva Fourier-ove transformacije</i>	64
3.6.4 <i>Diskretna i brza Fourier-ova transformacija</i>	65
4. ČETVEROPOLI	71
4.1 Četveropolna reprezentacija	71
4.1.1 <i>z-parametri</i>	71
4.1.2 <i>y-parametri</i>	72
4.1.3 <i>h-parametri</i>	74
4.1.4 <i>a-parametri</i>	76
4.2 Povezivanje četveropola	78
4.3 Zaključeni četveropoli	79
5. FIZIKA POLUVODIČA	81
5.1 Intrinzični poluvodiči	81
5.1.1 <i>Energetski pojasevi</i>	81
5.1.2 <i>Pokretni nositelji</i>	81
5.2 Ekstrinzični poluvodiči	84
5.2.1 <i>Koncentracije elektrona i šupljina</i>	84
5.2.2 <i>Fermijeve razine</i>	86
5.2.3 <i>Gustoća struje i pokretljivost</i>	87
5.3 PN-spoj: kontaktni potencijal, struja spoja	90
5.3.1 <i>Kontaktni potencijal</i>	90
5.3.2 <i>Struja spoja</i>	93
6. DIODA	96
6.1 Karakteristika diode	96
6.1.1 <i>Propusno polarizirano područje</i>	97
6.1.2 <i>Temperaturni efekti</i>	99
6.1. Analiza strujnih krugova s diodom	101
6.2. Poluvalni ispravljač	102

7. TRANZISTOR	106
7.1 Bipolarni tranzistor	106
7.1.1. Unaprijedno aktivno	108
7.1.2. Reverzno aktivno	109
7.1.3. Područje zasićenja i zapiranja	109
7.2 MOSFET karakteristike	112
7.2.1. Područje zapiranja	113
7.2.2. Triodno područje	113
7.2.3. Područje zasićenja	113
8. RAČUNSKO (OPERACIJSKO) POJAČALO	115
8.1 Svojstva OP pojačala	115
8.2 Invertirajuća konfiguracija	116
8.3 Neinvertirajuća konfiguracija	121
9. MAGNETIZAM	125
9.1 Magnetske veličine	125
9.2 Magnetski krug	130
9.3 Djelovanje magnetskog polja	131
9.3.1. Sila na naboj	131
9.3.2. Sila na vodič kojim teče struja	132
9.3.3. Sila između dva vodiča kroz koje teče struja	133
9.4 Elektromagnetska indukcija	133
9.4.1. Lenzov zakon	135
9.4.2. Induciranje harmoničkog napona	136
9.4.3. Samoindukcija	138
9.4.4. Međuindukcija	138
9.5 Energija magnetskog polja	140
10. ELEKTRIČNI STROJEVI	141
10.1 Osnove električnih strojeva	141
10.1.1 Princip izvedbe električnih strojeva	141
10.1.2 Magnetski krug električnih strojeva	142
10.1.3 Namot električnih strojeva	143
10.1.4 Pogonska stanja električnih strojeva	143
10.2 SINKRONI STROJEVI	143
10.2.1 Princip izvedbe sinkronog stroja	144
10.2.2 Princip rada sinkronog generatora	144
10.2.3 Prazni hod sinkronog generatora	145
10.2.4 Opterećenje sinkronog generatora i reakcija armature	146
10.2.5 Pojedinačni rad sinkronog stroja	147
10.2.6 Paralelni rad	147
10.2.7 Sinkroni motor	147
10.3 ASINKRONI STROJEVI	149
10.3.1 Princip izvedbe i vrste asinkronih motora	149
10.3.2 Princip rada asinkronog motora	150
10.3.3 Klizanje asinkronog motora	151
10.3.4 Bilanca energije asinkronog motora	151
10.3.5 Karakteristika momenta asinkronih motora	152
10.3.6 Pokretanje asinkronih motora	153
10.3.7 Pokretanje kolutnih motora	153
10.3.8 Pokretanje kaveznih motora	153
10.3.9 Upravljanje brzine vrtnje asinkronih motora	155
10.3.10 Jednofazni asinkroni motor	155
10.3.11 Jednofazni priključak trofaznog asinkronog motora	156

10.4 STROJEVI ISTOSMJERNE STRUJE	156
10.4.1 <i>Princip izvedbe</i>	156
10.4.2 <i>Princip rada</i>	157
10.4.3 <i>Iznos induciranog napona i momenta</i>	158
10.4.4 <i>Vrste uzbuđene istosmjernih strojeva</i>	159
10.4.5 <i>Generatori istosmjerne struje</i>	159
10.4.5.1 <i>Nezavisno uzbuđeni generator</i>	159
10.4.5.2 <i>Poredno uzbuđeni generator</i>	159
10.4.5.3 <i>Serijski uzbuđeni generator</i>	160
10.4.5.4 <i>Kompaundni (složeno uzbuđeni) generator</i>	160
10.4.6 <i>Motori istosmjerne struje</i>	161
10.4.6.1 <i>Nezavisno uzbuđeni motor</i>	161
10.4.6.2 <i>Poredni motor</i>	162
10.4.6.3 <i>Serijski motor</i>	163
10.4.6.4 <i>Kompaundni motor</i>	164
 11. POSEBNE VRSTE MOTORA	 165
11.1 Brushless DC motori	165
11.2 Koračni (step) motori	167
11.3 Preklopni reluktantni motori (SR – switched reluctance motors)	170
11.4 Univerzalni motor	171
 LITERATURA	 173

1. Istosmjerna (DC) analiza

1.1 Analiza čvorišta

Prvi Kirchhoff-ov strujni (KZ1) zakon kaže da je za bilo koju električnu mrežu algebarski zbroj svih struja u jednom čvorištu jednak nuli. Neka postoji n čvorišta u mreži, s indeksima 0 do $n-1$. Prema referentnom čvorištu s indeksom 0 ostala čvorišta imaju potencijale V_1, V_2, \dots, V_{n-1} . Ako se uzme da admitancija (kompleksna vodljivost) između čvorišta i i čvorišta j iznosi Y_{ij} , onda postoji $n-1$ nezavisnih jednačbi sa strujama u granama izraženima prema Ohmovom zakonu, koje se mogu pisati kao čvorišne jednačbe:

$$\begin{aligned} Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 + \dots + Y_{1m} V_m &= \sum I_1 \\ Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 + \dots + Y_{2m} V_m &= \sum I_2 \\ Y_{m1} V_1 + Y_{m2} V_2 + \dots + Y_{mm} V_m &= \sum I_m \end{aligned} \quad (1.1)$$

gdje su:

$$m = n - 1$$

V_1, V_2 i V_m su naponi između čvorišta 1, 2, ..., n i referentnog čvorišta

I_{ij} je struja kroz granu koja povezuje čvorište i i čvorište j (ne mora postojati)

$\sum I_x$ je algebarski zbroj struja u čvorištu x

Jednačbe (1.1) mogu se izraziti u matričnom obliku prema:

$$[Y][V] = [I] \quad (1.2)$$

Rješenje gornje jednačbe je:

$$[V] = [Y]^{-1} [I] \quad (1.3)$$

gdje je $[Y]^{-1}$ inverz od $[Y]$.

U Matlab-u, matrica napona čvorišta $[V]$ računa se koristeći naredbu:

$$V = \text{inv}(Y) * I \quad (1.4)$$

gdje je $\text{inv}(Y)$ inverz od matrice Y .

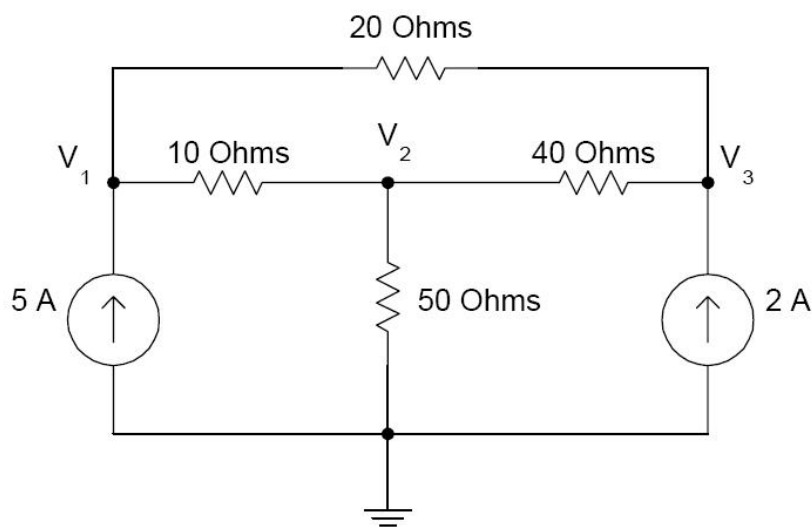
Matrično lijevo i desno množenje može se koristiti da se dobiju naponi čvorišta. Sljedeće Matlab naredbe mogu se iskoristiti da se nađe matrica $[V]$:

$$V = I/Y \quad \text{ili} \quad V = Y \setminus I \quad (1.5)$$

Rješenje prema jednadžbama (1.3) do (1.5) postoji, ako sustav nije loše kondicioniran (tj. ako sustav nema rješenja ili je matrica singularna). Sljedeća dva primjera opisuju upotrebu Matlab u rješavanju napona čvorišta električnih krugova.

Primjer 1.1

Za električni krug zadan shemom, treba naći napone V_1 , V_2 i V_3 .



Rješenje

Koristeći KZ1 i pretpostavljajući da su struje koje napuštaju čvorište pozitivne, vrijedi za čvorište 1:

$$\frac{V_1 - V_2}{10} + \frac{V_1 - V_3}{20} - 5 = 0$$

$$0.15V_1 - 0.1V_2 - 0.05V_3 = 5$$

za čvorište 2:

$$\frac{V_2 - V_1}{10} + \frac{V_2}{50} + \frac{V_2 - V_3}{40} = 0$$

$$-0.1V_1 + 0.145V_2 - 0.025V_3 = 0$$

za čvorište 3:

$$\frac{V_3 - V_1}{20} + \frac{V_3 - V_2}{40} - 2 = 0$$

$$-0.05V_1 - 0.025V_2 + 0.075V_3 = 2$$

ili napisano u matičnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 0.15 & -0.1 & -0.05 \\ -0.1 & 0.145 & -0.025 \\ -0.05 & -0.025 & 0.075 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matlab program 'pr1_1.m' za rješavanje gornje matrice izgleda ovako:

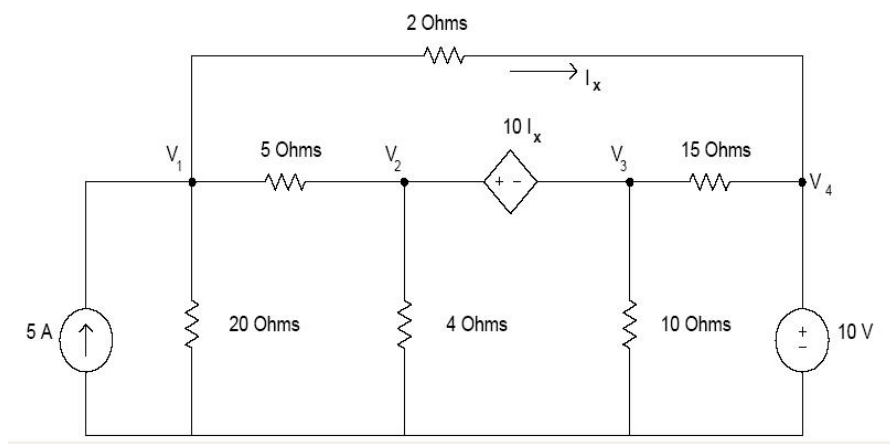
```
% program racuna napone cvorista
% zadana je admitancijska matrica Y i vektor struja I
% inicijalizacijska matrica Y i vektor I koriste oblik YV=I
Y = [ 0.15 -0.1 -0.05;
      -0.1 0.145 -0.025;
      -0.05 -0.025 0.075];
I = [5;
      0;
      2];
% rijesi za napone cvorista
fprintf('Naponi cvorista V1, V2 i V3 su \n')
V = inv(Y)*I
```

a pozivom daje ove rezultate:

```
>> pr1_1
Naponi cvorista V1, V2 i V3 su
V =
    404.2857
    350.0000
    412.8571
```


Primjer 1.2

Treba naći napone u čvorištima za krug prikazan shemom:



Koristeći KZ1 i dogovor da su struje koje napuštaju čvorišta pozitivne, vrijedi za čvorište 1:

$$\frac{V_1}{20} + \frac{V_1 - V_2}{5} + \frac{V_1 - V_4}{2} - 5 = 0$$

a uz pojednostavljenje:

$$0.75V_1 - 0.2V_2 - 0.5V_4 = 5$$

za čvorište 2:

$$V_2 - V_3 = 10I_x$$

ali

$$I_x = \frac{(V_1 - V_4)}{2}$$

što daje

$$V_2 - V_3 = \frac{10(V_1 - V_4)}{2}$$

te uz

pojednostavljenje:

$$-5V_1 + V_2 - V_3 + 5V_4 = 0$$

Promatrajući čvorišta 2 i 3, vrijedi nadalje:

$$\frac{V_3}{10} + \frac{V_2 - V_1}{5} + \frac{V_2}{4} + \frac{V_3 - V_4}{15} = 0$$

a pojednostavljenjem:

$$-0.2V_1 + 0.45V_2 + 0.1667V_3 - 0.06667V_4 = 0$$

za čvorište 4:

$$V_4 = 10$$

što u matričnom obliku na koncu izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} 0.75 & -0.2 & 0 & -0.5 \\ -5 & 1 & -1 & 5 \\ -0.2 & 0.45 & 0.1667 & -0.06667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Matlab program za rješavanje napona čvorišta je:

```
% program racuna napone cvorista
% zadana je admitancijska matrica Y i vektor struja I
% inicijalizacijska matrica Y i vektor I koriste oblik YV=I
% Y je admitancijska matrica
% I je vektor struje
%
Y = [0.75 -0.2 0 -0.5;
-5 1 -1 5;
-0.2 0.45 0.166666667 -0.066666667;
0 0 0 1];
% vektor struje unosi se kao transponirani redcni vektor
I = [5 0 0 10]';
% rijesi za napone cvorista
fprintf('naponi cvorista V1, V2, V3 i V4 su \n')
V = inv(Y)*I
```

a pozivom daje ove rezultate:

```
>> pr1_2
naponi cvorista V1, V2, V3 i V4 su
V =
    18.1107
    17.9153
   -22.6384
    10.0000
```

1.2 Analiza petlje

Drugi Kirchhoff-ov zakon (KZ2) kaže da je algebarski zbroj napona duž zatvorene petlje u električnoj mreži jednak nuli. U analizi petlje cilj je izračunati struje iz sustava simultanih jednažbi. Graf takve petlje ima svojstvo da je planaran (ravninski), da nema presjecanja grana. U takvom grafu nadalje nema zavisnih ili nezavisnih strujnih izvora, pa vrijedi:

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 + \dots + Z_{1n}I_n &= \sum V_1 \\ Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 + \dots + Z_{2n}I_n &= \sum V_2 \\ Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + Z_{n3}I_3 + \dots + Z_{nn}I_n &= \sum V_n \end{aligned} \quad (1.6)$$

gdje su:

- I_1, I_2, \dots, I_n su nepoznate struje za petlje 1 do n
- $Z_{11}, Z_{22}, \dots, Z_{nn}$ su impendacije za svaku petlju kroz koju teku pojedinačne struje
- $Z_{ij}, j \neq i$ označuje međusobnu zavisnost

$\sum V_x$ je algebarski zbroj naponskih izvora u petlji x.

Jednažba (1.6) može se izraziti u matričnom obliku kao:

$$[Z][I] = [V]$$

gdje su:

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2n} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \dots & Z_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} \sum V_1 \\ \sum V_2 \\ \sum V_3 \\ \vdots \\ \sum V_n \end{bmatrix}$$

Rješenje jednažbe je:

$$[I] = [Z]^{-1}[V]$$

što se u Matlabu rješava kao:

$$I = \text{inv}(Z) * V$$

gdje je $\text{inv}(Z)$ inverz matrice Z .

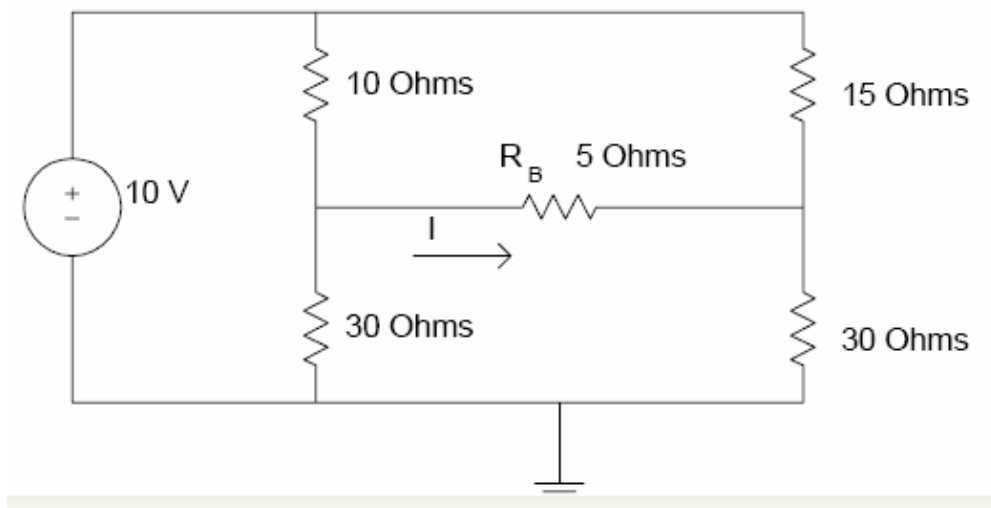
Matrično lijevo i desno dijeljenje može se koristiti da se dobiju struje petlji. Sljedeće Matlab naredbe mogu se iskoristiti za traženje matrice [I]:

$$I = V/Z \quad \text{ili} \quad I = Z \setminus V \quad (1.7)$$

Rješenje jednačbi (1.6) postoji, ako sustav nije loše kondicioniran (tj. ako sustav nema rješenja ili je matrica singularna). Sljedeći primjeri opisuju upotrebu Matlaba u rješavanju struje u zatvorenoj petlji.

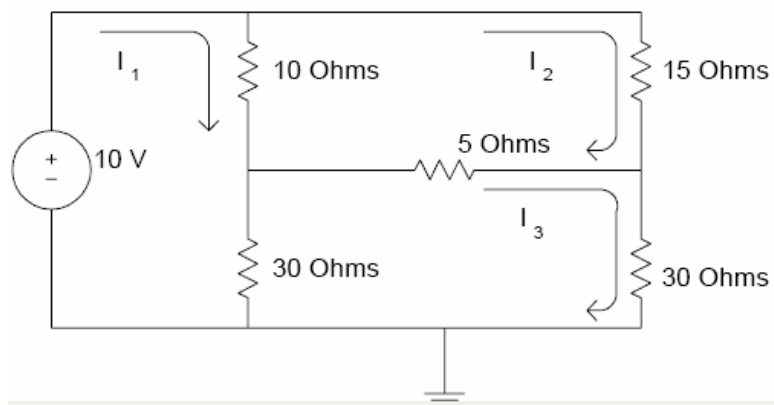
Primjer 1.3

Koristeći analizu petlji treba naći struju kroz otpornik R_B . Nadalje, treba naći snagu koju daje 10-voltni naponski izvor.



Rješenje

Koristeći analizu petlji i označujući struje petlji kao I_1 , I_2 i I_3 , dobija se sljedeća shema:



Primjetite da je $I = I_3 - I_2$, te da je snaga izvora $P = UI = 10 I_1$. Jednačbe petlji su sljedeće:

Petlja 1:

$$10(I_1 - I_2) + 30(I_1 - I_3) - 10 = 0$$

$$40I_1 - 10I_2 - 30I_3 = 10$$

Petlja 2:

$$10(I_2 - I_1) + 15I_2 + 5(I_2 - I_3) = 0$$

$$-10I_1 + 30I_2 - 5I_3 = 0$$

Petlja 3:

$$30(I_3 - I_1) + 5(I_3 - I_2) + 30I_3 = 0$$

$$-30I_1 - 5I_2 + 65I_3 = 0$$

U matričnom obliku ove jednadžbe izgledaju ovako:

$$\begin{bmatrix} 40 & -10 & -30 \\ -10 & 30 & -5 \\ -30 & -5 & 65 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matlab program za rješavanje struja petlji I_1 , I_2 , I_3 , struje izvora I i snage koju daje *10-voltni* naponski izvor je:

```
% ovaj program određuje struju koja teče kroz
% otpornik RB i snagu koju daje izvor
% on računa struje petlji uz zadanu matricu
% impedancije Z i naponski vektor V
% Z je impedancijska matrica
% V je naponska matrica
% inicijalizacija matrice Z i vektora V
Z = [40 -10 -30;
-10 30 -5;
-30 -5 65];
V = [10 0 0]';
% rješenja za struje petlji
I = inv(Z)*V
% struja kroz RB
IRB = I(3) - I(2);
fprintf('Struja kroz R_B je %8.3f Ampera \n',IRB)
% izracunavanje snage koju daje izvor
PS = I(1)*10;
fprintf('Snaga koju daje 10V izvor je %8.4f Wata \n',PS)
```

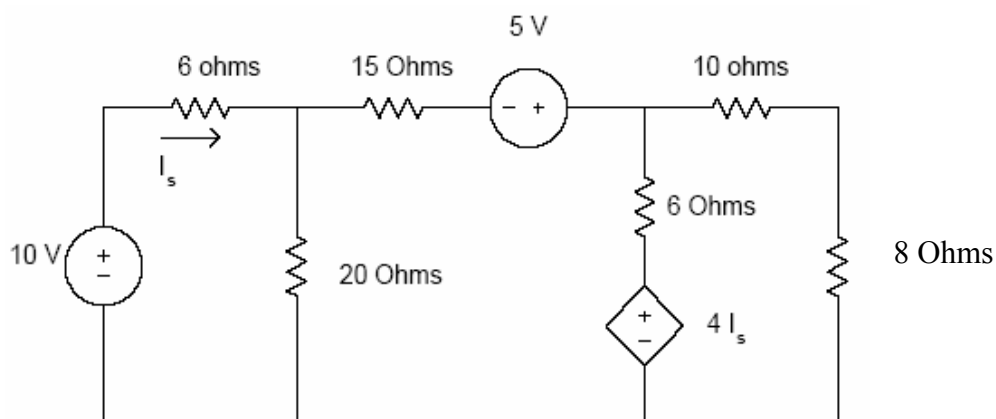
a pozivom daje ove rezultate:

```
>> pr1_3
I =
    0.4753
    0.1975
    0.2346
Struja kroz R_B je    0.037 Ampera
Snaga koju daje 10V izvor je    4.7531 Wata
```

Slično se analiziraju i krugovi sa zavisnim naponskim izvorima.

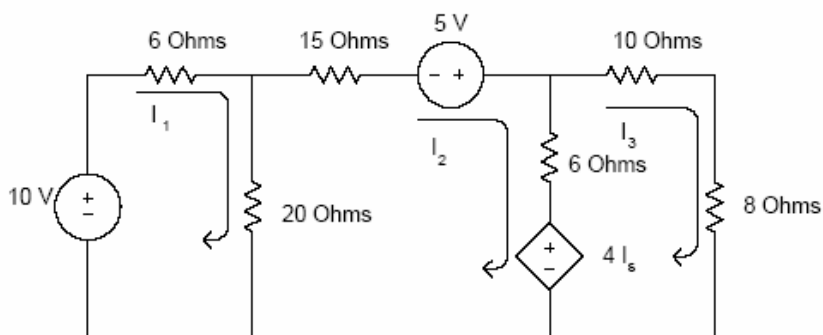
Primjer 1.4

Treba naći snagu koja se troši na 8-ohmskom otporniku i struju koju daje 10-voltni izvor.



Rješenje

Koristeći analizu petlji i označujući struje petlji kao I_1 , I_2 i I_3 , strujni krug se može ponovno nacrtati kao:



Očevidno je:

$$I_s = I_1$$

Nadalje, za petlju 1 vrijedi:

$$-10 + 6I_1 + 20(I_1 - I_2) = 0$$

$$26I_1 - 20I_2 = 10$$

za petlju 2:

$$15I_2 - 5 + 6(I_2 - I_3) + 4I_s + 20(I_2 - I_1) = 0$$

što se uvrštenjem I_s može malo skratiti:

$$-16I_1 + 41I_2 - 6I_3 = 5$$

za petlju 3:

$$10I_3 + 8I_3 - 4I_s + 6(I_3 - I_2) = 0$$

i kraćenjem:

$$-4I_1 - 6I_2 + 24I_3 = 0$$

Konačno, u matricnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 26 & -20 & 0 \\ -16 & 41 & -6 \\ -4 & -6 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Snaga potrošena na 8 ohmskom otporu je

$$P = RI_3^2 = 8I_3^2$$

Matlab program za računanje potrošene snage i struje koju daje izvor je sljedeći:

```
% ovaj program odredjuje snagu potrosenu na  
% 8 ohm otporniku i struju koju daje  
% 10V naponski izvor  
%  
% program racuna struje petlji, uz zadanu  
% impedancijsku matricu Z i vektor napona V  
%  
% Z je impedancijska matrica  
% V je vektor napona  
% inicijalizacija matrice Z i vektora V jednadzbe  
% ZI=V
```

```
Z = [26 -20 0;
-16 40 -6;
-4 -6 24];
V = [10 5 0]';
% treba riješiti struje petlji
I = inv(Z)*V
% potrošnja snage na 8 ohm otporniku je P
P = 8*I(3)^2;
% ispis rezultata
fprintf('Snaga potrošena na 8 ohm otporniku je %8.2f [W]\n',P)
fprintf('Struja koju daje 10V izvor je %8.2f [A]\n',I(1))
```

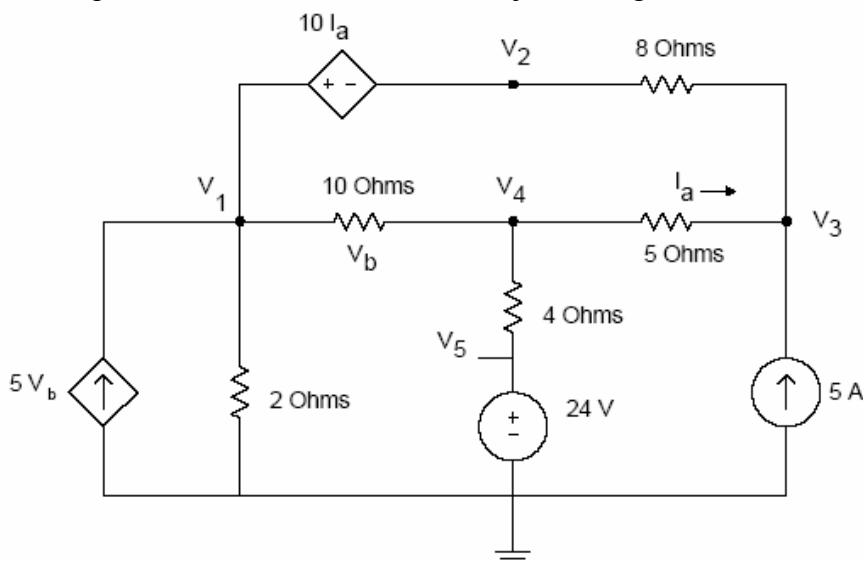
a pozivom daje ove rezultate:

```
>> pr1_4
I =
    0.7337
    0.4539
    0.2358
Snaga potrošena na 8 ohm otporniku je    0.44 [W]
Struja koju daje 10V izvor je    0.73 [A]
```

Za strujne krugove koji sadrže i strujne i naponske izvore, bez obzira jesu li to zavisni izvori ili nisu, oba KZ (prvi- strujni i drugi-naponski) se koriste da bi se dobile jednačbe koje će se riješiti Matlab-om. Sljedeći primjer to ilustrira.

Primjer 1.5

Treba naći napone čvorišta V_1, V_2, \dots, V_5 u strujnom krugu na slici:



Rješenje

Očevidno je:

$$V_b = V_1 - V_4$$

Koristeći Ohm-ov zakon:

$$I_a = \frac{V_4 - V_3}{5}$$

Nadalje, primjenom KZ1 na čvorištu 1, i nadčvorištu 1-2 upravljivog izvora, dobije se:

$$\frac{V_1}{2} + \frac{V_1 - V_4}{10} - 5V_b + \frac{V_2 - V_3}{8} = 0$$

Uvrštenjem V_b gornja jednadžba se pojednostavljuje:

$$-0.1V_1 - 0.2V_3 + 0.55V_4 - 0.25V_5 = 0$$

Upotrebmo KZ2 za čvorište 3, dobije se:

$$\frac{V_3 - V_4}{5} + \frac{V_3 - V_2}{8} - 5 = 0$$

što pojednostavnjeno izgleda ovako:

$$-0.125V_2 + 0.325V_3 - 0.2V_4 = 5$$

Primjenom KZ2 za petlju 1, dobiva se

$$-10I_a + V_b + 5I_a + 8(I_a + 5) = 0$$

a sređivanjem gornjih jednadžbi

$$-10I_a + V_b + 5I_a + 8I_a + 40 = 0$$

odnosno:

$$3I_a + V_b = -40$$

Daljnjim pojednostavljenjem dobivamo:

$$3\frac{V_4 - V_3}{5} + V_1 - V_4 = -40$$

tj.

$$V_1 - 0.6V_3 - 0.4V_4 = -40$$

Očevidno je:

$$V_5 = 24$$

što u matričnom obliku sve zajedno izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} -4.4 & 0.125 & -0.125 & 4.9 & 0 \\ -0.1 & -0.2 & 0 & 0.55 & -0.25 \\ 0 & -0.125 & 0.325 & -0.2 & 0 \\ 1 & 0 & -0.6 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -40 \\ 24 \end{bmatrix}$$

i zadovoljava model $[Y] \cdot [V] = [I]$

Matlab program za rješenje ovog sustava jednažbi je:

```
% Program odredjuje napone cvorista
% zadana je matrica admitancije Y ai vektor struje I
% Inicijalizacija matrice Y vektora struje I s
% matricnom jednaadbom Y V = I
Y = [-4.4 0.125 -0.125 4.9 0;
-0.1 0 -0.2 0.55 -0.25;
0 -0.125 0.325 -0.2 0;
1 0 -0.6 -0.4 0;
0 0 0 0 1];
I = [0 0 5 -40 24]';
% Rjesenje napona cvorista
fprintf('naponi cvorista V(1), V(2), .. V(5) su \n')
V = inv(Y)*I
```

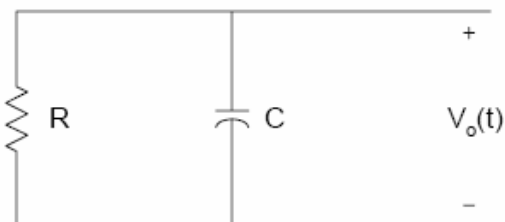
a pozivom daje ove rezultate:

```
naponi cvorista V(1), V(2), .. V(5) su
V =
    117.4792
    299.7708
    193.9375
    102.7917
     24.0000
```

2. PRIJELAZNE POJAVE

2.1. RC mreža

Razmatra se RC mreža na koju se primjenjuju Kirchhoffovi zakoni.



Prema KZ1 vrijedi:

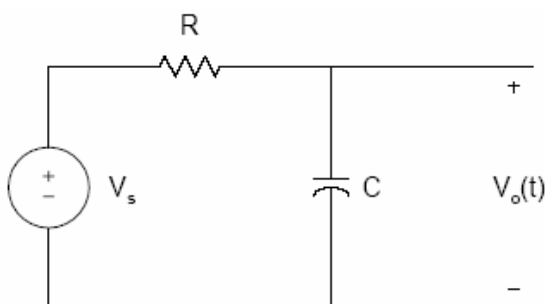
$$C \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{v_o(t)}{R} = 0 \quad \text{tj.} \quad \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{v_o(t)}{CR} = 0$$

Ako je V_m početni napon na kapacitetu, onda je rješenje jednačbe:

$$v_o(t) = V_m e^{-\left(\frac{t}{CR}\right)}$$

gdje je CR vremenska konstanta.

Ovo rješenje predstavlja napon na kondenzatoru koji se u prijelaznom procesu prazni (izbija). Dobiti napon na kondenzatoru, nabiti ga, znači priključiti ga na izvor napona:



gdje prema KZ1 vrijedi:

$$C \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{v_o(t) - V_s}{R} = 0 \quad (2.1)$$

Ako je kondenzator inicijalno bio prazan, tj. $v_o(t)=0$ za $t=0$, rješenje jednačbe dano je sa:

$$v_o(t) = V_s \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{CR}\right)} \right) \quad (2.2)$$

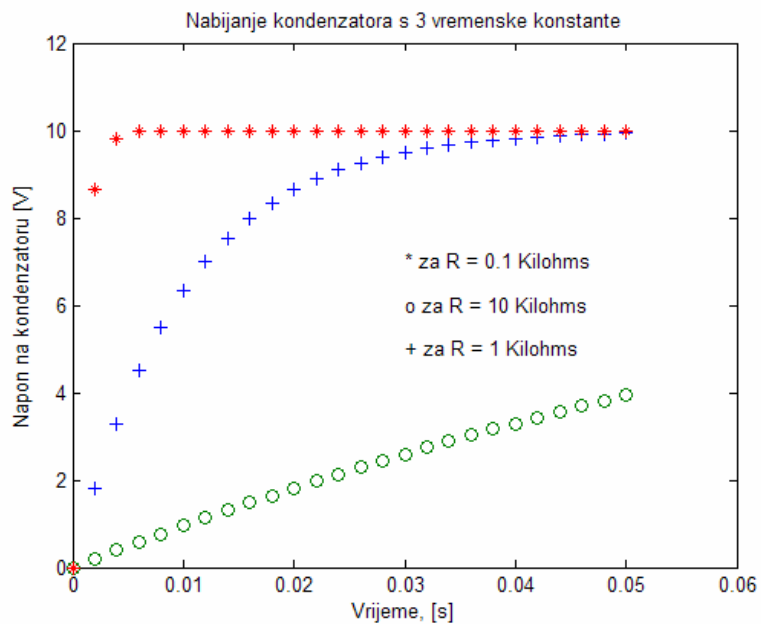
Primjer 2.1

Pretpostavimo da je $C=10\ \mu F$. Treba Matlab programom simulirati napon na kondenzatoru, ako je R jednak: a) $1.0\ k\Omega$ b) $10\ k\Omega$ i c) $0.1\ k\Omega$. Napon izvora $V_s=10\ V$.

Rješenje

```
% Nabijanje RC kruga
%
c = 10e-6;
r1 = 1e3;
tau1 = c*r1;
t = 0:0.002:0.05;
v1 = 10*(1-exp(-t/tau1));
r2 = 10e3;
tau2 = c*r2;
v2 = 10*(1-exp(-t/tau2));
r3 = .1e3;
tau3 = c*r3;
v3 = 10*(1-exp(-t/tau3));
plot(t,v1,'+',t,v2,'o', t,v3,'*')
axis([0 0.06 0 12])
title('Nabijanje kondenzatora s 3 vremenske konstante')
xlabel('Vrijeme, [s]')
ylabel('Napon na kondenzatoru [V]')
text(0.03, 5.0, '+ za R = 1 Kilohms')
text(0.03, 6.0, 'o za R = 10 Kilohms')
text(0.03, 7.0, '* za R = 0.1 Kilohms')
```

što nakon poziva daje:



Na grafičkom prikazu može se uočiti da će s manjom vremenskom konstantom vrijeme nabijanja kondenzatora biti kraće.

Primjer 2.2

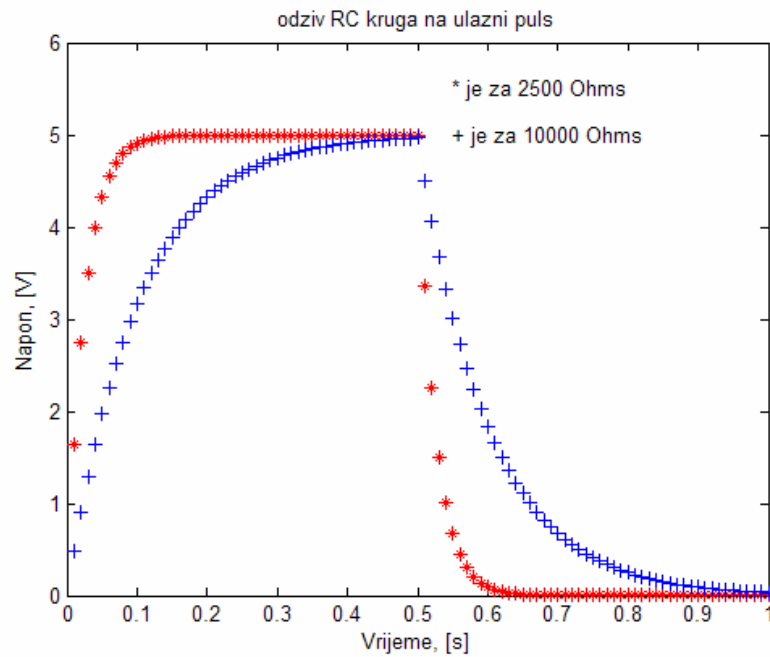
Neka je priključeni napon pravokutni puls s amplitudom od $5V$ i širinom $0.5s$. Ako je $C=10\mu F$, treba nacrtati izlazni napon $v_o(t)$, za otpore R jednake a) $1000\ \Omega$ i b) $10,000\ \Omega$. Crtež neka počne u nula sekundi i završi u 1 sekundi.

```
function [v, t] = rceval(r, c)
% rceval je funkcija za izracunavanje
% izlaznog napona zadanog vrijednostima
% otpora i kapaciteta.
% poziv [v, t] = rceval(r, c)
% r je vrijednost otpora(ohms)
% c je vrijednost kapaciteta(Farad)
% v je izlazni napon
% t je vrijeme koje odgovara naponu v
tau = r*c;
for i=1:50
    t(i) = i/100;
    v(i) = 5*(1-exp(-t(i)/tau));
end
vmax = v(50);
for i = 51:100
    t(i) = i/100;
    v(i) = vmax*exp(-t(i-50)/tau);
end
```

što nakon poziva:

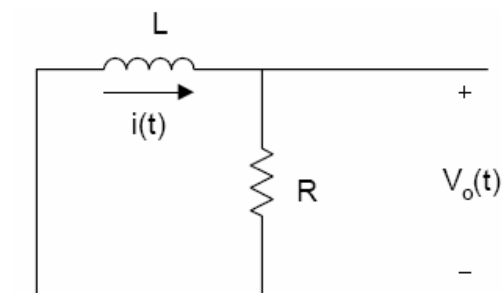
```
% Problem se rjesava pozivom funkcije
% rceval
% Izlaz se racuna za razlicite otpore
c = 10.0e-6;
r1 = 2500;
[v1,t1] = rceval(r1,c);
r2 = 10000;
[v2,t2] = rceval(r2,c);
% plot the voltages
plot(t1,v1,'*r', t2,v2,'+b')
axis([0 1 0 6])
title('odziv RC kruga na ulazni puls')
xlabel('Vrijeme, [s]')
ylabel('Napon, [V]')
text(0.55,5.5,'* je za 2500 Ohms')
text(0.55,5.0,'+ je za 10000 Ohms')
```

daje:



2.2. RL mreža

Neka se na sličan način promotri RL strujni krug:



Koristeći KZ2 dobije se:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0$$

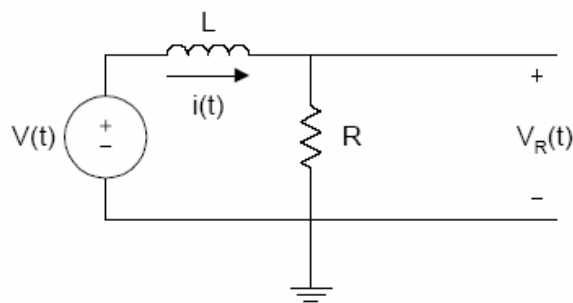
Ako je početna struja kroz zavojnicu I_m , rješenje jednačbe iznosi:

$$i(t) = I_m e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \quad (2.3)$$

gdje je

$$\tau = L/R$$

Neka je zadan RL strujni krug s naponskim izvorom $v(t)=V_s$:



Primjenom KZ2 dobije se:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_s$$

Ako je početna struja kroz strujni krug jednaka nuli, onda je rješenje jednadžbe:

$$i(t) = \frac{V_s}{R} \left(1 - e^{-\left(\frac{Rt}{L}\right)} \right)$$

Napon na otporniku jednak je:

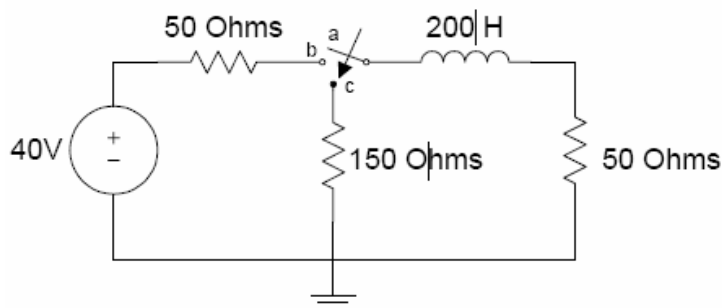
$$\begin{aligned} v_R(t) &= Ri(t) \\ &= V_s \left(1 - e^{-\left(\frac{Rt}{L}\right)} \right) \end{aligned}$$

a napon na zavojnici:

$$\begin{aligned} v_L(t) &= V_s - v_R(t) \\ &= V_s e^{-\left(\frac{Rt}{L}\right)} \end{aligned}$$

Primjer 2.3

Za strujni krug na slici struja u početku kroz zavojnicu jednaka je nuli. Neka se u $t=0$ sklopka prebaci iz pozicije a u poziciju b i neka u njoj ostane 1 s. Nakon 1 s kašnjenja, sklopka se prebacuje iz pozicije b u poziciju c , gdje trajno ostaje. Zadaća je, nacrtati tijek struje kroz zavojnicu u ovisnosti o vremenu.



Rješenje

Za $0 < t < 1$, struja se nalazi prema:

$$i(t) = 0.4 \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau_1}\right)} \right)$$

gdje je:

$$\tau_1 = L/R = 200/100 = 2 \text{ s}$$

Za $t = 1$ s vrijedi:

$$\begin{aligned} i(t) &= 0.4(1 - e^{-0.5}) \\ &= I_{\max} \end{aligned}$$

Za $t > 1$ s treba koristiti jednažbu (2.3) da se dobije struja:

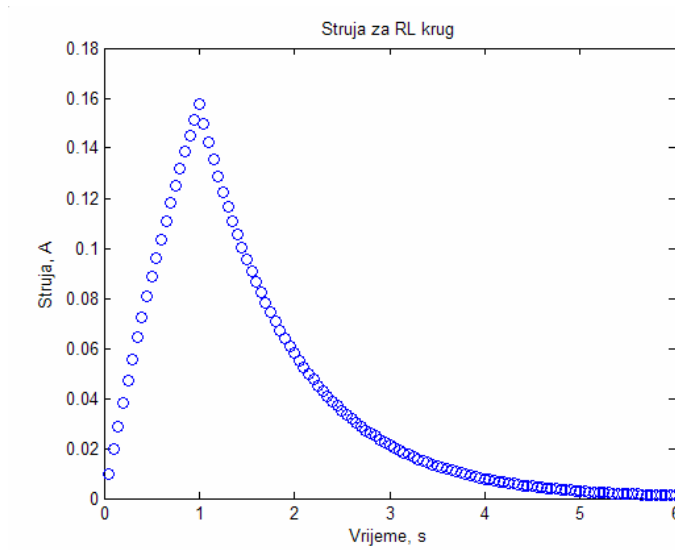
$$i(t) = I_{\max} e^{-((t-1)/\tau_2)}$$

gdje je :

$$\tau_2 = L/R_{eq2} = 200/200 = 1 \text{ s}$$

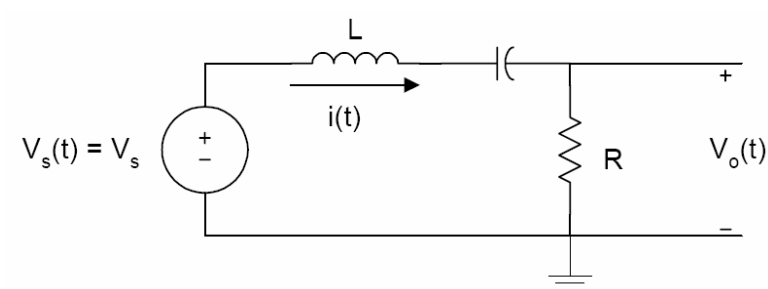
Matlab rješenje je:

```
% Rješenja za primjer 2.3
% tau1 je vremenska konstanta kad je sklopka u poziciji b
% tau2 is je vremenska konstanta kad je sklopka u poziciji c
%
tau1 = 200/100;
for k=1:20
    t(k) = k/20;
    i(k) = 0.4*(1-exp(-t(k)/tau1));
end
imax = i(20);
tau2 = 200/200;
for k = 21:120
    t(k) = k/20;
    i(k) = imax*exp(-t(k-20)/tau2);
end
% crta se struja
plot(t,i,'ob')
axis([0 6 0 0.18])
title('Struja za RL krug')
xlabel('Vrijeme, s')
ylabel('Struja, A')
```

2.3. RLC serijski spoj

Za serijski RLC spoj prema shemi, također se može napisati KZ2 da bi se dobila jednačba:



$$v_s(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau + Ri(t)$$

Derivirajući izraz po vremenu /dt dobiva se:

$$\frac{dv_s(t)}{dt} = L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C}$$

tj.

$$\frac{1}{L} \frac{dv_s(t)}{dt} = \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{LC}$$

Homogeno rješenje može se dobiti ako se načini $v_s(t) = konst.$, što daje:

$$0 = \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{LC}$$

Karakteristična jednažba je:

$$0 = \lambda^2 + a\lambda + b$$

gdje su $a=R/L$ i $b=1/LC$. Da bi se ova jednažba riješila, potrebno je odrediti korijene karakteristične jednažbe. Ako se pretpostavi da su korijeni

$$\lambda = \alpha, \beta$$

onda je rješenje homogenog dijela jednako:

$$i_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

gdje su A_1 i A_2 konstante.

Ako je $v_s(t)$ konstanta, onda će prisilno rješenje također biti konstantno i dat će se kao

$$i_f(t) = A_3$$

Ukupno rješenja tako je dano sa:

$$i(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + A_3$$

gdje se A_1 , A_2 i A_3 dobiju iz početnih uvjeta.

Primjer 2.4

Za serijski RLC spoj naći $i(t)$ ako je $L=10\text{ H}$, $R=400\ \Omega$ i $C=100\ \mu\text{F}$. Početni uvjeti su $v_s(t)=0$, $i(0)=4\text{ A}$, te $di(0)/dt = 15\text{ A/s}$.

Budući da je $v_s(t)=0$ vrijedi:

$$0 = \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{400}{10} \frac{di(t)}{dt} + 1000i(t)$$

Karakteristična jednažba je:

$$0 = \lambda^2 + 40\lambda + 1000$$

Matlab programom pronaći će se korijeni ove karakteristične jednačbe.

```
>> p = [1 40 1000];  
lambda = roots(p)  
lambda =  
-20.0000 +24.4949i  
-20.0000 -24.4949i
```

Koristeći korijene dobivene Matlab programom, $i(t)$ se dobije kao:

$$i(t) = e^{-20t} (A_1 \cos(24.4949t) + A_2 \sin(24.4949t))$$

$$i(0) = e^{-0} (A_1 + A_2(0)) \Rightarrow A_1 = 4$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -20e^{-20t} [A_1 \cos(24.4949t) + A_2 \sin(24.4949t)] + e^{-20t} [-24.4949 A_1 \sin(24.4949t) + 24.4949 A_2 \cos(24.4949t)]$$

$$\frac{di(0)}{dt} = 24.4949 A_2 - 20 A_1 = 15$$

iz čega se dobije $A_2 = 3.8784$, pa ukupno vrijedi:

$$i(t) = e^{-20t} [4 \cos(24.4949t) + 3.8784 \sin(24.4949t)]$$

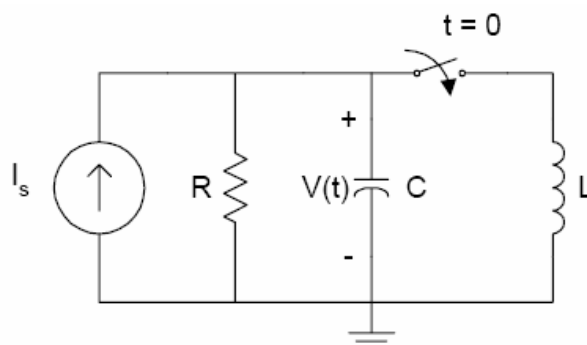
Međutim, jednostavniji način određivanja napona i struja u RLC krugovima je upotrebom Laplace-ove transformacije (LT). Prvo se za RLC krug napišu diferencijalne jednačbe koristeći KZ2, a onda se pretvore u algebarske jednačbe koristeći LT. Nepoznati naponi ili struje tada se rješavaju u s-domeni. Na koncu se upotrebom inverzne Laplaceove transformacije rješenje izrazi u vremenskoj domeni odakle smo krenuli. Sljedeća tablica pokazuje LT parove iz t- prema s-domeni.

Tablica parova Laplace-ove transformacije

	f(t)	F(s)
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
8	$e^{at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
9	$e^{at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
10	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(0^+)$
11	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt}$
12	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
13	$f(t-\tau)$	$e^{-s\tau}F(s)$

Primjer 2.5

U shemi na slici sklopka je otvorena dugo vremena. Ako se sklopka zatvori u $t=0$ treba naći napon $v(t)$. Neka se pretpostavi da je $R = 10 \Omega$, $L=1/32 H$, $C=50 \mu F$ i $I_s=2 A$.



Za $t < 0$, napon na kondenzatoru je

$$v_c(0) = (2)(10) = 20 \text{ V}$$

a struja kroz zavojnicu je $i_L(0)=0$.

Za $t > 0$ sklopka je zatvorena i svi elementi su spojeni paralelno. Koristeći KZ2, dobije se:

$$I_s = \frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau + i_L(0)$$

Djelujući Laplaceovom transformacijom na gornju jednadžbu, dobije se:

$$\frac{I_s}{s} = \frac{V(s)}{R} + C[sV(s) - V_c(0)] + \frac{V(s)}{sL} + \frac{i_L(0)}{s}$$

Za $I_s=2 \text{ A}$, $R = 10 \Omega$, $L=1/32 \text{ H}$ i $C=50 \mu\text{F}$, napon $V_s(s)$ postaje:

$$V(s) = \frac{40000 + 20s}{s^2 + 2000s + 64 \cdot 10^4}$$

$$V(s) = \frac{40000 + 20s}{(s + 1600)(s + 400)} = \frac{A}{(s + 1600)} + \frac{B}{(s + 400)}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -1600} V(s)(s + 1600) = -6.67$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -400} V(s)(s + 400) = 26.67$$

$$v(t) = -6.67e^{-1600t} + 26.67e^{-400t}$$

2.4. Pristup preko varijabli stanja (state space variable)

Druga metoda traženja prijenosnog odziva RLC kruga je tehnika s varijablama stanja. Značajke te metode su:

- može se primijeniti na vremenski promjenljive i nelinearne sustave
- prikladna je za digitalna i računalna rješenja
- može se koristiti za razvitak općih karakteristika sustava.
- mogu se analizirati i sintetizirati upravljački sustavi

Stanje sustava je minimalan skup varijabli izabran tako da, ako su njihove vrijednosti poznate za vrijeme t , i ako su svi ulazi poznati za vrijeme veće od t_l , onda se mogu izračunati izlazi sustava za vremena veća od t_l . Općenito, ako x označuje varijabla stanja, u ulaz, a y izlaz sustava, onda se mogu ulaz u i izlaz y izraziti kao:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

gdje su:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

a A , B , C i D matrice određuju se preko konstanti u sustavu.

Na primjer, razmotrimo sustav s jednim ulazom i jednim izlazom koji je opisan diferencijalnom jednačinom:

$$\frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 3 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 4 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 8 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 6u(t)$$

Definirat ćemo komponente vektora stanja kao:

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} = \dot{x}_1(t)$$

$$x_3(t) = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{dx_2(t)}{dt} = \dot{x}_2(t)$$

$$x_4(t) = \frac{d^3 y(t)}{dt^3} = \frac{dx_3(t)}{dt} = \dot{x}_3(t)$$

$$x_5(t) = \frac{d^4 y(t)}{dt^4} = \frac{dx_4(t)}{dt} = \dot{x}_4(t)$$

Uvrštavajući napisane varijable stanja u početnu jednadžbu dobije se:

$$\dot{x}_4(t) = 6u(t) - 3x_4(t) - 4x_3(t) - 8x_2(t) - 2x_1(t)$$

pa sustav predodčen u matričnom obliku izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -8 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u(t)$$

ili

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

gdje su

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -8 & -4 & -3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Budući da je

$$y(t) = x_1(t)$$

izlaz sustava $y(t)$ može se izraziti u članovima stanja $x(t)$ i ulaza $u(t)$ kao:

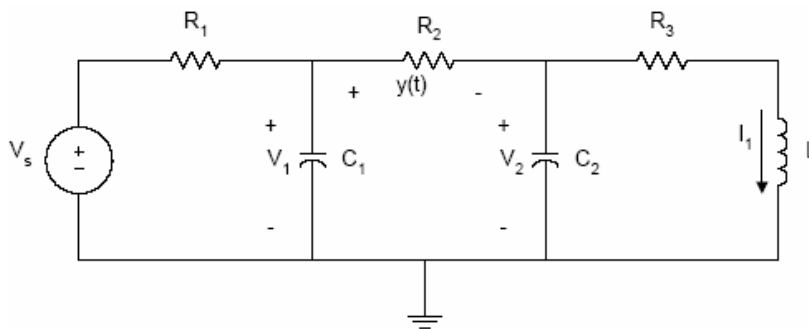
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

gdje su:

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \text{ and } D = [0]$$

U RLC krugovima, ako su napon na kondenzatoru i struja kroz zavojnicu poznati u neko početno vrijeme t , onda napon na kondenzatoru i struja kroz zavojnicu mogu poslužiti kao opis ponašanja sustava za sva iduća vremena. To vodi na zaključak da struju zavojnice i napon na kondenzatoru treba uzeti kao varijable stanja. Struje i naponi na otporima ne mogu biti nezavisne varijable stanja. Isto tako, ako postoje zatvorene petlje kondenzatora ili serijski spojevi zavojnica, onda ni njihove varijable ne mogu biti nezavisne.

Neka se razmotri strujni krug na slici:



Prema gornjim uputama, za varijable stanja treba izabrati V_1 , V_2 i i_1 . Napona nekog čvora j u vremenskoj domeni označit ćemo sa $v_j(t)$. Analizom čvorišta (KZ2) dobije se:

$$C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{V_1 - V_s}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_2} = 0$$

$$C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} + \frac{V_2 - V_1}{R_2} + i_1 = 0$$

a analizom petlje (KZ1):

$$V_2 = i_1 R_3 + L \frac{di_1(t)}{dt}$$

Izlaz $y(t)$ dan je sa:

$$y(t) = v_1(t) - v_2(t)$$

Pojednostaljenjem gornjih jednadžbi dobije se:

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = -\left(\frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2}\right)V_1 + \frac{V_2}{C_1 R_2} + \frac{V_s}{C_1 R_1}$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{V_1}{C_2 R_2} - \frac{V_2}{C_2 R_2} - \frac{i_1}{C_2}$$

$$\frac{di_1(t)}{dt} = \frac{V_2}{L} - \frac{R_3}{L} i_1$$

što izraženo u matričnom obliku izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{i}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\frac{1}{C_1 R_1} + \frac{1}{C_1 R_2}) & \frac{1}{C_1 R_2} & 0 \\ \frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2} \\ 0 & \frac{1}{L} & -\frac{R_3}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_s$$

sa izlazom:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

Matlab ima funkcije ODE za rješavanje običnih diferencijalnih jednačbi:

ili
$$\begin{aligned} [t,x] &= \text{ode23}(\text{xprime}, [tstart \ tfinal], x0, tol, trace) \\ [t,x] &= \text{ode45}(\text{xprime}, [tstart, tfina], x0, tol, trace) \end{aligned}$$

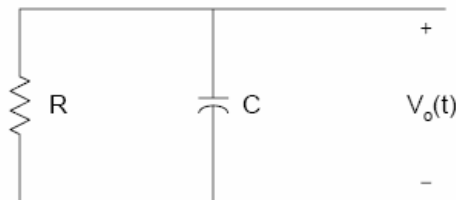
gdje su:

- *xprime* – ime m-datoteke s diferencijalnom jednačbom
- *tstart* – početak vremena integracije
- *tfinal* – konac vremena integracije
- *x0* – vektor početnih vrijednosti
- *tol* – tolerancija kojom se određuje željena točnost

Primjer 2.6

Za RC spoj s početka poglavlja zadano je $V_s = 10V$, $R = 10,000 \Omega$, $C = 10 \mu F$. Treba naći izlazni napon $v_o(t)$ u intervalu od 0 do 20 ms, pretpostavljajući $v_o(0) = 0$ i to na dva načina:

- koristeći numeričko rješenje diferencijalne jednačbe
- analitičkim rješavanjem



Iz jednačbe (2.1) slijedi:

$$C \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{v_o(t) - V_s}{R} = 0$$

pa je:

$$\frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{V_s}{CR} - \frac{v_o(t)}{CR} = 100 - 10v_o(t)$$

a iz jednadžbe (2.2) analitičko rješenje je:

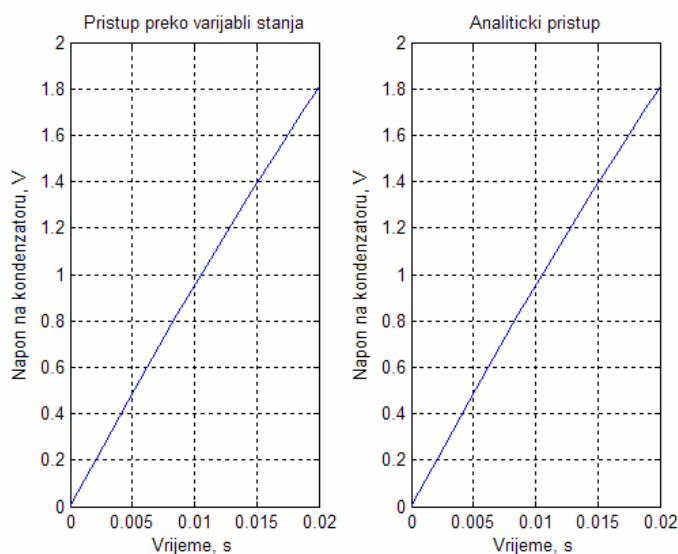
$$v_0(t) = 10 \left(1 - e^{-\left(\frac{t}{CR}\right)} \right)$$

Jednadžba se sprema u 'diff1.m' datoteku:

```
function dy = diff1(t,y)
% Funkcija s diferencijalnom jednadznom za primjer 2.6
dy = 100 - 10*y;
```

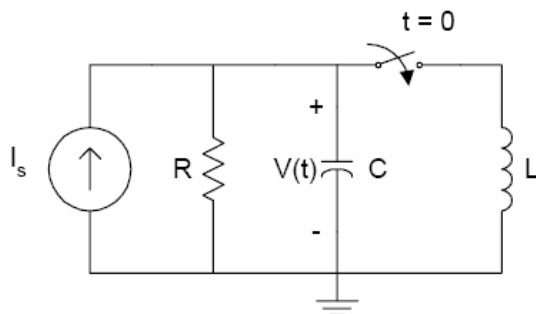
Ovo je Matlab rješenje za oba pristupa:

```
% Rješenje obicne diferencijalne jednadzbe prvog reda
% Function diff1(t,y) je nacinjena s
% diferencijalnom jednadznom
% koja je spremljena u m-file s imenom diff1.m
%
% Analiza prijelaznog procesa s RC krugom upotrebom ode
% funkcije i analitickim rjesenjem
%
% numericko rjesenje upotrebom ode
t0 = 0;
tf = 20e-3;
xo = 0; % pocetni uvjeti
[t, vo] = ode23('diff1',[t0 tf],xo);
% Analiticko rjesenje
vo_analy = 10*(1-exp(-10*t));
% graf oba rjesenja
subplot(121)
plot(t,vo,'b')
title('Pristup preko varijabli stanja')
xlabel('Vrijeme, s'),ylabel('Napon na kondenzatoru, V'),grid
subplot(122)
plot(t,vo_analy,'b')
title('Analiticki pristup')
xlabel('Vrijeme, s'),ylabel('Napon na kondenzatoru, V'),grid
```



Primjer 2.7

Za već analiziranu shemu na slici uz zadane vrijednosti $R=10\ \Omega$, $L=1/32\ H$, $C=50\ \mu F$ treba koristiti numeričko rješenje diferencijalne jednačbe za rješavanje $v(t)$. Treba usporediti numeričko rješenje s analitičkim dobivenim iz *primjera 2.5*.



Iz primjera 2.5 $v_c(0)=20\ V$, $i_L(0)=0$, i vrijedi:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} = v_C(t)$$

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} + i_L + \frac{v_C(t)}{R} - I_s = 0$$

Pojednostavljenjem, dobiva se:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{v_C(t)}{L}$$

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{I_s}{C} - \frac{i_L(t)}{C} - \frac{v_C(t)}{RC}$$

Ako se pretpostavi da vrijedi:

$$x_1(t) = i_L(t)$$

$$x_2(t) = v_C(t)$$

onda se mogu pisati jednačbe stanja:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L} x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{I_s}{C} - \frac{1}{C} x_1(t) - \frac{1}{RC} x_2(t)$$

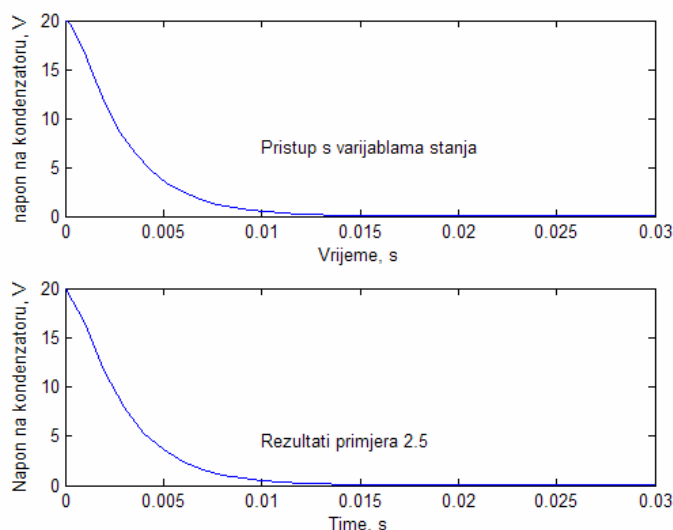
Neka se načini 'diff2.m' m-datoteka s gornjim dif. jednačbama

```
function xdot = diff2(t,x)
% Rješenje diferencijalne jednačbe drugog reda
% Funkcija diff2(x,y) stvara se da bi se dif. jednačba riješila
% Ime m-file je diff2.m
% Function se definira kao:
%
is = 2;
c = 50e-6; L = 1/32; r = 10;
k1 = 1/c ; % 1/C
k2 = 1/L ; % 1/L
k3 = 1/(r*c); % 1/RC
xdot(1) = k2*x(2);
xdot(2) = k1*is - k1*x(1) - k3*x(2);
xdot=xdot';
```

Nakon toga treba pokrenuti program koji će gornju datoteku pozvati:

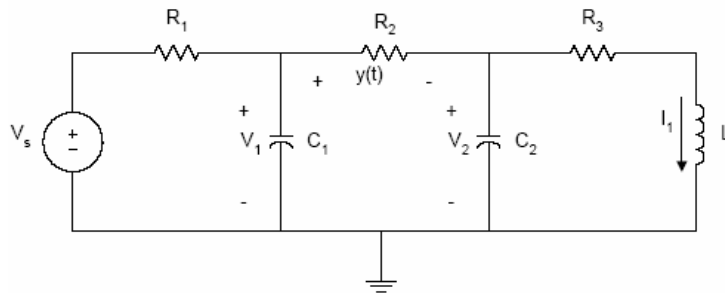
```
% Rješenje diferencijalne jednačbe drugog reda
% Funkcija diff2(x,y) je stvorena da se riješi
% diferencijalna jednačba
% Ime m-file s jednačbom je diff2.m
%
% Analiza prijelaznog stanja RLC kruga upotrebom ode funkcije
% Numericko rješenje
t0 = 0;
tf = 30e-3;
x0 = [0 20]; % početni uvjeti
[t,x] = ode23('diff2',[t0 tf],x0);
% Drugi stupac matrice x predstavlja napon na kondenzatoru
subplot(211), plot(t,x(:,2))
xlabel('Vrijeme, s'), ylabel('napon na kondenzatoru, V')
text(0.01, 7, 'Pristup s varijablama stanja')
% Analiza prijelaznog procesa RLC kruga iz primjera 2.5
t2 = 0:1e-3:30e-3;
vt = -6.667*exp(-1600*t2) + 26.667*exp(-400*t2);
subplot(212), plot(t2,vt)
xlabel('Time, s'), ylabel('Napon na kondenzatoru, V')
text(0.01, 4.5, 'Rezultati primjera 2.5')
```

Dobiveno rješenje je:



Primjer 2.8

Neka je za shemu na slici $v_s(t)=5 u(t)$ gdje je $u(t)$ jedinična koračna (step) funkcija, a elementi su $R_1 = R_2 = R_3 = 10 \Omega$, $C_1 = C_2 = 5 \mu F$ i $L = 10 H$. Treba naći i nacrtati napon $v_0(t)$ u intervalu od 0 do 5 s.

**Rješenje**

Uvrštavajući zadane vrijednosti u napisane jednačbe *primjera 2. 5* dobije se:

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = -40v_1(t) + 20v_2(t) + 20V_s$$

$$\frac{dv_2(t)}{dt} = 20v_1(t) - 20v_2(t) - i_1(t)$$

$$\frac{di_1(t)}{dt} = 0.1v_2(t) - 1000i_1(t)$$

što se može napisati u obliku m-datoteke u kojoj je spremljen sustav dif. jednačbi:

```
function vdot = diff3(t,v)
%
% Rjesenje skupa diff. jednadzbi prvog reda
% Funkcija diff3(t,v) se stvara da bi se
% izracunala diferencijalna jednadzba
% njezino ime u m-file jediff3.m
%
vdot(1) = -40*v(1) + 20*v(2) + 20*5;
vdot(2) = 20*v(1) - 20*v(2) - v(3);
vdot(3) = 0.1*v(2) - 1000*v(3);
vdot=vdot';
```

Da bi se dobio izlazni napon u intervalu $0 \leq t \leq 5$ s, treba uočiti da je izlazni napon:

$$v_0(t) = v_1(t) - v_2(t)$$

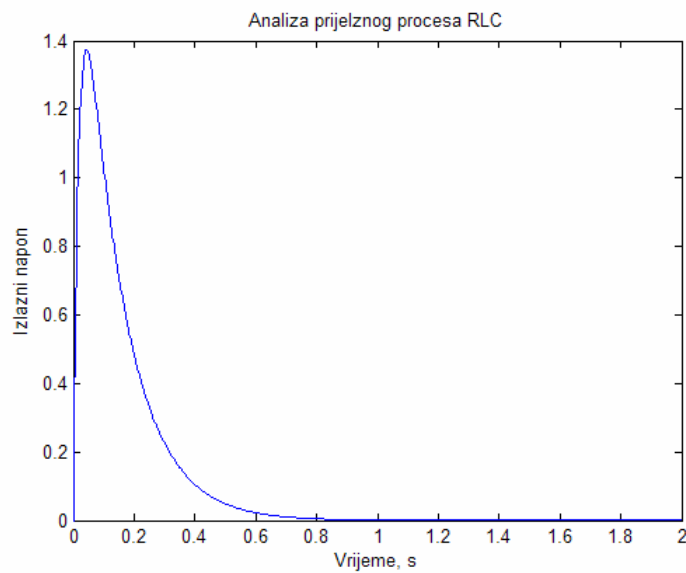
Isto tako za $t < 0$, koračni (step) signal jednak je nuli, pa je

$$v_0(0) = v_2(0) = i_1(0) = 0$$





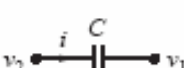


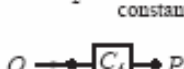

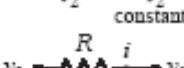
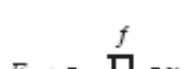
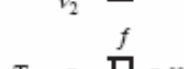
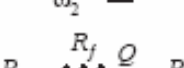
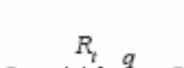
Na koncu se pozivom programa:

```
% Analiza prijelznog procesa RLC kruga upotrebom  
% pristupa preko varijabli stanja  
t0 = 0;  
tf = 2;  
x0 = [0 0 0]; % pocetni uvjeti  
[t,x] = ode23('diff3', [t0 tf], x0);  
tt = length(t);  
for i = 1:tt  
    vo(i) = x(i,1) - x(i,2);  
end  
  
plot(t, vo)  
title('Analiza prijelaznog procesa RLC')  
xlabel('Vrijeme, s'), ylabel('Izlazni napon')
```

dobije rješenje:



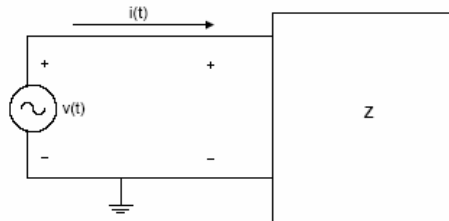
Tablica - Diferencijalne jednačbe idealnih elemenata

Type of Element	Physical Element	Describing Equation	Energy E or Power \mathcal{P}	Symbol
Inductive storage	Electrical inductance	$v_{21} = L \frac{di}{dt}$	$E = \frac{1}{2} L i^2$	
	Translational spring	$v_{21} = \frac{1}{K} \frac{dF}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{F^2}{K}$	
	Rotational spring	$\omega_{21} = \frac{1}{K} \frac{dT}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{T^2}{K}$	
	Fluid inertia	$P_{21} = I \frac{dQ}{dt}$	$E = \frac{1}{2} I Q^2$	
Capacitive storage	Electrical capacitance	$i = C \frac{dv_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C v_{21}^2$	
	Translational mass	$F = M \frac{dv_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} M v_2^2$	
	Rotational mass	$T = J \frac{d\omega_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} J \omega_2^2$	
	Fluid capacitance	$Q = C_f \frac{dP_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C_f P_{21}^2$	
Energy dissipators	Thermal capacitance	$q = C_t \frac{d\tau_2}{dt}$	$E = C_t \tau_2$	
	Electrical resistance	$i = \frac{1}{R} v_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R} v_{21}^2$	
	Translational damper	$F = f v_{21}$	$\mathcal{P} = f v_{21}^2$	
	Rotational damper	$T = f \omega_{21}$	$\mathcal{P} = f \omega_{21}^2$	
	Fluid resistance	$Q = \frac{1}{R_f} P_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_f} P_{21}^2$	
	Thermal resistance	$q = \frac{1}{R_t} \tau_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_t} \tau_{21}$	

3. Izmjenična (AC) analiza i mrežne funkcije

3.1. Izmjenična snaga

Na slici je prikazana impendancija Z spojena na napon $v(t)$ i struju $i(t)$ koja teče kroz nju:



Trenutačna snaga $p(t)$ je

$$p(t) = v(t) i(t)$$

Ako su $v(t)$ i $i(t)$ periodične funkcije s periodom T , onda se efektivna (RMS - root mean square; st. devijacija) vrijednost napona i struje računaju kao:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt}$$

$$I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

Srednja snaga potrošena na mreži jednaka je:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t) dt$$

A faktor snage pf :

$$pf = \frac{P}{V_{rms} I_{rms}}$$

U posebnom slučaju, kad su i struja $i(t)$ i napon $v(t)$ sinusoidalni (harmonijski), tj. kad vrijedi:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_V)$$

i

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_I)$$

onda se RMS vrijednost napona i struje računaju kao:

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \qquad I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

što je lako pokazati izračunavanjem RMS po formuli.

Srednja snaga P i faktor snage pf su:

$$P = V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_V - \theta_I) \qquad pf = \cos(\theta_V - \theta_I)$$

Reaktivna (ili jalova) snaga Q je

$$Q = V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_V - \theta_I)$$

dok je ukupna (kompleksna) snaga S jednaka:

$$S = P + jQ$$

$$S = V_{rms} I_{rms} [\cos(\theta_V - \theta_I) + j \sin(\theta_V - \theta_I)]$$

Jednadžbe koje uključuju integraciju mogu se u Matlabu riješiti s pomoću dviju funkcija koje izvode numeričku integraciju. To su *quad* i *quad8* funkcije.

$$q = \int_a^b \text{funct}(x) dx$$

Opći oblik funkcija s kojima se može naći q iz gornjeg izraza su:

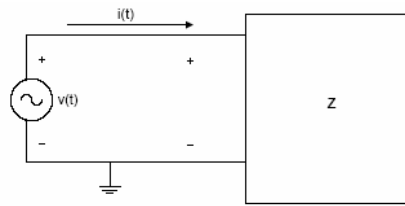
$$\begin{aligned} &\text{quad}('funct', a, b, tol, trace) \\ &\text{quad8}('funct', a, b, tol, trace) \end{aligned}$$

gdje su:

- *funct* – ime m-datoteke u kojoj je spremljena *funct(x)*
- *a* – početna, donja granica integracije
- *b* – završna, gornja granica integracije
- *tol* – tolerancija. Iteracije se nastavljaju sve dok relativna pogreška nije manja od *tol*. Pretpostavljena vrijednost za *tol* je 1.0e-3.
- *trace* – dopuštacrtanje grafa koji pokazuje kako se integracija odvija.

Primjer 3.1

Neka je $v(t) = 10 \cos(120 \pi t + 30^\circ)$ i $i(t) = 6 \cos(120 \pi t + 60^\circ)$ prema slici:



Odredite srednju snagu, RMS vrijednost od $v(t)$ i faktor snage, koristeći:

- analitičko rješenje
- numeričko rješenje

Za program su potrebne tri m-datoteke s upisanim jednažbama:

- za napon

```
function vsq = voltage1(t)
% voltage1 ova funkcija se koristi
% za definiranje napona
vsq = (10*cos(120*pi*t + 60*pi/180)).^2;
```

- za struju

```
function isq = current1(t)
% current1 - ova funkcija se koristi
% za definiranje struje
isq = (6*cos(120*pi*t + 30.0*pi/180)).^2;
```

- za snagu

```
function pt = inst_pr(t)
% inst_pr - ova funkcija se koristi za definiranje
% trenutacne snage koja se dobiva kao umnozak
% sinusnog napona i struje
it = 6*cos(120*pi*t + 30.0*pi/180);
vt = 10*cos(120*pi*t + 60*pi/180);
pt = it.*vt;
```

Pozivom programa koji računa srednju snagu, RMS napona i faktor snage:

```
% Ovaj program izracunava srednju snagu, rms vrijednost
% faktor snage koristeći quad funkciju. Uspoređuju se
% analitičko i numericko rjesenje.
%
% numericki racun
T = 2*pi/(120*pi); % period sinusnog oblika
a = 0; % donja granica integracije
b = T; % gornja granica integracije
x = 0:0.02:1;
t = x.*b;
v_int = quad('voltage1', a, b);
```

```
v_rms = sqrt(v_int/b); % rms napona
i_int = quad('current1',a, b);
i_rms = sqrt(i_int/b); % rms struje
p_int = quad('inst_pr', a, b);
p_ave = p_int/b; % srednja snaga
pf = p_ave/(i_rms*v_rms); % faktor snage
%
% analiticko rjesenje
%
p_ave_an = (60/2)*cos(30*pi/180); % srednja snaga
v_rms_an = 10.0/sqrt(2);
pf_an = cos(30*pi/180);
% rezultati se ispisuju
fprintf('Srednja snaga, analiticki: %f \nSrednja snaga,
numericki: %f \n', p_ave_an,p_ave)
fprintf('\nRms napon, analiticki: %f \nRms napon, numericki:
%f \n',v_rms_an, v_rms)
fprintf('\nFaktor snage, analiticki: %f \nFaktor snage,
numericki: %f \n',pf_an, pf)
```

dobije se:

```
>> pr3_1
Srednja snaga, analiticki: 25.980762
Srednja snaga, numericki: 25.980762

Rms napon, analiticki: 7.071068
Rms napon, numericki: 7.071068

Faktor snage, analiticki: 0.866025
Faktor snage, numericki: 0.866025
```

Vidi se da se s obje tehnike dobivaju isti rezultati.

3.2. Jednofazni i trofazni izmjenični krugovi

Naponi i struje u mreži mogu se odrediti u vremenskoj domeni. To obično uključuje rješavanje diferencijalnih jednačbi. Analiza se može pojednostavniti transformacijom diferencijalnih jednačbi u algebarske jednačbe koristeći fazore, reprezentante kompleksne frekvencije. Za napon zadan sa:

$$v(t) = V_m e^{j\omega t} \cos(\omega t + \theta)$$

fazor je

$$V = V_m e^{j\theta} = V_m \angle \theta$$

a kompleksna frekvencija s je

$$s = \sigma + j\omega$$

Kad je napon čisto sinusan, tj.

$$v_2(t) = V_{m2} \cos(\omega t + \theta_2)$$

tada je fazor jednak:

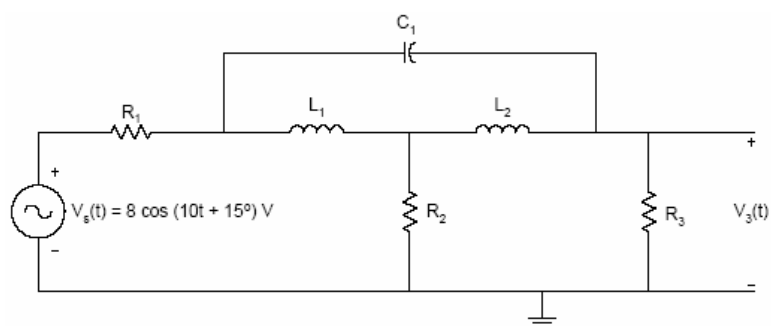
$$V_2 = V_{m2} e^{j\theta_2} = V_{m2} \angle \theta_2$$

a kompleksna frekvencija je čisto imaginarna veličina:

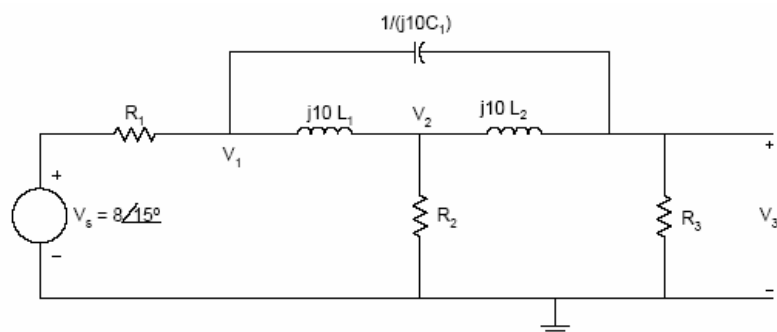
$$s = j\omega$$

Analiza strujnih krugova sa sinusnom uzбудom, provodi se tako da se krug transformira u s -domenu sa $s=j\omega$. Tamo se, u frekvencijskog domeni, rješavaju nepoznate struje i naponi, koristeći mrežne zakone i pravila. Rješenje se na koncu vraća u vremensku domenu koristeći inverznu fazorsku transformaciju. Na primjer, RLC krug prikazan u vremenskoj i frekvencijskoj domeni izgleda ovako:

a) vremenska domena



b) frekvencijska domena



Ako su vrijednosti za R_1 , R_2 , R_3 , L_1 , L_2 i C_1 poznate, onda se napon V_3 može izračunati koristeći analizu kruga. Ako se pretpostavi da je V_3 jednak

$$V_3 = V_{m3} \angle \theta_3,$$

onda je u vremenskoj domeni $v_3(t)$ jednak:

$$v_3(t) = V_{m3} \cos(\omega t + \theta_3)$$

Primjer 3.2

Neka su za gore nacrtani krug zadani elementi: $R_1=20\ \Omega$, $R_2=100\ \Omega$, $R_3=50\ \Omega$ i $L_1=4\ H$, $L_2=8\ H$, te $C_1=250\ \mu F$. Treba naći $v_3(t)$ za $\omega=10\ rad/s$.

Rješenje

Koristeći analizu čvorišta, dobiju se sljedeće jednačbe:

za čvorište 1

$$\frac{V_1 - V_s}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{j10L_1} + \frac{V_1 - V_3}{\cancel{1/(j10C_1)}} = 0$$

za čvorište 2

$$\frac{V_2 - V_1}{j10L_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_2 - V_3}{j10L_2} = 0$$

za čvorište 3

$$\frac{V_3}{R_3} + \frac{V_3 - V_2}{j10L_2} + \frac{V_3 - V_1}{\cancel{1/(j10C_1)}} = 0$$

Uvrštavajući vrijednosti elemenata u gornje tri jednačbe i pojednostavljenje dobije se matična jednačba:

$$\begin{bmatrix} 0.05 - j0.0225 & j0.025 & -j0.0025 \\ j0.025 & 0.01 - j0.0375 & j0.0125 \\ -j0.0025 & j0.0125 & 0.02 - j0.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \angle 15^\circ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gornja matrica može se napisati kao:

$$[Y][V] = [I].$$

iz koje se računa vektor $[V]$ koristeći Matlab-ovu naredbu:

$$V = \text{inv}(Y) * I$$

gdje je $\text{inv}(Y)$ inverzna matrica od matrice $[Y]$.

Matlab skripta koja rješava ovaj problem je:

```
% Ovaj program izracunava napon cvorista v3
% Y je admitancijska matrica
% I je matrica struje
% V je vektor napona
Y = [0.05-0.0225*j 0.025*j -0.0025*j;
0.025*j 0.01-0.0375*j 0.0125*j;
-0.0025*j 0.0125*j 0.02-0.01*j];
c1 = 0.4*exp(pi*15*j/180);
I = [c1
0
0]; % vektor struje unesen kao stupcasti vektor
V = inv(Y)*I; % rjesava cvorisne napone
v3_abs = abs(V(3));
v3_ang = angle(V(3))*180/pi;
fprintf('Napon V3, iznos: %f \nNapon V3, kut u
stupnjevima:%f', v3_abs, v3_ang)
```

a s njenim pozivom dobije se:

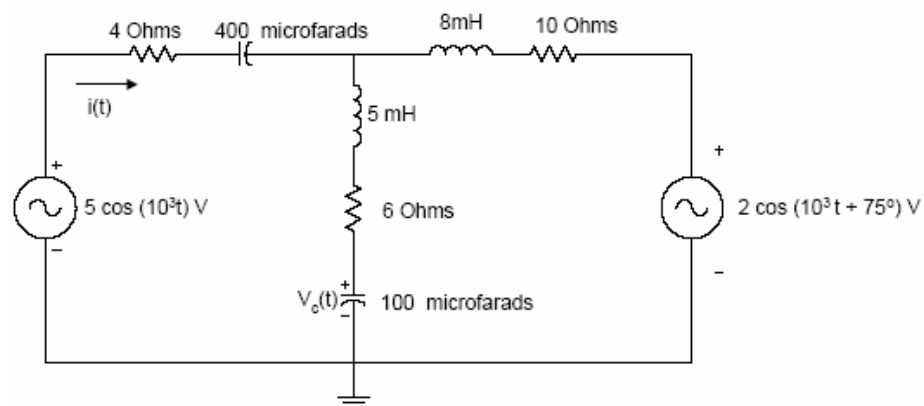
```
>> pr3_2
Napon V3, iznos: 1.850409
Napon V3, kut u stupnjevima:-72.453299
```

To znači da je u vremenskoj domeni napon $v_3(t)$ jednak:

$$v_3(t) = 1.85 \cos(10t - 72.45^\circ) \text{ V}$$

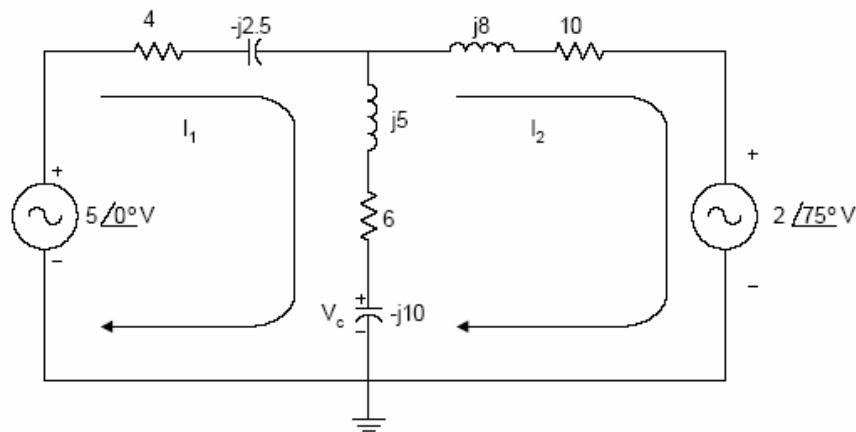
Primjer 3.3

Za strujni krug s dva izvora prikazan slikom treba naći struju $i_I(t)$ i napon $v_c(t)$.



Rješenje

Strujni krug se transformira u frekvencijsku domenu. Rezultirajući krug prikazan je donjom slikom s impedancijom izraženoj u Ω -ima.



Upotrebom analize petlji dobije se:

$$-5\angle 0^\circ + (4 - j2.5)I_1 + (6 + j5 - j10)(I_1 - I_2) = 0$$

$$(10 + j8)I_2 + 2\angle 75^\circ + (6 + j5 - j10)(I_2 - I_1) = 0$$

što nakon pojednostavljenja izgleda ovako:

$$(10 - j7.5)I_1 - (6 - j5)I_2 = 5\angle 0^\circ$$

$$-(6 - j5)I_1 + (16 + j3)I_2 = -2\angle 75^\circ$$

A u matričnom obliku, ovako:

$$\begin{bmatrix} 10 - j7.5 & -6 + j5 \\ -6 + j5 & 16 + j3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\angle 0^\circ \\ -2\angle 75^\circ \end{bmatrix}$$

Gornja matrična jednačba može se napisati kao:

$$[Z][I] = [V].$$

Da bi se dobio vektor struje $[I]$ potrebno je koristiti Matlab-ovu naredbu:

$$I = \text{inv}(Z) * V$$

gdje je $\text{inv}(Z)$ inverz od matrice $[Z]$.

Napon V_C može se dobiti kao:

$$V_C = (-j10)(I_1 - I_2)$$

Matlab program za računanje I_l i V_c je sljedeći:

```
% Ovaj program računa fazorsku struju I1 i
% fazorski napon Vc.
% Z je matrica impedancije
% V je vektor napona
% I je vektor struje
Z = [10-7.5*j -6+5*j;
-6+5*j 16+3*j];
b = -2*exp(j*pi*75/180);
V = [5
b]; % vektor napona u stupcastom obliku
I = inv(Z)*V; % rjesenje strujne petlje
i1 = I(1);
i2 = I(2);
Vc = -10*j*(i1 - i2);
i1_abs = abs(I(1));
i1_ang = angle(I(1))*180/pi;
Vc_abs = abs(Vc);
Vc_ang = angle(Vc)*180/pi;
%results are printed
fprintf('Fazor struje i1, iznosa: %f \nFazor struje i1, kut u
stupnjevima: %f \n', i1_abs,i1_ang)
fprintf('Fazor napona Vc, iznosa: %f \nFazor napona Vc, kut u
stupnjevima: %f \n',Vc_abs,Vc_ang)
```

Pozivom programa dobiva se rješenje:

```
>> pr3_3
Fazor struje i1, iznosa: 0.387710
Fazor struje i1, kut u stupnjevima: 15.019255
Fazor napona Vc, iznosa: 4.218263
Fazor napona Vc, kut u stupnjevima: -40.861691
```

To znači da je struja $i_1(t)$ jednaka:

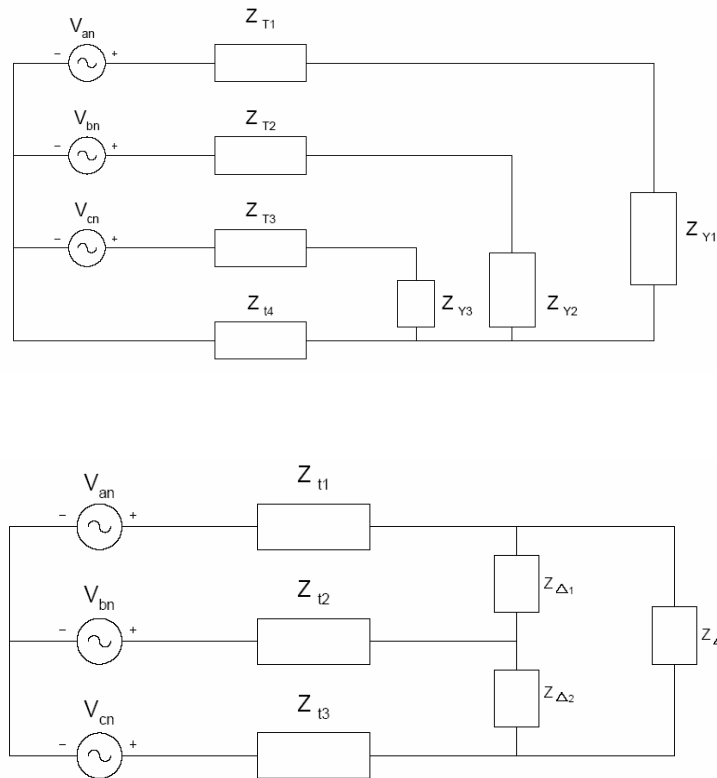
$$i_1(t) = 0.388 \cos(10^3 t + 15.02^\circ) \text{ A}$$

a napon $v_c(t)$:

$$v_c(t) = 4.21 \cos(10^3 t - 40.86^\circ) \text{ V}$$

3.3. Trofazni sustav

Elektroprivredne tvrtke koriste trofazne krugove za generiranje, prijenos i razdiobu velikih količina električne snage. Osnovna struktura trofaznog sustava sastoji se od trofaznog naponskog izvora spojenog na trofazno trošilo preko transformatora i prijenosnih linija. Trofazni naponski izvor može biti spojen u zvijezdu ili trokut (Y ili Δ). Također, trofazno trošilo može spojeno u Y ili Δ . Donje slike prikazuje 3-fazni sustav s izvorom u Y spoju i trošilom u Y spoju, te izvorom u Y spoju i trošilom u Δ spoju.



Za uravnoteženi trofazni abc sustav, naponi V_{an} , V_{bn} i V_{cn} (prema referentnom zvjezdištu N) imaju isti iznos, a pomaknuti su u fazama za 120° . To se može zapisati kao:

$$\begin{aligned} V_{an} &= V_P \angle 0^\circ \\ V_{bn} &= V_P \angle -120^\circ \\ V_{cn} &= V_P \angle 120^\circ \end{aligned}$$

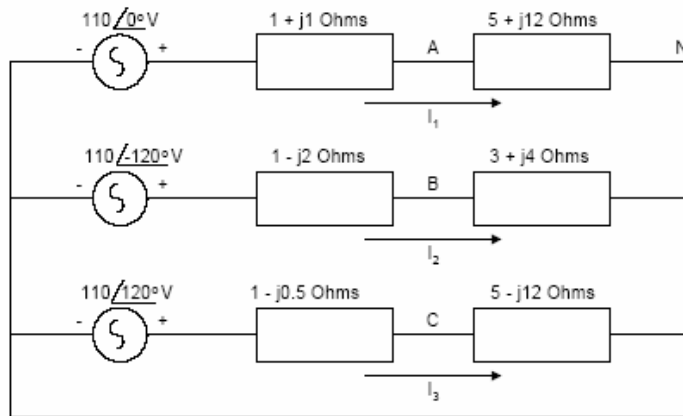
Y -spojeno i Δ -spojeno trošilo je uravnoteženo ako vrijedi:

$$Z_{Y1} = Z_{Y2} = Z_{Y3} \quad \text{odnosno} \quad Z_{\Delta1} = Z_{\Delta2} = Z_{\Delta3}$$

Analiza uravnoteženog trofaznog sustava može se lako izvesti pretvorbom trofaznog sustava u ekvivalentni jednofazni sustav na kojem se izvedu dosad poznate analize. Neuravnoteženi sustav također se rješava upotrebom KZ i dosad korištenih tehnika. Nepoznate napone i struje, također možemo programski riješiti u Matlabu.

Primjer 3.4

Za uravnoteženi Y-Y trofazni sustav prikazan shemom treba naći fazne napone V_{AN} , V_{BN} , i V_{CN} .



Rješenje

Koristeći KZ mogu se riješiti struje I_1 , I_2 i I_3 sa slike:

$$110\angle 0^\circ = (1 + j1)I_1 + (5 + j12)I_1$$

$$110\angle -120^\circ = (1 - j2)I_2 + (3 + j4)I_2$$

$$110\angle 120^\circ = (1 - j0.5)I_3 + (5 - j12)I_3$$

Pojednostavljenjem jednadžbi dobije se:

$$110\angle 0^\circ = (6 + j13)I_1$$

$$110\angle -120^\circ = (4 + j2)I_2$$

$$110\angle 120^\circ = (6 - j12.5)I_3$$

što izraženo u matričnom obliku izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} 6 + j13 & 0 & 0 \\ 0 & 4 + j2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 - j12.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110\angle 0^\circ \\ 110\angle -120^\circ \\ 110\angle 120^\circ \end{bmatrix}$$

Gornja matrica može se napisati kao:

$$[Z][I] = [V]$$

i riješiti uz pomoć Matlab naredbe:

$$I = \text{inv}(Z) * V$$

Fazni naponi na teretu mogu se izračunati kao:

$$V_{AN} = (5 + j12)I_1$$

$$V_{BN} = (3 + j4)I_2$$

$$V_{CN} = (5 - j12)(I_3)$$

Matlab program kojim se određuju fazni naponi za ovaj krug je sljedeći:

```
% Ovaj program izracunava fazorski napon
% neuravnotezenog trofaznog sustava
% Z je impedancijska matrica
% V je vektor napona
% I je vektor struje
Z = [6-13*j 0 0;
0 4+2*j 0;
0 0 6-12.5*j];
c2 = 110*exp(j*pi*(-120/180));
c3 = 110*exp(j*pi*(120/180));
V = [110; c2; c3]; % vektor napona
I = inv(Z)*V; % rijesiti metodom petlji
% izracunati fazne napone
%
Van = (5+12*j)*I(1);
Vbn = (3+4*j)*I(2);
Vcn = (5-12*j)*I(3);
Van_abs = abs(Van);
Van_ang = angle(Van)*180/pi;
Vbn_abs = abs(Vbn);
Vbn_ang = angle(Vbn)*180/pi;
Vcn_abs = abs(Vcn);
Vcn_ang = angle(Vcn)*180/pi;
% print out results
fprintf('Fazorski napon Van, iznos: %f \nFazorski napon Van,
kut u stupnjevima: %f \n', Van_abs, Van_ang)
fprintf('Fazorski napon Vbn, iznos: %f \nFazorski napon Vbn,
kut u stupnjevima: %f \n', Vbn_abs, Vbn_ang)
fprintf('Fazorski napon Vcn, iznos: %f \nFazorski napon Vcn,
kut u stupnjevima: %f \n', Vcn_abs, Vcn_ang)
```

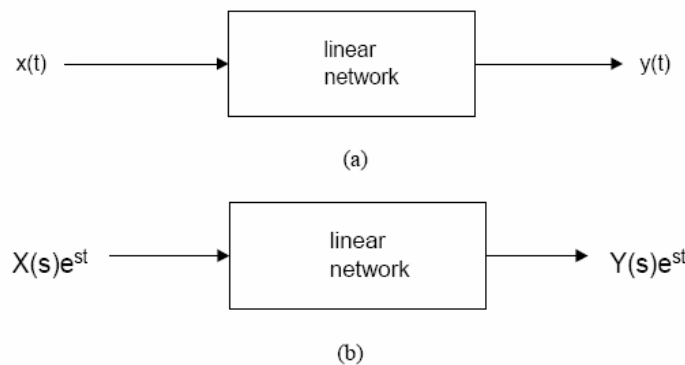
Njegovim pozivom dobije se rješenje:

```
>> pr3_4
```

Fazorski napon Van, iznos: 99.875532
 Fazorski napon Van, kut u stupnjevima: 132.604994
 Fazorski napon Vbn, iznos: 122.983739
 Fazorski napon Vbn, kut u stupnjevima: -93.434949
 Fazorski napon Vcn, iznos: 103.134238
 Fazorski napon Vcn, kut u stupnjevima: 116.978859

3.4. Mrežne karakteristike

Na slici je prikazana linearna mreža s ulazom $x(t)$ i izlazom $y(t)$. Također je prikazana njezina reprezentaciju u kompleksnom (frekvencijskom) području:



a) vremenska domena b) s-domena

Općenito, ulaz $x(t)$ i izlaz $y(t)$ opisani su diferencijalnom jednačinom:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

gdje su $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$ realne konstante.

Ako je $x(t) = X(s)e^{st}$, onda izlaz mora imati oblik $y(t) = Y(s)e^{st}$, gdje su $X(s)$ i $Y(s)$ fazorske reprezentacije od $x(t)$ i $y(t)$. Tako gornja jednačina u s-području postaje:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) e^{st} =$$

$$(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) X(s) e^{st}$$

iz čega slijedi mrežna funkcija:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Mrežna funkcija može se prikazati u faktoriziranom obliku:

$$H(s) = \frac{k(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

gdje su

- k je konstanta
- z_1, z_2, \dots, z_m su nule mrežne funkcije
- p_1, p_2, \dots, p_n su polovi mrežne funkcije.

Mrežna funkcija može se ekspanirati koristeći parcijalne razlomke:

$$H(s) = \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \dots + \frac{r_n}{s - p_n} + \sum_{n=0}^N k_n s^n$$

Ako su zadani koeficijenti polinoma brojnika i nazivnika mrežne funkcije, onda Matlab s pomoću *residue()* funkcije rješava vrijednosti od $r_1, r_2, \dots, r_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ i k_1, k_2, \dots, k_n . Opći oblik *residue()* funkcije je:

$$[r, p, k] = \text{residue}(\text{num}, \text{den})$$

gdje su:

- *num* - redčani vektor čije vrijednosti su koeficijenti polinoma brojnika u padajućem nizu
- *den* - redčani vektor čije vrijednosti su koeficijenti polinoma nazivnika u padajućem nizu
- *r* - je stupčasti povratni vektor
- *p* - (lokacije polova) je stupčasti povratni vektor
- *k* - (direktni član) je redčani povratni vektor

Naredba pak

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{residue}(r, p, k)$$

Vraća parcijalne razlomke natrag u polinomski oblik.

Na primjer za zadani,

$$H(s) = \frac{4s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 10s + 20}{s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 2s + 8}$$

uz pomoć Matlab programa:

```
num = [4 3 6 10 20];
den = [1 2 5 2 8];
[r, p, k] = residue(num, den)
```

dobit će se :

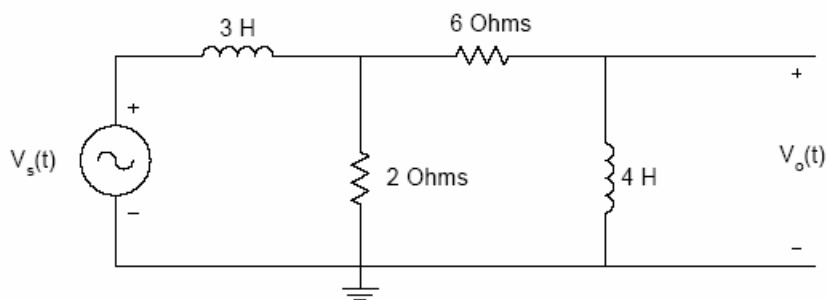
```
>> pr3_5
r =
-1.6970 + 3.0171i
-1.6970 - 3.0171i
-0.8030 - 0.9906i
-0.8030 + 0.9906i
p =
-1.2629 + 1.7284i
-1.2629 - 1.7284i
0.2629 + 1.2949i
0.2629 - 1.2949i
k =
4

te natrag:

>> [brojnik, nazivnik]=residue(r,p,k)
brojnik =
Columns 1 through 4
4.0000      3.0000 + 0.0000i      6.0000 + 0.0000i
10.0000 - 0.0000i
Column 5
20.0000
nazivnik =
1.0000      2.0000      5.0000      2.0000      8.0000
>>
```

Primjer 3.5

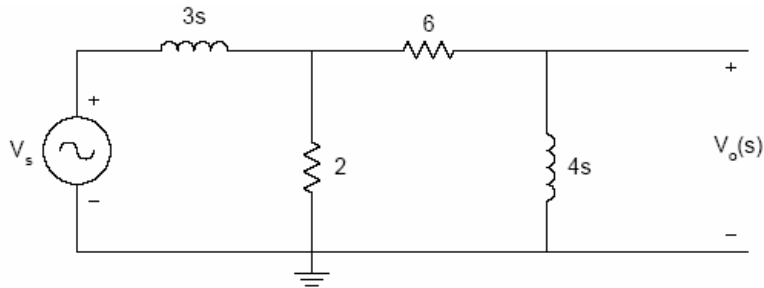
Za strujni krug na slici treba:



- Naći mrežnu funkciju $H(s)$
- Naći polove i nule od $H(s)$
- Ako je $v_s(t) = 10 e^{-3t} \cos(2t + 40^\circ)$ treba naći $v_o(t)$.

Rješenje

U s-domeni, gornja slika postaje:



Rješavanjem:

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{V_o(s)}{V_X(s)} \frac{V_X(s)}{V_s(s)} = \frac{4s}{(6+4s)} \frac{[2 \parallel (6+4s)]}{[(2 \parallel (6+4s)) + 3s]}$$

i pojednostavljenjem:

$$\frac{V_o(s)}{V_s(s)} = \frac{4s^2 + 6s}{6s^3 + 25s^2 + 30s + 9}$$

Iz zadanog $v(t)$ vidi se da je fazorski napon:

$$V_s = 10 \angle 40^\circ ; \quad s = -3 + j2$$

pa je $V_o(s)$:

$$V_o(s) = (10 \angle 40^\circ) H(s) \Big|_{s=-3+j2}$$

b) i c) se rješavaju s Matlab programom koji nalazi polove, nule i $v_o(t)$.

```
% Program za traženje polova i nula
num = [4 6 0];
den = [6 25 30 9];
disp('Nule su')
z = roots(num)
disp('polovi su')
p = roots(den)
% program za racunanje prijenosne funkcije i
% traženje izlaznog napona
s1 = -3+2*j;
n1 = polyval(num,s1);
d1 = polyval(den,s1);
v0 = 10.0*exp(j*pi*(40/180))*n1/d1;
v0_abs = abs(v0);
v0_ang = angle(v0)*180/pi;
```

```
% ispiši iznos i fazu izlaznog napona
fprintf('Fazorski napon v0, iznos: %f \nFazorski napon v0,
kut u stupnjevima: %f', v0_abs, v0_ang)
```

koji daje:

```
>> pr3_5b
Nule su
z =
     0
    -1.5000
polovi su
p =
    -2.2153
    -1.5000
    -0.4514
Fazorski napon v0, iznos: 3.453492
Fazorski napon v0, kut u stupnjevima: -66.990823
```

Iz rezultata, izlazni napon $v(t)$ može se prikazati kao:

$$v(t) = 3.45e^{-3t} \cos(2t - 66.99^\circ)$$

Primjer 3.6

Treba naći inverznu Laplaceovu transformaciju od

$$G(s) = \frac{10s^2 + 20s + 40}{s^3 + 12s^2 + 47s + 60}$$

Rješenje

```
% MATLAB se koristi za ekspanziju
% u parcijalne razlomke
%
num = [10 20 40];
den = [1 12 47 60];
% dobije se sljedeći rezultat
[r, p, k] = residue(num, den)
```

što daje:

```
>> pr3_6
r =
    95.0000
   -120.0000
    35.0000
```


$$\begin{aligned} p &= \\ &-5.0000 \\ &-4.0000 \\ &-3.0000 \\ k &= \\ &[] \end{aligned}$$

Iz rezultata se dobiva:

$$G(s) = \frac{95}{s+5} - \frac{120}{s+4} + \frac{35}{s+3}$$

te korištenjem LT tablice može se $g(t)$ zapisati kao:

$$g(t) = 35e^{-3t} - 120e^{-4t} + 95e^{-5t}$$

3.5. Frekvencijski odziv

Opći oblik prijenosne funkcije analognog strujnog kruga je:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

Moguće je realizirati analogne filtere drugog reda poznavajući njihovu prijenosnu funkciju:

- (i) za niskopropusni filter

$$H_{LP}(s) = \frac{k_1}{s^2 + Bs + \omega_0^2}$$

- (ii) za visokopropusni filter

$$H_{HP}(s) = \frac{k_2s^2}{s^2 + Bs + \omega_0^2}$$

- (iii) za pojasno-propusni filter

$$H_{BP}(s) = \frac{k_3s}{s^2 + Bs + \omega_0^2}$$

(iv) za pojasno-nepropusni filter

$$H_{BR}(s) = \frac{k_4 s^2 + k_5}{s^2 + Bs + \omega_0^2}$$

gdje su k_1, k_2, k_3, k_4, B i ω_0 konstante.

Frekvencijski odziv je odziv mreže na ulazni sinusni signal. Ako se u općoj mrežnoj funkciji $H(s)$ zamijeni s sa $j\omega$, dobije se:

$$H(s) \Big|_{s=j\omega} = M(\omega) \angle \theta(\omega)$$

gdje su

$$M(\omega) = |H(j\omega)| \quad \text{i} \quad \theta(\omega) = \angle H(j\omega)$$

Amplitudna karakteristika ili *amplitudni odziv* je graf $M(\omega)$ u odnosu na ω . Slično, *fazni odziv* je graf $\theta(\omega)$ u odnosu na ω . Amplitudna i fazna karakteristika mogu se dobiti upotrebom Matlab-ove funkcije *freqs()*, s općim oblikom

$$hs = \text{freqs}(num, den, range)$$

gdje su

- $num = [b_m \ b_{m-1} \ \dots \ b_1 \ b_0]$
- $den = [a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_1 \ a_0]$
- $range$ je frekvencijski opseg
- hs je frekvencijski odziv (u kompleksnom obliku)

Neka se pretpostavi da se želi nacrtati frekvencijski odziv za prijenosnu funkciju zadanu sa:

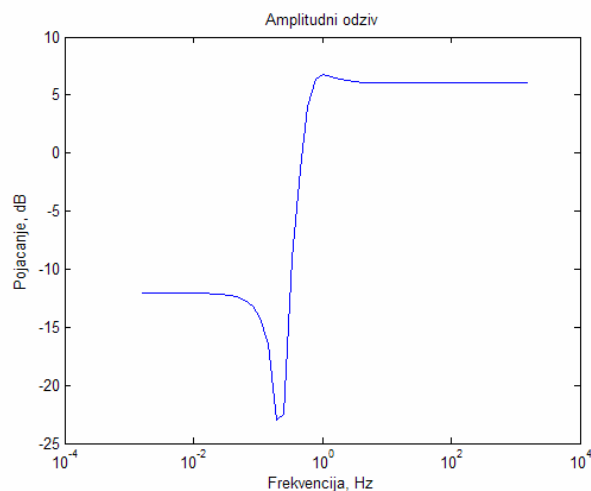
$$H(s) = \frac{2s^2 + 4}{s^2 + 4s + 16}$$

Rješenje

Pozivom Matlab programa:

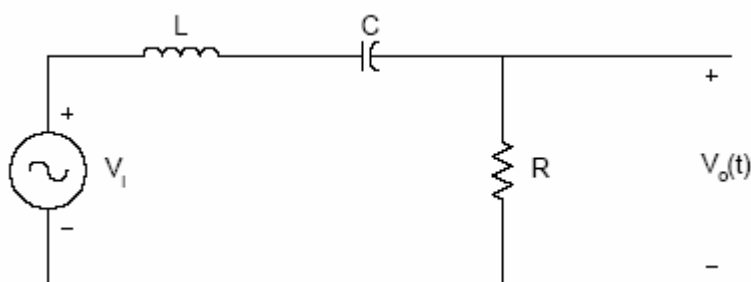
```
num = [2 0 4];
den = [1 4 16];
w = logspace(-2, 4);
h = freqs(num, den, w);
f = w/(2*pi);
mag = 20*log10(abs(h));
semilogx(f, mag)
title('Amplitudni odziv')
xlabel('Frekvencija, Hz')
ylabel('Pojacanje, dB')
```

dobije se:



Primjer 3.7

Za RLC strujni krug zadan slikom:



a) pokazati da je prijenosna funkcija

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s \frac{R}{L}}{s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

- b) Za $L=5 \text{ H}$, $C=1.12 \mu\text{F}$ i $R=10000 \Omega$ treba nacrtati frekvencijski odziv.
 c) Što se dogodi ako se R smanji na $R=100 \Omega$, a C i L ostanu nepromijenjeni?

Rješenje

a) U frekvencijskoj domeni prijenosna funkcija se dobije kao:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{sCR}{s^2 LC + sCR + 1}$$

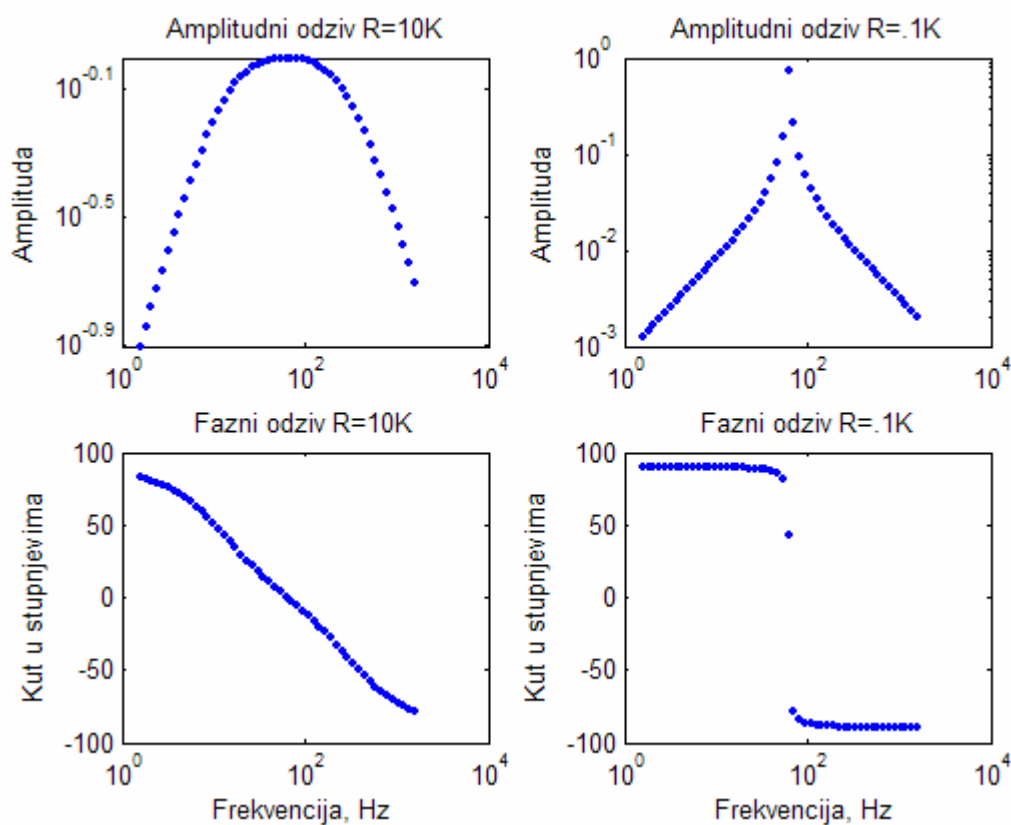
što daje:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s \frac{R}{L}}{s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

Odgovori za b) i c) dobiju se upotrebom Matlab programa:

```
% Frekvencijski odziv za RLC filter
%
l = 5;
c = 1.25e-6;
r1 = 10000;
r2 = 100;
num1 = [r1/l 0];
den1 = [1 r1/l 1/(l*c)];
w = logspace(1,4);
h1 = freqs(num1,den1,w);
f = w/(2*pi);
mag1 = abs(h1);
phase1 = angle(h1)*180/pi;
num2 = [r2/l 0];
den2 = [1 r2/l 1/(l*c)];
h2 = freqs(num2,den2,w);
mag2 = abs(h2);
phase2 = angle(h2)*180/pi;
% Crtanje odziva
subplot(221), loglog(f, mag1, '.')
title('Amplitudni odziv R=10K')
ylabel('Amplituda')
subplot(222), loglog(f, mag2, '.')
title('Amplitudni odziv R=.1K')
ylabel('Amplituda')
subplot(223), semilogx(f, phase1, '.')
title('Fazni odziv R=10K'), ...
xlabel('Frekvencija, Hz'), ylabel('Kut u stupnjevima')
subplot(224), semilogx(f, phase2, '.')
title('Fazni odziv R=.1K'), ...
xlabel('Frekvencija, Hz'), ylabel('Kut u stupnjevima')
```

što daje:



Ako se otpor smanjuje sa $10,000\ \Omega$ na $100\ \Omega$, pojasni propust frekvencijskog odziva opada, a faktor kvalitete kruga raste.

3.6. Fourierova analiza

3.6.1. Fourier-ov niz

Ako je funkcija $g(t)$ periodična s periodom T_p , tj.

$$g(t) = g(t \pm T_p)$$

te ako u bilo kojem konačnom intervalu $g(t)$ postoji konačni broj diskontinuiteta i konačan broj minimuma i maksimuma (*Dirichlet-ov uvjet*), te vrijedi

$$\int_0^{T_p} g(t) dt < \infty$$

onda se $g(t)$ može izraziti nizom sinusoida (*trigonometrijskim Fourier-ovim nizom*):

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

gdje je

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

a *Fourier*-ovi koeficijenti a_n i b_n mogu se odrediti sljedećim jednadžbama:

$$a_n = \frac{2}{T_p} \int_{t_o}^{t_o+T_p} g(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T_p} \int_{t_o}^{t_o+T_p} g(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Član $a_0/2$ je istosmjerna (dc) komponenta niza i ona je srednja vrijednost funkcije $g(t)$ na zadanom periodu. Član $a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$ zove se n -ti harmonik. Prvi harmonik dobije se za $n=1$. On se obično zove *fundamentalni* (osnovni) harmonik s fundamentalnom frekvencijom ω_0 . Za $n=2$ imamo drugi harmonik i tako redom.

Osnovna jednadžba trigonometrijskog Fourier-ovog niza može se napisati kao:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \Theta_n)$$

gdje su:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \Theta_n = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Ukupna snaga sadržana u $g(t)$ dana je *Parseval*-ovom jednadžbom:

$$P = \frac{1}{T_p} \int_{t_o}^{t_o+T_p} g^2(t) dt = A_{dc}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}$$

gdje je:

$$A_{dc}^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2$$

Primjer 3.8

Koristeći ekspanziju u *Fourier*-ov niz, kvadratni valni oblik perioda 2 ms , amplitude 2 V od vrha do vrha (engl. *peak-to-peak*) i srednje vrijednosti jednake nuli, može se izraziti kao:

$$g(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin[(2n-1)2\pi f_0 t]$$

gdje je $f_0 = 500\text{ Hz}$.

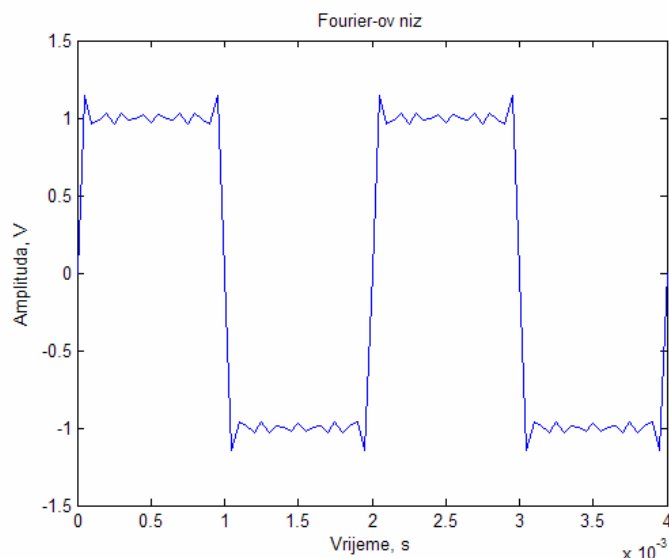
Ako je $a(t)$ dano sa:

$$a(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{12} \frac{1}{(2n-1)} \sin[(2n-1)2\pi f_0 t]$$

treba napisati Matlab program koji će nacrtati $a(t)$ od 0 do 4 ms na intervalima od 0.05 ms i pokazati da je $a(t)$ dobra aproksimacija od $g(t)$.

Rješenje

```
% Fourier-ov niz
f = 500; c = 4/pi; dt = 5.0e-05;
tpts = (4.0e-3/5.0e-5) + 1;
for n = 1: 12
    for m = 1: tpts
        s1(n,m) = (4/pi)*(1/(2*n - 1))*sin((2*n - 1)*2*pi*f*dt*(m-1));
    end
end
for m = 1:tpts
    a1 = s1(:,m);
    a2(m) = sum(a1);
end
f1 = a2';
t = 0.0:5.0e-5:4.0e-3;
plot(t,f1)
xlabel('Vrijeme, s')
ylabel('Amplituda, V')
title('Fourier-ov niz')
```



Koristeći *Euler-ovu* jednakost, sinusne i kosinusne funkcije u glavnoj jednažbi mogu se zamijeniti s eksponencijalnim ekvivalentom, što daje:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jm\omega_0 t)$$

gdje su:

$$c_n = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} g(t) \exp(-jm\omega_0 t) dt \quad \text{i} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_p}$$

Ova jednažba naziva se *razvitkom eksponencijalnog Fourier-ovog niza*. Koeficijent c_n povezan je s koeficijentima a_n i b_n preko izraza:

$$c_n = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \angle -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

a u odnosu na A_n i Φ_n kao:

$$c_n = \frac{A_n}{2} \angle \Theta_n$$

Crtanje $|c_n|$ u odnosu na frekvenciju zove se *diskretni amplitudni spektar* ili *linijski spektar*.

On daje informacije o amplitudnim spektralnim komponentama od $g(t)$. Sličan crtež od $\angle c_n$ u odnosu na frekvenciju zove se *diskretni fazni spektar* koji daje informaciju o faznim komponentama s obzirom na frekvenciju signala $g(t)$.

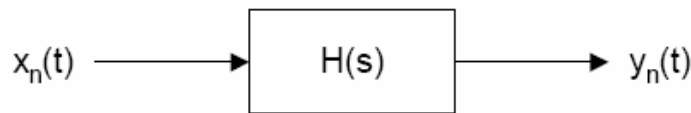
Ako ulazni signal $x_n(t)$

$$x_n(t) = c_n \exp(jm\omega_0 t)$$

prolazi kroz sustav s prijenosnom funkcijom $H(\omega)$, onda je izlaz sustav $y_n(t)$ jednak:

$$y_n(t) = H(jm\omega_0) c_n \exp(jm\omega_0 t)$$

Blok dijagram od ulazno/izlazne relacije dan je slikom:



Međutim, s ulazom $x(t)$ koji se sastoji od linearne kombinacije kompleksnih uzbuda,

$$x_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jm\omega_0 t)$$

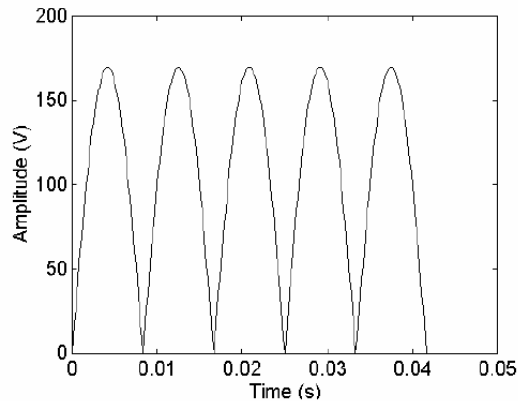
odziv sustava na izlazu je:

$$y_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(jm\omega_0) c_n \exp(jm\omega_0 t)$$

Primjer 3.9

Za punovalno ispravljeni napon prikazan slikom, period je 0.0333 s, a amplituda je 169.71 V.

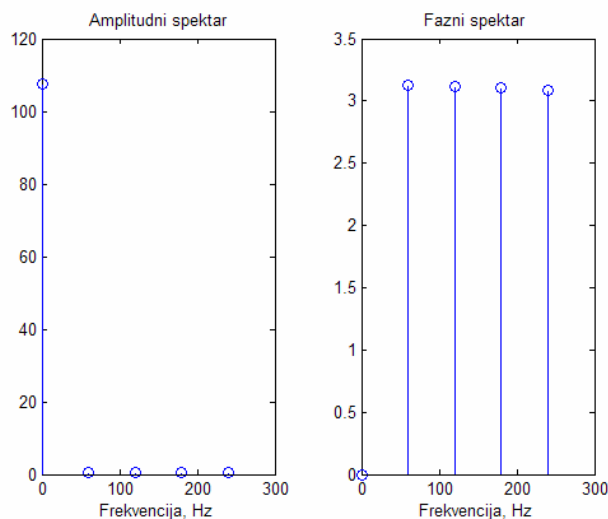
- Treba napisati Matlab program kojim će se dobiti koeficijenti eksponencijalnog Fourier-ovog niza c_n za $n = 0, 1, 2, \dots, 19$
- Naći istosmjernu (dc) vrijednost.
- Nacrtati amplitudni i fazni spektar.



```
% generirati punovalno ispravljeni valni oblik
f1 = 60;
inv = 1/f1; inc = 1/(80*f1); tnum = 3*inv;
t = 0:inc:tnum;
g1 = 120*sqrt(2)*sin(2*pi*f1*t);
g = abs(g1);
N = length(g);
%
% naci eksponencijalne koeficijente Fourier-ovog niza
num = 20;
for i = 1:num
    for m = 1:N
        cint(m) = exp(-j*2*pi*(i-1)*m/N)*g(m);
    end
    c(i) = sum(cint)/N;
end
cmag = abs(c);
cphase = angle(c);
%ispisati dc vrijednost
disp('dc vrijednost od g(t)'); cmag(1)
% nacrtati amplitudni i fazni spektar
f = (0:num-1)*60;
subplot(121), stem(f(1:5),cmag(1:5))
title('Amplitudni spektar')
xlabel('Frekvencija, Hz')
subplot(122), stem(f(1:5),cphase(1:5))
title('Fazni spektar ')
xlabel('Frekvencija, Hz')
```

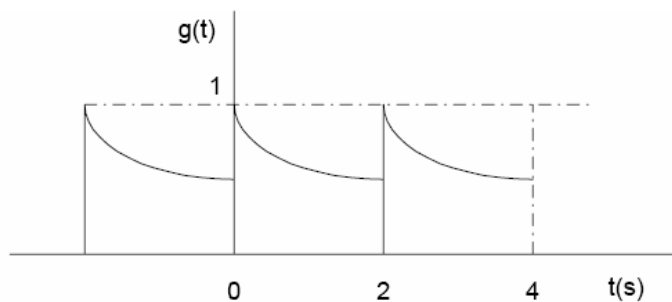
pa se pozivom dobije:

```
>> pr3_9
dc vrijednost od g(t)
ans =
    107.5344
```



Primjer 3.10

Periodički signal prikazan slikom



može se izraziti

sa:

$$g(t) = e^{-2t} \quad -1 \leq t < 1$$

$$g(t+2) = g(t)$$

- a) Treba pokazati da se signal može izraziti preko eksponencijalnog *Fourier*-ovog niza

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (e^2 - e^{-2})}{2(2 + jn\pi)} \exp(jn\pi t)$$

- b) Upotrebom Matlab programa sintetizirati $g(t)$ koristeći 20 članova niza, tj.

$$\hat{g}(t) = \sum_{n=-10}^{10} \frac{(-1)^n (e^2 - e^{-2})}{2(2 + jn\pi)} \exp(jn\pi t)$$

Rješenje

a)

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(jn\omega_o t)$$

gdje su:

$$c_n = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} g(t) \exp(-jn\omega_o t) dt \quad \omega_o = \frac{2\pi}{T_p} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

pa je:

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \exp(-2t) \exp(-jn\pi t) dt$$

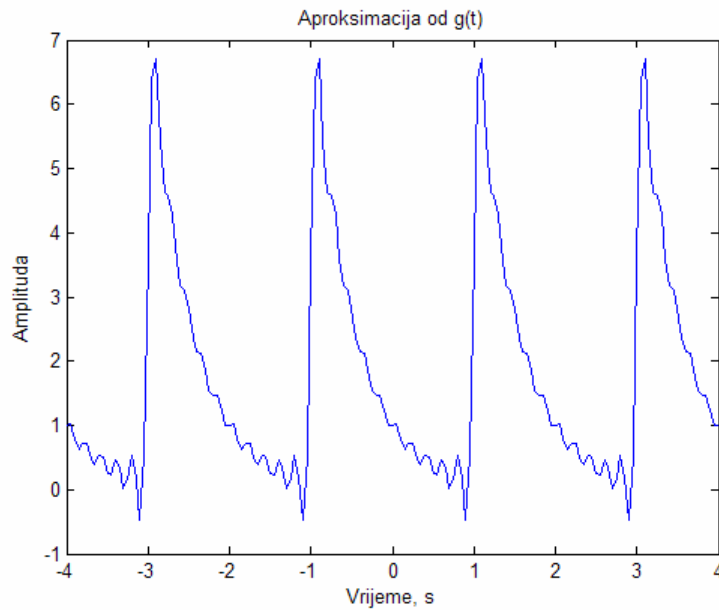
$$c_n = \frac{(-1)^n (e^2 - e^{-2})}{2(2 + jn\pi)}$$

odakle je:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (e^2 - e^{-2})}{2(2 + jn\pi)} \exp(jn\pi t)$$

b) Matlab skripta

```
% sinteza g(t) koristeći eksponencijalni razvoj Fourier-ovog
niza
dt = 0.05;
tpts = 8.0/dt +1;
cst = exp(2) - exp(-2);
for n = -10:10
    for m = 1:tpts
        g1(n+11,m) = ((0.5*cst*((1)^n))/(2+j*n*pi))...
            *(exp(j*n*pi*dt*(m-1)));
    end
end
for m = 1: tpts
    g2 = g1(:,m);
    g3(m) = sum(g2);
end
g = g3';
t = -4:0.05:4.0;
plot(t,g)
xlabel('Vrijeme, s')
ylabel('Amplituda')
title('Aproksimacija od g(t)')
```



3.6.2. Fourier-ova transformacija

Ako je $g(t)$ neperiodični deterministički signal izražen kao funkcija vremena t , onda je *Fourier-ova transformacija* od $g(t)$ dana integralnim izrazom:

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

gdje je

$$j = \sqrt{-1} \quad , \text{ a } f \text{ označuje frekvenciju.}$$

Obratno, $g(t)$ može se dobiti iz *Fourier-ove transformacije* $G(f)$ s pomoću *inverzne transformacijske formule*:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp(j2\pi ft) df$$

Da bi se signal $g(t)$ mogao transformirati, mora zadovoljavati već spomenute *Dirichlet-ove* uvjete. Ako je $g(t)$ kontinuiran i neperiodičan, onda će $G(f)$ biti kontinuirana i periodična. Međutim, ako je $g(t)$ kontinuiran i periodičan, onda će $G(f)$ biti diskretna i neperiodična.

To jest, ako je $g(t) = g(t \pm nT_p)$

gdje je T_p period signala, onda će *Fourier-ova transformacija* od $g(t)$ biti:

$$G(f) = \frac{1}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta\left(f - \frac{1}{T_p}\right)$$

gdje je:

$$c_n = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} g(t) \exp(-j2\pi n f_o t) dt$$

3.6.3. Svojstva Fourier-ove transformacije

Ako su $g(t)$ i $G(f)$ Fourier-ovi parovi, možemo ih izraziti kao:

$$g(t) \Leftrightarrow G(f)$$

i za Fourier-ovu transformaciju vrijede ova svojstva:

Linearnost

$$ag_1(t) + bg_2(t) \Leftrightarrow aG_1(f) + bG_2(f) \quad \text{a, b su konstante}$$

Vremensko umjeravanje (engl. **scaling**)

$$g(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} G\left(\frac{f}{a}\right)$$

Dualnost

$$G(t) \Leftrightarrow g(-f)$$

Vremenski pomak

$$g(t - t_0) \Leftrightarrow G(f) \exp(-j2\pi f t_0)$$

Frekvencijski pomak

$$\exp(j2\pi f_c t) g(t) \Leftrightarrow G(f - f_c)$$

Derivacija u vremenskoj domeni

$$\frac{dg(t)}{dt} \Leftrightarrow j2\pi f G(f)$$

Integracija u vremenskoj domeni

$$\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} G(f) + \frac{G(0)}{2} \delta(f) \delta(t)$$

Množenje u vremenskoj domeni

$$g_1(t) g_2(t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\lambda) G_2(f - \lambda) d\lambda$$

Konvolucija u vremenskoj domeni

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) g_2(t - \tau) d\tau \Leftrightarrow G_1(f) G_2(f)$$

3.6.4. Diskretna i brza Fourier-ova transformacija

Fourier-ov niz povezuje kontinuirani vremenski signal s diskretnom frekvencijskom domenom. Periodičnost signala u vremenskoj domeni daje diskretni spektar. Diskretna Fourier-ova transformacija od diskretnog vremenskog signala $g[n]$ dana je sa:

$$G[k] = \sum_{n=0}^{N-1} g[n] \exp(-j2\pi nk / N) \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Inverzna diskretna Fourier-ova transformacija $g[n]$ je

$$g[n] = \sum_{k=0}^{N-1} G[k] \exp(j2\pi nk / N) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

gdje su:

- N – broj vrijednosti vremenskog niza $g[n]$. To je ujedno i ukupan broj članova frekvencijskog niza u $G[k]$.
- T – vremenski interval između dva uzastopna uzorka ulaznog niza $g[n]$.
- F – frekvencijski interval između dva uzastopna uzorka izlaznog niza $G[k]$.

N , T i F su povezani relacijom:

$$NT = \frac{1}{F}$$

NT je također jednako dužini zapisa. Vremenski interval T između uzoraka, treba biti izabran tako da je zadovoljen Shannon-ovo teorem uzorkovanja. On govori da T mora biti manji od recipročne 2^*f_H , gdje je f_H najveća frekvencijska komponenta u kontinuiranom vremenskom

signalu $g(t)$ iz kojeg se uzorkuje $g[n]$. Nekoliko brzih DFT (*discrete Fourier transforms*) programa zahtijevaju da N bude cijeli broj koji je potencija broja 2 (npr. 512 ili 1024).

Diskretna vremenska funkcija ima periodičan spektar. U DFT, obje funkcije – vremenska i frekvencijska su periodične. Zbog periodičnosti u DFT, uobičajeno je promatrati točke od $n=1$ do $n=N/2$ kao pozitivne, a točke od $n=N/2$ do $n=N-1$ kao negativne frekvencije. Uz to, budući da su i vremenski i frekvencijski nizovi periodični, DFT vrijednosti u točkama od $n=N/2$ do $n=N-1$ su jednake DFT vrijednostima u točkama $n=N/2$ do $n=1$.

Općenito, ako je vremenski niz realan, onda će DFT imati realne komponente koje su parne, a imaginarne komponente koje su neparne. Slično, za vremenski niz s imaginarnim komponentama, DFT vrijednosti imat će neparne komponente realne, a imaginarne parne.

Ako se definira težinska funkcija W_N kao:

$$W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}} = e^{-j2\pi FN}$$

poznate jednadžbe mogu se predočiti kao

$$G[k] = \sum_{n=0}^{N-1} g[n] W_N^{kn} \quad \text{i} \quad g[n] = \sum_{k=0}^{N-1} G[k] W_N^{-kn}$$

Brza Fourier-ova transformacija (*FFT* – Fast Fourier Transform) je jedna djelotvorna metoda za računanje diskretne Fourier-ove transformacije. FFT smanjuje broj potrebnih izračunavanja za računanje DFT. Na primjer, ako je zadan niz sa N točaka, a N je cjelobrojna potencija od 2, onda DFT zahtijeva N^2 operacija dok FFT zahtijeva $N/2 \log_2(N)$ kompleksnih množenja, $N/2 \log_2(N)$ kompleksnih zbrajanja i $N/2 \log_2(N)$ oduzimanja. Za $N=1024$, smanjivanje računanja od DFT na FFT je veće nego 200 na 1.

FFT se koristi za određivanje spektra snage signala, digitalno filtriranje i izračunavanje korelacije između dva signala. Matlab ima *fft()* i *ifft()* funkcije za računanje brze Fourier-ove transformacije i njezine inverzne transformacije.

Primjer 3.11

Zadan je niz $x[n] = (1, 2, 1)$.

- Treba izračunati DFT od $x[n]$.
- Koristiti *fft* algoritam da se nađe DFT od $x[n]$.
- Usporediti rezultate a) i b).

Rješenje

Jednadžba za DFT je

$$G[k] = \sum_{n=0}^{N-1} g[n] W_N^{kn}$$

Prvo treba odrediti:

$$W_N = e^{\frac{-j2\pi}{N}} = e^{-j2\pi FT}$$

$$W_3^0 = 1$$

$$W_3^1 = e^{\frac{-j2\pi}{3}} = -0.5 - j0.866$$

$$W_3^2 = e^{\frac{-j4\pi}{3}} = -0.5 + j0.866$$

$$W_3^3 = W_3^0 = 1$$

$$W_3^4 = W_3^1$$

što daje:

$$G[0] = \sum_{n=0}^2 g[n]W_3^0 = 1 + 2 + 1 = 4$$

$$\begin{aligned} G[1] &= \sum_{n=0}^2 g[n]W_3^n = g[0]W_3^0 + g[1]W_3^1 + g[2]W_3^2 \\ &= 1 + 2(-0.5 - j0.866) + (-0.5 + j0.866) = -0.5 - j0.866 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G[2] &= \sum_{n=0}^2 g[n]W_3^{2n} = g[0]W_3^0 + g[1]W_3^2 + g[2]W_3^4 \\ &= 1 + 2(-0.5 + j0.866) + (-0.5 - j0.866) = -0.5 + j0.866 \end{aligned}$$

b) Matlab skripta za FFT je vrlo jednostavna:

```
>> x = [1 2 1];
>> xfft = fft(x)
```

```
xffft =
    4.0000    -0.5000 - 0.8660i    -0.5000 + 0.8660i
```

c) Vidi se da su rješenja dobivena DFT i FFT identična.

Primjer 3.12

Signal $g(t)$ zadan je s

$$g(t) = 4e^{-2t} \cos[2\pi(10)t]u(t)$$

- Treba naći *Fourier*-ovu transformaciju od $g(t)$, tj. $G(f)$.
- Treba naći DFT od $g(t)$ kad je interval uzorkovanja 0.05 s $N=1000$.

- c) Treba naći DFT od $g(t)$ kad je interval uzorkovanja 0.2 s $N=250$.
d) Usporediti rezultate dobivene u a), b) i c).

Rješenje

- a) $g(t)$ se može izraziti kao:

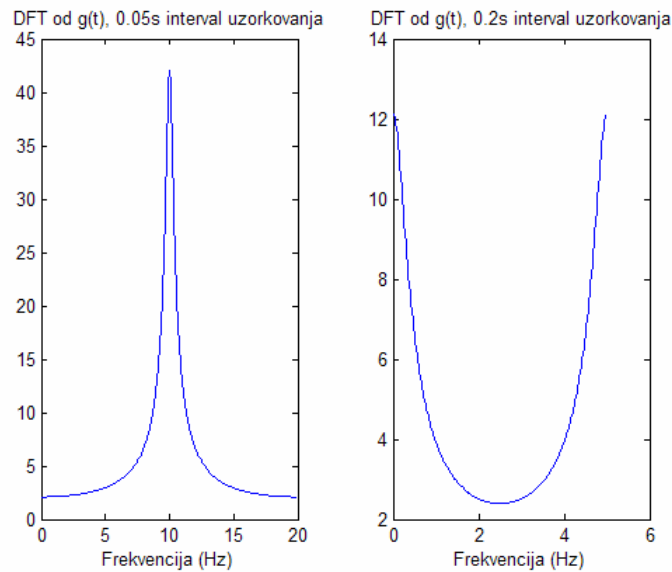
$$g(t) = 4e^{-2t} \left[\frac{1}{2} e^{j20\pi t} + \frac{1}{2} e^{-j20\pi t} \right] u(t)$$

Upotrebom svojstva frekvencijskog pomaka Fourier-ove transformacije, dobije se:

$$G(f) = \frac{2}{2 + j2\pi(f - 10)} + \frac{2}{2 + j2\pi(f + 10)}$$

- b) i c) dobivaju se Matlab-ovim programom za računanje DFT od $g(t)$:

```
% DFT od g(t)
% 1. uzorak: interval uzorkovanja 0.05 s
ts1 = 0.05; % interval uzorkovanja
fs1 = 1/ts1; % frekvencija uzorkovanja
n1 = 1000; % ukupno uzoraka
m1 = 1:n1; % Broj snopova
sint1 = ts1*(m1 - 1); % uzorovane instance
freq1 = (m1 - 1)*fs1/n1; % frekvencije
gb = (4*exp(-2*sint1)).*cos(2*pi*10*sint1);
gb_abs = abs(fft(gb));
subplot(121)
plot(freq1, gb_abs)
title('DFT od g(t), 0.05s interval uzorkovanja')
xlabel('Frekvencija (Hz)')
% Sample 2, interval uzorkovanja od 0.2 s
ts2 = 0.2; % interval uzorkovanja
fs2 = 1/ts2; % frekvencija uzorkovanja
n2 = 250; % ukupno uzoraka
m2 = 1:n2; % Broj snopova
sint2 = ts2*(m2 - 1); % uzorovane instance
freq2 = (m2 - 1)*fs2/n2; % frekvencije
gc = (4*exp(-2*sint2)).*cos(2*pi*10*sint2);
gc_abs = abs(fft(gc));
subplot(122)
plot(freq2, gc_abs)
title('DFT od g(t), 0.2s interval uzorkovanja')
xlabel('Frekvencija (Hz)')
```



d) Iz slike se vidi da s intervalom od $0.05s$ ne postoji spektralno preklapanje (engl. *aliasing*) i spektar od $G[k]$ u dijelu b) je skoro isti kao od $G(f)$ iz a). S intervalom uzorkovanja od $0.2s$ (manje od Nyquist-ovog iznosa), postoji preklapanje i spektar od $G[k]$ je različit od onog od $G(f)$.

Primjer 3.13

Zadan je signal $g(t)$ sa šumom:

$$g(t) = \sin(2\pi f_1 t) + 0.5n(t)$$

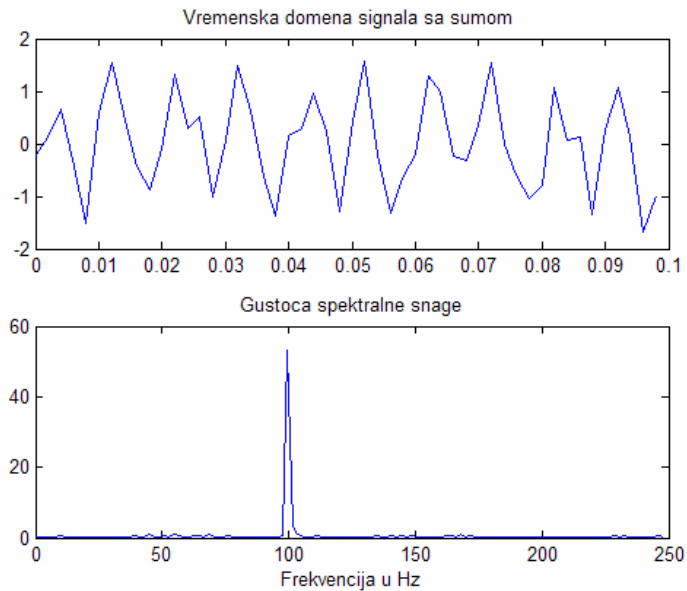
gdje je $f_1 = 100 \text{ Hz}$.

$n(t)$ je normalno raspodijeljen bijeli šum. Trajanje $g(t)$ signala je 0.5 s . Treba koristiti Matlab-ovu funkciju `rand()` za generiranje bijelog šuma. Treba načiniti Matlab program koji će dobiti spektralnu gustoću snage od $g(t)$.

Rješenje

```
% procjena spektra snage signala sa sumom
t = 0.0:0.002:0.5;
f1 = 100;
% generiranje sinusnog dijela signala
x = sin(2*pi*f1*t);
% generiranje normalno distribuiranog bijelog suma
n = 0.5*randn(size(t));
% generiranje signal sa sumom
y = x+n;
subplot(211), plot(t(1:50),y(1:50)),
title('Vremenska domena signala sa sumom ')
% procjena spektra snage
yfft = fft(y,256);
```

```
len = length(yfft);  
pyy = yfft.*conj(yfft)/len;  
f = (500./256)*(0:127);  
subplot(212), plot(f,pyy(1:128)),  
title('Gustoca spektralne snage'),  
xlabel('Frekvencija u Hz')
```

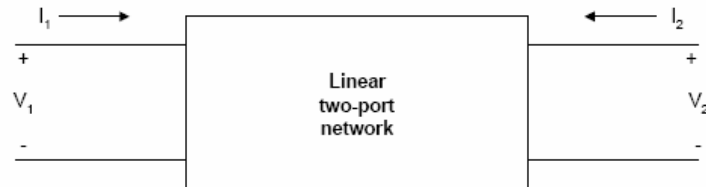


Naputak: mijenjati amplitude šuma i signala, te gledati njihov utjecaj na spektar.

4. ČETVEROPOLI

4.1 Četveropolna reprezentacija

Opća četveropolna mreža ili četveropol prikazana je slikom:



I_1 i V_1 su ulazna struja i napon, a I_2 i V_2 izlazna struja i napon. Pretpostavlja se da linearni četveropol ne sadrži nezavisne izvore i da je krug početno prazan (nema spremljenu energiju). Nadalje, upravljivi izvori unutar četveropola ne smiju ovisiti o varijablama koje su izvan kruga.

4.1.1. z-parametri

Četveropol se može opisati z-parametrima:

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

što predstavljeno u matričnom obliku izgledao ovako:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

z-parametri mogu se pronaći na ovaj način:

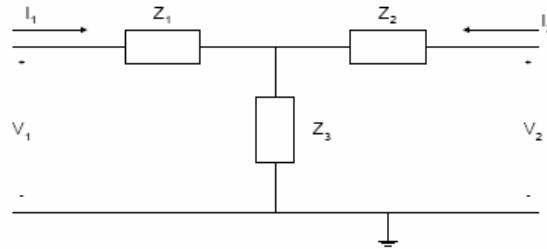
$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

z-parametri se također zovu *impedancijski parametri otvorenog kruga* jer se dobivaju kao odnos napona i struje uz otvoreni izlaz ($I_2=0$) ili ulaz ($I_1=0$).

Primjer 4.1

Za T-mrežu prikazanu slikom treba naći z-parametre:

**Rješenje**

Koristeći KZ2 dobivamo:

$$V_1 = Z_1 I_1 + Z_3 (I_1 + I_2) = (Z_1 + Z_3) I_1 + Z_3 I_2$$

$$V_2 = Z_2 I_2 + Z_3 (I_1 + I_2) = (Z_3) I_1 + (Z_2 + Z_3) I_2$$

što nakon sređivanja u matričnom obliku izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

pa su z-parametri jednaki:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$$

4.1.2. y-parametri

Četveropol se može također opisati y-parametrima:

$$I_1 = y_{11} V_1 + y_{12} V_2$$

$$I_2 = y_{21} V_1 + y_{22} V_2$$

gdje su V_1 i V_2 nezavisne varijable, a I_1 i I_2 zavisne varijable.

U matričnom obliku to izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

y-parametri mogu se pronaći na ovaj način:

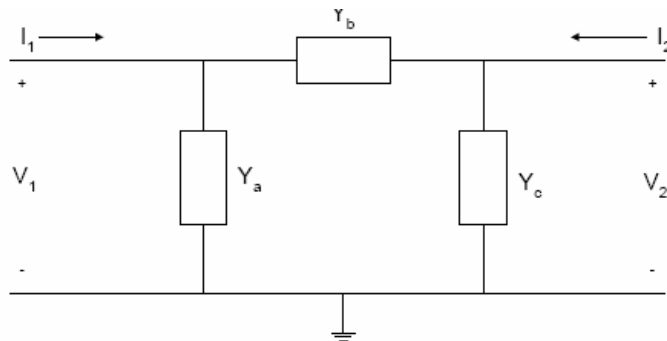
$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0}$$

y-parametri se također zovu *admitancijski parametri zatvorenog kruga* jer se dobivaju kao odnos struje i napona uz kratko spojeni izlaz ($V_2=0$) ili ulaz ($V_1=0$).

Primjer 4.2

Za Π -mrežu prikazanu slikom treba naći y-parametre:



Rješenje

Koristeći KZ1 dobivamo:

$$I_1 = V_1 Y_a + (V_1 - V_2) Y_b = V_1 (Y_a + Y_b) - V_2 Y_b$$

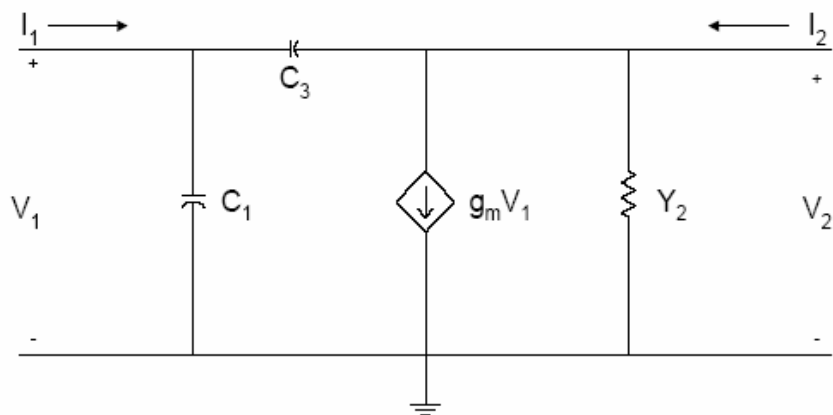
$$I_2 = V_2 Y_c + (V_2 - V_1) Y_b = -V_1 Y_b + V_2 (Y_b + Y_c)$$

što nakon sređivanja u matričnom obliku, y-parametri izgledaju ovako:

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_a + Y_b & -Y_b \\ -Y_b & Y_b + Y_c \end{bmatrix}$$

Primjer 4.3

Mreža na slici prikazuje pojednostavljeni model FET-a (Field Effect Transistor-a). Treba naći njegove y-parametre.



Koristeći KZ2 dobije se:

$$I_1 = V_1 s C_1 + (V_1 - V_2) s C_3 = V_1 (s C_1 + s C_3) + V_2 (-s C_3)$$

$$I_2 = V_2 Y_2 + g_m V_1 + (V_2 - V_1) s C_3 = V_1 (g_m - s C_3) + V_2 (Y_2 + s C_3)$$

Prema tomu, y-parametri pojednostavljenog FET-a su:

$$[Y] = \begin{bmatrix} s C_1 + s C_3 & -s C_3 \\ g_m - s C_3 & Y_2 + s C_3 \end{bmatrix}$$

4.1.3. h-parametri

Četveropol se može također opisati h-parametrima:

$$V_1 = h_{11} I_1 + h_{12} V_2$$

$$I_2 = h_{21} I_1 + h_{22} V_2$$

gdje su I_1 i V_2 nezavisne varijable, a V_1 i I_2 zavisne varijable.

U matričnom obliku to izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

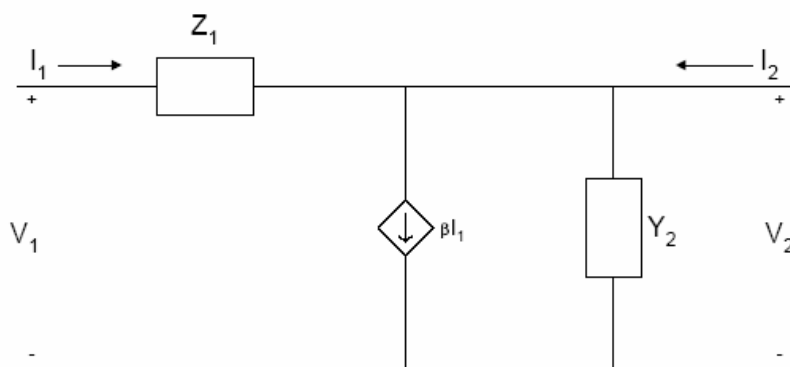
h-parametri mogu se pronaći na ovaj način:

$$\begin{aligned} h_{11} &= \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} & h_{12} &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} \\ h_{21} &= \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} & h_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} \end{aligned}$$

h-parametri se također zovu *hibridni parametri*, jer sadrže parametre za otvoreni ($I_1=0$) i zatvoreni ($V_2=0$) krug.

Primjer 4.4

Mreža na slici prikazuje pojednostavljeni model bipolarnog tranzistora (bipolar junction transistor). Treba naći njegove h-parametre:



Koristeći KZ1 za ulaz dobije se:

$$V_1 = I_1 Z_1$$

a koristeći KZ2 za izlaz dobije se:

$$I_2 = \beta I_1 + Y_2 V_2$$

što daje h-parametre u matričnom obliku:

$$[h] = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ \beta & Y_2 \end{bmatrix}$$

4.1.4. a-parametri

Četveropol se može također opisati transmisijskim a-parametrima:

$$V_1 = a_{11}V_2 - a_{12}I_2$$

$$I_1 = a_{21}V_2 - a_{22}I_2$$

gdje su V_2 i I_2 nezavisne varijable, a V_1 i I_1 zavisne varijable.

U matričnom obliku to izgleda ovako:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

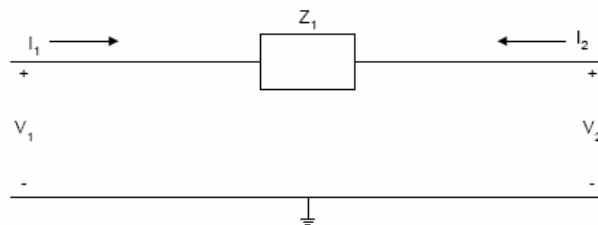
Transmisijski parametri mogu se pronaći na ovaj način:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} & a_{12} &= - \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \\ a_{21} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} & a_{22} &= - \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} \end{aligned}$$

Transmisijski parametri izražavaju primarne varijable (ulaza za slanje signala) V_1 i I_1 u odnosu na sekundarne varijable (izlaz za primanje signala) V_2 i $-I_2$. Negativni predznak struje I_2 koristi se kao oznaka da struje ulazi u trošilo na izlazu.

Primjer 4.5

Treba naći transmisijske parametre za strujni krug na slici:



Vidi se da je

$$I_1 = -I_2$$

A upotrebom KZ2 dobije se:

$$V_1 = V_2 + Z_1 I_1$$

No, kako je $I_1 = -I_2$ jednažba postaje:

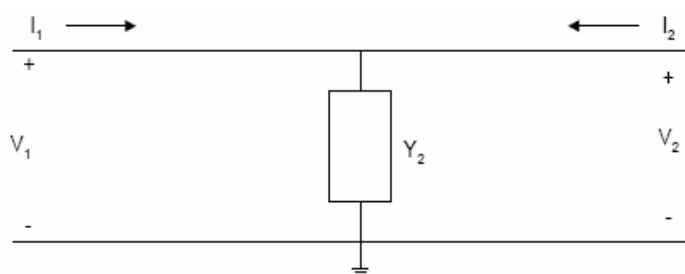
$$V_1 = V_2 - Z_1 I_2$$

pa se parametri usporedbom formula lako određuju:

$$\begin{array}{ll} a_{11} = 1 & a_{12} = Z_1 \\ a_{21} = 0 & a_{22} = 1 \end{array}$$

Primjer 4.6

Treba naći transmissijske parametre za strujni krug na slici:



Vidi se da je

$$V_1 = V_2$$

A upotrebom KZ1

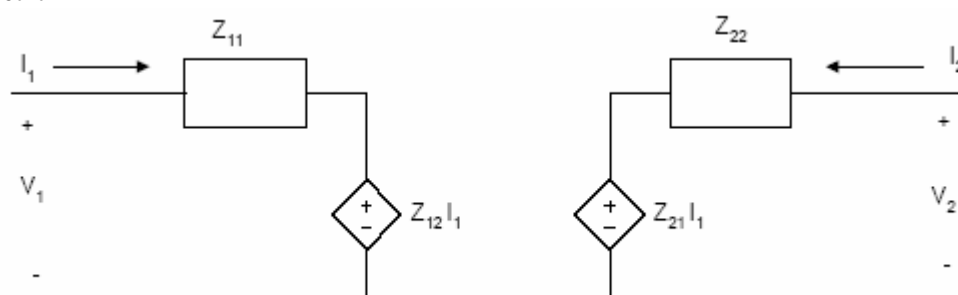
$$I_1 = V_2 Y_2 - I_2$$

Uspoređujući jednažbe dobije se:

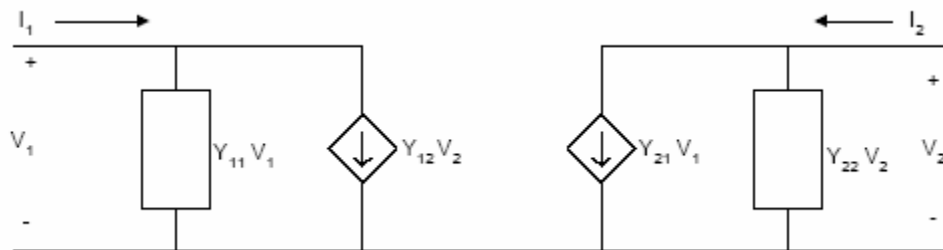
$$\begin{array}{ll} a_{11} = 1 & a_{12} = 0 \\ a_{21} = Y_2 & a_{22} = 1 \end{array}$$

Konačno, s obzirom da se ista mreža prikazuje različitim parametrima, moguće je nacrtati ekvivalente krugove prikazane odgovarajućim parametrima:

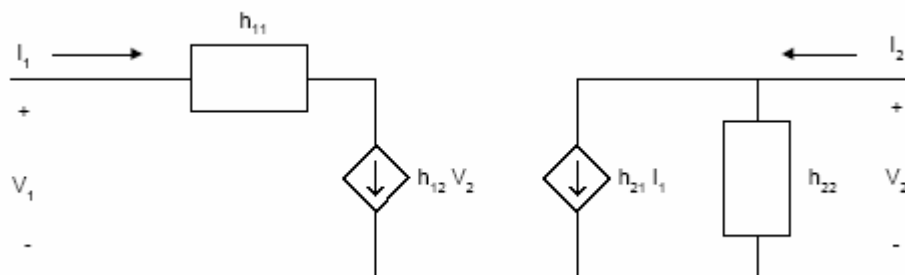
z-parametri



y-parametri



h-parametri



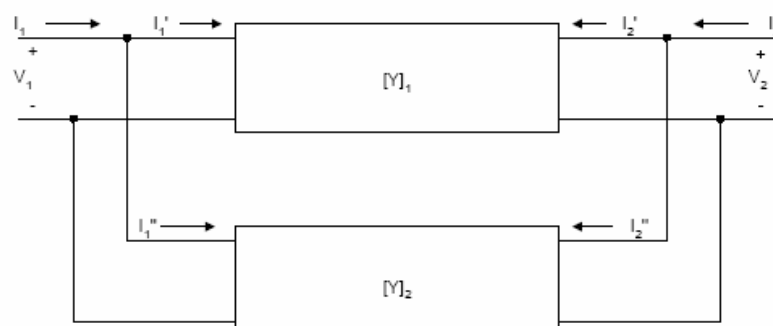
4.2 Povezivanje četveropola

Četveropoli se mogu povezivati u seriju, paralelu ili kaskadu.

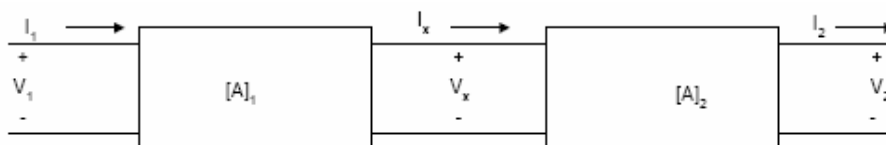
a) serijski spoj



b) paralelni spoj



c) kaskadni spoj



Može se pokazati da ako su četveropoli sa z-parametrima $[Z]_1, [Z]_2, [Z]_3, \dots, [Z]_n$, spojeni serijski, da će ekvivalentni četveropol imati z-parametre jednake zbroju pojedinačnih:

$$[Z]_{eq} = [Z]_1 + [Z]_2 + [Z]_3 + \dots + [Z]_n$$

Isto tako, ako su četveropoli s y-parametrima $[Y]_1, [Y]_2, [Y]_3, \dots, [Y]_n$ spojeni paralelno, njihov ekvivalentni spoj imat će y-parametre jednake zbroju pojedinačnih:

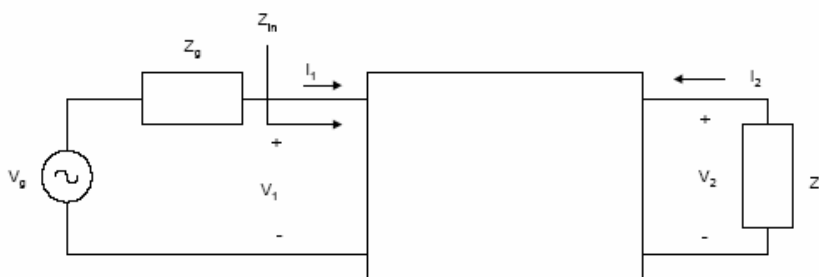
$$[Y]_{eq} = [Y]_1 + [Y]_2 + [Y]_3 + \dots + [Y]_n$$

Ako je nekoliko četveropola s transmisijskim parametrima $[A]_1, [A]_2, [A]_3, \dots, [A]_n$, spojeno u kaskadu, onda će njihov ekvivalentni spoj imati transmisijske parametre jednake umnošku pojedinačnih:

$$[A]_{eq} = [A]_1 * [A]_2 * [A]_3 * \dots * [A]_n$$

4.3 Zaključeni četveropoli

U normalnim primjenama, četveropoli su obično zaključeni, terminirani. Zaključeni četveropol prikazan je slikom:



Na slici je V_g naponski generator, Z_g impedancija generatora, a Z_L je induktivno trošilo kojim je načinjeno zaključenje četveropola. Ako se koristi z-model za ovaj četveropol, naponska prijenosna funkcija bit će:

$$\frac{V_2}{V_g} = \frac{z_{21}Z_L}{(z_{11} + Z_g)(z_{22} + Z_L) - z_{12}z_{21}}$$

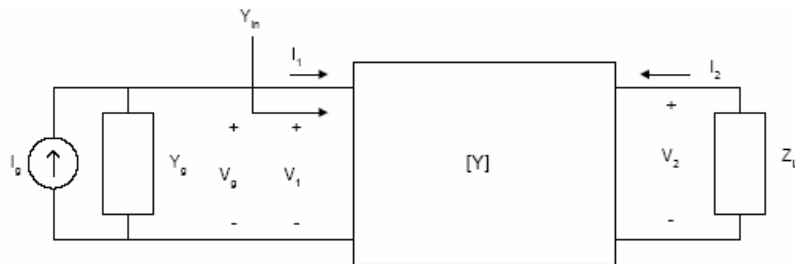
a ulazna impedancija

$$Z_{in} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_L}$$

Pritom je strujna prijenosna funkcija jednaka:

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{z_{21}}{z_{22} + Z_L}$$

Na isti način može se za četveropol predstavljen y-parametrima:



pokazati da vrijedi:

$$Y_{in} = y_{11} - \frac{y_{12}y_{21}}{y_{22} + Y_L} \quad \text{i} \quad \frac{I_2}{I_g} = \frac{y_{21}Y_L}{(y_{11} + Y_g)(y_{22} + Y_L) - y_{12}y_{21}}$$

Dok će naponska prijenosna funkcija biti:

$$\frac{V_2}{V_g} = -\frac{y_{21}}{y_{22} + Y_L}$$

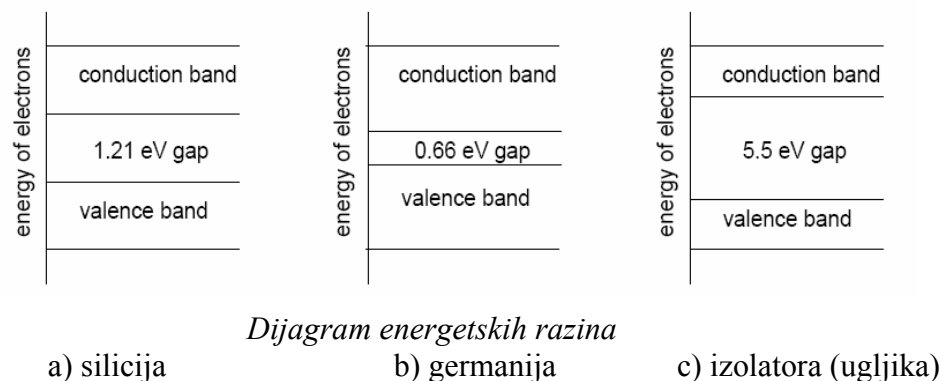
5. FIZIKA POLUVODIČA

5.1 Intrinzični poluvodiči

5.1.1. Energetski pojasevi

Prema planetarnom modelu izoliranog atoma, *jezgra* koja sadrži protone i neutrone čini glavninu mase atoma. *Elektroni* okružuju jezgru u posebnim orbitalama. Elektroni su negativno nabijene čestice, a jezgra je pozitivno nabijena. Ako elektron apsorbira energiju (u obliku fotona) onda se on premješta u orbitu, udaljeniju od jezgre kojoj pripada viša energetska razina. Prijelaz elektrona s više energetske orbite u nižu energetske orbitu emitira foton.

Energetske razine vanjskih elektrona pripadaju energetskim pojasevima. U izolatorima, niži energetski pojas (valentni pojas) je potpuno popunjen, a idući energetski pojas (vodljivi pojas) je potpuno prazan. Valentni i vodljivi pojas su odijeljeni zabranjenim energetskim procijepom (engl. *gap*).



U vodičima, valentni pojas djelomično prekriva vodljivi pojas, pa nema zabranjenog procijepa između valentnog i vodljivog pojasa. U poluvodičima je zabranjeni procijep manji od 1.5 eV. Među poluvodičima su silicij (Si), germanij (Ge) i galijev arsenid (GaAs).

5.1.2. Pokretni nositelji

Silicij je najpoznatiji poluvodički materijal koji se koristi u industriji integriranih krugova. Ima 4 valentna elektrona i njegovi atomi su povezani s kovalentom vezom. Na temperaturi apsolutne nule valentni pojas potpuno je ispunjen s elektronima, vodljivi pojas je prazan i struja nije moguća. Ako se temperatura silicijevog kristala povećava, povećava se vjerojatnost oslobađanja elektrona iz kovalentne veze. Oslobodena mjesta zovu se *šupljine* i njihov je broj jednak broju slobodnih elektrona. Proces stvaranja parova elektron-šupljina zove se *ionizacija*. Slobodni elektroni posjeduju energije iz vodljivog pojasa. Gustoća (koncentracija) nositelja (*slobodnih elektrona* ili *šupljina*) koji postoje u intrinzičnom poluvodičkom materijalu može se izračunati iz masa-akcija zakona:

$$n_i = AT^{1.5} e^{[-E_g/(kT)]}$$

gdje su:

- T – apsolutna temperatura u $^{\circ}\text{K}$
- k je Boltzmann-ova konstanta ($k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ ili $8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$)
- E_g je širina zabranjenog procijepa u eV. E_g je za Si jednak 1.21 na 0°K , a 1.1 eV na 300°K . Vrijedi formula $E_g = E_c - E_v$
- A je konstanta zavisna o zadanom materijalu i dana je sa

$$A = \frac{2}{h^3} (2\pi m_0 k)^{3/2} \left(\frac{m_n^*}{m_0} \frac{m_p^*}{m_0} \right)^{3/4}$$

gdje su:

- h Planck-ova konstanta ($h = 6.62 \times 10^{-34} \text{ Js}$ ili $4.14 \times 10^{-15} \text{ eV}$)
- m_0 je masa elektrona u mirovanju
- m_n^* je efektivna masa elektrona u materijalu
- m_p^* je efektivna masa šupljina u materijalu

Koncentracija pokretnih nositelja ovisi o omjeru energetskog procijepa E_g i toplinske energije kT . Za male vrijednosti T ($kT \ll E_g$), mala je koncentracija pokretnih nositelja n_i . Za silicij, ravnotežna intrinzična koncentracija na sobnoj temperaturi je

$$n_i = 1.52 \times 10^{10} \text{ elektrona / cm}^3 \text{ (tj. cm}^{-3}\text{)}$$

Elektroni imaju veću pokretljivost od šupljina, primjerice, za intrinzični silicij na 300°K elektroni imaju pokretljivost od $1350 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, a šupljine pokretljivost od $480 \text{ cm}^2/\text{Vs}$. Vodljivost intrinzičnog poluvodiča jednaka je:

$$\sigma_i = q(n_i \mu_n + p_i \mu_p)$$

gdje su:

- q – električni naboj ($1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)
- n_i – koncentracija elektrona
- p_i – koncentracija šupljina. Za intrinzični poluvodič vrijedi $p_i = n_i$.
- μ_n – pokretljivost elektrona u poluvodičkom materijalu
- μ_p – pokretljivost šupljina u poluvodičkom materijalu.

Budući da je pokretljivost elektrona u siliciju oko tri puta veća od pokretljivosti šupljina, struja elektrona je značajno veća od struje šupljina. Sljedeći primjer ilustrira ovisnost koncentracije elektrona o temperaturi.

Primjer 5.1

Neka su zadani $T = 300^{\circ}\text{K}$, koncentracija elektrona u siliciju $1.52 \times 10^{10} \text{ elektrona/cm}^3$ i $E_g = 1.1 \text{ eV}$ na 300°K .

a) naći konstantu A iz jednačbe $n_i = AT^{1.5} e^{[-E_g/(kT)]}$

b) Nacrtati s pomoću Matlab programa koncentraciju elektrona u odnosu na temperaturu.

Rješenje

Prema jednadžbi i zadanim veličinama vrijedi:

$$1.52 \times 10^{10} = A(300)^{1.5} e^{[-1.1/300 \cdot 8.62 \cdot 10^{-5}]}$$

što će se riješiti programom. Širina energetske procijepa u siliciju ovisi o temperaturi prema:

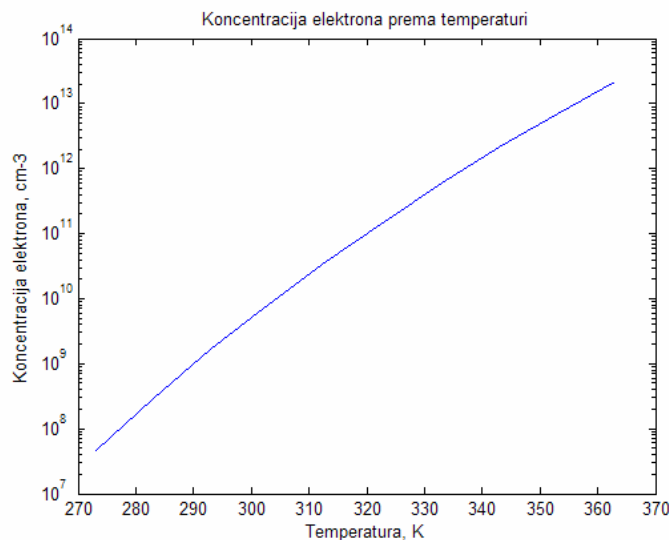
$$E_g(T) = 1.17 - 4.37 \times 10^{-4} \left(\frac{T^2}{T + 636} \right)$$

Upotrebom obiju formula može se izračunati koncentracija elektrona za različite temperature:

```
% Izracunavanje konstante A
k = 8.62e-5;
na = 1.52e10; ta = 300;
ega = 1.1;
ka = -ega/(k*ta);
t32a = ta.^1.5;
A = na/(t32a*exp(ka));
fprintf('Konstanta A je %10.5e \n', A)
% Koncentracija elektrona prema temperaturi
for i = 1:10
    t(i) = 273 + 10*(i-1);
    eg(i) = 1.17 - 4.37e-4*(t(i)*t(i))/(t(i) + 636);
    t32(i) = t(i).^1.5;
    ni(i) = A*t32(i)*exp(-eg(i)/(k*t(i)));
end
semilogy(t,ni)
title('Koncentracija elektrona prema temperaturi')
xlabel('Temperatura, K')
ylabel('Koncentracija elektrona, cm-3')
```

što daje:

```
>> pr5_1
Konstanta A je 8.70225e+024
```



5.2 Ekstrinzični poluvodiči

5.2.1. Koncentracije elektrona i šupljina

Ekstrinzični poluvodiči dobivaju se dodavanjem malog iznosa nečistoća u silicijev kristal. *N-tip* poluvodiča dobije se tako da se silicij onečisti (dopira) s elementima iz V. skupine periodičke tablice elemenata (antimon, arsenid, fosfor). Atomi nečistoće zovu se donori (darivatelji). Glavni nositelji su elektroni, a manjinski nositelji su šupljine. *P-tip* poluvodiča dobije se dopiranjem silicijevog kristala s elementima iz III. skupine periodičke tablice elemenata (aluminij, bor, galij, indij). Atomi nečistoće zovu se akceptor (primatelji). Glavni nositelji su šupljine, a manjinski nositelji su elektroni.

U poluvodičkom materijalu (intrinzičnom i ekstrinzičnom) vrijedi zakon o akciji mase koji glasi:

$$p n = \text{konstanta}$$

gdje su:

- p - koncentracija šupljina
- n – koncentracija elektrona

Za intrinzične poluvodiče vrijedi $p = n = n_i$
pa osnovna jednažba postaje:

$$pn = n_i^2$$

gdje je, kao što znamo,

$$n_i = AT^{1.5} e^{[-E_g/(kT)]}$$

Zakon akcije mase omogućuje izračunavanje gustoće većinskih i manjinskih nositelja u ekstrinzičnom poluvodičkom materijalu. Iz uvjeta nabojne neutralnosti poluvodiča slijedi:

$$p + N_D = n + N_A$$

gdje su:

- N_D – koncentracija donora (darivatelja)
- N_A – koncentracija akceptora (primatelja)
- p – koncentracija šupljina
- n – koncentracija elektrona

U *n-tipu* poluvodiča koncentracija donora veća je od koncentracije elektrona u intrinzičnoj koncentraciji, tj. N_D je tipično 10^{17} cm^{-3} i $n_i = 1.5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ za silicij na sobnoj temperaturi. Tako su većinske i manjinske koncentracije dane sa

$$n_n \cong N_D$$

$$p \cong \frac{n_i^2}{N_D}$$

U *p-tipu* poluvodiča koncentracija akceptora N_A veća je od koncentracije šupljina u intrinzičnoj koncentraciji, $p_i = n_i$. Tako su većinske i manjinske koncentracije dane sa

$$p_p \cong N_A$$

$$n \cong \frac{n_i^2}{N_A}$$

Primjer 5.2

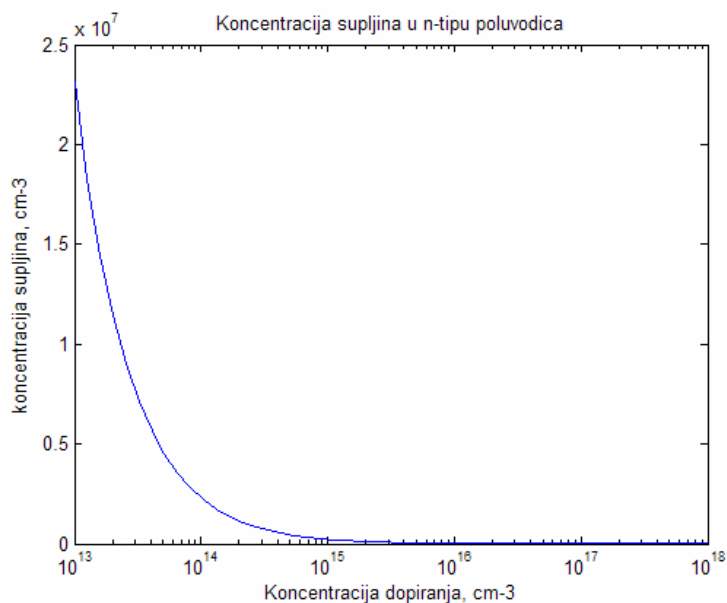
Treba odrediti manjinske nositelje u dopiranom poluvodiču za *n-tip* poluvodiča na 300⁰K, ako se koncentracija nečistoća mijenja od 10¹³ do 10¹⁸ atoma/cm³.

Rješenje

Iz gornje navedenih jednadžbi slijedi da je koncentracija elektrona $\approx N_D$ i koncentracija šupljina $= n_i^2/N_D$, gdje je $n_i = 1.52 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$.

Matlab program koji rješava problem je:

```
% koncentracija supljina u n-tipu poluvodica
nd = logspace(13,18);
n = nd;
ni = 1.52e10;
ni_sq = ni*ni;
p = ni_sq./nd;
semilogx(nd,p,'b')
title('Koncentracija supljina u n-tipu poluvodica')
xlabel('Koncentracija dopiranja, cm-3')
ylabel('koncentracija supljina, cm-3')
```



5.2.2. Fermijeve razine

Fermijeva razina E_F je iznos energetske razine električnog stanja na kojem elektron ima vjerojatnost 0.5 da zauzima to stanje. Dana je s:

$$E_F = \frac{1}{2}(E_C + E_V) - \frac{4}{3}KT \ln\left(\frac{m_n^*}{m_p^*}\right)$$

gdje su:

- E_C – energija vodljivog pojasa
- E_V – energija valentnog pojasa
uz već definirane k , T , m_n^* i m_p^*

U intrinzičnom poluvodiču (Si ili Ge) m_n^* i m_p^* su istog reda veličine i tipično je $E_F \gg kT$, pa se gornja jednačba pojednostavljuje u

$$E_F = E_i \cong \frac{1}{2}(E_C + E_V)$$

Ova jednačba pokazuje da se Fermijeva energija pojavljuje blizu središta energetskog procijepa u intrinzičnom poluvodiču. Nadalje, Fermijeva energija može se zamisliti kao srednja energija pokretnih nositelja u poluvodičkom materijalu.

U *n-tipu* poluvodiča postoji pomak Fermijeve razine prema rubu vodljivog pojasa. Pomak prema gore ovisan je koliko je dopirana elektronska gustoća premašila intrinzičnu vrijednost. Ukupna gustoća elektrona izražena s pomoću Fermijevih razina iznosi:

$$n = n_i e^{[(E_F - E_i)/kT]}$$

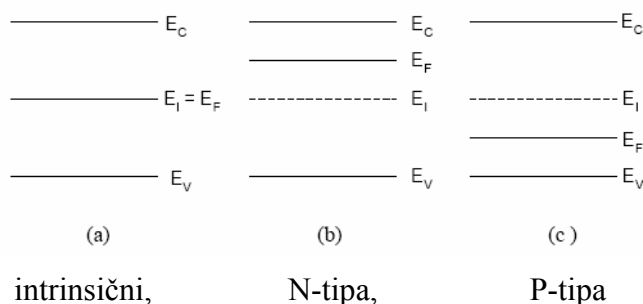
gdje su:

- n – ukupna gustoća elektronskih nositelja
- n_i – intrinzična gustoća elektronskih nositelja
- E_F – dopirana Fermijeva razina
- E_i – intrinzična Fermijeva razina

U slučaju *p-tipa* poluvodiča postoji pomak Fermijeve razine prema dolje. Ukupnja gustoća šupljina jednaka je:

$$p = n_i e^{[(E_i - E_F)/kT]}$$

Na slici su pokazani energetski pojasevi intrinzičnog i ekstrinzičnog poluvodiča:



5.2.3. Gustoća struje i pokretljivost

Na pokretljivost nositelja u poluvodičkom materijalu djeluju dva mehanizma: pomak (drift) i difuzija. Struja drifta uzrokovana je djelovanjem električnog polja, dok je difuzna struja uzrokovana kretanjem nositelja iz područja visoke koncentracije u područje niske koncentracije. Ukupna gustoća drift struje u ekstrinzičnom poluvodičkom materijalu je

$$J = q(n\mu_n + p\mu_p)E$$

gdje su:

- J – gustoća struje
- n – koncentracija elektrona
- p – koncentracija šupljina
- μ_n – pokretljivost elektrona
- μ_p – pokretljivost šupljina
- q – naboj elektrona
- E – električno polje

Ukupna vodljivost je:

$$\sigma = q(n\mu_n + p\mu_p)E$$

Zbog difuzije šupljina iz područja visoke koncentracije u područje niske koncentracije nastaje gustoća struje šupljina u x-smjeru:

$$J_p = -qD_p \frac{dp}{dx}$$

gdje su:

- q – naboj elektrona
- D_p – difuzijska konstanta šupljina
- p – koncentracija šupljina

Gornja jednačica također pretpostavlja iako koncentracija šupljina varira u smjeru x-osi, da je konstantna u smjeru y- i z-osi. Slično, gustoća elektronske struje J_n za difuziju elektrona je:

$$J_n = qD_n \frac{dn}{dx} \quad \text{A / cm}^2$$

gdje su:

- q – naboj elektrona
- D_n – difuzijska konstanta elektrona
- n – koncentracija elektrona

Za silicij vrijedi: $D_p = 13 \text{ cm}^2/\text{s}$ i $D_n = 200 \text{ cm}^2/\text{s}$. Difuzijska konstanta i konstanta pokretljivosti su u međusobnom odnosu, pod uvjetima stabilnog stanja, povezane s Einsteinovom relacijom:

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{D_p}{\mu_p} = \frac{kT}{q}$$

Primjer 5.3

Iz mjerenih podataka, empirijski odnos između pokretljivosti elektrona (μ_n) i šupljina (μ_p) s obzirom na dopiranu koncentraciju na 300°K dana je u literaturi i iznosi:

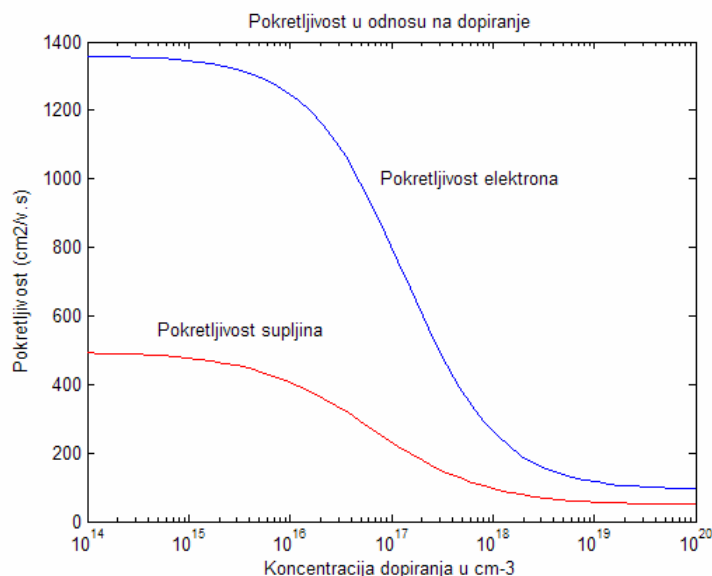
$$\mu_n(N_D) = \frac{5.1 \times 10^{18} + 92 N_D^{0.91}}{3.75 \times 10^{15} + N_D^{0.91}}$$

$$\mu_p(N_A) = \frac{2.9 \times 10^{15} + 47.7 N_A^{0.76}}{5.86 \times 10^{12} + N_A^{0.76}}$$

gdje su N_D i N_A donorske i akceptorske koncentracije u cm^{-3} . Treba nacrtati $\mu_n(N_D)$ i $\mu_p(N_A)$ za dopirane koncentracije od 10^{14} do 10^{20} cm^{-3} .

Rješenje

```
% nc - je koncentracija dopiranja
nc = logspace(14,20);
un = (5.1e18 + 92*nc.^0.91)./(3.75e15 + nc.^0.91);
up = (2.90e15 + 47.7*nc.^0.76)./(5.86e12 + nc.^0.76);
semilogx(nc,un,'w',nc,up,'w')
text(8.0e16,1000,'Pokretljivost elektrona')
text(5.0e14,560,'Pokretljivost supljina')
title('Pokretljivost u odnosu na dopiranje')
xlabel('Koncentracija dopiranja u cm-3')
ylabel('Pokretljivost (cm2/v.s)')
```



Primjer 5.4

Na temperaturi od 300⁰K otpornost silicija dopiranog fosforom može se računati prema:

$$\rho_n = \frac{3.75 \times 10^{15} + N_D^{0.91}}{1.47 \times 10^{-17} N_D^{1.91} + 8.15 \times 10^{-1} N_D}$$

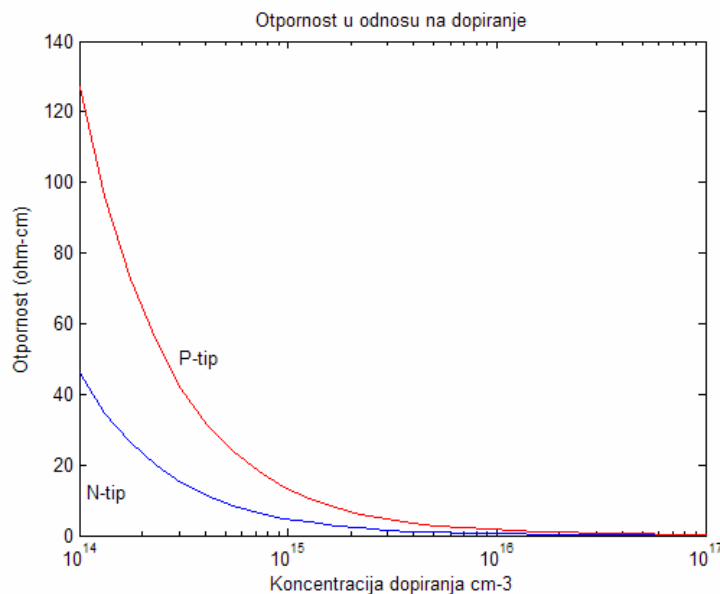
Slična je relacija za silicij dopiran s borom:

$$\rho_p = \frac{5.86 \times 10^{12} + N_A^{0.76}}{7.63 \times 10^{-18} N_A^{1.76} + 4.64 \times 10^{-4} N_A}$$

gdje su N_D i N_A donori i akceptori koncentracije po cm⁻³. Treba nacrtati otpornost prema dopirajućoj koncentraciji (u cm⁻³).

Rješenje

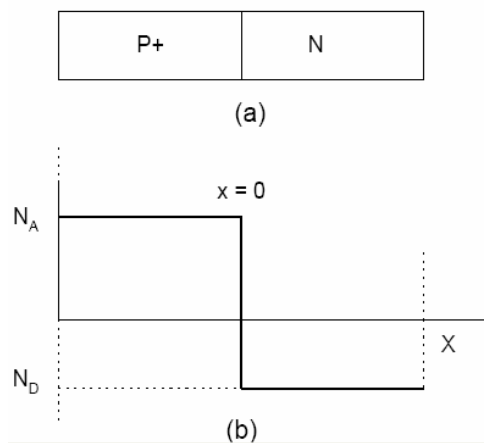
```
% nc je dopirajuca koncentracija
% rn - otpornost od n-tipa
% rp - otpornost od p-tipa
nc = logspace(14,20);
rn = (3.75e15 + nc.^0.91)./(1.47e-17*nc.^1.91 + 8.15e-1*nc);
rp = (5.86e12 + nc.^0.76)./(7.63e-18*nc.^1.76 + 4.64e-4*nc);
semilogx(nc,rn,'b',nc,rp,'r')
axis([1.0e14, 1.0e17,0,140])
title('Otpornost u odnosu na dopiranje')
ylabel('Otpornost (ohm-cm)')
xlabel('Koncentracija dopiranja cm-3')
text(1.1e14,12,'N-tip')
text(3.0e14,50,'P-tip')
```



5.3 PN-spoj: kontaktni potencijal, struja spoja

5.3.1. Kontaktni potencijal

Idealni *pn-spoj* dobije se kad se jednoliko dopirani *p-tip* materijala naglo promijeni u *n-tip* materijala, kako pokazuje slika:

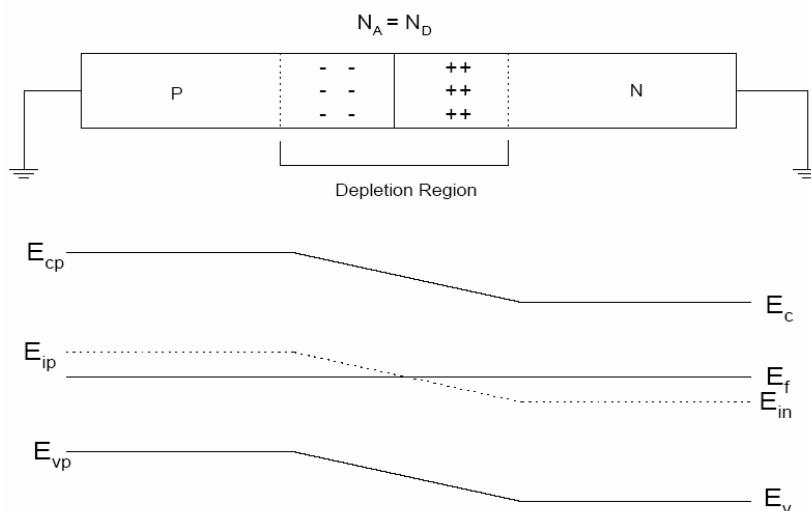


Idealni PN-spoj a) *struktura*, b) *koncentracija donorskih (N_D) i akceptorskih (N_A) nečistoća*

Praktički *pn-spojevi* se formiraju difuzijom nečistoća *p-tipa* u *n-tipni* poluvodič ili obratno. Budući da poluvodič *p-tipa* ima više šupljina, a poluvodič *n-tipa* ima mnogo više slobodnih elektrona, postoji jaka tendencija za šupljine da difundiraju iz *p-tipa* u *n-tip* poluvodiča. Slično, elektroni difundiraju iz *n-tipa* u materijal *p-tipa*. Kad šupljine pređu granicu u materijal *n-tipa*, one rekombiniraju sa slobodnim elektronima u *n-tipu*. Slično, kad elektroni pređu granicu u područje *p-tipa*, oni rekombiniraju sa slobodnim šupljinama. Na granici se pritom stvara *prijelazno* ili *osiromašeno područje*.

U osiromašenom području slobodne šupljine i elektroni su za nekoliko reda veličine malobrojniji nego šupljine u materijalu *p-tipa* ili elektroni u materijalu *n-tipa*. Kako elektroni i šupljine rekombiniraju u prijelaznom području, područje blizu spoja unutar *n-tipa* poluvodiča je ostaje s čisto pozitivnim nabojem nepomičnih donorskih atoma (iona). Područje blizu spoja unutar *p-tipa* materijala ostaje s čistim negativnim nabojem nepomičnih akceptorskih atoma (iona), što se vidi na slici:

PN-spoj s osiromašenim područjem s pozitivnim i negativnim ionima



Dijagram energetskeg pojasa blizu pn-spoja

Budući da su pozitivni i negativni ioni nepomični, na prijelaznom području postoji električno polje. To električno polje stvara razliku potencijala preko spoja, *potencijalnu barijeru*. Ona se također zove *difuzni* ili *kontaktni potencijal*, V_c . Potencijalna barijera sprečava tok većinskih nositelja preko spoja pod ravnotežnim uvjetima.

Kontaktni potencijal V_c može se izračunati iz relacija:

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{\left(\frac{qV_c}{kT}\right)} = \frac{p_p}{p_n}$$

$$V_c = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{n_n}{n_p}\right) = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{p_p}{p_n}\right)$$

Međutim, budući da je

$$p_p \cong N_A, \quad n_p \cong \frac{n_i^2}{N_A}, \quad n_n \cong N_D, \quad p_n \cong \frac{n_i^2}{N_D},$$

gornja jednažba postaje:

$$V_c = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right)$$

Kontaktni potencijal može se promotriti u dijagramu energetske pojaseva. Tipično, V_c je između 0.5 i 0.8 V za silicijski *pn-spoj*, između 0.1 i 0.2 V za germanijski, a oko 1.5 V za galijev arsenid.

Kad se pozitivni napon V_s primjeni na p-stranu spoja, a n-strana uzemlji, šupljine su gurnute sa strane materijala p-tipa u prijelazno područje. Pritom su elektroni privučeni u to isto područje. Osiromašeno područje se smanjuje, kao i efektivni kontaktni potencijal. To omogućuje većinskim nositeljima da teku kroz osiromašeno područje. Tako se izraz:

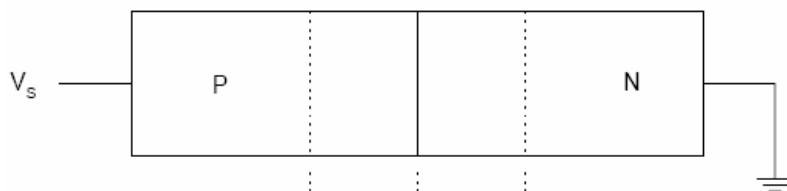
$$\frac{n_n}{n_p} = e^{\left(\frac{qV_c}{kT}\right)} = \frac{p_p}{p_n} \quad \text{transformira u} \quad \frac{n_n}{n_p} = e^{\left[\frac{q(V_c - V_s)}{kT}\right]} = \frac{p_p}{p_n}$$

Kada se pak negativni napon V_s primijeni na p-stranu spoja, a n-strana se uzemlji, primijenjeni napon dodaje se direktno kontaktnom potencijalu. Osiromašeno područje se povećava i većinskim nositeljima postaje još teže prijeći barijeru. Struju čine isključivo manjinski nositelji. Izraz se pritom mijenja u:

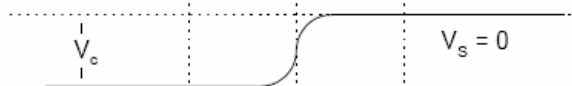
$$\frac{n_n}{n_p} = e^{\left[\frac{q(V_c + V_s)}{kT}\right]} = \frac{p_p}{p_n}$$

Slika prikazuje potencijal na diodi kad je *pn-spoj* propusno (forward-biased) i nepropusno (reverzno, reversed-biased) polariziran.

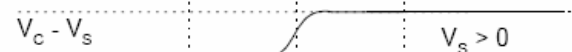
PN-spoj sa osiromašenim slojem i spojenim izvodima



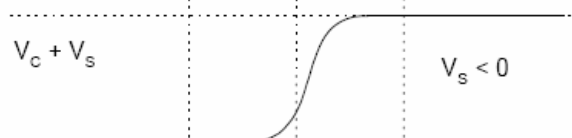
Kontaktни potencijal bez izvora napona ($V_s=0$)



Kontaktни potencijal s propusno polariziranim pn-spojem ($V_s > 0$)



Kontaktни potencijal s nepropusno polariziranim pn-spojem ($V_s < 0$)



Primjer 5.5

Za silicijski *pn-spoj* sa $N_D = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ i $N_A = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ i sa $n_i^2 = 1.04 \times 10^{26} \text{ cm}^{-6}$ na $T = 300^\circ \text{K}$

a) treba izračunati kontaktni potencijal

b) nacrtati spojni potencijal kad se izvor napona V_s povećava od -1.0 do 0.7 V .

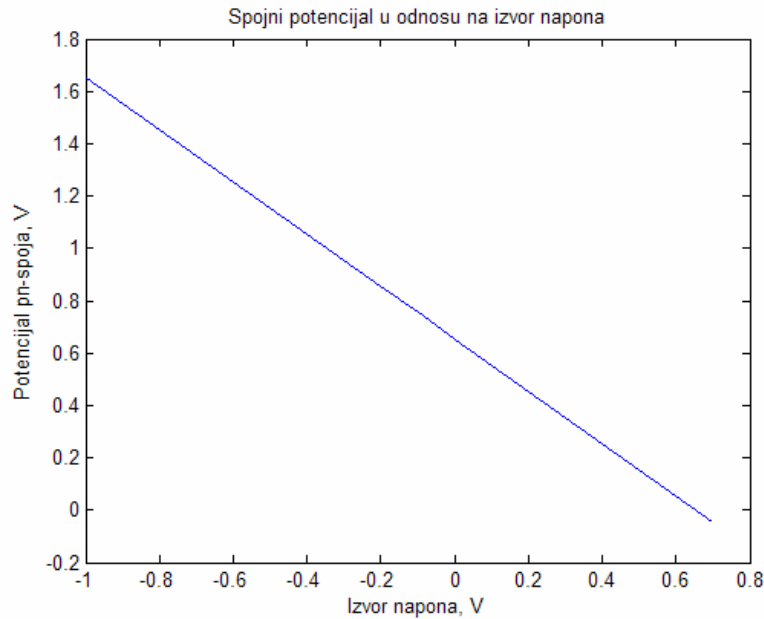
Rješenje

Problem se rješava programski:

```
% Potencijal pn-spoja u odnosu na naponski izvor
% upotrebom jednadzbe za kontaktni potencijal
t = 300;
na = 1.0e17;
nd = 1.0e14;
nisq = 1.04e20;
q = 1.602e-19;
k = 1.38e-23;
% izracunati kontaktni potencijal
vc = (k*t/q)*(log(na*nd/nisq))
vs = -1.0:0.1:0.7;
jct_pot = vc - vs;
% plot curve
plot(vs,jct_pot)
title('Spojni potencijal u odnosu na izvor napona')
xlabel('Izvor napona, V')
ylabel('Potencijal pn-spoja, V')
```

što nakon poziva daje:

```
>> pr5_5
vc =
    0.6535
```



5.3.2. Struja spoja

Struja *pn-spoja* dana je sa:

$$I = I_s \left[e^{\left(\frac{qV_s}{kT} \right)} - 1 \right]$$

gdje su:

- V_s – priključeni napon na pn-spoju
- q – naboj elektrona
- T – apsolutna temperatura
- k – Boltzmann-ova konstanta
- I_s – reverzna struja zasićenja za koju vrijedi:

$$I_s = qA \left(\frac{D_p p_n}{L_p} + \frac{D_n n_p}{L_n} \right)$$

gdje su:

- A – prijelazno područje diode
- L_p, L_n – difuzijske dužine šupljina i elektrona
- p_n, n_p – ravnotežne koncentracije manjinskih nositelja
- D_p, D_n – difuzijski koeficijenti šupljina i elektrona

Budući da su

$$p_n \cong \frac{n_i^2}{N_D} ; \quad n_p \cong \frac{n_i^2}{N_A}$$

jednadžba postaje

$$I_S = qA \left(\frac{D_p}{L_p N_D} + \frac{D_n}{L_n N_A} \right) n_i^2$$

Difuzijski koeficijent i difuzijska dužina odnose se prema izrazu:

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p} \quad \text{i} \quad L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$$

gdje su

$$\tau_p, \tau_n \quad \bullet \quad \text{vrijeme života manjskih nositelja šupljina i manjinskih nositelja elektrona.}$$

Struja *pn-spoja* opisana jednadžbom $I = I_S [e^{(qV_s/kT)}]$ ustvari predstavlja strujno-naponsku statičku karakteristiku diode.

Pogodna je za razmatranje propusno polariziranog ($V_s > 0$) i nepropusno (reverzno) polariziranog ($V_s < 0$) *pn-spoja*.

Koristeći gornje jednadžbe može se pokazati da za struju zasićenja (engl. *saturation*) vrijedi:

$$I_S = k_1 T^3 e^{[-E_g/(kT)]}$$

gdje je k_1 konstanta razmjernosti, a E_g već poznata veličina kojom se opisuje širina zabranjenog pojasa. Derivacijom po vremenu T dobije se:

$$\frac{dI_S}{dT} = 3k_1 T^2 e^{-\frac{E_g}{kT}} + k_1 T^3 \frac{-E_g}{kT^2} e^{-\frac{E_g}{kT}}$$

odakle nakon sređivanja slijedi:

$$\frac{1}{I_S} \frac{dI_S}{dT} = \frac{3}{T} + \frac{1}{T} \frac{E_g}{kT} = \frac{3}{T} + \frac{1}{T} \frac{V_g}{V_T}$$

gdje su:

$$V_T = \frac{kT}{q} \quad \text{i} \quad V_g = \frac{E_g}{q}$$

Za silicij na sobnoj temperaturi je:

$$\frac{V_g}{V_T} = 44.4.$$

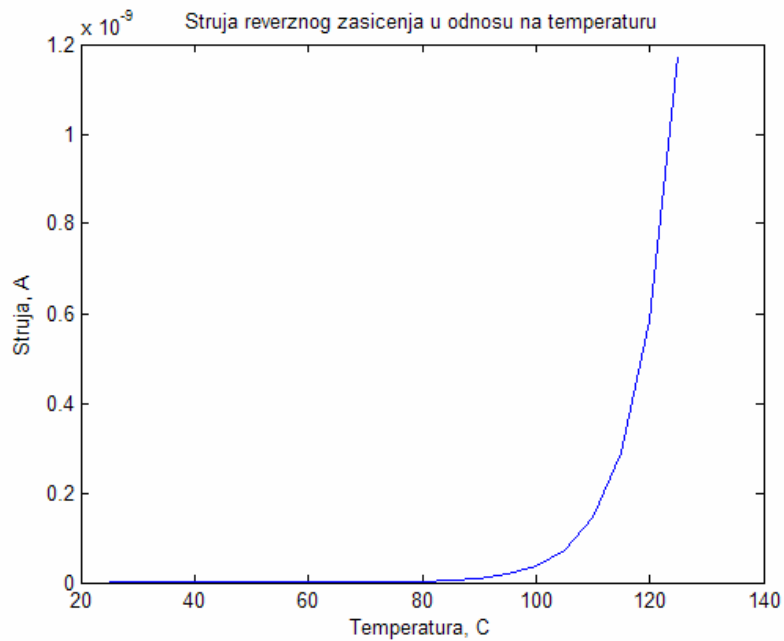
što pojednostavljuje izraz u :

$$\frac{dI_s}{dT} = \left(3 + \frac{V_g}{V_T}\right) \frac{dT}{T} = 47.4 \frac{dT}{T}$$

Na sobnoj temperaturi (300⁰K) struja zasićenja približno se udvostručuje svakih 5⁰C.

Primjer 5.6

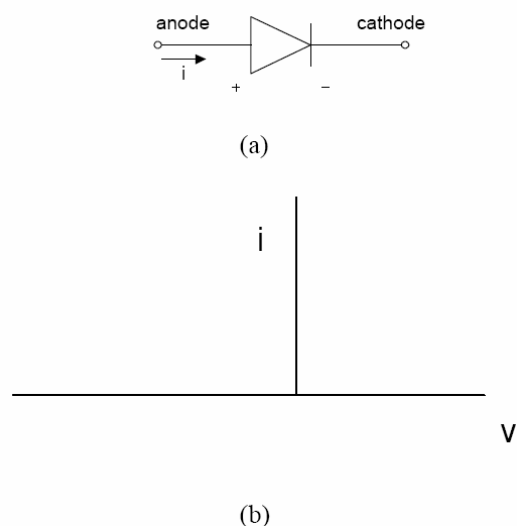
```
% Struja zasićenja
t = 25:5:125;
is = 1.0e-15*(1.15).^(t-25);
plot(t,is)
title('Struja reverznog zasićenja u odnosu na temperaturu')
xlabel('Temperatura, C')
ylabel('Struja, A')
```



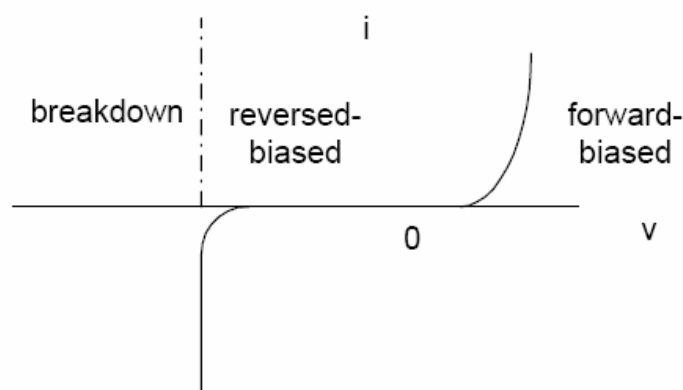
6. DIODA

6.1 Karakteristika diode

Dioda je poluvodički elektronički element s dva priključka (anodom i katodom). Već sam elektronički simbol diode a) podsjeća da se radi o elementu koji vodi struju samo u jednom smjeru. Njezina strujno/naponska karakteristika prikazana je dijagramom b):



Strujno-naponska karakteristika realnog poluvodičkog spoja diode prikazana je slikom. Karakteristika se dijeli na tri područja: propusno polarizirano (engl. *forward-biased*), nepropusno polarizirano (engl. *reversed-biased*) i proboj (engl. *breakdown*).



U propusno i nepropusnom području za struju i i napon v vrijedi poznata jednadžba diode:

$$i = I_S [e^{(v/nV_T)} - 1]$$

gdje su:

- I_S - reverzna leakage current
- n - empirička konstanta između 1 i 2
- V_T - termički napon, zadan sa

struja zasićenja (engl.

$$V_T = \frac{kT}{q}$$

za koji su:

- k – Boltzmann-ova konstanta = $1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
- q – električni naboj ($1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)
- T – apsolutna temperatura u $^{\circ}\text{K}$

Na sobnoj temperaturi (25°C) termički napon je oko 25.7 mV .

6.1.1. Propusno polarizirano područje

U propusno polariziranom području napon na diodi je pozitivan. Ako pretpostavimo da je taj napon na sobnoj temperaturi veći od 0.1 V , onda se jednažba pojednostavljuje na:

$$i = I_S e^{(v/nV_T)}$$

Za neku radnu točku diode $i=I_D$ i $v=V_D$ vrijedi:

$$i_D = I_S e^{(v_D/nV_T)}$$

Da bi se dobio dinamički, diferencijalni otpor diode u nekoj radnoj točki, jednažba se treba derivirati u odnosu na v , pa imamo:

$$\frac{di}{dv} = \frac{I_S e^{(v/nV_T)}}{nV_T}$$

$$\left. \frac{di}{dv} \right|_{v=V_D} = \frac{I_S e^{(v_D/nV_T)}}{nV_T} = \frac{I_D}{nV_T}$$

odakle je dinamički otpor diode r_d jednak:

$$r_d = \left. \frac{dv}{di} \right|_{v=V_D} = \frac{nV_T}{I_D}$$

Sljedeći problem je kako odrediti konstantu n i struju zasićenja I_S ako su zadani podaci odgovarajućih parova napona i struje diode.

Jednažba diode može se pisati kao:

$$\frac{i}{I_S} = e^{(v/nV_T)}$$

što logaritmiranjem daje:

$$\ln(i) = \frac{v}{nV_T} + \ln(I_S)$$

Ako se crta krivulja od v u odnosu na $\ln(i)$ onda imamo pravac s nagibom $1/nV_T$ i presjecištem y-osi od $\ln(I_S)$.

Primjer 6.1

Za propusno polariziranu diodu zadanu odgovarajućim parovima napona i struje, treba naći reverznu struju zasićenja I_S i parametar diode n .

Forward Voltage, V	Forward Current, A
0.1	0.133e-12
0.2	1.79e-12
0.3	24.02e-12
0.4	0.321e-9
0.5	4.31e-9
0.6	57.69e-9
0.7	7.726e-7

Rješenje

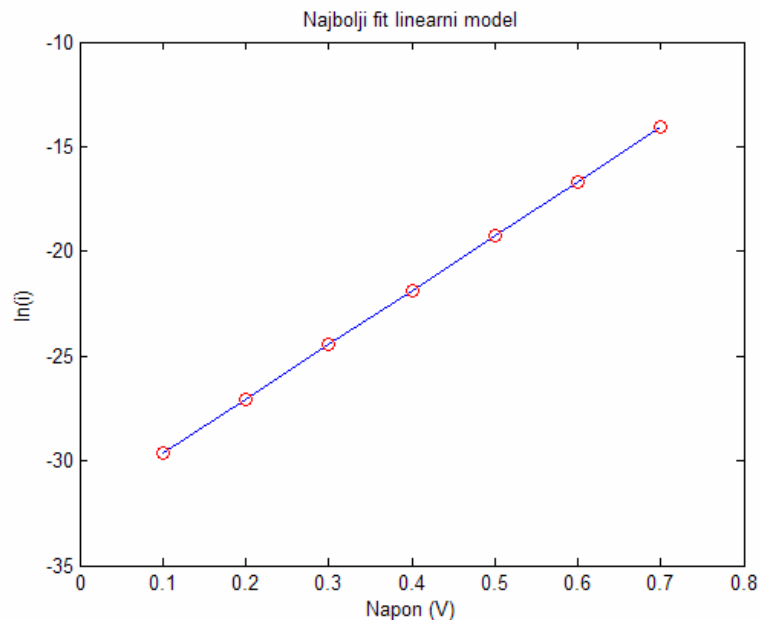
```
% Diodni parametri
vt = 25.67e-3;
v = [0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7];
i = [0.133e-12 1.79e-12 24.02e-12 321.66e-12 4.31e-9 57.69e-9
772.58e-9];
%
lni = log(i); % prirodni log struje
% koeficijenti dobiveni najboljim nadopunjavanjem linearnog
modela
p_fit = polyfit(v,lni,1);
% linearna jedndzba je y = m*x + b
b = p_fit(2);
m = p_fit(1);
ifit = m*v + b;
%
```

```
% Izracunati Is i n
Is = exp(b)
n = 1/(m*vt)
% nacrtati v vu odnosu na ln(i) i najbolji fit-model
plot(v, ifit, 'b', v, lni, 'or')
axis([0,0.8,-35,-10])
xlabel('Napon (V)')
ylabel('ln(i)')
title('Najbolji fit linearni model')
```

koji pozivom daje:

```
>> pr6_1
Is =
    9.9525e-015
n =
    1.5009
```

i sliku:



6.1.2. Temperaturni efekti

Iz jednadžbe diode vidi se da su termički napon i reverzna struja zasićenja ovisni o temperaturi. Termički napon direktno je proporcionalan temperaturi. Reverzna struja zasićenja I_S povećava se približno $7.2\% / ^\circ\text{C}$ za silicijeve i germanijeve diode. Izraz za reverznu struju zasićenja kao funkcija temperature je:

$$I_S(T_2) = I_S(T_1)e^{[k_S(T_2-T_1)]}$$

gdje su:

- $k_S = 0.072 / ^\circ\text{C}$
- T_1 i T_2 su dvije različite temperature

Budući da je $e^{0.72}$ približno jednako 2, gornja jednačba može se pojednostavniti i napisati kao:

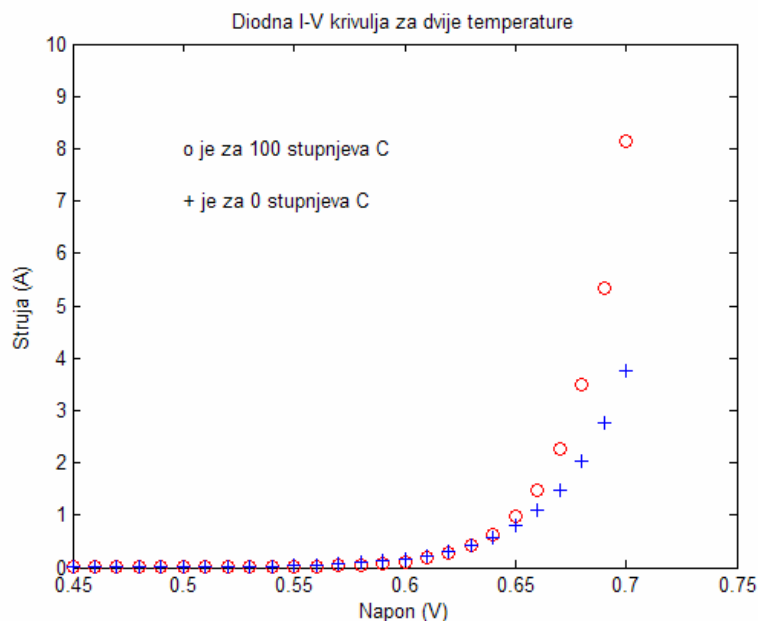
$$I_S(T_2) = I_S(T_1)2^{(T_2-T_1)/10}$$

Primjer 6.2

Struja zasićenja diode na 25°C je 10^{-12} A . Uz pretpostavku da je emisijska konstanta diode jednaka 1.9 treba nacrtati i/v karakteristiku diode za temperature $T_1 = 0^{\circ}\text{C}$ i $T_2 = 100^{\circ}\text{C}$.

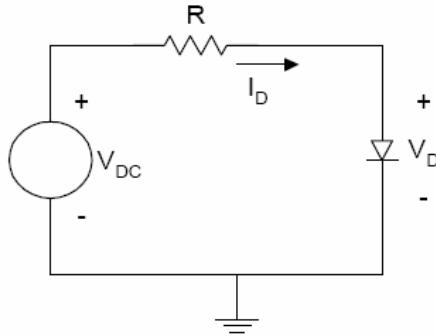
Rješenje

```
% Temperaturni efekti na diodnoj karakteristici
%
k = 1.38e-23; q = 1.6e-19;
t1 = 273 + 0;
t2 = 273 + 100;
ls1 = 1.0e-12;
ks = 0.072;
ls2 = ls1*exp(ks*(t2-t1));
v = 0.45:0.01:0.7;
l1 = ls1*exp(q*v/(k*t1));
l2 = ls2*exp(q*v/(k*t2));
plot(v,l1,'ro',v,l2,'b+')
axis([0.45,0.75,0,10])
title('Diodna I-V krivulja za dvije temperature')
xlabel('Napon (V)')
ylabel('Struja (A)')
text(0.5,8,'o je za 100 stupnjeva C')
text(0.5,7,'+ je za 0 stupnjeva C')
```



6.2 Analiza strujnih krugova s diodom

Na slici je prikazan krug s diodom koji se sastoji od istosmjernog (*dc*) napona izvora V_{DC} , otpora R i diode. Treba odrediti struju diode I_D i napon na diodi V_D .



Koristeći KZ2 može se napisati jednačba:

$$V_{DC} = RI_D + V_D$$

Struja i napon diode dani su jednačbom diode:

$$i_D = I_S e^{(v_D/nV_T)}$$

Iz ovih dviju jednačbi mogu se naći struja diode I_D i napon diode V_D .

Postoji nekoliko metoda kako naći I_D i V_D . Jedan pristup je nacrtati gornje jednačbe i naći presjecište pravca i nelinearne krivulje. U njihovom presjecištu nalazi se tražena radna točka.

Primjer 6.3

Za strujni krug sa serijskim spojem naponskog izvora, otpornika i diode zadano je:

$R=10\text{ k}\Omega$, $V_{DC}=10\text{ V}$, $I_S=10^{-12}$ i $n=2.0$ (uz pretpostavku da je temperatura 25°C).

- Koristiti Matlab program za crtanje propusne karakteristike diode i radnog pravca trošila
- Iz crteža procijeniti radnu točku diode.

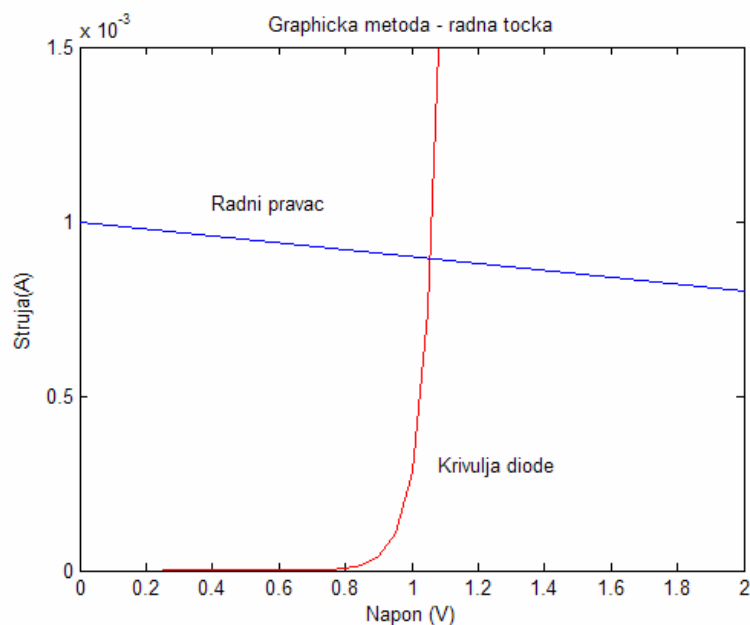
Rješenje

```
% Odredjivanje radne tocke
% koristeci graficku tehniku
%
% jednačba diode
k = 1.38e-23;q = 1.6e-19;
t1 = 273 + 25; vt = k*t1/q;
v1 = 0.25:0.05:1.1;
i1 = 1.0e-12*exp(v1/(2.0*vt));
% radni pravac i0=(1.0e4)i2 + v2
```

```

vdc = 10;
r = 1.0e4;
v2 = 0:2:10;
i2 = (vdc - v2)/r;
% plot
plot(v1,i1,'r', v2,i2,'b')
axis([0,2, 0, 0.0015])
title('Graphicka metoda - radna tocka')
xlabel('Napon (V)')
ylabel('Struja(A)')
text(0.4,1.05e-3,'Radni pravac')
text(1.08,0.3e-3,'Krivulja diode')

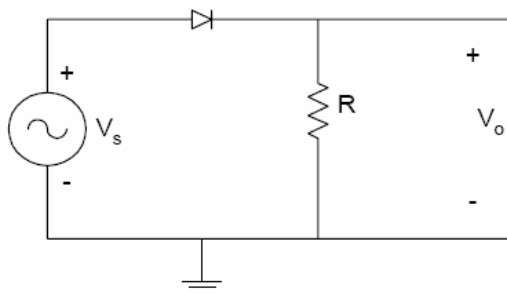
```



Iz crteža može se očitati: $I_D = 0.9 \text{ mA}$ i $V_D = 1.05 \text{ V}$.

6.3 Poluvalni ispravljač

Poluvalni ispravljač prikazan je slikom. Kako se vidi ispravljač se sastoji od izvora izmjeničnog napona, diode i otpora:



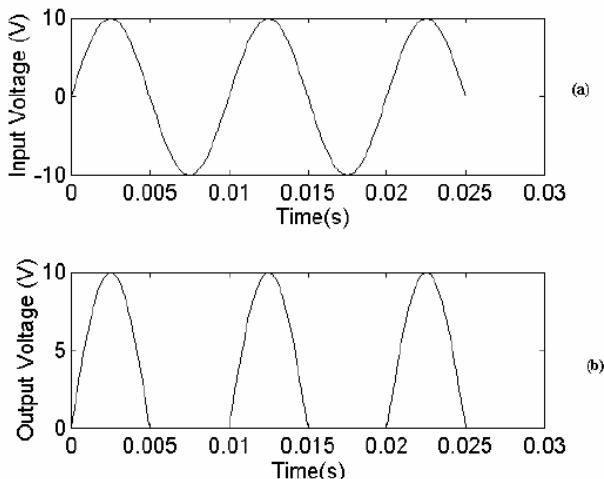
Uz pretpostavku da je dioda idealna, dioda vodi kad je napon izvora pozitivan $v_s > 0$, pa je pritom napon na otporu:

$$v_0 = v_s$$

Kada je pak napon izvora negativan $v_s < 0$, dioda je reverzno polarizirana, pa je:

$$v_0 = 0$$

što je zorno prikazano slikom:

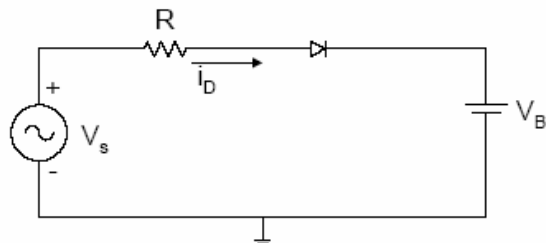


Primjer 6.4

Krug za punjenje baterije prikazan je slikom. Napon baterije je 11.8 V . Izvor izmjeničnog napona je $v_s(t) = 18 \sin(120\pi t)\text{ V}$, a otpor $R = 100\ \Omega$.

Matlab programom treba:

- nacrtati ulazni napon
- nacrtati struju kroz diodu
- izračunati kut vođenja diode
- izračunati vršnu (tjemenu) vrijednost



Pretpostaviti da je dioda idealna.

Rješenje

Kad je ulazni napon v_s veći od V_B dioda vodi i njezina struja i_d dana je sa:

$$i_d = \frac{V_s - V_B}{R}$$

Dioda započinje voditi na kutu θ kad vrijedi $v_s > V_B$ tj.

$$18 \sin \theta_1 = 18 \sin(120\pi t_1) = V_B = 11.8$$

Dioda prestaje voditi kad je $v_s < V_B$

$$18 \sin \theta_2 = 18 \sin(120\pi t_2) = V_B$$

pa je zbog simetrije:

$$\theta_2 = \pi - \theta_1$$

Matlab program

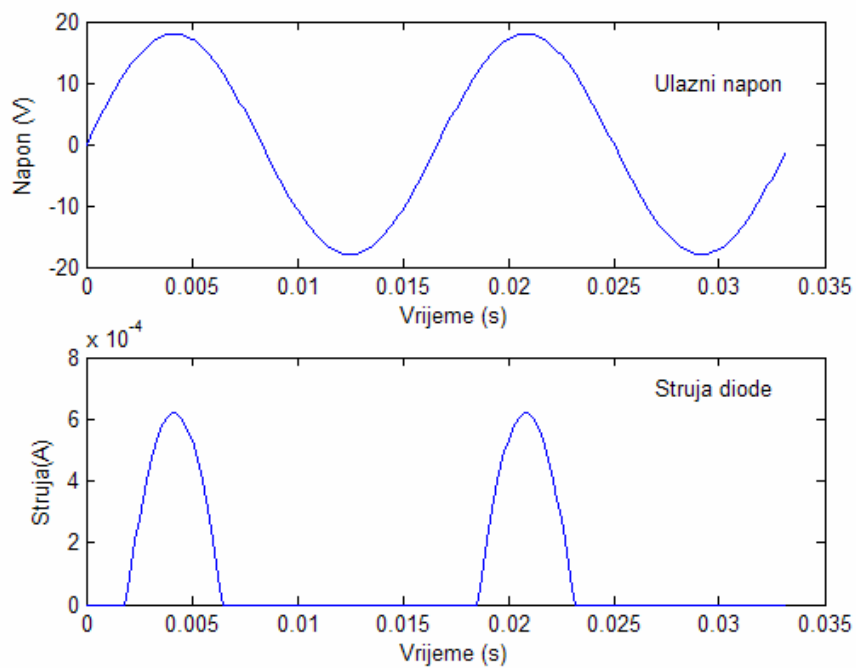
```
% Krug za punjenje baterije
period = 1/60;
period2 = period*2;
inc = period/100;
npts = period2/inc;
vb = 11.8;
t = [];
for i = 1:npts
    t(i) = (i-1)*inc;
    vs(i) = 18*sin(120*pi*t(i));
    if vs(i) > vb
        idiode(i) = (vs(i) - vb)/r;
    else
        idiode(i) = 0;
    end
end
subplot(211), plot(t,vs)
%title('Ulazni napon')
xlabel('Vrijeme (s)')
ylabel('Napon (V)')
text(0.027,10, 'Ulazni napon')
subplot(212), plot(t,idiode)
%title('Struja diode')
xlabel('Vrijeme (s)')
ylabel('Struja(A)')
text(0.027, 0.7e-3, 'Struja diode')

% kut vodjenja
thetal = asin(vb/18); theta2 = pi - thetal;
kut = (theta2 -thetal)/(2*pi)
% vrsna vrijednost struje
vrsna_vr = (18*sin(pi/2) - vb)/r
% pcurrent = max(idiode)
```

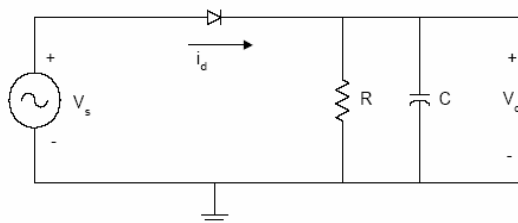
koji pozivom daje:

```
>> pr6_4
kut =
    0.2724
vrsna_vr =
    6.2000e-004
```

i prikazuje:



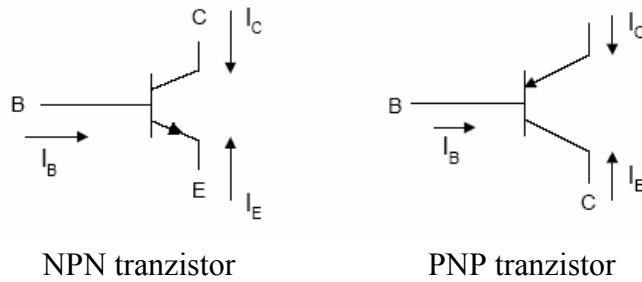
Izlaz ispravljačkog kruga može se izravnati (glačati) spajanjem kondenzatora na trošilo. Analiza novog spoja (prikazanog slikom ispod) može se provesti na sličan način.



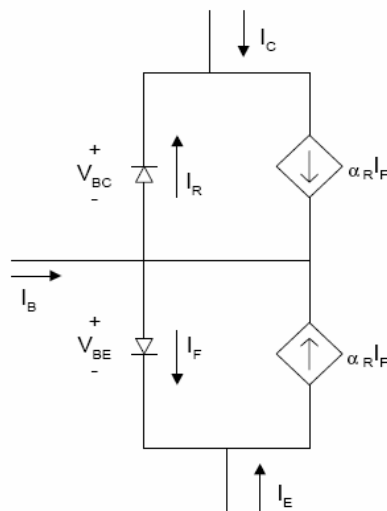
7. TRANZISTOR

7.1 Bipolarni tranzistor

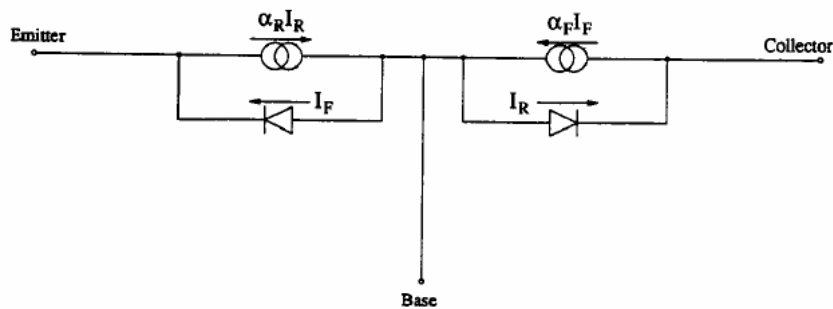
Bipolarni tranzistor (*BJT – bipolar junction transistor*) sastoji se od dva *pn*-spoja u redosljedu *pnp* ili *nnp*. Rad *BJT* zasniva se na ponašanju većinskih i manjinskih nositelja. *Npn* i *pnp* tranzistori imaju ovakve simbole:



DC ponašanje BJT može se opisati Ebers-Moll-ovim modelom (prikazanom za NPN tip):



tj.



Jednadžbe po ovom modelu su:

$$I_F = I_{ES} \left[\exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right) - 1 \right]$$

$$I_R = I_{CS} \left[\exp\left(\frac{V_{BC}}{V_T}\right) - 1 \right]$$

odnosno:

$$I_C = \alpha_F I_F - I_R$$

$$I_E = -I_F + \alpha_R I_R$$

$$I_B = (1 - \alpha_F) I_F + (1 - \alpha_R) I_R$$

gdje su :

- I_{ES} i I_{CS} struje zasićenja od baze-emiter, odnosno baze-kolektor,
- α_R je reverzno strujno pojačanje u spoju zajedničke baze,
- α_F je strujno pojačanje u spoju zajedničke baze.

U oznakama R – dolazi od reverznog (engl. reverse), a F – od unaprijednog (engl. forward).

Reverzno i unaprijedno strujno pojačanje su povezani relacijama:

$$\alpha_R I_{CS} = \alpha_F I_{ES} = I_S$$

gdje je I_S struja zasićenja .

$$I_S = J_S A$$

gdje je A površina emitera, a J_S gustoća struje zasićenja za koju vrijedi:

$$J_S = \frac{q D_n n_i^2}{Q_B}$$

- D_n – srednja efektivna difuzijska konstanta elektrona
- n_i – intrinzična koncentracija nositelja u siliciju ($n_i = 1.45 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ na 300°K)
- Q_B – je broj atoma dopiranih u bazu po jediničnoj površini (tj. površinska gustoća).

Kako se vidi, parametri α_R i α_F ovise o koncentraciji nečistoća i dubini poluvodičkog spoja.

Među veličinama imamo još iz područja dioda poznati termički napon V_T , zadan sa

$$V_T = \frac{kT}{q}$$

gdje su

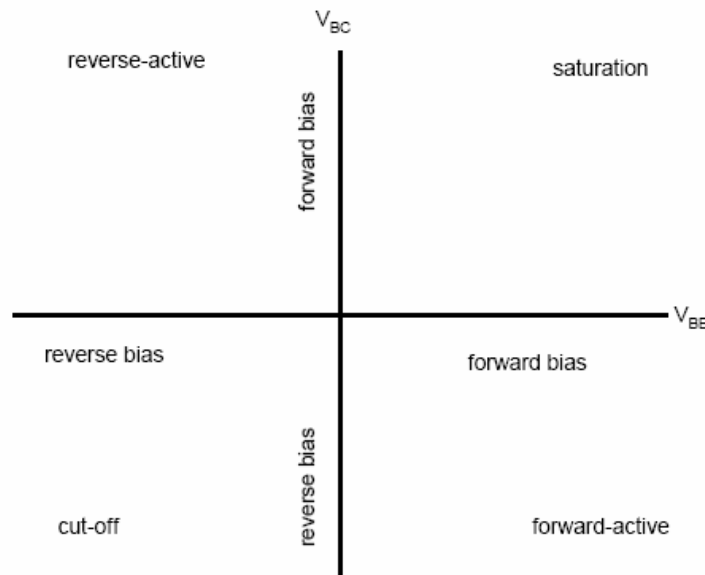
- k – Boltzmann-ova konstanta = $1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
- q – električni naboj ($1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$)
- T – apsolutna temperatura u $^\circ\text{K}$

U slučaju *pnp* tranzistora, smjer dioda u nacrtanom modelu je obrnut. Nadalje, naponski polariteti u jednadžbama su također obrnuti. Rezultirajuće *Eber-Moll*-ove jednažbe za *pnp* tranzistor tako postaju:

$$I_E = I_{ES} \left[\exp\left(\frac{V_{EB}}{V_T}\right) - 1 \right] - \alpha_R I_{CS} \left[\exp\left(\frac{V_{CB}}{V_T}\right) - 1 \right]$$

$$I_C = -\alpha_F I_{ES} \left[\exp\left(\frac{V_{EB}}{V_T}\right) - 1 \right] + I_{CS} \left[\exp\left(\frac{V_{CB}}{V_T}\right) - 1 \right]$$

Naponi na baza-emiteru i baza-kolektor spoju definirat će područja djelovanja. Postoje četiri područja djelovanja: propusno, aktivno-unaprijedno (engl. *forward-active*), nepropusno aktivno-reverzno (engl. *reverse-active*), zasićenje (engl. *saturation*) i zapiranje (engl. *cut-off*):



Unaprijedno aktivno

Ovo područje odgovara propusnom prednaponu emiter-baza spoja i reverznom prednaponu na baza-kolektor spoju. To je normalno radno područje tranzistora koje se koristi za pojačavanje signala. Ako je $V_{BE} > 0.5 \text{ V}$ i $V_{BC} < 0.3 \text{ V}$ onda se jednadžbe mogu napisati kao

$$I_C = I_S \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right) \quad I_E = -\frac{I_S}{\alpha_F} \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right)$$

$$I_B = -(I_C + I_E)$$

Uvrštenjem gornjih jednažbi u donju i sređivanjem dobije se:

$$I_B = I_S \frac{(1 - \alpha_F)}{\alpha_F} \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right)$$

$$= \frac{I_S}{\beta_F} \exp\left(\frac{V_{BE}}{V_T}\right)$$

gdje je β_F – strujno pojačanje u spoju zajedničkog emitera.

$$\beta_F = \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F}$$

Očevidno je da vrijedi:

$$I_C = \beta_F I_B$$

Može se također definirati i reverzno strujno pojačanje u spoju zajedničkog emitera:

$$\beta_R = \frac{\alpha_R}{1 - \alpha_R}$$

Reverzno aktivno

Reverzno aktivno područje odgovara reverznom prednaponu na emiter-baza spoju i propusnom prednaponu baza-kolektor spoja. Ebers-Mollov model u reverzno-aktivnom području ($V_{BC} > 0.5V$ i $V_{BE} < 0.3V$) pojednostavljuje se na:

$$I_E = I_S \left[\frac{V_{BC}}{V_T} \right]$$

$$I_B = \frac{I_S}{\beta_R} \exp\left[\frac{V_{BC}}{V_T} \right]$$

što daje

$$I_E = \beta_R I_B$$

Ovo područje vrlo se rijetko koristi.

Područje zasićenja i zapiranja

Područje zasićenja odgovara propusno polariziranom i baza-emiter i baza-kolektor spoju. Tranzistor u području zasićenja ponaša se kao sklopka u uključenom ("ON") stanju.

Područje zapiranja odgovara reverzno polariziranom spoju baza-emiter i baza-kolektor. Kolektorska i bazna struja su vrlo male u odnosu na tijek kad je tranzistor u aktivnom unaprijednom ili području zasićenja. U najvećem broju primjena, adekvatno je pretpostaviti da je $I_C = I_B = I_E = 0$, kad je BJT u području zapiranja. Za takvo stanje tranzistora u ulozi sklopke kaže se da je isključena ili u položaju "OFF".

Primjer 7.1

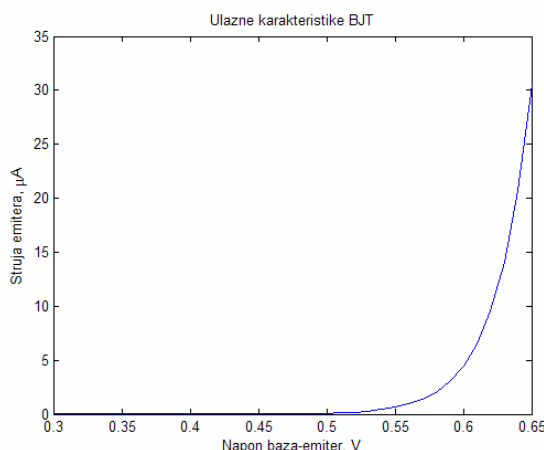
Neka BJT ima emitorsko područje od 5.0 mm^2 , $\beta_F = 120$, $\beta_R = 0.3$ prijenosna gustoća struje $J_S = 2 \cdot 10^{-10} \text{ } \mu\text{A/mm}^2$ i $T = 300^\circ\text{K}$. Treba nacrtati I_E u odnosu na V_{BE} za $V_{BC} = -1\text{V}$. Treba pretpostaviti da je $0 < V_{BE} < 0.7 \text{ V}$.

Rješenje

Upotrebom navedenih jednadžbi u Matlab programu:

```
% ulazne karakteristike BJT
k=1.381e-23; temp=300; q=1.602e-19;
cur_den=2e-10; area=5.0; beta_f=120; beta_r=0.3;
vt=k*temp/q; is=cur_den*area;
alpha_f=beta_f/(1+beta_f);
alpha_r = beta_r/(1+beta_r);
ies=is/alpha_f;
vbe=0.3:0.01:0.65;
ics=is/alpha_r;
m=length(vbe);
for i = 1:m
    ifr(i) = ies*exp((vbe(i)/vt)-1);
    irl(i) = ics*exp((-1.0/vt)-1);
    iel(i) = abs(-ifr(i) + alpha_r*irl(i));
end
plot(vbe,iel)
title('Ulazne karakteristike BJT')
xlabel('Napon baza-emiter, V')
ylabel('Struja emitera, \mu A')
```

dobije se:



Eksperimentalna proučavanja pokazuju da kolektorska struja BJT u propusnom aktivnom području linearno raste s naponom između kolektora i emitera (V_{CE}). Tako se jednadžbe mogu preurediti pa vrijedi:

$$I_C \cong I_S \exp\left[\frac{V_{BE}}{V_T}\right] \left(1 + \frac{V_{CE}}{V_{AF}}\right)$$

gdje je V_{AF} konstanta koja ovisi o proizvodnom procesu.

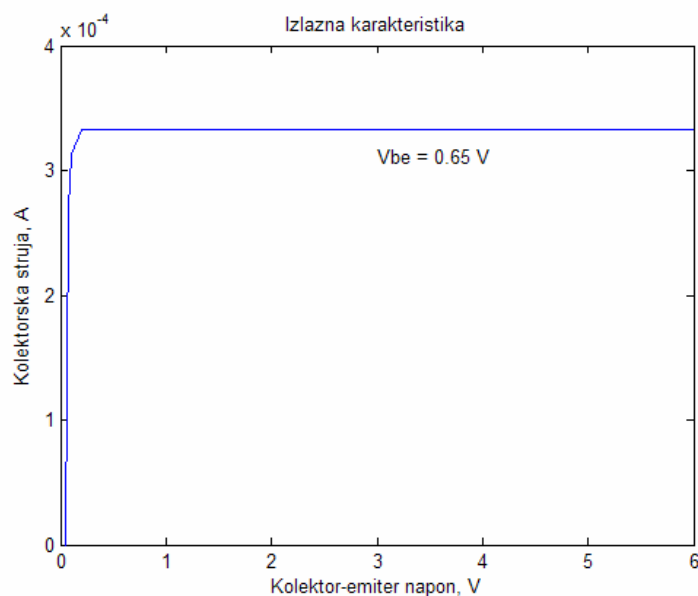
Primjer 7.2

Npn tranzistor ima s emitorsko područje od 5.5 mm^2 , $\alpha_F=0.98$, $\alpha_R=0.35$, $V_{AF}=250V$ i prijenosnu gustoću struje $J_S=2 \cdot 10^{-9} \text{ A/mm}^2$. Pretpostaviti temperaturu $T=300^\circ K$. Treba nacrtati *izlazne karakteristike* za $V_{BE}=0.65V$. Zanimariti efekt od V_{AF} na izlaznu struju I_C .

Rješenje

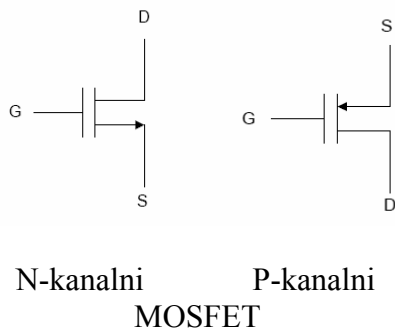
```
%izlazne karakteristike BJT
k=1.381e-23; temp=300; q=1.602e-19;
cur_den=2.0e-15; area=5.5; alpha_f=0.98;
alpha_r=0.35; vt=k*temp/q; is=cur_den*area;
ies=is/alpha_f; ics=is/alpha_r;
vbe= [0.65];
vce=[0 0.07 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 1 2 4 6];
n=length(vbe);
m=length(vce);
for i=1:n
    for j=1:m
        ifr(i,j)= ies*exp((vbe(i)/vt) - 1);
        vbc(j) = vbe(i) - vce(j);
        ir(i,j) = ics*exp((vbc(j)/vt) - 1);
        ic(i,j) = alpha_f*ifr(i,j) - ir(i,j);
    end
end
ic1 = ic(1,:);
plot(vce, ic1,'b')
title('Izlazna karakteristika')
xlabel('Kolektor-emiter napon, V')
ylabel('Kolektorska struja,A')
text(3,3.1e-4, 'Vbe = 0.65 V')
axis([0,6,0,4e-4])
```

što daje sliku izlazne karakteristike BJT-a:



7.2 MOSFET karakteristike

Metal-oxide-semiconductor field effect transistor (MOSFET) je element s četiri priključka: vrata (engl. *gate*), izvor (engl. *source*), odvod (engl. *drain*) i podloga (engl. *substrate*). Postoje dva tipa: obogaćeni i osiromašeni tip. U obogaćenom tipu MOSFET-a vodljivi kanal između izvora S i odvoda D nastaje tek primjenom napona na vratima G. U osiromašenom tipu MOSFET-a postoji vodljivi kanal između izvora i odvoda i pri nultom naponu na vratima. U oba slučaja promjenom napona na vratima kapacitivnim (influencijskim) djelovanjem utječe se na vodljivost kanala, a time i na struju između odvoda i izvora. Zbog postojanja oksidnog sloja između vrata i kanala, MOSFET ima veliku ulaznu impedanciju. Elektronički simbol za MOSFET je prikazan na slici:



MOSFET može raditi u tri područja: zapiranjju, triodnom i zasićenju.

Područje zapiranja

Zapiranje (engl. *cut-off*) se ostvaruje kad je za n-kanalni MOSFET napon na vratima niži od okidnog (engl. *threshold*) V_T :

$$V_{GS} < V_T$$

U zapiranju struja odvoda jednaka je nuli za sve vrijednosti odvod-izvor (*drain-to-source*) napona. Za *n-kanalni* mosfet, V_T je pozitivan, a za *p-kanalni* negativan.

Triodno područje

Kada je $V_{GS} > V_T$ i V_{DS} malen, MOSFET radi u triodnom području i ponaša se kao nelinearni, naponom kontrolirani otpor. Njegova I - V karakteristika dana je s:

$$I_D = k_n \left[2(V_{GS} - V_T)V_{DS} - V_{DS}^2 \right]$$

uz uvjet:

$$V_{DS} \leq V_{GS} - V_T$$

gdje je:

$$k_n = \frac{\mu_n \epsilon \epsilon_{ox}}{2t_{ox}} \frac{W}{L} = \frac{\mu_n C_{ox}}{2} \left(\frac{W}{L} \right)$$

i

- μ_n – površinska pokretljivost elektrona
- ϵ – dielektrična konstanta vakuuma (8.85×10^{-14} F/cm)
- ϵ_{ox} – dielektrična konstanta SiO_2
- t_{ox} – debljina oksida
- L – dužina kanala
- W – širina kanala

Područje zasićenja

MOSFET će biti u zasićenju ako je:

$$V_{DS} \geq V_{GS} - V_T$$

a I - V karakteristika u tom slučaju bit će zadana sa:

$$I_D = k_n (V_{GS} - V_T)^2$$

Mjesto razdvajanja triodnog područja od područja zasićenja dobije se uvrštavajući uvjet

$$V_{DS} = V_{GS} - V_T$$

u gornju jednadžbu, što daje:

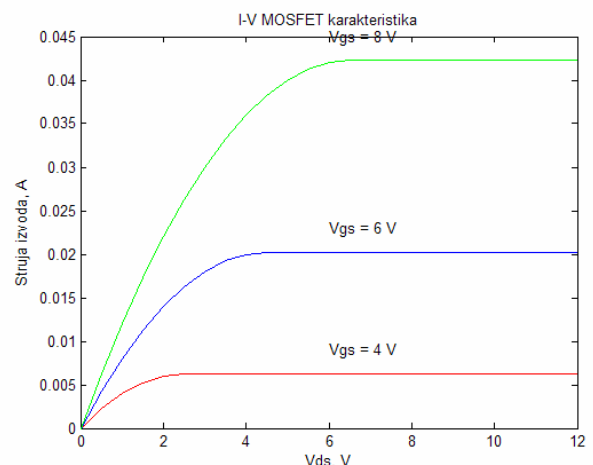
$$I_D = k_n V_{DS}^2$$

Primjer 7.3

Za *n*-kanalni obogaćeni tip MOSFET-a sa $k_n = 1 \text{ mA/V}^2$ i $V_T = 1.5 \text{ V}$, upotrebom Matlab programa nacrtati *I-V* karakteristike za $V_{GS} = 4, 6$ i 8 V i za V_{DS} između 0 i 12 V .

Rješenje

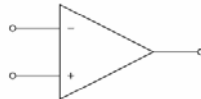
```
% I-V MOSFET karakteristike
%
kn=1e-3; vt=1.5;
vds=0:0.5:12;
vgs=4:2:8;
m=length(vds);
n=length(vgs);
for i=1:n
    for j=1:m
        if vgs(i) < vt
            cur(i,j)=0;
        elseif vds(j) >= (vgs(i) - vt)
            cur(i,j)=kn * (vgs(i) - vt)^2;
        elseif vds(j) < (vgs(i) - vt)
            cur(i,j)=kn*(2*(vgs(i)-vt)*vds(j) - vds(j)^2);
        end
    end
end
end
plot(vds,cur(1,:), 'r', vds,cur(2,:), 'b', vds,cur(3,:), 'g')
xlabel('Vds, V')
ylabel('Struja izvoda, A')
title('I-V MOSFET karakteristika')
text(6, 0.009, 'Vgs = 4 V')
text(6, 0.023, 'Vgs = 6 V')
text(6, 0.045, 'Vgs = 8 V')
```



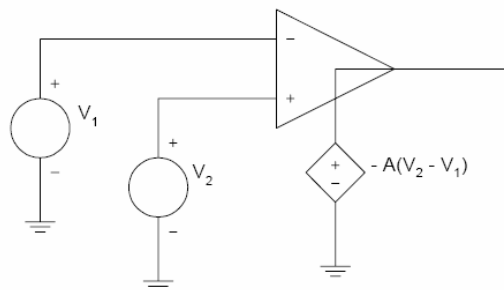
8. RAČUNSKO (OPERACIJSKO) POJAČALO

8.1. Svojstva OP pojačala

Računsko ili operacijsko pojačalo (*OP pojačalo*) sa signalne točke gledišta je elektronički sklop s tri priključka: dva ulaza i jednim izlazom. Ulaz označen s '-' naziva se invertirajući, a ulaz s oznakom '+' neinvertirajući. Njegov simbol je:



Idealno OP pojačalo može se predstaviti ekvivalentnim krugom na slici:



To je diferencijalno pojačalo, s izlazom jednakim pojačanoj razlici napona dvaju ulaza. Idealno OP pojačalo ima sljedeća svojstva:

- beskonačan ulazni otpor
- izlazni otpor jednak nuli
- naponski pomak (offset) na ulazu jednak nuli
- beskonačan frekvencijski odziv
- beskonačno pojačanje A otvorene petlje.

U praksi OP pojačala imaju veliko, ali ne i beskonačno pojačanje otvorene petlje s iznosima između 10^5 i 10^8 . Ulazni otpor kreće se između 10^6 i $10^{10} \Omega$, a izlazni otpor može biti između 50 i 125 Ω . Naponski pomak je malen, ali konačan, a frekvencijski odziv obično se značajno razlikuje od beskonačnog frekvencijskog odziva. Sljedeća tablica daje karakteristike OP pojačala s tipskom oznakom 741.

Property	Value (Typical)
Open Loop Gain	2×10^5
Input resistance	2.0 M
Output resistance	75 Ω
Offset voltage	1 mV
Input bias current	30 nA
Unity-gain bandwidth	1 MHz
Common-mode rejection ratio	95 dB
Slew rate	0.7 V/ μ V

Iz sheme idealnog pojačala može se izraziti izlazni napon V_o :

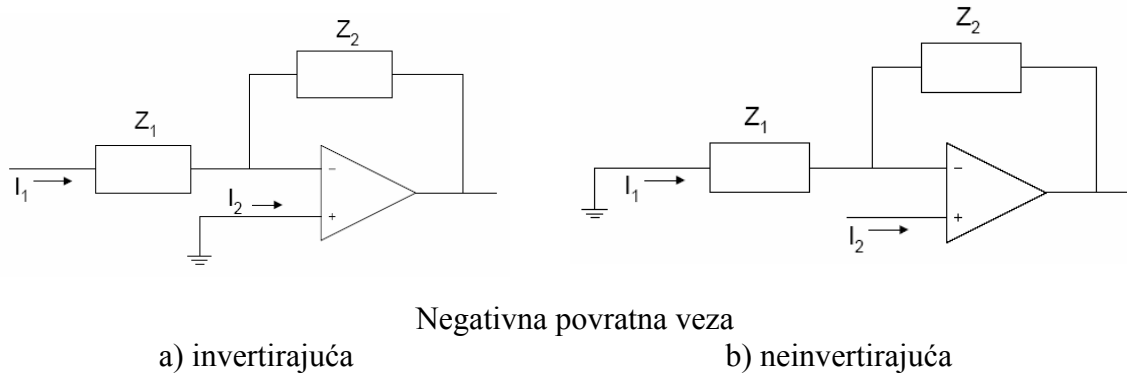
$$V_o = A(V_2 - V_1)$$

Budući da je pojačanje otvorene petlje jako veliko, nadalje vrijedi:

$$(V_2 - V_1) = \frac{V_o}{A} \cong 0$$

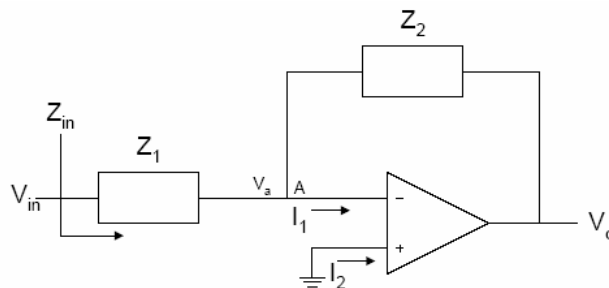
iz čega slijedi da su dva ulazna napona također jednaka. Ova činjenica uvodi pojam *virtualnog kratkog spoja*. Nadalje, kako je ulazni otpor vrlo velik, pretpostavlja se da nikakva struja ne teče u pojačalo.

Kad god postoji veza s izlaza OP pojačala na invertirajući ulaz ostvaruje se *negativna povratna veza*.



8.2 Invertirajuća konfiguracija

Računsko pojačalo spojeno u invertirajuću zatvorenu petlju prikazano je slikom:



Analizom čvorišta lako se vidi da za čvorište A vrijedi:

$$\frac{V_a - V_{in}}{Z_1} + \frac{V_a - V_o}{Z_2} + I_1 = 0$$

U isto vrijeme iz modela virtualnog kratkog spoja vrijedi:

$$V_a = V_b = 0$$

a budući da je ulazni otpor velik bit će $I_I = 0$, što pojednostavljuje izraz u:

$$\frac{V_O}{V_{IN}} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

Predznak minus govori da su V_{IN} i V_O pomaknuti u fazi za 180° . Ulazna impedancija Z_{IN} dana je s:

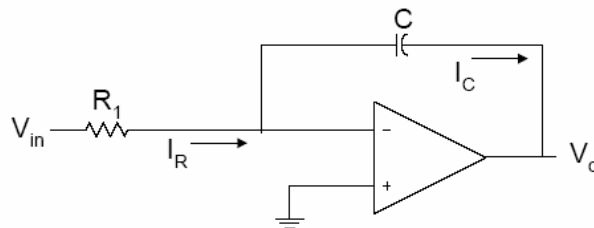
$$Z_{IN} = \frac{V_{IN}}{I_1} = Z_1$$

Ako su $Z_1=R_1$ i $Z_2=R_2$ invertirajuće pojačalo ima pojačanje

$$\frac{V_O}{V_{IN}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

a ulazni otpor je R_1 . Obično je $R_2 > R_1$ tako da je $|V_O| > |V_{IN}|$. Uz pretpostavku vrlo velikog pojačanja otvorene petlje i visokog ulaznog otpora, pojačanje invertirajućeg pojačala ovisi o vanjskim komponentama R_1 i R_2 , te ne ovisi o pojačanju otvorene petlje.

Ako se u općoj shemi za impedancije uzmu $Z_1=R_1$ i $Z_2 = 1/j\omega C$, dobije se integrator kao na slici:



Pojačanje integratora je:

$$\frac{V_O}{V_{IN}} = -\frac{1}{j\omega CR_1}$$

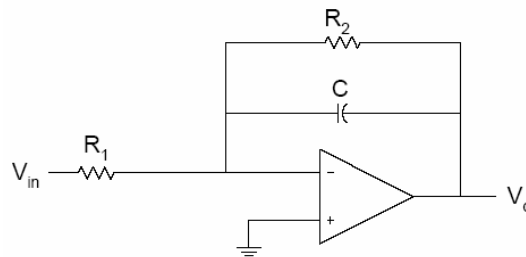
U vremenskoj domeni vrijedi:

$$\frac{V_{IN}}{R_1} = I_R \text{ and } I_C = -C \frac{dV_O}{dt}$$

a budući da je $I_R = I_C$ gornji izraz postaje:

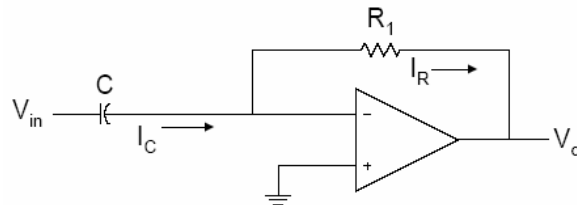
$$V_O(t) = -\frac{1}{R_1 C} \int_0^t V_{IN}(t) d\tau + V_O(0)$$

Ovaj krug još se naziva i *Miller-ov integrator*. Integrirajuća vremenska konstanta je CR_1 . Krug se ponaša kao niskopropusni filter, koji propušta niske, a prigušuje visoke frekvencije. Međutim, za istosmjerni napon, kondenzator postaje otvoreni krug i više nema negativne povratne veze s izlaza na ulaz. U tom slučaju izlazni napon ide u zasićenje. Da bi se dobilo konačno pojačanje zatvorene petlje obično se paralelno s kondenzatorom dodaje otpornik otpora R_2 prema slici:



Otpornik R_2 izabire se takav da ima veći otpor nego otpornik R_1 .

Ako se pak impedancije iz opće sheme ostvare sa $Z_1 = 1/j\omega C$ i $Z_2 = R$ dobije se *derivator*:



Pojačanje derivatora iznosi:

$$\frac{V_O}{V_{IN}} = -j\omega CR$$

U vremenskoj domeni vrijedi:

$$I_C = C \frac{dV_{IN}}{dt}, \text{ and } V_O(t) = -I_R R$$

a budući da je:

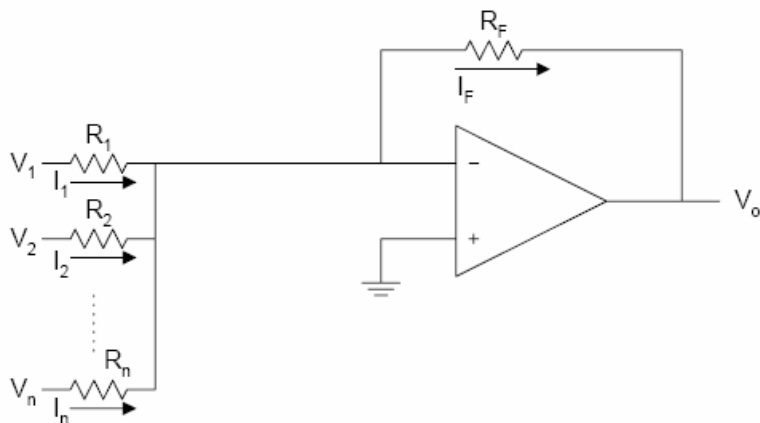
$$I_C(t) = I_R(t)$$

slijedi:

$$V_O(t) = -CR \frac{dV_{IN}(t)}{dt}$$

Derivator derivira ulazne signale, pa ako se signal na ulazu brzo mijenja izlaz derivatora imat će šiljke (engl. *spike*).

Invertirajuća konfiguracija može se složiti tako da se dobije *težinsko zbrajalo*:



Iz slike se vidi da vrijedi:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1}, \quad I_2 = \frac{V_2}{R_2}, \quad \dots, \quad I_n = \frac{V_n}{R_n}$$

i također:

$$I_F = I_1 + I_2 + \dots + I_N$$

$$V_O = -I_F R_F$$

Povezujući jednačbe dobije se konačan izraz:

$$V_O = -\left(\frac{R_F}{R_1} V_1 + \frac{R_F}{R_2} V_2 + \dots + \frac{R_F}{R_N} V_N \right)$$

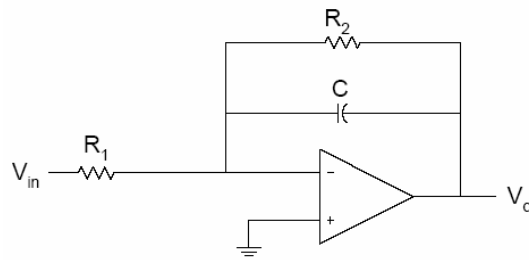
Izlazni je napon razmjeran zbroju ulaznih napona s pripadnim težinama R_F/R_i .

Primjer 8.1

Za sklop na slici:

- izvedite izraz za prijenosnu funkciju $V_O/V_{IN}(j\omega)$.
- Ako je $C = 1 \text{ nF}$ i $R_1 = 2 \text{ K}\Omega$, treba nacrtati amplitudni odziv za R_2 koji je jednak:

- $100 \text{ K}\Omega$
- $300 \text{ K}\Omega$
- $5000 \text{ K}\Omega$



Rješenje

a)

$$Z_2 = R_2 \parallel \frac{1}{sC_2} = \frac{R_2}{1 + sC_2R_2}$$

$$Z_1 = R_1$$

$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{-R_2/R_1}{1 + sC_2R_2}$$

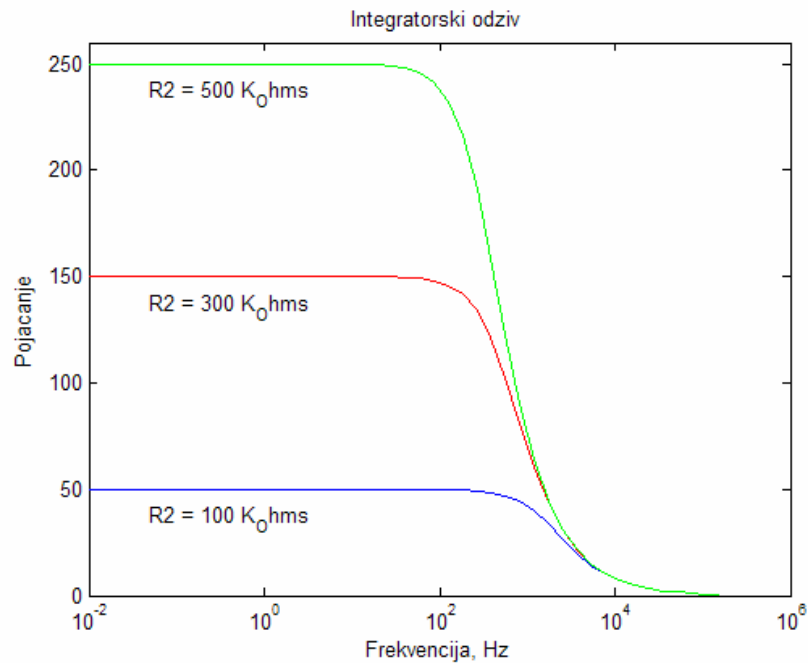
$$\frac{V_o}{V_{in}}(s) = \frac{-1/C_2R_1}{s + 1/C_2R_2}$$

b) rješava se Matlab programom:

```
% Frekvencijski odziv niskopropusnog kruga
c = 1e-9; r1 = 2e3;
r2 = [100e3, 300e3, 500e3];
n1 = -1/(c*r1); d1 = 1/(c*r2(1));
num1 = [n1]; den1 = [1 d1];
w = logspace(-2,6);
h1 = freqs(num1,den1,w);
f = w/(2*pi);
d2 = 1/(c*r2(2)); den2 = [1 d2];
h2 = freqs(num1, den2, w);
d3 = 1/(c*r2(3)); den3 = [1 d3];
h3 = freqs(num1,den3,w);
semilogx(f,abs(h1),'b',f,abs(h2),'r',f,abs(h3),'g')
xlabel('Frekvencija, Hz')
ylabel('Pojaćanje')
axis([1.0e-2,1.0e6,0,260])
text(5.0e-2,35,'R2 = 100 K_Ohms')
text(5.0e-2,135,'R2 = 300 K_Ohms')
```

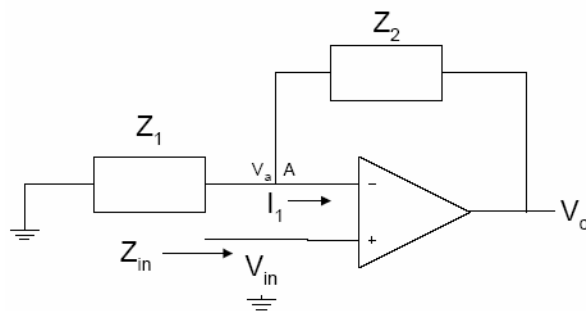
```
text(5.0e-2,235,'R2 = 500 K_Ohms')
title('Integratorski odziv ')
```

što pozivom daje:



8.3 Neinvertirajuća konfiguracija

Računsko pojačalo spojeno u neinvertirajuću konfiguraciju prikazano je shemom:



Koristeći analizu čvorišta, za čvorište A vrijedi:

$$\frac{V_a}{Z_1} + \frac{V_a - V_o}{Z_2} + I_1 = 0$$

a zbog modela virtualnog kratkog spoja:

$$V_{IN} = V_a$$

Budući da je ulazna impedancija jako velika ($i_I=0$) jednačba se pojednostavljuje:

$$\frac{V_O}{V_{IN}} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}$$

Pojačanje invertirajućeg pojačala je pozitivno. Ulazna impedancija pojačala Z_{IN} približuje se beskonačnoj, jer je struja koja teče u pozitivni ulaz OP pojačala približno nula.

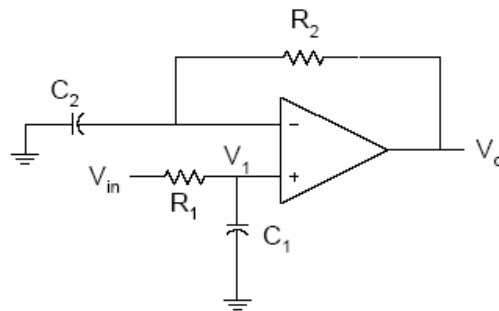
Ako su $Z_1 = R_1$ i $Z_2 = R_2$ naponsko pojačanje je:

$$\frac{V_O}{V_{IN}} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

Ovaj se sklop još zove *naponsko sljedilo s pojačanjem*.

Primjer 8.2

Za sklop na slici, potrebno je:



- Izvesti prijenosnu funkciju,
- Koristeći Matlab program naći polove i nule,
- Nacrtati amplitudni i fazni spektar pretpostavljajući da su:
 $C_1=0.1 \mu F$, $C_2=1000 \times 0.1 \mu F$, $R_1 = 10 K\Omega$ i $R_2 = 10 \Omega$.

Rješenje

Iz opće jednačbe

$$\frac{V_O}{V_{IN}} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}$$

Slijedi za sklop na slici

$$\frac{V_O}{V_1}(s) = 1 + \frac{R_2}{1/sC_2}$$

Kako ista struja teče kroz R_1 i C_1 , slijedi:

$$\frac{V_1}{V_N}(s) = \frac{1/sC_1}{R_1 + 1/sC_1}$$

pa povezujući gornje jednadžbe dobije se:

$$\frac{V_O}{V_N}(s) = \left(\frac{1 + sC_2R_2}{1 + sC_1R_1} \right)$$

što se još može napisati kao:

$$\frac{V_O}{V_N}(s) = \frac{C_2R_2 \left(s + \frac{1}{C_2R_2} \right)}{C_1R_1 \left(s + \frac{1}{C_1R_1} \right)}$$

b) i c) se rješavaju Matlab programom:

```
% Polovi i nule frekvencijskog odziva
%
c1 = 1e-7; c2 = 1e-3; r1 = 10e3; r2 = 10;
% polovi i nule
b1 = c2*r2;
a1 = c1*r1;
num = [b1 1];
den = [a1 1];
disp('Nula je')
z = roots(num)
disp('Polovi su')
p = roots(den)
% Frekvencijski odziv
w = logspace(-2,6);
h = freqs(num,den,w);
gain = 20*log10(abs(h));
f = w/(2*pi);
phase = angle(h)*180/pi;
subplot(211),semilogx(f,gain,'r');
xlabel('Frekvencija, Hz')
ylabel('Pojaćanje, dB')
axis([1.0e-2,1.0e6,0,22])
text(2.0e-2,15,'Amplitudni odziv ')
subplot(212),semilogx(f,phase,'b')
xlabel('Frekvencija, Hz')
```

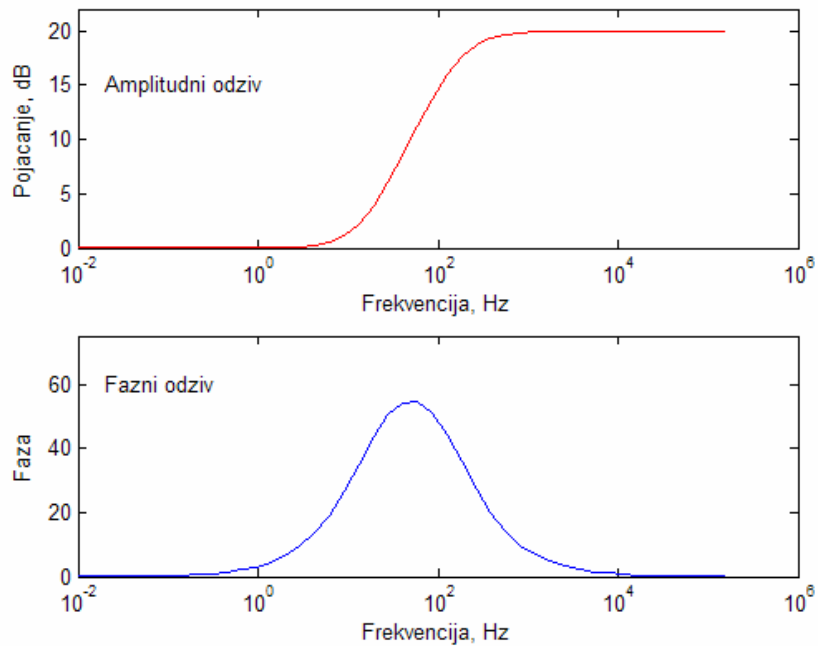


```
ylabel('Faza')  
axis([1.0e-2,1.0e6,0,75])  
text(2.0e-2,60,'Fazni odziv ')
```

što pozivom daje polove i nule:

```
>> pr8_2  
Nula je  
z =  
    -100  
Polovi su  
p =  
    -1000  
>>
```

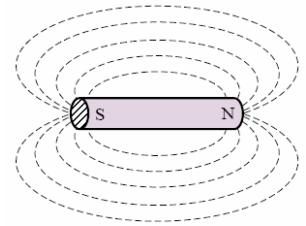
kao i amplitudni i fazni dijagram:



9. MAGNETIZAM

9.1 Magnetske veličine

Magnetske *silnice* (silnica = linija sile) prikazane su zatvorenim linijama koje izlaze iz sjevernog pola magneta (N) i završavaju na južnom (S), te se nastavljaju kroz tijelo magneta od južnog do sjevernog pola.



Skup svih silnica zove se *magnetski tok* i označuje simbolom ϕ . Jače magnetsko polje ima veći tok nego slabije polje. Magnetski tok mjeri se u Wb (čitaj: Weber).

Gustoća toka B je broj magnetskih silnica po jedinici površine A okomite na smjer magnetskog toka:

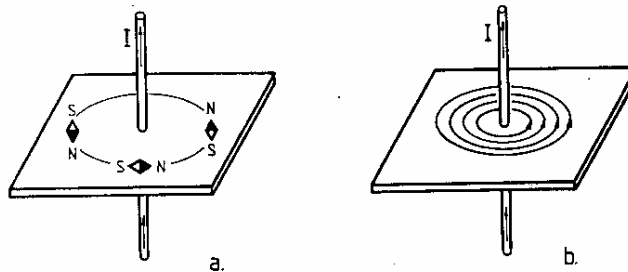
$$B = \frac{\phi}{A} [T]$$

Gustoća toka mjeri se u T (čitaj: Tesla).

Elektromagnetski utjecaj jednog tijela na drugi bez njihova fizičkog dodira, koji izaziva promjene električnog ili magnetskog stanja tijela na koji se djeluje, zove se *indukcija*. Na primjer, permanentni magnet inducira nemagnetizirano željezo da i ono postane magnet.

Magnetski materijali međusobno se razlikuju s obzirom na indukciju. Sposobnost koncentriranja magnetskog toka zove se *permeabilnost* i označuje se s μ . Svaki materijal koji se lako magnetizira ima veliku permeabilnost i naziva se *feromagnetski*.

Električna struja stvara magnetsko polje. Njegovo postojanje može se utvrditi uočavanjem i mjerenjem sile u blizini vodiča kojim električna struja teče:



a) djelovanje sile na magnetsku iglu

b) silnice magnetskog polja

Temeljni zakon odnosa magnetskog polja i struja koja polje stvaraju dan je relacijom (*Amperov zakon* ili *zakon protjecanja*):

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum I$$

gdje je H jedna od temeljnih magnetskih veličina i naziva se *jakost magnetskog toka*, te ima svojstva vektora.

Primijeni li se zakon protjecanja na ravni vodič kojim teče struja jakosti I , za magnetsko polje na koncentričnim kružnicama (silnicama) oko vodiča vrijedi:

$\oint \vec{H} d\vec{l} = I$ gdje uz konstantno H za *silnice* (prikazane koncentričnim kružnicama) vrijedi:

$$\oint dl = l = 2\pi r \quad \text{što daje} \quad \boxed{H = \frac{I}{l} = \frac{I}{2\pi r} [A/m]}$$

Jakost magnetskog polja dakle, opada s udaljenošću od osi vodiča. Ona je također povezana preko permabilnosti materijala s gustoćom toka, pa vrijedi:

$$\boxed{B = \mu H [T]}$$

Što je permeabilnost materijala veća, to je uz istu jakost magnetskog polja gustoća silnica B u induciranom materijalu veća. Zato se gustoća silnica B zove još i *magnetska indukcija*. Veća indukcija postiže se ili većom jakosti polja ili/i korištenjem materijala veće permeabilnosti. Najčešće se permeabilnost materijala μ izražava u relativnim jedinicama μ_r s obzirom na permeabilnost vakuumu μ_0 , tako da je permeabilnost $\mu = \mu_0 \mu_r$, a permeabilnost vakuumu eksperimentalno je dobivena kao:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [Vs / Am]$$

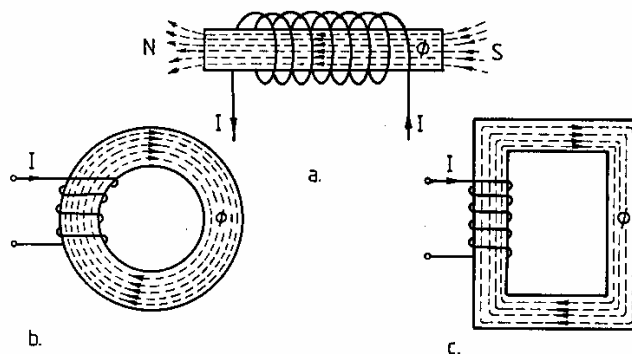
Vrijednosti relativne permeabilnosti μ_r za feromagnetske materijale kreću se između 100 i 190.000.

Budući da je H vektor, a μ skalar, magnetska indukcija B može se također smatrati vektorom. Magnetsko polje je homogeno ako je veličina indukcije u svakoj točki promatranog prostora jednaka.

Zbog visoke permeabilnosti feromagnetski materijali se koriste kao jezgre elektromagneta. Ista magnetska uzbuda u zatvorenoj jezgri će stvoriti μ_r puta veću gustoću silnica nego u slučaju kad jezgre nema. To slijedi izravno iz izraza:

$$B = \mu H = \mu_r \mu_0 H$$

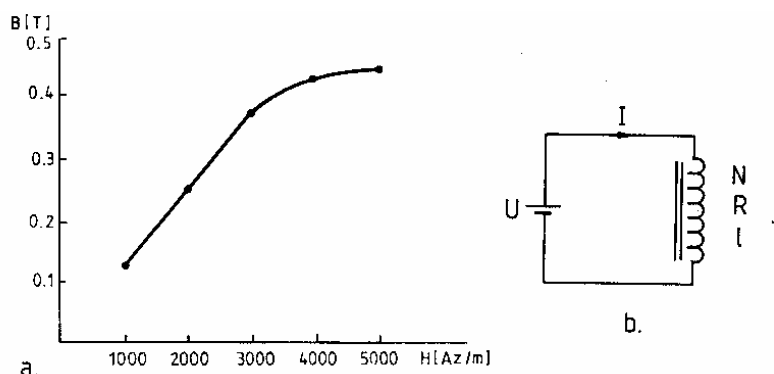
Polje unutar jezgre prema slici a) je homogeno, a nije homogeno na krajevima jezgre i izvan nje. Homogeno polje duž čitave jezgre postiže se izvedbom feromagnetske jezgre u obliku prstena ili okvira.



a) Magnetsko polje štapa
b) Magnetsko polje prstena
c) Magnetsko polje željeznog okvira

Jezgre od neferomagnetskih materijala ponašaju se slično kao vakuum: njihova relativna permeabilnost približno je jednaka jedinici (diamagnetski materijali $\mu_r < 1$, paramagnetski materijali $\mu_r > 1$).

Permeabilnost vakuuma je konstantna veličina i označuje se kao apsolutna permeabilnost. Permeabilnost feromagnetskih materijala pak nije konstantna veličina. Ona ovisi o prethodnom magnetiziranju materijala, iznosu polja H i temperaturi.



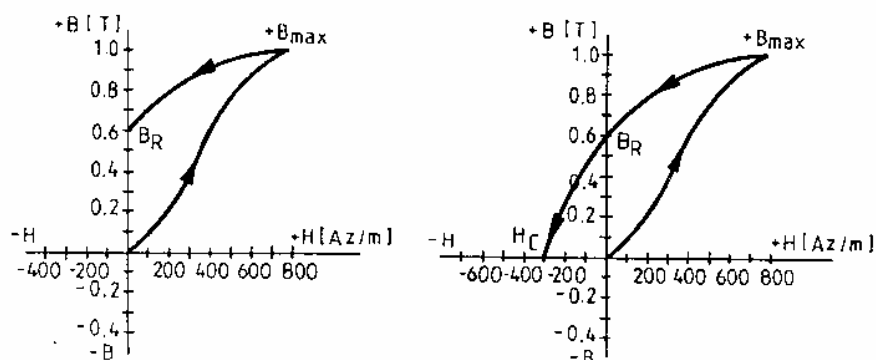
Magnetiziranje feromagnetskog materijala

a) krivulja magnetiziranja

b) strujni krug za magnetiziranje

Što krivulja magnetiziranja prije postiže zasićenje, to μ_r brže pada, približavajući se vrijednosti apsolutne permeabilnosti vakuuma. Ako se pokus magnetiziranja čini s potpuno razmagnetiziranim feromagnetskim materijalom ($B=0$ za $H=0$), onda se dobivena krivulja zove *krivulja prvog magnetiziranja*.

Magnetska indukcija B mijenja se u magnetskom materijalu promjenom magnetske uzbuđe. Zanimljiva pojava nastaje ako se kod neke maksimalne uzbuđe $+H_{\max}$ (i postignute gustoće $+B_{\max}$) uzbuđa počne smanjivati. Magnetska gustoća odupirat će se promjeni - nastojat će zadržati prijašnje stanje magnetičnosti. Nakon što uzbuđa padne na nulu, materijal će još zadržati stanovitu vrijednost indukcije, tzv. *remanentni magnetizam* B_r . Permanentni (trajni) magneti nisu dakle ništa drugo nego feromagnetski materijal sa zaostalim magnetizmom.



a) Remanentni magnetizam

b) Koercitivnost

Taj se magnetizam može poništiti samo uzbuđnom strujom suprotnog predznaka. Vrijednost uzbuđe magnetskog polja H_c kod koje se to postiže zove se *koercitivnost* ili *koercitivna sila*. Nastavi li se povećanje uzbuđe suprotnog smjera, stvara se magnetski tok i gustoća suprotnog predznaka. Porast takve uzbuđe također vodi do magnetskog zasićenja -

B_{\max} uz $-H_{\max}$. Sličnim postupkom (smanjivanje uzbude, tj. struje do nule i povećanjem do $+H_{\max}$) zatvara se ciklus, a nastala krivulja zove se *petlja histereze*.

Magnetski materijali dijele se s obzirom na koercitivnost na meke i tvrde materijale. Meki materijali imaju malu koercitivnost, dakle usku petlju histereze, i veliku relativnu permeabilnost. Ti materijali koriste se za jezgre transformatora, statore i rotore električnih strojeva, releje i sl. Tvrđi magnetski materijali imaju veliku koercitivnost i veliku remanenciju. Služe za izradu trajnih magneta, a proizvode se od legura čelika s dodatkom volframa, kobalta, nikla, aluminija i titana.

Feromagnetici gube svoja magnetska svojstva kad im temperatura prijeđe stanovitu vrijednost (Curieeva tačka - za željezo oko 760°C). Sve magnetske veličine dane su u tablici s pripadnim simbolima i jedinicama:

Variable	Symbol	Units
Current	I	A
Magnetic flux density	B	$\text{Wb/m}^2 = \text{T}$
Magnetic flux	ϕ	Wb
Magnetic field intensity	H	A/m
Electromotive force	e	V
Magnetomotive force	\mathcal{F}	$\text{A} \cdot \text{t}$
Flux linkage	λ	$\text{Wb} \cdot \text{t}$

Primjer 9.1

Treba nacrtati za okoliš ravnog vodiča protjecanog strujom ovisnost jakosti magnetskog polja H o promjeru vodiča i struji.

Rješenje

```
% Izracunavanje jakosti polja H oko ravnog vodica
%
udaljenost=input('Maksimalna udaljenost (npr. d=30): ');
promjer=input('Promjer vodica (npr. R=3): ');
while 1
    struja=input('Jakost struje (npr. I=5, 0 za kraj): ');
    if (struja>0)
        r=0:0.1:udaljenost;
        R=promjer;
        I=struja;
        H=[];
        for i=1:length(r)
            if r(i)<R
                H(i)=I*r(i)/(2 * pi * R.^2);
            else
                H(i)=I/(2 * pi *r(i));
            end
        end
    end
end
```

```

    end
    plot(r,H);
    title('H=f(I,r)');
    xlabel('r [m]'); ylabel('H [A/m]');
    hold on;
else
    hold off;
    break;
end
if I<=0
    break;
end
end
disp ('Svrsetak!');

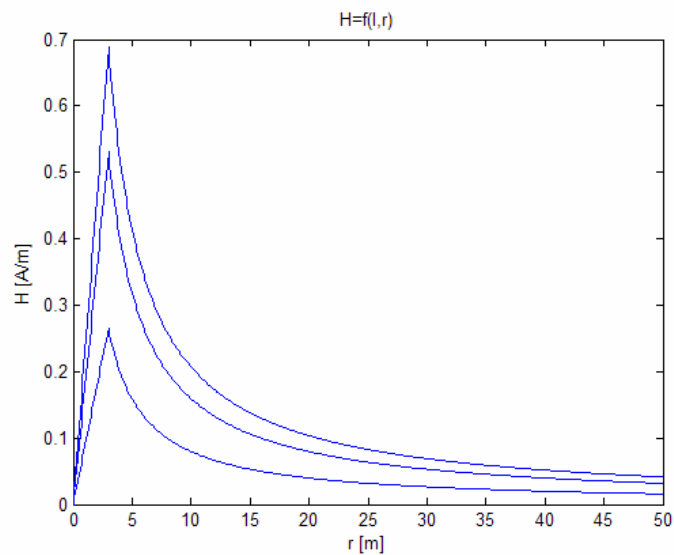
```

koji pozivom, i zadavanjem traženih veličina, daje:

```

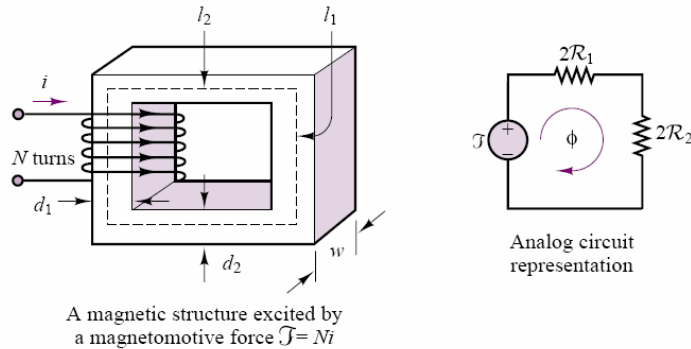
>> Pr9_1
Maksimalna udaljenost (npr. d=30): 50
Promjer vodica (npr. R=3): 3
Jakost struje (npr. I=5, 0 za kraj): 5
Jakost struje (npr. I=5, 0 za kraj): 10
Jakost struje (npr. I=5, 0 za kraj): 13
Jakost struje (npr. I=5, 0 za kraj): 0
Svrsetak!

```



9.2 Magnetski krug

Moguće je, po analogiji s električnim krugom, govoriti o magnetskom krugu. Rasipanje magnetskih silnica u prostor oko takva kruga u prvom se pristupu zanemaruje - velika permeabilnost feromagnetskog materijala čini da sve silnice prolaze kroz materijal (osim u slučaju zračnih raspora).



Za jednostavni magnetski krug magnetski tok ϕ jednak je:

$$\phi = B A = \mu H A = \mu \frac{N I}{l} A = \frac{N I}{\frac{l}{\mu} \cdot \frac{1}{A}} = \frac{MMS}{R_m} \quad [Wb]$$

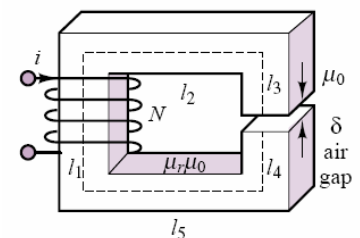
gdje su R_m tzv. "magnetski otpor" ili *reluktancija*, a MMS "magnetomotorna sila" (često se označuje sa \mathcal{F}).

Dobiveni izraz sličan je izrazu za Ohmov zakon:

$$I = \frac{E}{\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{A}} = \frac{EMS}{R}$$

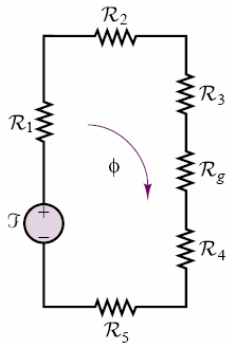
pa se stoga izraz naziva *Ohmov zakon za magnetske krugove*. Tok ϕ odgovara električnoj struji I , magnetomotorna sila MMS elektromotornoj sili EMS, a permeabilnost specifičnoj vodljivosti metalnog vodiča.

U slučaju složenog magnetskog kruga, dobivenog na primjer umetanjem zračnog raspora u jednostavni magnetski krug, prilike se mijenjaju. Magnetski otpor zračnog raspora razlikuje se od magnetskog otpora feromagnetskog materijala. S obzirom da ukupni otpor raste, magnetski se tok smanjuje (uz konstantnu struju). Ako bi se željela ista indukcija kao u slučaju bez zračnog raspora, bilo bi potrebno više amper-zavoja uzbude. Ako uzmemo u obzir samo dva medija (željezo i zrak) onda vrijedi:



$$\phi = \frac{N I}{\frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{l_1}{A_1} + \frac{1}{\mu_2} \cdot \frac{l_2}{A_2}} = \frac{MMS}{R_{m1} + R_{m2}}$$

dok bi točnija ekvivalentna shema po odsječcima bila:



$$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu_r \mu_0 A} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu_r \mu_0 A} \quad \mathcal{R}_3 = \frac{l_3}{\mu_r \mu_0 A}$$

$$\mathcal{R}_4 = \frac{l_4}{\mu_r \mu_0 A} \quad \mathcal{R}_5 = \frac{l_5}{\mu_r \mu_0 A} \quad \mathcal{R}_g = \frac{\delta}{\mu_0 A_g}$$

Dobro je uočiti da se i ovdje serijski spoj magnetskih otpora dobiva njihovim zbrajanjem (kao što bi se njihov paralelan spoj dobio kao recipročna vrijednost zbroja pojedinačnih recipročnih vrijednosti). Iz pojednostavljenog izraza slijedi

$$\frac{\phi}{A_1} \frac{l_1}{\mu_1} + \frac{\phi}{A_2} \frac{l_2}{\mu_2} = N I \quad \text{odakle je} \quad B_1 \frac{l_1}{\mu_1} + B_2 \frac{l_2}{\mu_2} = N I$$

$$\text{odnosno} \quad H_1 l_1 + H_2 l_2 = N I$$

što je već poznati Amperov zakonom koji odgovara drugom Kirchhoffovu zakonu u električnim krugovima.

Općenito, za magnetski krug sa i različitih odsječaka kroz koji prolazi isti tok vrijedi:

$$\phi = \frac{N I}{\sum_i \frac{1}{\mu_i} \cdot \frac{l_i}{A_i}}$$

9.3 Djelovanje magnetskog polja

Svaki gibljivi naboj stvara magnetsko polje. Kako je magnetsko polje karakterizirano silom kojom se dva pola magneta privlače ili odbijaju, to znači da će i na gibljivi naboj u magnetskom polju djelovati sila.

Pritom nije važno kojeg je porijekla magnetsko polje koje djeluje silom - je li to magnetsko polje permanentnog magneta, elektromagneta ili polje vodiča kojim teče struja.

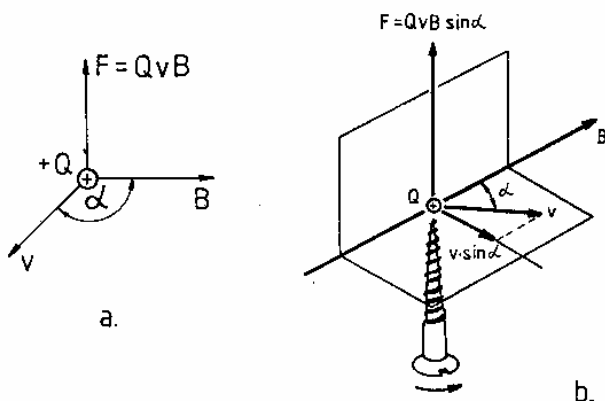
9.3.1. Sila na naboj

Ako se naboj giba u magnetskom polju, na njega djeluje sila F koja ovisi o naboju Q i brzini naboja v , te magnetskoj indukciji B magnetskog polja:

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{ili, izraženo skalarno} \quad F = Q v B \sin \alpha$$

gdje je α kut između v i B vektora.

Izraz u zagradi predočuje vanjski umnožak ("ex-produkt") vektora \vec{v} i \vec{B} .

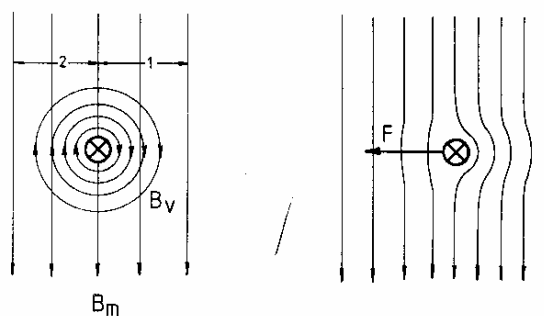


Djelovanje sile na naboj koji se giba u magnetskom polju pod kutem

a. $\alpha = 90$

b) $\alpha < 90$

Djelovanje sile na naboj objašnjava se promjenama nastalim u magnetskom polju u kojem se naboj giba. Kako se vidi na slici silnice magnetskog polja B_v stvorenog gibanjem pozitivnog naboja kroz vodič podudaraju se u području -1- sa smjerom polja B_m u kojem se naboj giba, dok im je u području -2- smjer suprotan. Rezultantno polje daje smjer sile. Smjer od oka promatrača okomito na površinu označuje se s križićem (x).



Magnetsko polje naboja u gibanju

a) zajedno sa poljem

b) resultantno polje

Treba naglasiti da je smjer djelovanja sile za negativan naboj suprotan smjeru sile na pozitivan naboj: $\vec{F}_{-Q} = -Q(\vec{v} \times \vec{B}) = -F_{+Q}$

9.3.2. Sila na vodič kojim teče struja

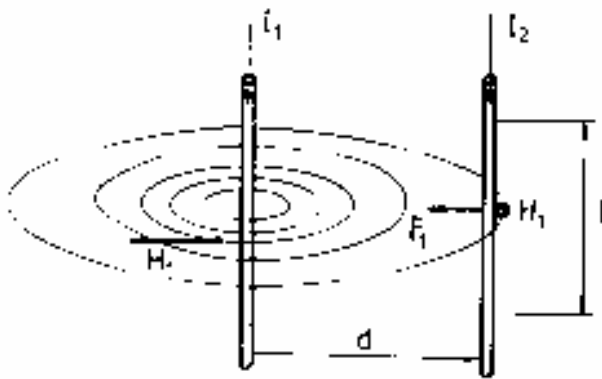
Magnetska sila na vodič kojim teče električna struja proizlazi iz već opisane sile na svaki pojedini naboj koji se kreće u magnetskom polju. Korištenjem izraza za magnetsku silu na naboj dobiva se izraz za silu na vodič kojim teče struja. Ako je vodič postavljen okomito na magnetske silnice vrijedi:

$$dF = B \, dQ \, v = B \, dQ \frac{dl}{dt} = B \frac{dQ}{dt} dl = B \, I \, dl$$

pa je na duljini l ukupna sila jednaka:

$$F = B \, I \, l$$

9.3.3. Sila između dva vodiča kroz koje teče struja



Između dva vodiča kroz koje teku struje javlja se sila. Zbog jednostavnosti izvoda pretpostavlja se da su vodiči ravni, dugi i međusobno paralelni na udaljenosti d .

Iz slike se vidi da će sila F_1 , kojom magnetsko polje H_1 (nastalo strujom I_1) privlači vodič kroz koji teče struja I_2 , biti jednaka:

$$F_1 = B_1 I_2 l = \mu_0 H_1 I_2 l$$

u polju jakosti $H_1 = \frac{I_1}{2\pi d}$

što daje:

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d} \quad [N]$$

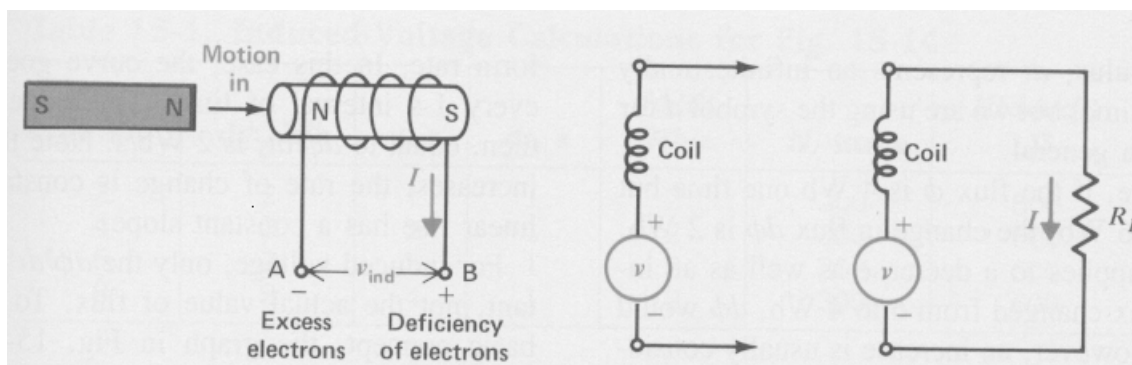
Treba uočiti da i magnetsko polje struje I_2 djeluje istom silom na vodič kojim teče struja I_1 . Takvo djelovanje dviju struja naziva se *elektrodinamičko djelovanje*. Lako je pokazati da će se dva paralelna vodiča u kojima teku struje u istom smjeru međusobno privlačiti, dok će se u paralelnim vodičima u kojima teku struje u različitom smjeru vodiči međusobno odbijati. U internacionalnom SI sustavu jedinica definirana je jedinica jednog ampera (A) na temelju predloženog elektrodinamičkog djelovanja - dva vodiča razmaknuta $d=1$ m, kroz koje teče struja od 1 A, tj. $I_1=I_2=1$ A, privlače se silom od:

$$F = \frac{\mu_0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{2\pi \cdot 1} = \frac{4\pi 10^{-7}}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \quad [N]$$

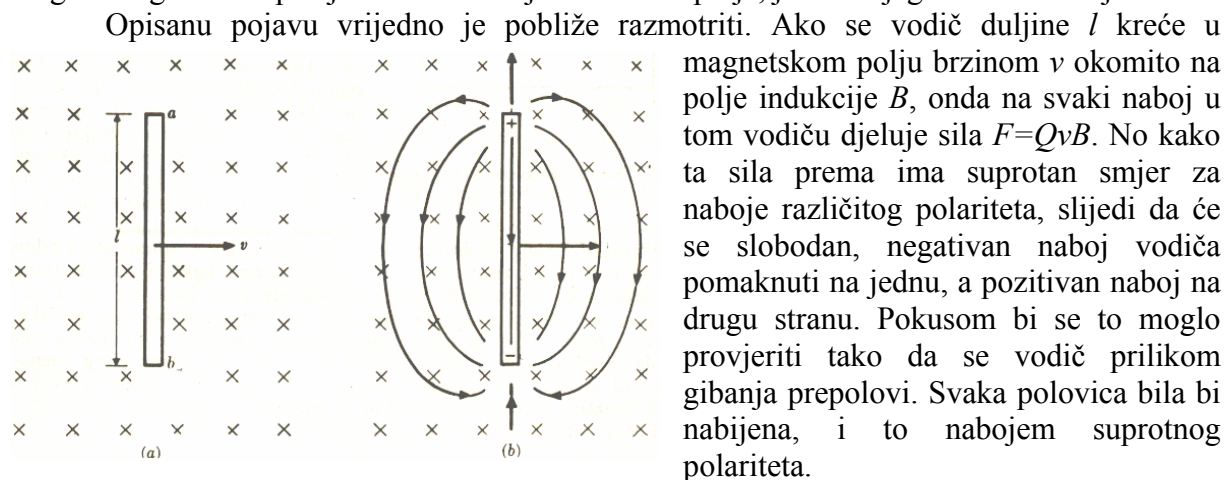
9.4 Elektromagnetska indukcija

Neposredno pretvaranje mehaničke energije u električnu je moguće (M. Faraday, J. Henry). Današnja proizvodnja, prijenos i potrošnja električne energije nezamislive su bez tog otkrića.

Faraday je u okoliš magneta donio žičani zavoj. Onda je naglo udaljio magnet (ili zavoj, svedeno): u žici je potekla električna struja !



Magnetski se zavoj nije nalazio u polju iste jakosti prije i poslije udaljavanja (jakost polja i broj silnica koje kroz zavoj prolaze opada s udaljenošću). Uzrok je dakle promjena magnetskog toka. A posljedica svakako je električno polje, jer bez njega nema ni struje.



Elektromagnetska indukcija

a) gibanje vodiča b) stvaranje naboja i električnog polja

Na slici b) prikazane su i silnice električnog polja koje nastaje zbog prisutnosti nabijenih krajeva vodiča. Ta se pojava naziva *elektromagnetska indukcija*, a dobiveni naboj *inducirani naboj*.

Ako se to kretanje vodiča ostvari na vodljivom okviru, inducirani će naboj poteći okvirom i struja će teći dok se vodič po okviru giba. Ta se struja naziva *inducirana struja*. Izraz za iznos inducirano naboja najlakše se dobiva preko energetskih odnosa. Naime, pomak naboja Q od točke a do b znači rad ostvaren silom F na putu l . Iznos sile je poznat, pa slijedi:

$$W = F l = Q l v B \quad [J] \quad \text{a kako je iz elektrostatike poznato } e = \frac{W}{Q}$$

slijedi:

$$e = l v B$$

Uzimajući u obzir i vektorska obilježja promatranih veličina, taj se izraz može pisati i kao:

$$e = \vec{l} (\vec{v} \times \vec{B})$$

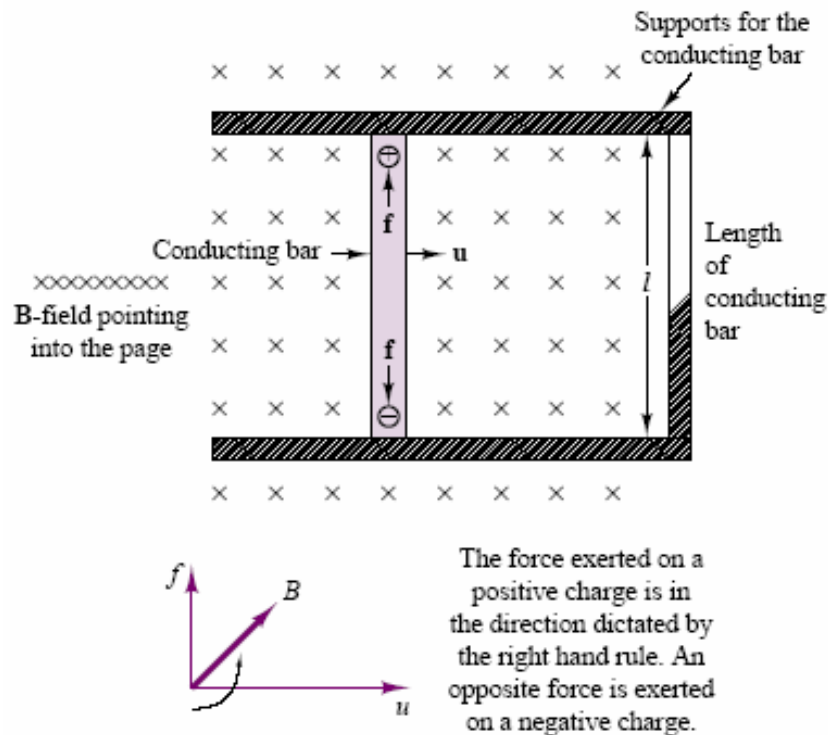
Inducirani napon može se promotriti i s druge točke gledišta. Za infinitezimalni pomak vodiča u gibanju, površina pravokutnog okvira omeđenog pomičnim vodičem promijeni se za iznos

$$dA = l ds$$

Budući da magnetski tok ϕ ovisi o površini, slijedi da će se i on promijeniti:

$$d\phi = B dA = B l ds$$

Taj se pomak dogodio u infinitezimalnom vremenu dt , pa izraz postaje: $\frac{d\phi}{dt} = l B \frac{ds}{dt} = l B v$.



Budući da je $e = l B v$ slijedi da je trenutna vrijednost napona numerički jednaka brzini promjene magnetskog toka, pa se povezujući izraze, dobije:

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

Ovaj izraz poznat je kao *Faradayev zakon (elektromagnetske indukcije)*.

Negativan predznak govori o smjeru inducirane napona (a takav je da izaziva posljedice koje će se suprotstavljati promjeni polja).

Faradayev zakon sadrži mnogo više nego što je bilo pokazano. Svejedno je da li pomičemo magnet ili zavoj: napon se inducira kako god se tok mijenja. Štoviše, ima slučaja kad je i vodič i polje (magnet) u mirovanju, a postoji vremenska promjena polja - i onda se u vodiču obuhvaćenom tim promjenama inducira napon. Vremenska promjena toka $d\phi$ obično se ostvaruje ili promjenom efektivne površine u stalnoj magnetskoj indukciji B (npr. okretanjem ili pomakom zavoja) ili izmjeničnom strujom koja stvara izmjenični tok.

9.4.1. Lenzov zakon

F.E. Lenzu pripisuje se sljedeće korisno pravilo za predviđanje smjera inducirane struje. Ono glasi: Smjer inducirane struje uvijek je takav da se suprotstavlja ili opire uzroku koji ju je proizveo.

Inducirana struja će također, jer je magnetsko polje nerazdvojni pratitelj struje, stvarati magnetsko polje. Njegov će se tok suprotstavljati polju u kojem se vodič kreće. Ako se

površina povećava, povećava se i magnetski tok. Inducirana struja pak nastoji smanjiti iznos toka (jer generira drugi tok suprotnog smjera).

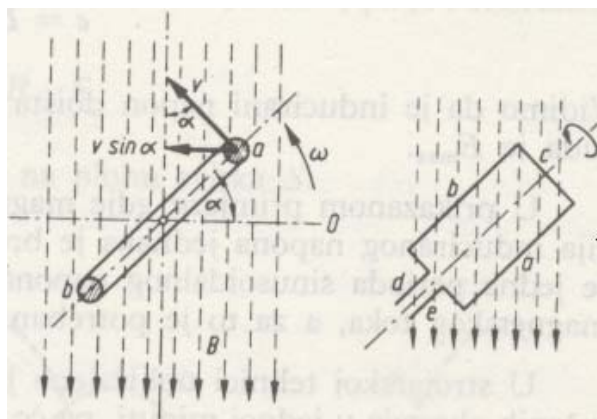
Kad bi se vodič kretao u suprotnom smjeru, i struja bi imala suprotan smjer od prikazanog. U tom bi slučaju polje opadalo, a inducirana struja bi ga podržavala (uvećavala).

To na stanovit način predstavlja analogiju s mehaničkim načelom inercije. Kad god pokušamo promijeniti postojeće stanje prirodnog sustava, sustav će učiniti sve moguće da nas u tome spriječi. Negativan predznak Faradayeva zakona u skladu je s Lenzovim zakonom.

9.4.2 Induciranje harmoničkog napona

Faradayev zakon primijenjen na N zavoja žice daje inducirani napon uvećan N puta:

$$e = -N \frac{d\phi}{dt}$$



Induciranje harmoničkog napona

Neka se N takvih zavoja okreće konstantnom brzinom u homogenom magnetskom polju. Iznos magnetskog toka koji prolazi kroz zavoj se mijenja i ovisan je o trenutnom kutu površine (okomice na površinu) zavoja prema silnicama magnetskog toka. Za broj silnica kroz površinu vrijedi:

$$\phi = B A \cos \alpha$$

Promjena kuta α (zbog okretanja) mijenja tok u zavoj, a promjena toka inducira napon. Trenutna vrijednost induciranog napona pritom je jednaka:

$$e = -N \frac{d\phi}{dt} = -N \frac{d(B A \cos \alpha)}{dt} = N B A \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

Omjer promjene kuta i pripadnog vremena zove se još i *kutna brzina* $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ što uvrštenjem u gornji izraz daje:

$$e = N B A \omega \sin \alpha$$

Znači da rotacija N zavoja u magnetskom polju daje napon harmoničkog (sinusnog) oblika. Ako se najveća trenutna vrijednost napona označi s E_m :

9. Magnetizam

$$E_m = N B A \omega$$

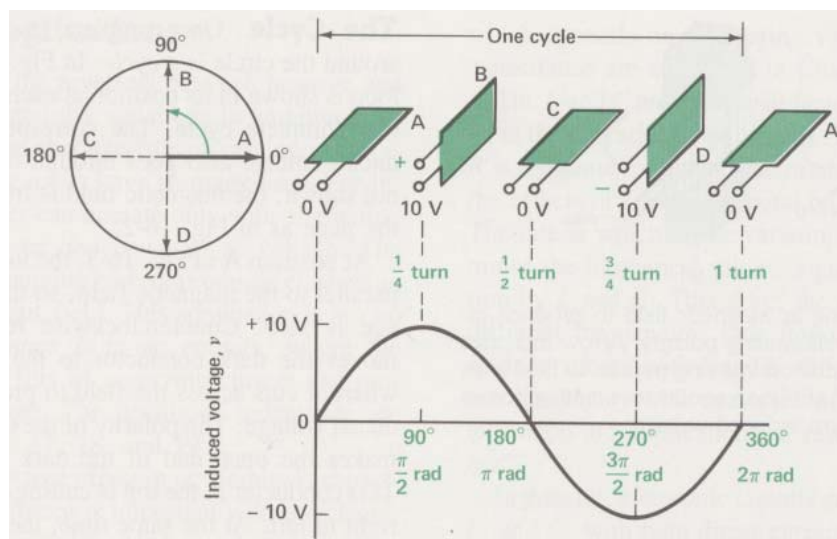
onda se izraz može pisati kao:

$$e = E_m \sin \alpha$$

Ako je kutna brzina konstantna, vrijedi:

$$\alpha = \omega t \quad \text{ili} \quad \alpha = 2\pi f t,$$

gdje je f - broj okretaja u sekundi ili numerička frekvencija, što konačno daje



$$e = E_m \sin \omega t = E_m \sin 2\pi f t = E_m \sin \frac{2\pi}{T} t$$

gdje je T - vrijeme jednog okretaja.

Tako je eksplicitno opisana vrijednost induciranog napona u ovisnosti o vremenu t .

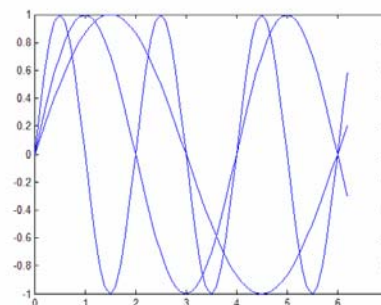
Opisani slučaj predstavlja najjednostavniji oblik generatora izmjeničnog napona. Takav napon upotrijebljen kao naponski izvor u zatvorenom strujnom krugu dat će izmjeničnu struju.

Primjer 9.2

Pokazati Matlab programom kako se promjenom frekvencije f mijenja valni oblik induciranog napona e .

Rješenje

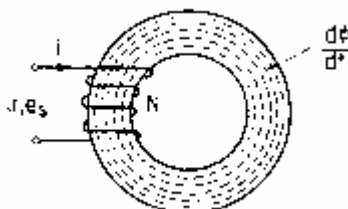
```
% Usporedba induciranog napona razlicitih
% frekvencija
t=0:0.1:2*pi;
T=[2 4 6];
hold on
for j=1:3
    plot(t,sin(2*pi*t/T(j)));
end
```



9.4.3. Samoindukcija

Istosmjerna struja stvara stalni (konstantni) magnetski tok, a izmjenična izmjenični. Svaki promjenljivi tok, a to znači i izmjenični, inducira napon. U zavojnici kojom teče izmjenična struja induciraće se, dakle, napon zbog promjene vlastite struje (koja mijenja magnetski tok). Dakako, napon će se inducirati, prema Faradayevu zakonu kako god se tok mijenja. Ta se pojava induciranja napona proizvedenog od vlastitog promjenljivog toka zove *samoindukcija*.

Neka je idealna zavojnica s N zavoja smještena na prstenastu feromagnetsku jezgru:



Uvrštenjem $d\Phi = \frac{\mu N A}{l} di$ u izraz faradayevog zakona $e_s = -N \frac{d\Phi}{dt}$ dobiva se:

$$e_s = -N \frac{\frac{\mu N A}{l} di}{dt} \quad \text{odakle slijedi} \quad e_s = -N \frac{\mu N A}{l} \frac{di}{dt} = -\frac{\mu N^2 A}{l} \frac{di}{dt}$$

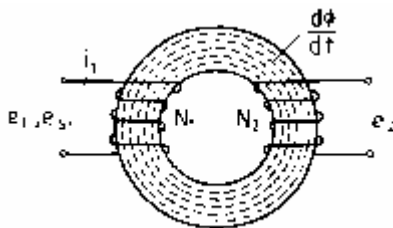
Koeficijent $\mu N^2 A / l$ zove se *koeficijent samoindukcije* ili *induktivitet zavojnice*. Označuje se simbolom L , a izračunava u H (henri).

$$e_s = -L \frac{di}{dt}$$

Induktivitet od 1H ima zavojnica u kojoj se pri strujnoj promjeni od 1A/s inducira napon od 1V: $[H] = [Vs / A] = [Wb / A]$. Prema II. Kirchhoffovu zakonu mora vrijediti: $e_s + e = 0$.

9.4.4. Međuindukcija

Zanimljivo je promotriti utjecaj promjenljivog toka jednog svitka (zavojnice) na drugi svitak koji obuhvaća čitav ili dio promjenljivog toka. Neka se na istu feromagnetsku jezgru namota dodatna zavojnica s N_2 zavoja, kako je prikazano na slici:



Promjenljiva struja u prvoj zavojnici stvara promjenljivo magnetsko polje $d\Phi_1/dt$ koje prolazi jezgrom. Zbog samoindukcije u prvoj će se zavojnici inducirati napon: $e_1 = -N_1 \frac{d\Phi_1}{dt}$.

Međutim i druga zavojnica obuhvaća isti promjenljivi tok. Zato će se i u njoj inducirati napon, ovisno o broju njezinih zavoja $e_2 = -N_2 \frac{d\phi_1}{dt}$.

Treba još pogledati o čemu ovisi promjenljivi tok ϕ_1 , napisati uzrok njegove promjene. Slično kao kod samindukcije slijedi $\phi_1 = B A = \mu H_1 A = \mu \frac{N_1 i_1}{l} A$ što uvrštenjem daje:

$$e_2 = -\frac{\mu N_1 N_2 A}{l} \frac{di_1}{dt} = -M \frac{di_1}{dt}$$

Koeficijent M zove se *međuinduktivitet* i ima istu dimenziju (H) kao induktivitet. Međuinduktivitet se može izraziti i preko induktiviteta pojedinih svitaka. Budući da oba svitka obuhvaćaju istu jezgru, za L_1 slijedi:

$$L_1 = \frac{\mu N_1^2 A}{l} = \frac{N_1^2}{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{A}} = \frac{N_1^2}{R_m} \quad \text{i potpuno analogno} \quad L_2 = \frac{\mu N_2^2 A}{l} = \frac{N_2^2}{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{A}} = \frac{N_2^2}{R_m}$$

Povezujući gornje izraze dobije se:

$$M = \frac{N_1 \cdot N_2}{R_m} = \frac{\sqrt{L_1 R_m} \cdot \sqrt{L_2 R_m}}{R_m} = \sqrt{L_1 L_2}$$

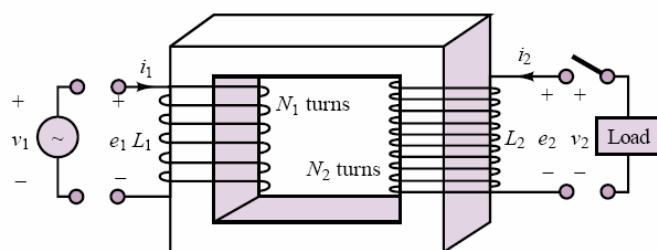
Ta je veza dobivena za slučaj potpunog magnetskog vezanja - sav tok od prve zavojnice prolazi kroz drugu zavojnicu. Ako to nije slučaj, u proračun međuinduktiviteta treba uzeti i dodatni faktor k magnetskog vezanja ($k < 1$):

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

Primjer: Zanimljivo je pokazati vezu induciranog napona u drugoj zavojnici (sekundar) s naponom prve zavojnice (primar). Dijeljenjem izraza dobije se:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad \text{iz čega slijedi napon sekundara} \quad e_2 = \frac{N_2}{N_1} e_1$$

Vidi se da se naponi primara i sekundara odnose kao omjeri njihova broja zavoja. Izlazni napon se može mijenjati (povećavati ili smanjivati) s različitim brojem zavoja. Po tom načelu radi transformator.



Dobro je odmah uočiti da je inducirani napon također promjenljiv, što u praksi znači da se izmjenični napon primara transformira u izmjenični napon željenog iznosa na sekundaru. Kod idealnog transformatora (bez gubitaka), snage na primarnoj i sekundarnoj strani su jednake, što znači da je pri višem sekundarnom naponu (veći broj zavoja sekundara), sekundarna struja manja. Dobiti veći napon na sekundarnoj strani (povećanjem broja zavoja) moguće je samo uz smanjenje sekundarne struje.

Transformatori tako i služe pri prijenosu energije na velike udaljenosti. Visokonaponski dalekovodi imaju vrlo visok napon, uz malu struju, čime se minimiziraju gubici uslijed zagrijavanja prijenosnog vodiča.

9.5 Energija magnetskog polja

Magnetsko polje, kao i električno, posjeduje energiju. Iznos energije W pohranjene u zavojnici induktiviteta L jednak je radu koji se obavi pomicanjem naboja protiv napona samoindukcije e_s . U početku $t=0$, neka je $i=0$, a nakon toga neka struja raste s prirastom di/dt . U vremenskom intervalu dt naboj koji kroz zavojnicu prođe je prema $dQ=i dt$, a samoinducirani napon koji sprečava gibanje naboja je $e_s = -L \frac{di}{dt}$, iz čega slijedi da je učinjeni rad jednak:

$$dW = -e_s dQ = L \frac{di}{dt} i dt = L i di$$

Ukupan rad W potreban za povećanje struje od početne do konačne vrijednosti je prema tome:

$$W = \int dW = L \int_0^i i di = \frac{L i^2}{2}$$

Dok teče izmjenična struja kroz zavojnicu induktiviteta L , ona sadrži magnetsku energiju $\frac{1}{2} L i^2$. Ako napon na zavojnici koji je struju prouzrokovao nestane, onda će ta energija trošeći se nastojati održati tok struje, pa njezin iznos neće trenutačno pasti na nulu.

Zanimljivo je pogledati gdje je ova energija uskladištena (u električnom polju kondenzatora bila je u dielektriku između ploča). Povezivanjem izraza slijedi:

$$W = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu N^2 A}{l} \left(\frac{H l}{N} \right)^2 = \frac{\mu H^2}{2} A l$$

Budući da je $A l = V$ može se zaključiti da je energija također pohranjena u volumenu koji zavojnica obuhvaća i da ovisi o kvadratu jakosti magnetskog polja, odnosno indukcije koja tu postoji.

$$W = \frac{\mu H^2}{2} V = \frac{B^2}{2\mu} V = \frac{B H}{2} V$$

10. ELEKTRIČNI STROJEVI

10.1 Osnove električnih strojeva

Električni strojevi pretvaraju jedan oblik energije u drugi oblik na principu elektromagnetske indukcije i sile na vodič u magnetskom polju koji je protjecan strujom.

Prema namjeni dijele se na:

- *generatore*
- *motore*
- *rotacijske pretvornike*
- *transformatore*

Podjela električnih strojeva može biti prema različitim kriterijima:

- vrsti struje
- izvedbenom obliku
- brzini vrtnje
- veličini
- vrsti mehaničke zaštite itd.

Veličina koja karakterizira ekonomičnost realnog stroja je njegov *stupanj iskoristivosti* ili *korisnost*:

$$\eta = \frac{\text{dobivena energija}}{\text{dovedena energija}} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_1 - A_g}{A_1} = \frac{A_2}{A_2 + A_g} < 1$$

Pritom je kod motora dobivena energija mehanička, a dovedena električka, dok je kod generatora obratno. Može se izraziti i omjerom dobivene i dovedene snage:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}$$

Životna dob električnog stroja ovisi o njegovom zagrijavanju, posljedici gubitaka energije koji se pretežno pretvaraju u toplinu.

Gubici u električnom stroju:

- *gubici u vodičima* → zbog prolaza struje kroz namot otpora R (omski otpor)
- *gubici u željezu* → zbog pojave histereze i vrtložnih struja
- *dielektrički gubici* → gubici u izolaciji (dolaze do izražaja kod vrlo visokih napona)
- *gubici trenja i ventilacije* → mehanički gubici kod rotacijskih strojeva

Zakoni na kojima se temelji princip rada električnih strojeva:

- zakon elektromagnetske indukcije
- zakon protjecanja
- zakon sile u magnetskom polju

10.1.1 Princip izvedbe električnih strojeva

Električni stroj treba imati dva osnovna dijela:

- *magnetski dio* (jezgra od feromagnetskog materijala)
- *električni dio* (izveden od dva ili više namota)

za izradu električnih strojeva koriste se:

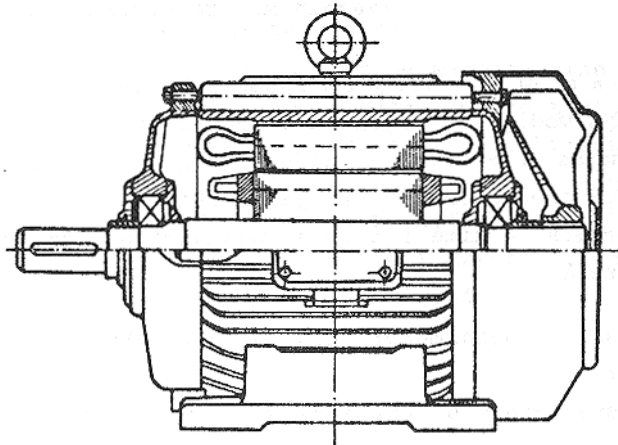
- konstrukcijski materijali
- magnetski materijali
- vodljivi materijali
- izolacijski materijali

Pretvorba mehaničke energije u električnu i obratno postoji samo onda, ako postoji relativno gibanje vodiča prema magnetskom polju, zato se rotacijski električni strojevi sastoje od dva osnovna dijela:

Nepomični dio ili *stator* - sastavljen je od željezne jezgre, kućišta, namota i priključnica.

Pomični dio ili *rotor* - sastavljen je od željezne jezgre, namota kliznih kontakata, osovine i ventilatora.

Između statora i rotora nalazi se *zračni raspor* koji omogućuje gibanje, jer se u njemu elektromagnetskim putem stvara magnetsko polje indukcije B .

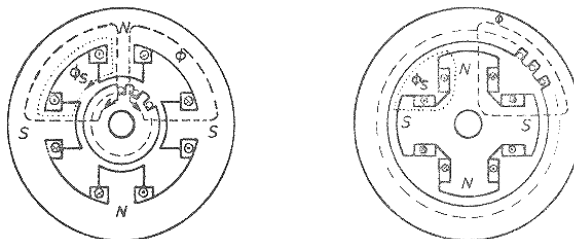


Presjek kaveznog asinkronog motora

10.1.2 Magnetski krug električnih strojeva

Magnetski krug električnog stroja sastoji se od:

- feromagnetskog materijala (pretežno)
- neferomagnetskog materijala (djelomično)
- zračnog raspora



Magnetski krug četveropolnog stroja

Kroz magnetski krug zatvara se *glavni magnetski tok* Φ (korisni magnetski tok). Zajednički ga uzbuđuju svi namoti rezultirajućim protjecanjem i obuhvaća namot statora i rotora, a inducira aktivni napon.

Rasipni magnetski tok Φ_s djelomično se zatvara unutar magnetskog kruga, ne obuhvaća oba namota i ne doprinosi induciranju aktivnog napona, već inducira *rasipne padove napona* (padovi napona u induktivnim otporima).

10.1.3 Namot električnih strojeva

Namot električnih strojeva je skup svih vodiča međusobno spojenih po određenom pravilu i smještenih u (ili na) željeznu jezgru.

Podjela namota prema smještaju:

- statorski namot
- rotorski namot

Podjela namota prema namjeni:

- uzbudni namot (stvaranje magnetskog toka)
- radni ili armaturni namot (direktno sudjeluje u pretvorbi energije)

Podjela namota prema izvedbi:

- koncentrirani namot (obično uzbudni)
- raspodijeljeni namot (obično radni, ali može biti i uzbudni) – ulaže se u uzdužne uture po obodu statora i/ili rotora, koji mogu biti otvoreni i zatvoreni.

10.1.4 Pogonska stanja električnih strojeva

Električni stroj u primjeni može biti u trajnom, kratkotrajnom ili intermitiranom pogonu. Osnovno pogonsko stanje je *opterećenje*, koje se nalazi između dva krajnja pogonska stanja: *praznog hoda* i *kratkog spoja*.

Prazni hod – neopterećeno stanje, gubici i zagrijavanje su najmanji.

$$\eta = 0 \quad , \quad P_0 \cong P_{Fe}$$

Kratki spoj – najveće opterećenje, gubici i zagrijavanje su najveći (opasnost od pregaranja).

$$\eta = 0 \quad , \quad P_k \cong P_{Cu} = I_k^2 \cdot R$$

10.2 SINKRONI STROJEVI

Sinkroni strojevi su strojevi izmjenične struje koji imaju brzinu vrtnje n čvrsto određenu s frekvencijom f i brojem pari polova p prema:

$$n_s = \frac{f}{p} \quad [s^{-1}]$$

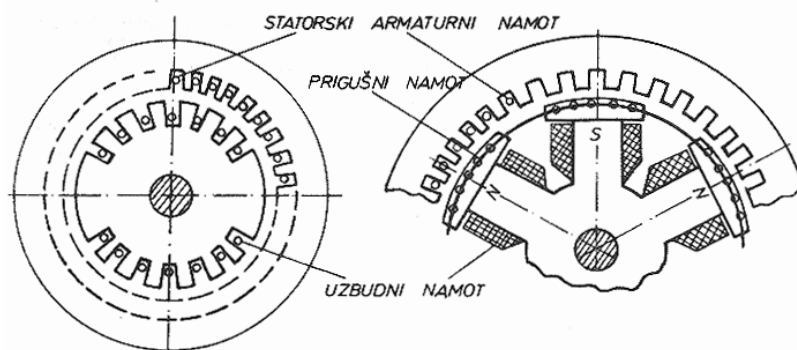
Pretežno se koriste kao generatori, a mogu se koristiti i kao motori.

Prema brzini vrtnje sinkroni generatori mogu biti:

- a) *Brzohodni* ($n_s > 1000 \text{ min}^{-1}$) – pogonjeni parnom ili plinskom turbinom
- b) *Srednjih brzina* ($200 < n_s < 1000 \text{ min}^{-1}$) – pogonjeni motorom s unutarnjim izgaranjem, odnosno s vodnom turbinom za visoki i srednji pad vode
- c) *Sporohodni* ($60 < n_s < 200 \text{ min}^{-1}$) – pogonjeni vodnom turbinom za mali pad vode

Prema izvedbi rotora postoje dvije izvedbe sinkronih strojeva:

- a) Strojevi s neistaknutim polovima (okrugli ili cilindrični rotor) – TURBOGENERATORI
- b) Strojevi s istaknutim polovima – HIDROGENERATORI



a) TURBOGENERATOR ($p=1$) b) HIDROGENERATOR ($p=3$)

Presjek sinkronog stroja

10.2.1 Princip izvedbe sinkronog stroja

Uobičajena izvedba sinkronog stroja:

- armaturni (radni) namot nalazi se na statoru raspodijeljen po utorima
- uzbudni dio stroja nalazi se na rotoru (koncentriran za hidrorotor, raspodijeljen za turborotor)

Uzbuda magnetskog toka stvara se prolazom uzbudne (primarne) struje kroz uzbudni namot. Istosmjerni se izvor priključuje preko kliznih kolutova i četkica (kontaktno) ili se preko inverznog stroja i rotorskog ispravljača ostvaruje bezkontaktni prijenos energije za uzbudu. Umjesto tiristorskog ispravljača nekad je služio istosmjerni generator.

10.2.2 Princip rada sinkronog generatora

Da bi se inducirao napon u armaturnom namotu sinkronog generatora treba postojati vremenska promjena magnetskog toka. Prolazom istosmjerne uzbudne struje kroz uzbudni namot, uzbuđuje se konstantni magnetski tok koji je nepokretan kada rotor miruje, a rotirajući kad rotira. Pri rotaciji uzrokovanoj pogonskim strojem (npr. turbina) magnetski tok polova presjeca vodiče statorskog namota u kojima se inducira izmjenični napon karakteriziran frekvencijom, oblikom i iznosom.

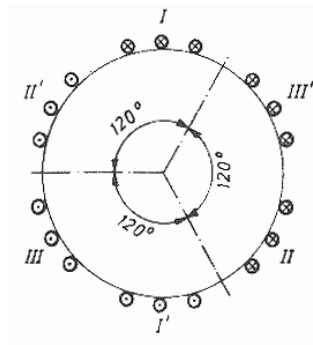
Frekvencija induciranog napona određena je izrazom:

$$f = \frac{n \cdot p}{60}$$

Oblik induciranog napona obično odstupa od sinusnog za niz nepoželjnih viših harmoničkih članova.

Da bi se u trofaznom sinkronom generatoru inducirala tri fazna napona međusobno pomaknuta za 120° , moraju u utorima statora biti smještene tri fazna armaturna namota čiji su početni zavoji prostorno međusobno pomaknuti za kut:

$$\alpha = \frac{120^\circ}{p}$$



Raspored dvopolnog trofaznog namota

Iznos induciranih napona određuje se polazeći od izraza za inducirani napon u jednom vodiču:

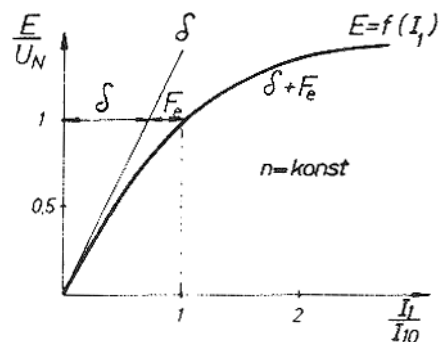
$$e = B \cdot \ell \cdot v$$

Ukupni inducirani napon jedne faze određen je izrazom:

$$E = 4,44 \cdot \Phi \cdot f \cdot N$$

10.2.3 Prazni hod sinkronog generatora

Prazni hod sinkronog generatora je takvo pogonsko stanje kod kojeg se rotor okreće mehaničkom energijom pogonskog stroja konstantnom sinkronom brzinom, uzbudna struja (I_1) upravo je takvog iznosa da se inducira nazivni napon U_N , a armaturna (radna) struja jednaka je nuli ($I_2=0$).



Karakteristika praznog hoda sinkronog generatora

Promjenom uzbudne struje, mijenja se inducirani napon. Za nazivni inducirani napon u praznom hodu potrebna je struja I_{10} .

10.2.4 Opterećenje sinkronog generatora i reakcija armature

Opterećenje je pogonsko stanje kod kojega kroz armaturni namot teče sekundarna struja I_2 (struja opterećenja). U pojedinačnom radu sinkronog generatora to se događa, kada se na stezaljke generatora priključe trošila. Pogonski stroj treba mehaničkom energijom pokrivati električnu energiju trošila. U paralelnom radu to se događa, kada pogonski stroj daje rotoru sinkronog generatora više mehaničke energije od one u praznom hodu i uzbudna struja je veća od struje I_{10} .

U praznom hodu ($I_2=0$) nema padova napona, pa je napon stezaljki U_2 jednak induciranom naponu. Kod opterećenja ($I_2 \neq 0$) naponi su različiti, zbog padova napona i djelovanja magnetskog toka armature na tok polova (*reakcija armature*).

Trofazna struja I_2 stvara okretno magnetsko polje konstantnog iznosa, koje rotira prema mirnom satoru sinkronom brzinom n_s , dakle istom brzinom kojom rotira i uzbudni dio stroja zbog mehaničke vrtnje rotora. To znači da okretno polje statora i magnetsko polje rotora miruju jedno prema drugom, jer imaju jednaku (sinkronu) brzinu vrtnje. Smjer vrtnje okretnog polja ovisi o redoslijedu faza i obratno.

Kod opterećenog sinkronog stroja postoje dva magnetska toka:

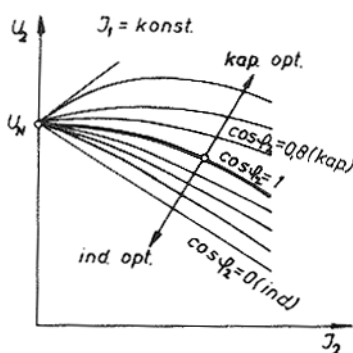
- magnetski tok polova Φ'
- tok armature Φ_A

Oba toka rotiraju sinkronom brzinom, prvi zbog mehaničkih, a drugi zbog električnih razloga. Oni daju rezultirajući tok Φ , koji također rotira sinkronom brzinom.

Promjena opterećenja uzrokuje promjenu napona na stezaljkama zbog dva razloga:

- pada napona u armaturnom namotu
- djelovanja reakcija armature

Vanjske karakteristike pokazuju ovisnost napona stezaljki U_2 o struji opterećenja I_2 / $U_2=f(I_2)$ pri konstantnoj uzbudni, a za razne faktore snage $\cos\varphi_2$.

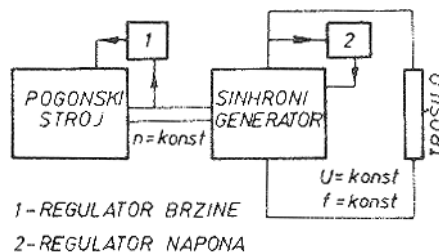


Vanjske karakteristike sinkronog generatora

Induktivno opterećenje smanjuje, a kapacitivno povećava napon stezaljki. Generator mora davati konstantan napon, te se uzbudna struja I_1 mora regulirati ovisno o opterećenju.

10.2.5 Pojedinačni rad sinkronog stroja

Ostvaruje se kad generator napaja vlastitu mrežu. Radi postizanja napona i frekvencije konstantnih iznosa mora postojati automatski regulator napona (regulacija uzbudne struje) i regulator frekvencije (regulator brzine vrtnje).



Pojednostavljena blok shema sinkronog generatora

Trošila diktiraju faktor snage $\cos \varphi$. Radnu energiju pokriva pogonski stroj, a jalovu uzbudna struja.

Sinkroni generator smije se trajno opteretiti nazivnom snagom (uz nazivni $\cos \varphi$) označenom na nazivnoj pločici. Veće opterećenje (veća struja) od nazivnog dovodi do zagrijavanja iznad dopuštene nadtemperature armaturnog namota. Manji faktor snage od nazivnog dovodi do pregrijavanja uzbudnog namota.

10.2.6 Paralelni rad

To je uobičajeni rad sinkronih generatora. Mreža na koju se generator priključuje ima obično znatno veću snagu od snage generatora, te ima $U = konst.$, $f = konst.$ (kruta mreža).

Za paralelni rad, tj. postupak *sinkronizacije* mora se prije uključivanja postići:

- a) Jednake frekvencije napona generatora i napona mreže:

$$f_g = f_m$$

- b) Jednake iznose napona generatora i napona mreže:

$$U_g = U_m$$

- c) Isti redoslijed faza generatora i mreže:

$$(L_1 L_2 L_3)_g = (L_1 L_2 L_3)_m$$

- d) Istofaznost napona generatora i mreže:

$$U = 0$$

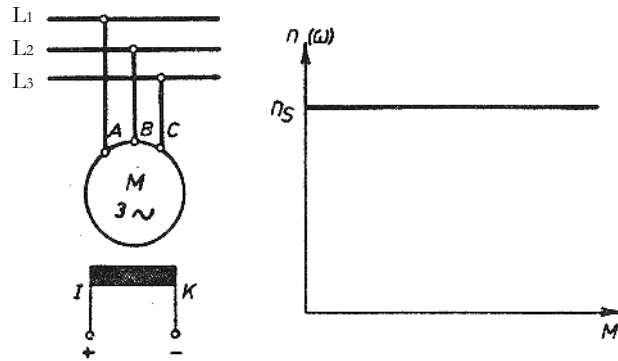
Postizanje uvjeta za sinkronizaciju, te uključivanje, obavlja se pomoću uređaja za automatsku sinkronizaciju.

10.2.7 Sinkroni motor

Armaturni (radni, statorski) namot priključuje se na izmjeničnu mrežu, a uzbudni (rotorski) namot na istosmjerni izvor. Brzina vrtnje je sinkrona i određena izrazom:

$$n_s = \frac{60 \cdot f}{p}$$

Najvažnija karakteristika svakog elektromotora je *vanjska* ili *mehanička karakteristika*, koja pokazuje ovisnost $n=f(M)$.



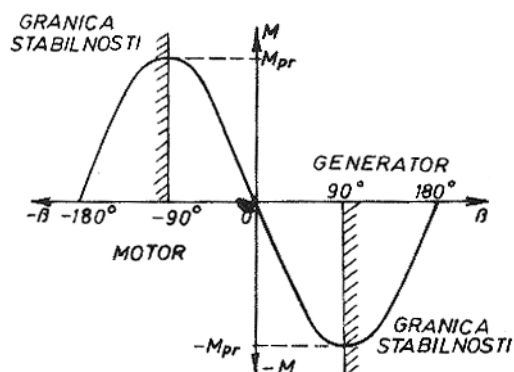
Shema spoja i mehanička karakteristika sinkronog motora

Za sinkroni motor ova karakteristika je *apsolutno kruta* ili *sinkrona*, tj. brzina vrtnje je konstantna i ne ovisi o opterećenju.

Za stroj s neizraženim polovima moment je određen izrazom:

$$M = -M_{pr} \cdot \sin \beta$$

Gdje je β kut između tokova polova i rezultatnog toka, te ovisi o opterećenju.



Ovisnost momenta sinkronog stroja o kutu opterećenja

Motorsko područje rada – kut β je negativan, a moment pozitivan (u smjeru vrtnje).

Generatorsko područje rada - kut β je pozitivan, a moment negativan (nasuprot smjera vrtnje).

Promjena smjera vrtnje motora izvodi se promjenom redoslijeda faza, tj. međusobnom zamjenom bilo koja dva priključka motora na trofaznu mrežu.

Glavne karakteristike sinkronog motora:

- konstantna brzina vrtnje
- veća specifična težina i specifična cijena od asinkronog motora
- ako se preuzbudi može popravljati faktor snage $\cos \varphi$
- ne može se pokrenuti bez prigušnog namota
- brzina vrtnje može se podešavati samo promjenom frekvencije
- kod velikih opterećenja ispadne iz sinkronizma

10.3 ASINKRONI STROJEVI

Asinkroni strojevi su strojevi izmjenične struje kod kojih je brzina vrtnje različita od brzine vrtnje okretnog polja i mijenja se s promjenom opterećenja. Pretežno se koriste kao motori i to trofazni, a samo za male snage i jednofazni.

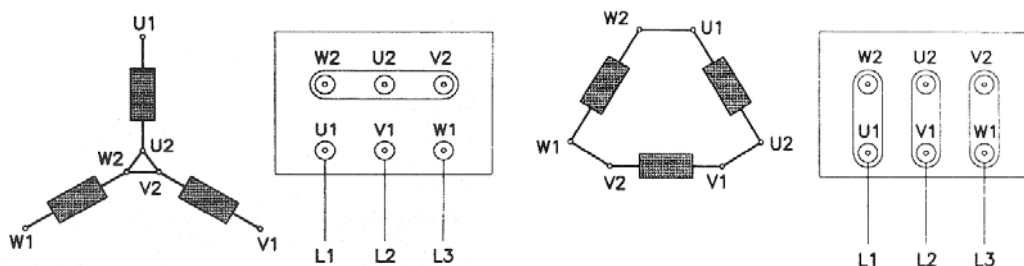
10.3.1 Princip izvedbe i vrste asinkronih motora

Magnetski krug asinkronog motora sastoji se kao i kod ostalih rotacionih strojeva od nepokretnog dijela ili statora i pokretnog dijela ili rotora.

Stator – šuplji valjak sastavljen od tankih (0,5 mm) međusobno izoliranih dinamo limova i smješten u kućištu. Trofazni armaturni namot raspodijeljen je u utorima. Tri početka i tri kraja faznog namota dovode se na priključnu kutiju na kućištu motora. Namot se može spajati u spoj zvijezda ili spoj trokut.

Rotor – rotorski paket limova navučen na osovinu. Rotorski namot smješten je u utorima na vanjskom obodu paketa limova. Ovisno o izvedbi rotora razlikuju se dvije vrste asinkronih motora:

- kliznokolutni (namotani rotor)
- kavezni (kratkospojeni rotor)

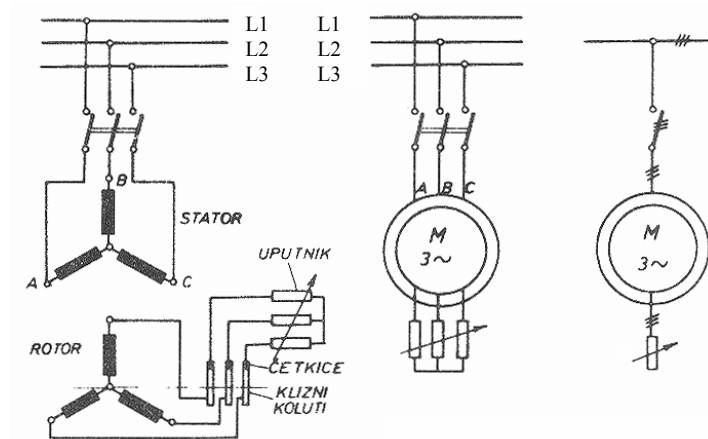


ZVIJEZDA SPOJ

TROKUT SPOJ

Zvijezda i trokut spoj statorskog namota

Kliznokolutni asinkroni motor ima izveden rotorski namot po istim principima kao i statorski. Može biti spojen u spoj zvijezda ili trokut. Početak namota svake faze spojen je s kliznim kolutom (prstenom). Tri klizna koluta smještena na osovinu međusobno su i prema osovinu izolirana. Po kolutima klize četkice (klizni kontakt) preko kojih se spaja izvan motora postavljen otpornik tzv. *rotorski uputnik*. Kolutni asinkroni motori koriste se za teške uvjete pokretanja, gdje je potreban veliki potezni moment. Teži su, skuplji i osjetljiviji u pogonu od kavezni asinkronih motora.



a) Detaljna b) Tropolna c) Jednopolna
Shema kolutnog asinkronog motora

Kavezni ili kratkospojeni asinkroni motor ima stator isti kao i kolutni. Razlika je u izvedbi rotora. Namot je izrađen od bakrenih ili mesinganih štapova uloženi u utore koji su sa svake strane prstenima kratko spojeni. Motori malih i srednjih snaga često imaju kavez od legure aluminija izrađen tlačnim ili vibracijskim lijevom. Kavezni asinkroni motor je najjednostavniji, specifično najlakši i najjeftiniji, te najpouzdaniji i najčešće korišteni elektromotor. Kavezni namot je jednofazni i višefazni, a broj pari polova kaveznog rotora prilagođuje se broju pari polova statorskog namota.

10.3.2 Princip rada asinkronog motora

Statorski namot priključi se na trofaznu mrežu, pri čemu trofazna izmjenična struja stvori okretno magnetsko polje koje rotira sinkronom brzinom n_s . Okretno magnetsko polje presjeca vodiče statorskog i rotorskog namota, pa se induciraju naponi E_1 i E_2 . Napon E_1 drži ravnotežu s narinutim naponom mreže, a napon E_2 u rotorskom namotu potjera struju I_2 određenu izrazom:

$$I_2 = \frac{E_2}{Z_2} = \frac{E_2}{\sqrt{R_2^2 + X_2^2}}$$

Zbog djelovanja magnetskog polja na vodič protjecan strujom, nastaje sila na svaki vodič koja na kraku “r” prema osi rotacije stvara okretni moment. On je proporcionalan toku Φ i radnoj komponenti rotorske struje:

$$M = K \cdot \Phi \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2$$

Smjer djelovanja momenta je u smjeru vrtnje okretnog polja. Brzina vrtnje rotora uvijek je manja od sinkrone brzine vrtnje okretnog polja, dakle, rotor se uvijek okreće asinkrono.

10.3.3 Klizanje asinkronog motora

Različito brzina rotora i okretnog polja karakterizira klizanje:

$$s = \frac{n_s - n}{n_s} = \frac{n_r}{n_s} = \frac{\Delta n}{n_s}$$

Brzina vrtnje rotora:

$$n = n_s \cdot (1 - s) = 60 \cdot \frac{f}{p} \cdot (1 - s)$$

Srednja vrijednost nazivnog klizanja (kod nazivnog opterećenja) iznosi 2 do 8 %.

Motorsko područje (uključujući zalet) ograničeno je s dva pogonska stanja:

- mirovanje: $n=0 \rightarrow s=(n_s-n)/n_s=1 \rightarrow 100\%$
- sinkronizam: $n=n_s \rightarrow s=0$

Frekvencije rotorske i statorske struje odnose se kao odgovarajuće brzine vrtnje:

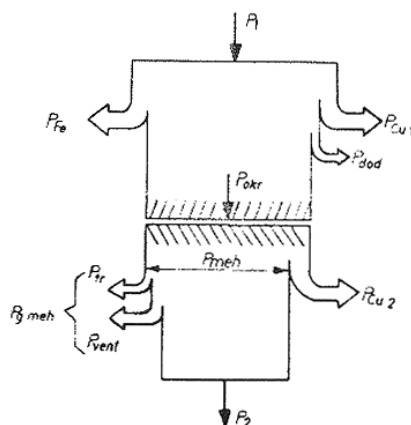
$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{n_r}{n_s} = \frac{n_s - n}{n_s} = s \rightarrow f_2 = f_1 \cdot s$$

10.3.4 Bilanca energije asinkronog motora

Pri pretvorbi energije u različitim dijelovima stroja javljaju se gubici. U asinkronom stroju to su gubici u bakru statorskog i rotorskog namota zbog toplinskog djelovanja struje, zatim gubici u željeznoj jezgri statora i željezu rotora zbog vrtložnih struja i histereze, mehanički gubici koji nastaju trenjem u ležajevima, trenjem s okolnim zrakom (ventilator), te dodatni gubici. Prema tome, dobivena snaga iz stroja bit će kao i uvijek manja od privedene za te gubitke.

Omjer između čiste mehaničke snage P_2 i primarne snage P_1 koju motor uzme iz mreže predstavlja korisnost motora:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}$$

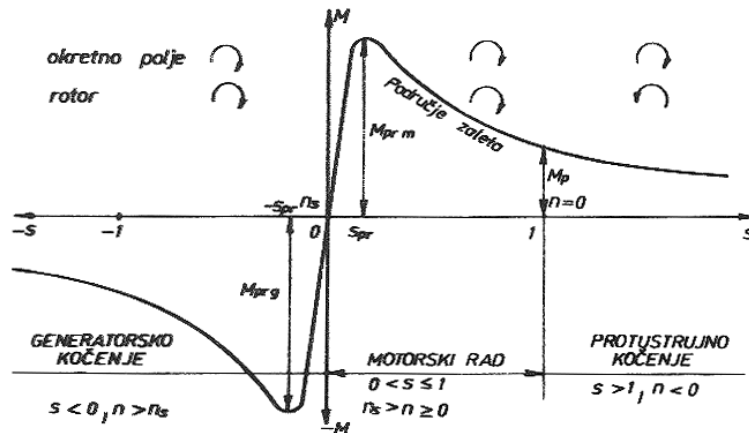


Bilanca energije asinkronog motora

10.3.5 Karakteristika momenta asinkronih motora

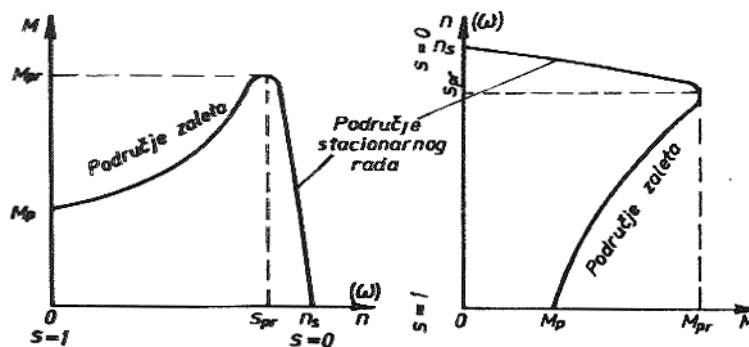
Kod elektromotora interesantna je karakteristika: $M=f(n)$ i $M=f(\omega)$.

Brzina je povezana s klizanjem 's', pa se gornja ovisnost može prikazati kao: $M=f(s)$



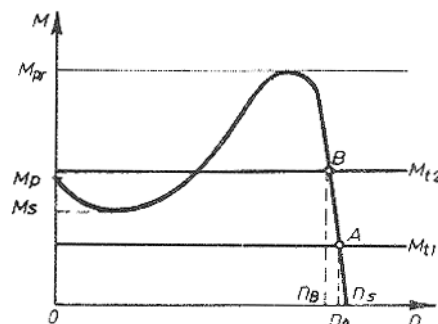
Vanjska karakteristika asinkronog stroja

Ovisnost $M=f(n)$ i $n=f(M)$ naziva se vanjska ili mehanička karakteristika, a za asinkroni motor ona je *tvrda* ili *poredna*.



Vanjske karakteristike asinkronog motora

Potezni moment M_p mora biti veći od momenta tereta (momenta opterećenja), da motor može krenuti. Stacionarna brzina vrtnje dobije se u sjecištu momentne karakteristike motora i karakteristike tereta.



Karakteristika momenta motora i tereta

Snaga, moment i brzina vrtnje povezani su izrazima:

$$M = \frac{P_m}{\omega} = \frac{P_{okr}}{\omega_s} \quad \text{ili} \quad M = K \cdot \frac{P}{n}$$

10.3.6 Pokretanje asinkronih motora

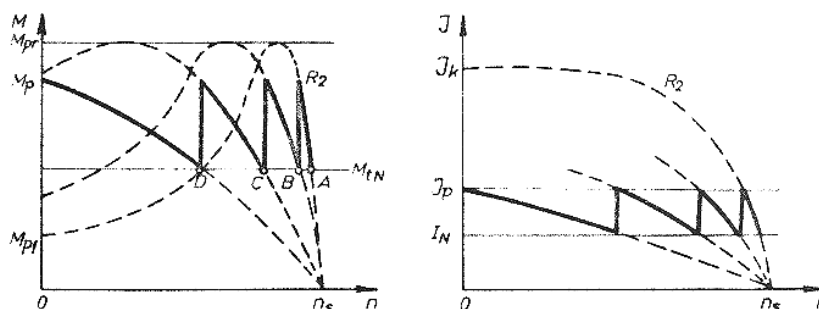
U trenutku pokretanja asinkronog motora ($n=0$, $s=1$) maksimalni je inducirani rotorski napon i maksimalna struja pokretanja (struja kratkog spoja). Ovisno o izvedbi (broju pari polova) i veličini motora, struja kratkog spoja kreće se približno u granicama:

$$I_k = (3 \div 8) \cdot I_N$$

Povećanjem brzine vrtnje tokom zaleta smanjuje se klizanje, inducirani napon i struja pokretanja. Kod direktnog pokretanja struja pokretanja je velika, a potezni moment relativno mali.

10.3.7 Pokretanje kolutnih motora

Kolutni motori pokreću se uključivanjem otpora (tzv. *uputnika*) u rotorski krug. Otpor djeluje na struju pokretanja (uz veći otpor struja je manja) i momentnu karakteristiku (potezni moment i prekretno klizanje se mijenjaju, a prekretni moment ostaje konstantan).



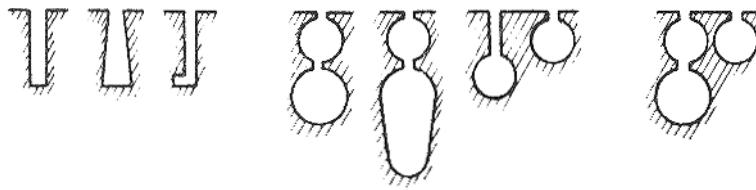
Karakteristike momenta i struje kod pokretanja kolutnog motora

Ako je u trenutku pokretanja ($n=0$, $s=1$) $M_p=M_{pr}$, tada je $s_{pr}=1$.

10.3.8 Pokretanje kaveznih motora

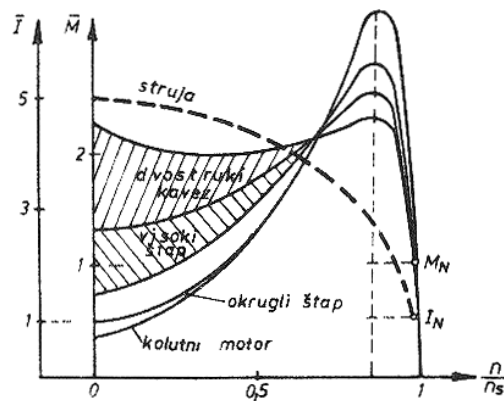
Kod kaveznih motora ne može se uključivati otpor u rotorski krug. Postoji specijalna izvedba kaveznog rotora (dvokavezni namot – efekt potiskivanja struje) koja ima kod pokretanja slično djelovanje kao i uključivanje otpora u rotorski krug.

Ovakvi rotor nazivaju se *rotori s potiskivanjem struje*, a postiže se znatno povećanje poteznog momenta i smanjenje struje pokretanja.



a) za visoke štapove b) za dvokavezni rotor c) za trokavezni rotor
Utori kaveznog rotora s potiskivanjem struje

Karakteristike momenta za razne izvedbe rotora pri istoj poteznoj struji malo se razlikuju u linearnom dijelu, ali znatno u području zaleta.



Vanjske karakteristike za razne izvedbe rotora kod iste potezne struje

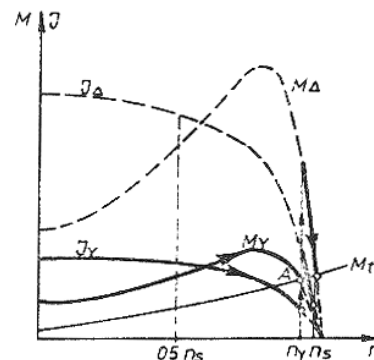
Kavezni motori obične izvedbe mogu se pokretati:

- direktno priključivanjem na mrežu
- pomoću transformatora
- pomoću statorskog predotpora
- pomoću prigušnice
- pomoću centrifugalne spojke
- pomoću preklopke zvijezda-trokut
- pomoću statičkih frekvencijskih pretvarača ($U/f = konst.$)

Pokretanje preklaskom Y/ Δ primjenjuje se kod motora koji su u normalnom pogonu predviđeni da rade u spoju trokut. Karakteristične veličine kod pokretanja preklaskom zvijezda-trokut:

$$U_Y = \frac{U_{\Delta}}{\sqrt{3}} \quad , \quad I_{kY} = \frac{I_{k\Delta}}{3} \quad , \quad M_{pY} = \frac{M_{p\Delta}}{3}$$

Karakteristike struje i momenta pri pokretanju preklaskom Y- Δ



10.3.9 Upravljanje brzine vrtnje asinkronih motora

Brzina vrtnje asinkronih motora se može mijenjati:

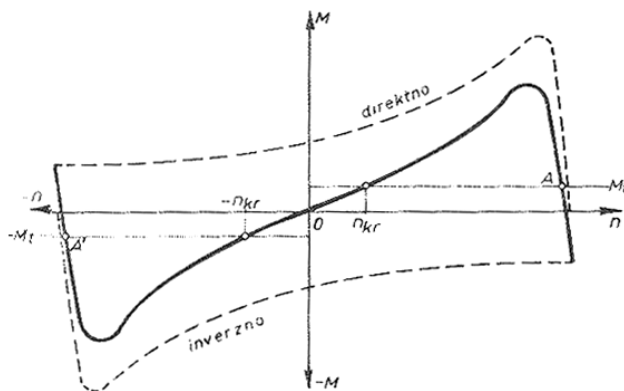
- Promjenom sinkrone brzine:
 - promjenom frekvencije (i napona)
 - promjenom broja pari polova
- Promjenom klizanja
 - promjenom priključnog napona
 - promjenom otpora rotorskog kruga
- Kaskadnim spojevima

10.3.10 Jednofazni asinkroni motor

Kod jednofaznog priključka stvara se pulzirajuće magnetsko polje koje se može prikazati s dva suprotno rotirajuća magnetska polja. svako rotirajuće polje stvara s rotorskim strujama okretne momente u smjeru rotacije polja.

Jednofazni motor bez specijalnih izvedbi ne razvija potezni moment: $n=0 \rightarrow M=0$.

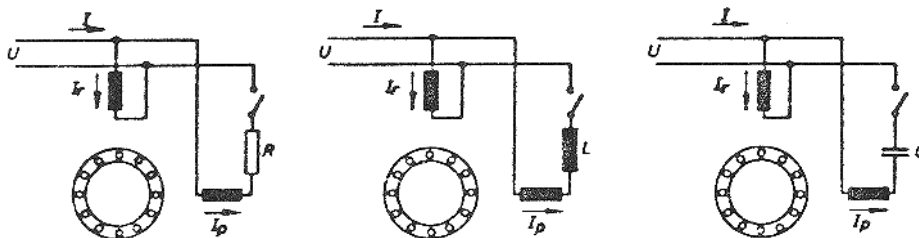
Pokreće se dovodenjem momenta ili specijalnim konstrukcijama (kratkospojeni zavoj ili pomoćna faza).



Vanjska karakteristika jednofaznog asinkronog motora

Kod motora s pomoćnom fazom da bi se postiglo okretno magnetsko polje (dvofazni sustav), mora postojati fazni pomak između struje I_r u glavnoj (radnoj) i struje I_p u pomoćnoj fazi. To se postiže izvedbom pomoćne faze s:

- omskim otporom
- induktivnim otporom
- kapacitivnim otporom

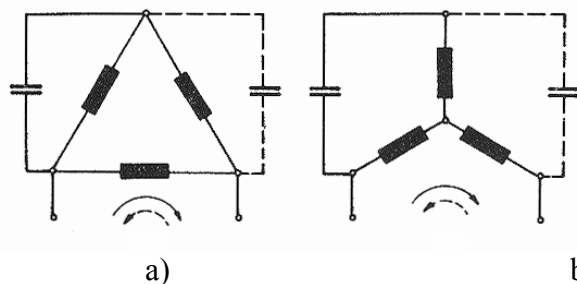


Sheme spajanja asinkronog motora s raznim otporima pomoćne faze

Samo uz uključeni kondenzator moguće je dobiti pomak između I_r i I_p od 90° . Pomoćna faza obično se automatski isključuje nakon zaleta.

10.3.11 Jednofazni priključak trofaznog asinkronog motora

Kod ovog priključka motor ne razvija potezni moment. Jedan od načina pokretanja je pomoću kondenzatora. Motor ima slične karakteristike kao kondenzatorski jednofazni motor s trajno uključenom pomoćnom fazom.



Jednofazni priključak trofaznog motora za oba smjera vrtnje

Potezni moment i snaga se smanjuju:

$$M_p \cong 0,35 \cdot M_N, \quad P \cong 0,7 \cdot P_N$$

Kapacitet pogonskog kondenzatora iznosi:

$$C = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot U^2}$$

Za $U=220$ V, $f=50$ Hz, P u vatima i C u μF dobije se numerički izraz za kapacitet:

$$C = \frac{P}{15,2}$$

10.4 STROJEVI ISTOSMJERNE STRUJE

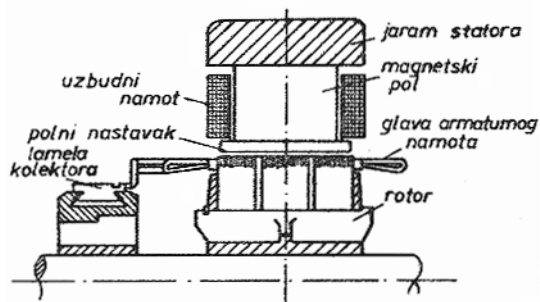
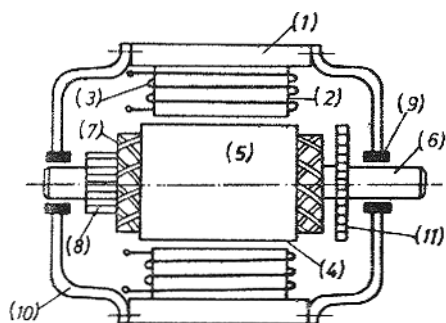
Strojevi istosmjerne struje su električni rotacioni strojevi kod kojih u vanjskom strujnom krugu teče istosmjerna struja.

10.4.1 Princip izvedbe

Sastoji se od tri osnovna dijela:

- statora s uzbudnim namotom (ili kod manjih snaga trajnim magnetom)
- rotora s armaturnim namotom
- kolektora (ili komutatora) koji rotira s rotorom
-

Na kolektoru su prislonjene četkice koje su spojene sa stezaljkama priključne kutije.



Princip izvedbe i dijelovi istosmjernog stroja

10.4.2 Princip rada

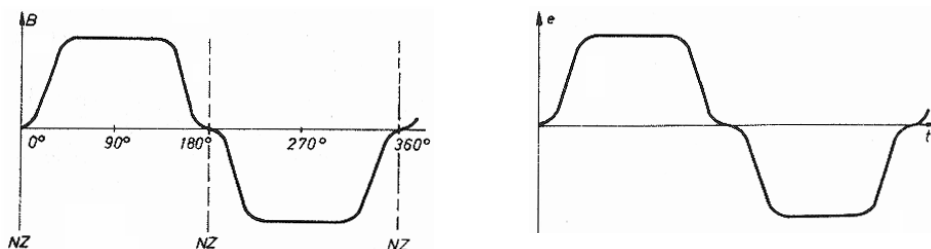


Shematski prikaz pojednostavljenog istosmjernog stroja

Istosmjerna uzbudna struja ili permanentni magnet uzbuđuje magnetski tok indukcije B . Ako se rotor pokreće brzinom v vanjskom silom, u vodiču dužine " ℓ " (dio armaturnog namota koji je spojen s kolektorom) inducirat će se napon:

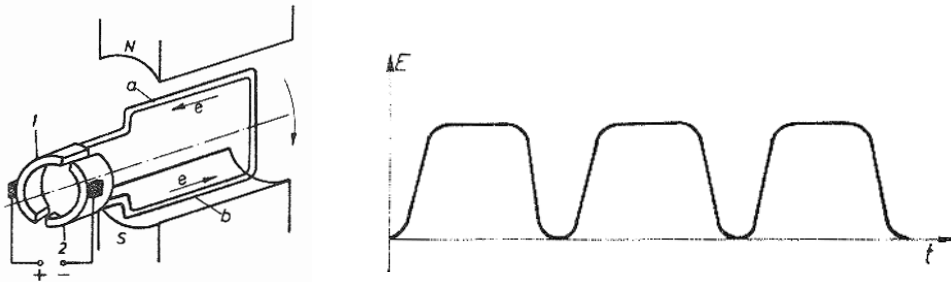
$$e = B \cdot \ell \cdot v$$

Inducirani napon se mijenja kao " B ", tj. on je izmjeničan. Napon na četkicama koje miruju je istosmjernan.



Raspored magnetske indukcije u zračnom rasporu i oblik induciranog napona u vodiču

Jedan svitak daje jako pulzirajući napon. Kod većeg broja ispunjenih utora po polu napon ima neznatne pulzacije.

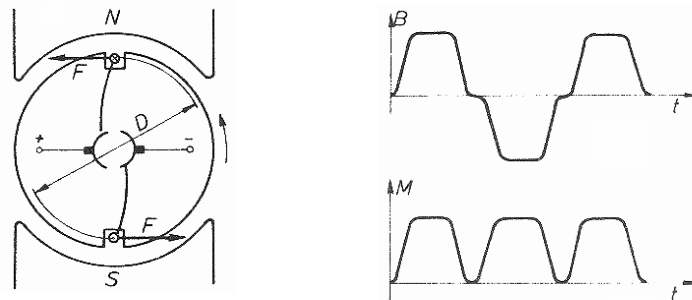


Dobivanje pulzirajućeg istosmjernog napona na četkicama

Ako se na '+' i '-' stezaljke priključi istosmjerni napon poteći će struja I suprotnog smjera od one kod generatora. Sada stroj radi kao motor i nastaje sila:

$$F = B \cdot I \cdot \ell$$

Okretni moment pokrene rotor u istom smjeru u kojem se okretao generator, ali uz suprotan smjer struje.



Indukcija i moment u istosmjernom motoru

Istovremeno s promjenom smjera magnetske indukcije B , promijenio se smjer struje (djelovanje komutatora s četkicama) i smjer momenta ostaje isti. Veći broj svitaka daje ravnomjerniji moment.

Dva naziva – *kolektor* i *komutator* koriste se zbog dvije uloge:

- kolektor “skuplja” napon ili struju
- komutator “komutira” (mijenja smjer) struju

10.4.3 Iznos inducirano napona i momenta

Ukupni inducirani napon iznosi:

$$E = K_E \cdot \Phi \cdot n$$

Opterećenje:

a) Generatorski rad:

$$U = E - I_A \cdot R_A - \Delta U_{\dot{c}}$$

b) Motorski rad:

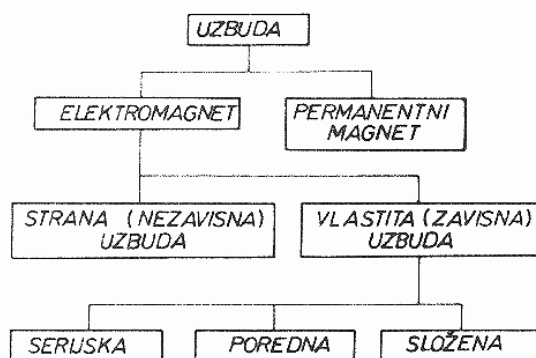
$$U = E + I_A \cdot R_A + \Delta U_{\dot{c}}$$

Ukupni moment iznosi:

$$M = K_M \cdot \Phi \cdot I_A$$

10.4.4 Vrste uzbude istosmjernih strojeva

- a) Nezavisna (strana) uzbuda
- b) Zavisna (vlastita) uzbuda:
 - serijska
 - poredna
 - složena (mješovita, kompaundna)

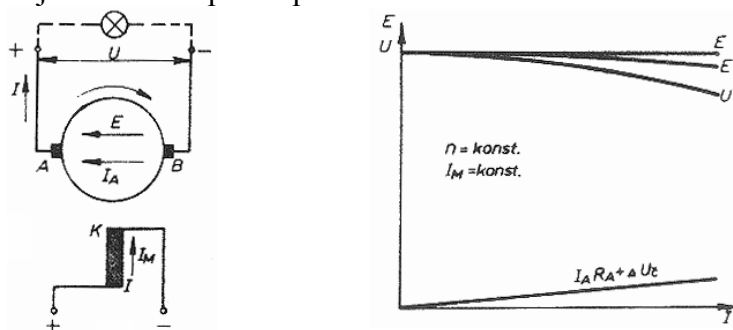


Podjela uzbuda istosmjernih strojeva

10.4.5 Generatori istosmjerne struje

10.4.5.1 Nezavisno uzbuđeni generator

Zanemarena je reakcija armature i pad napona na četkicama.

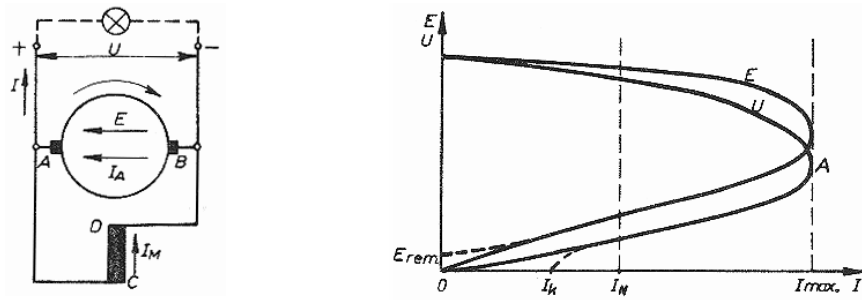


Shema spoja, unutarnja i vanjska karakteristika nezavisno uzbuđenog generatora

Vanjska karakteristika je povoljna, jer se napon stezaljki U ne mijenja jako s promjenom opterećenja, pa se koriste kao generatori.

10.4.5.2 Poredno uzbuđeni generator

U području do nazivnog opterećenja I_N , vanjska karakteristika $U=f(I)$ slična je onoj nezavisno uzbuđenog generatora, te se i poredno uzbuđeni strojevi koriste kao generatori.

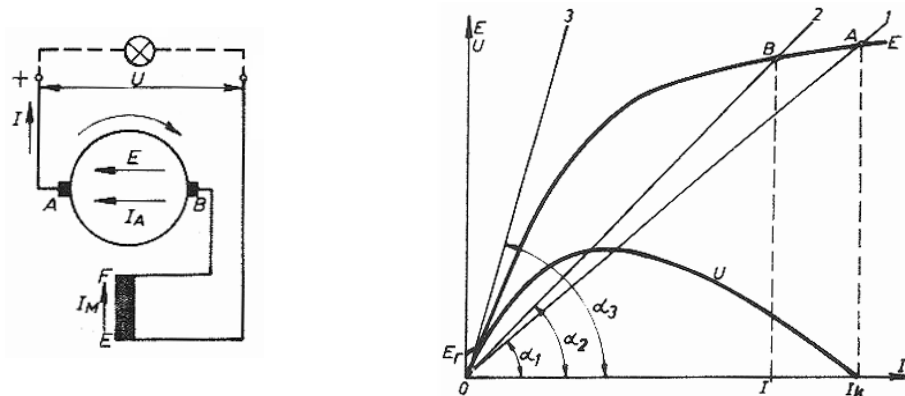


Shema spoja, unutarnja i vanjska karakteristika poredno uzbuđenog generatora

10.4.5.3 Serijski uzbuđeni generator

Zbog $I = I_A = I_M$, inducirani napon E mijenja se promjenom struje opterećenja. Napon na stezaljkama jako se mijenja s promjenom opterećenja:

$$U = E - I \cdot (R_A + R_N)$$

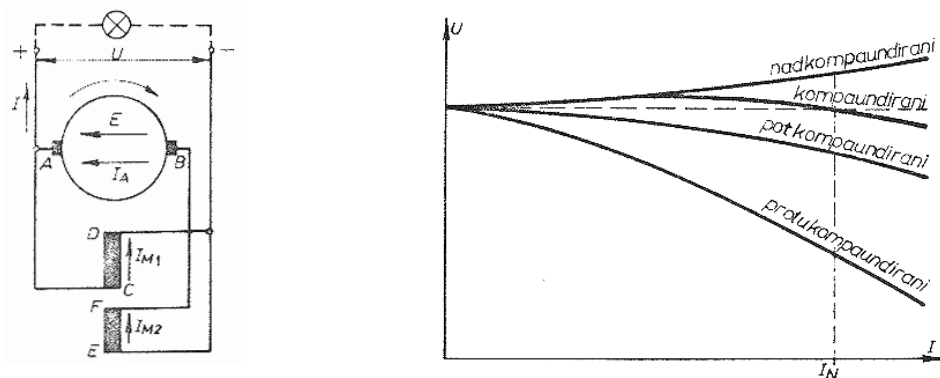


Shema spoja, unutarnja i vanjska karakteristika serijski uzbuđenog generatora

Vanjska karakteristika je nepovoljna, pa se serijski uzbuđeni generatori gotovo i ne koriste.

10.4.5.4 Kompaundni (složeno uzbuđeni) generator

- 1) Nadkomaundirani
- 2) Kompaundirani
- 3) Potkompaundirani
- 4) Protukompaundirani



Shema spoja i vanjske karakteristike kompaundnog generatora

10.4.6 Motori istosmjerne struje

Smjer vrtnje istosmjernih motora određen je smjerom magnetskog polja (smjerom uzbudne struje) i smjerom armaturne struje, a može se promijeniti tako da se promijeni smjer uzbudne struje ili smjer armaturne struje.

Jednadžbe koje karakteriziraju rad istosmjernog motora:

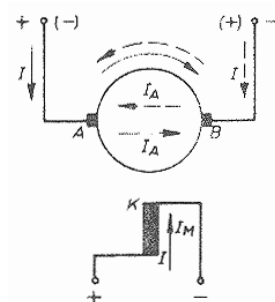
$$M = K_M \cdot \Phi \cdot I_A$$

$$U = E + I_A \cdot R_A$$

$$E = K_E \cdot \Phi \cdot n$$

10.4.6.1 Nezavisno uzbuđeni motor

Promjena smjera vrtnje ostvaruje se promjenom smjera struje I_A ili promjenom smjera struje I_M .



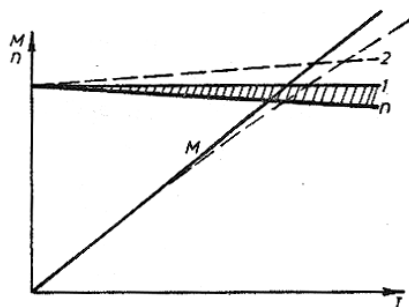
Shema spoja nezavisno uzbuđenog motora

Iz karakterističnih jednadžbi slijedi:

- zalet: $n=0 \rightarrow E=0 \rightarrow \text{max. struja (struja kratkog spoja):}$

$$I_k = \frac{U}{R_A} \quad \text{razvija potezni moment} \quad M_p = K_M \cdot \Phi \cdot I_k$$

Radi smanjenja struje pokretanja, u armaturni krug uključuje se rotorski otpor (*uputnik*).
Iz karakterističnih jednažbi dobiju se i karakteristike $M=f(I)$ i $n=f(I)$:

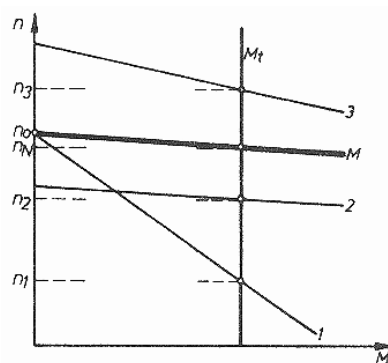


Karakteristike nezavisnog i porednog motora

Motor može raditi u motorskom i generatorskom području.

Brzina vrtnje može se namještati:

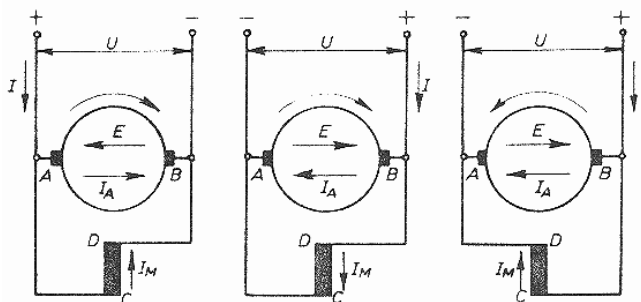
- promjenom otpora R (karakteristika 1)
- promjenom napona U (karakteristika 2)
- promjenom toka Φ (karakteristika 3)



Dobivanje raznih brzina vrtnje nezavisnog motora

10.4.6.2 Poredni motor

Struja tereta (struja opterećenja) jednaka je zbroju armaturne i uzbudne struje.



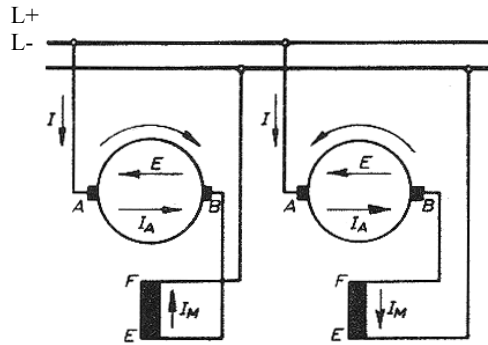
Spojna shema poredno uzbuđenog motora

Ako je $U = \text{konst.} \rightarrow I_M = U/R_M = \text{konst.} \rightarrow \Phi = \text{konst.}$

Prirodna karakteristika je ista kao kod nezavisno uzbuđenog motora, a razlika je samo u strujama.

10.4.6.3 Serijski motor

Struja tereta jednaka je armaturnoj struji, odnosno uzbudnoj struji: $I = I_A = I_M$



Spojna shema serijski uzbuđenog motora

Pretpostavlja se linearna ovisnost:

$$\Phi = K_\Phi \cdot I_M = K_\Phi \cdot I$$

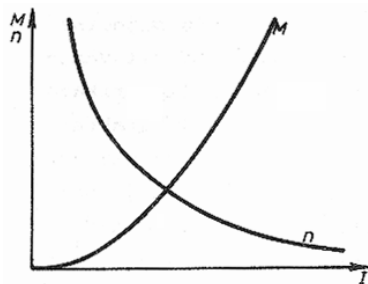
Karakteristika momenta $M=f(I)$:

$$M = K_M \cdot \Phi \cdot I_A = K_M \cdot K_\Phi \cdot I^2$$

Serijski uzbuđeni motori primjenjuju se za električnu vuču.

Karakteristika brzine $n=f(I)$:

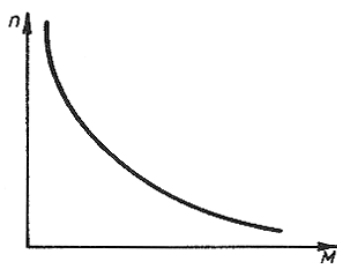
$$n = \frac{E}{K_E \cdot \Phi} = \frac{U - I_A \cdot (R_A + R_M)}{K_E \cdot \Phi} = \frac{U}{K_E \cdot K_\Phi \cdot I} - \frac{R_A + R_M}{K_E \cdot K_\Phi} = \frac{K}{I} - K'$$



Karakteristike $M=f(I)$ i $n=f(I)$ serijski uzbuđenog motora

Vanjska karakteristika $n=f(M)$ određena je izrazom:

$$n = \frac{U}{K\sqrt{M}} - K'$$

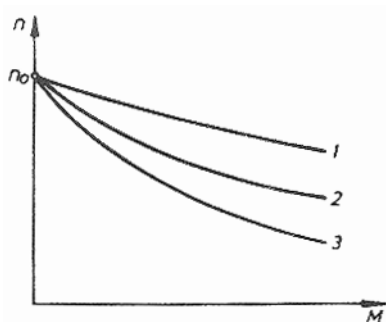


Vanjska karakteristika serijskog motora

Vanjska karakteristika serijskog motora je “mekana” ili *serijska*.

10.4.6.4 Kompaundni motor

Serijski i poredni (nezavisni) uzбудni namot spojeni su tako da im se protjecanja potpomažu (stabilan rad motora – povećanjem opterećenja brzina opada). Tvrdća vanjske karakteristike ovisi o utjecaju pojedine uzbude.



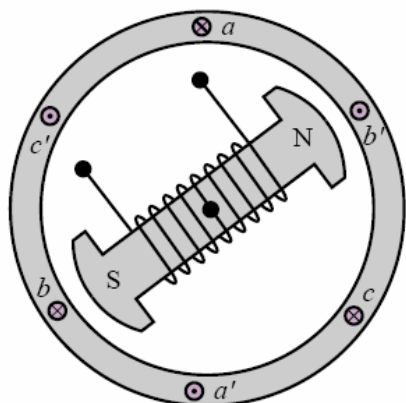
Vanjske karakteristike kompaundnog motora

Karakteristike 1, 2 i 3 dobiju se raznim međusobnim djelovanjem serijskog i porednog (nezavisnog) uzbudnog namota.

11. POSEBNE VRSTE MOTORA

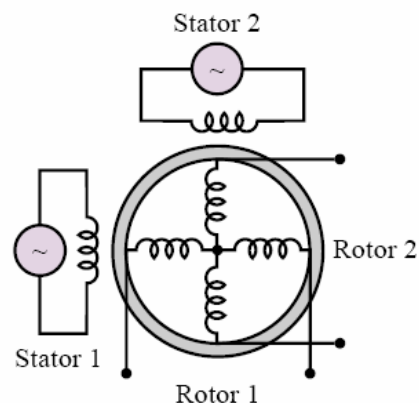
11.1 Brushless DC motori

Unatoč svom imenu, *bezčerkasti (brushless) DC motori* nisu istosmjerni motori, nego (tipično) sinkroni strojevi s permanentnim magnetom kod kojih se moment drži konstantnim zahvaljujući prikladnoj uzbuđnoj struji. Ime nisu dobili po konstrukcijskim, nego radnim značajkama koje najbliže odgovaraju DC motoru sa strujom konstantnog polja. Takva karakteristika može se postići ako se motor napaja iz izvora čija je električna frekvencija uvijek jednaka mehaničkoj frekvenciji rotacije rotora. Današnji izvor promjenljive frekvencije načinjen je od DC/AC pretvornika (invertora, s blokovima preklopnih on/off tranzistora) koji istosmjerni izvor pretvaraju u izmjenični promjenljive frekvencije. S korisnikove strane brushless DC motor ima DC napajanje, iako je struja koja stvarno teče kroz namote motora izmjenična. Brushless DC motori zahtijevaju mjerenje pozicije rotora da bi se odredila njegova brzina rotacije, te generirala struja napajanja iste frekvencije.



Na slici je vidljivo da su višefazni (obično trofazni) namoti statora slični onima sinkronog motora. Budući da se komutacija ostvaruje elektronički, a ne putem četkica, brushless DC motori mogu se proizvesti u velikom broju različitih konfiguracija, uključujući na primjer, vrlo plosnate ('palačinka') motore, do snaga od 250 KW na 50.000 okr./min.

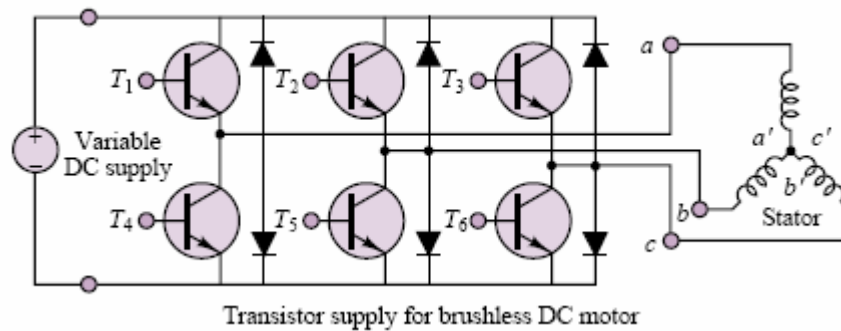
Rotorski senzor pozicije mora se projektirati za rad unutar motora, pa stoga mora biti otporan na udarce, vibracije i temperaturne oscilacije. Najčešće korištena osjetila su pozicijski dekoderi i rezolveri. Rješavači (rezolveri) su rotirajući strojevi koji su mehanički spojeni s rotorom brushless motora, a sastoje se od dva statorska i dva rotorska namota. Statorski namoti uzbuđuju se s AC signalom, a rezultirajući rotorski naponi proporcionalni su sinus i kosinus kut rotacije rotora. Na taj način dobije se signal koji je direktno povezan s trenutnom pozicijom rotora. Rezolver ima i dvije velike mane: prvo – zahtijeva posebno ac napajanje, i drugo – izlaz iz rezolvera mora se prikladno dekodirati kako bi se dobio korisni signal pozicije. Zbog ovih razloga, najčešće se koriste dekoderi kutne pozicije, koji daju signal direktno ovisan o poziciji rotirajuće osovine.



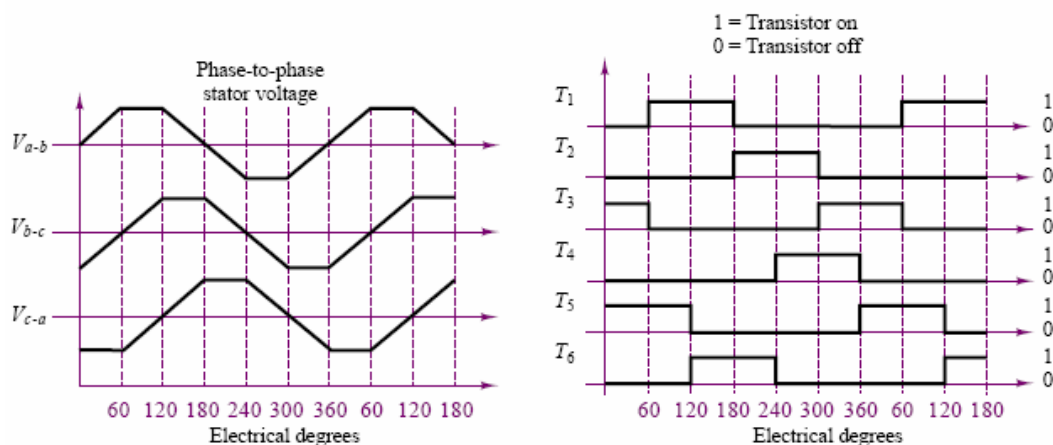
Rezolver

Da bi se razumio rad brushless DC motora, potrebno je načiniti analogiju s radom DC motora s permanentnim magnetom, kod kojeg se mehanički moment (zadah, engl. torque) stvara interakcijom permanentnog magneta i okomitog magnetskog polja induciranog strujom u rotorskim namotima. Kako se rotor okreće zbog ovog momenta kut između statorskog i rotorskog polja se smanjuje, tako da bi se moment trebao poništiti s rotacijom od 90° električkih stupnjeva. Da bi se smanjio moment koji djeluje na rotoru, DC motor s permanentnim magnetom uključuje komutator koji je fiksiran na rotorsku osovinu. Komutator preklapa napon napajanja na statoru tako da se održi stalni kut od 90° između polja koji

međusobno djeluju. Budući da se struja kontinuirano preklapa između namotaja kako se rotor okreće, struja u svakom statorskom namotaju je ustvari izmjenična sa frekvencijom proporcionalnoj broju magnetskih polova motora i okretnoj brzini. Brushless DC motori rade na isti način, s važnom razlikom da se struja napajanja ne preklapa mehanički, nego elektronički (tranzisorski ili tiristorski), te da uobičajena konstrukcija ima statorski armaturni namot.



Elektronički uređaj sastoji se od osjetila pozicije rotora koji je smješten na osovinu motora i elektroničkog preklopnog modula, kao na gornjoj slici, koji napaja statorske namote.



Slika prikazuje dijagram napona među fazama statora i niza impulsa elektroničkog preklopnog modula. Valni oblik napona je *trapezoidan*.

Djelovanje brushless DC motora može se opisati istim skupom jednažbi kao DC motora:

$$V = k_a \omega_m + R_\omega I$$

$$M = k_M I$$

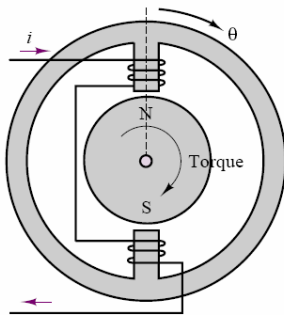
gdje je $k_a = k_M$, a oznake označuju:

- V – napon motora
- k_a – armaturna konstanta
- ω_m – mehanička brzina
- R_ω – otpor namota
- M – moment motora
- k_M – konstanta momenta
- I – armaturna struja motora

Brzina i moment brushless DC motora mogu se dakle, kontrolirati s preklopivim DC izvorom promjenljive frekvencije. Budući da brushless motori imaju veći moment i manju inerciju nego njihovi odgovarajući DC motori, brzina odziva koja se kod njih postiže premašuje onu tradicionalnu. Zato brushless DC motori nalaze brojne primjene u servo petljama upravljačkih sustava (kompjutorski diskovi, propulzijski sustavi električnih vozila i sl.).

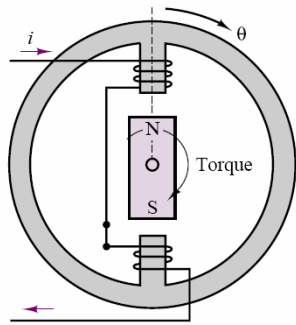
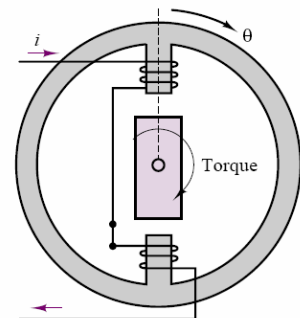
11.2 Koračni (step) motori

Koračni (engl. *stepping* ili *steper*) motori pretvaraju digitalnu informaciju u mehaničko kretanje. Prema imenu, ti motori rotiraju u koracima, te se njihova pozicija može upravljati s pomoću logičkih signala. Općenito se mogu klasificirati u tri kategorije: *promjenljive reluktancije* (*magnetskog otpora*), *koračni motori s permanentnim magnetom* i *hibridni tipovi*. Najvažnija značajka koračnih motora je direktna proporcionalnost broja ulaznih impulsa s kutem rotacije. Kut pogreške po koraku je vrlo malen i ne akumulira se. Koračni motori su vrlo brzi u odzivu kod pokretanja, zaustavljanja i reverziranja upravljanih digitalnim signalima. Pritom imaju mogućnost zadržavanja rotora u zaustavnoj poziciji po volji dugo. Promjenom frekvencije ulaznih digitalnih impulsa moguća je promjena brzine rotacije u vrlo širokom području.



Koračni motor s permanentnim magnetom ima potezni moment različit od nule u stanju kad motor nije napajan. Zavisno o konstrukciji motora, moguće je postići koračne kuteve od 7.5° , 11.25° , 15° , 18° , 45° ili 90° . Kut rotacije određen je brojem statorskih polova.

Koračni motor promjenljive reluktancije (VR stepper – variable-reluctance) ima željezni višepolni rotor i laminirani namot statora, a rotira kad je zub rotora privučen elektromagnetiziranim zubom statora. Inercija rotora ovakvog motora je mala, a odziv vrlo brz, što ne dopušta veće inercije tereta. Kad namoti nisu napajani, statički moment motora jednak je nuli. Općenito, koračni kut ovakvih motora je 15° .

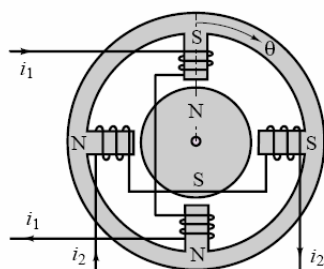


Hibridni koračni motor karakteriziran je višezubnim statorom i rotorom, gdje rotor ima pomoćni aksijalno koncentrični magnet oko osovine. Može se uočiti da je ova konfiguracija kombinacija motora s promjenljivom reluktancijom i motora s permanentnim magnetom. Ovaj tip motora ima visoku preciznost i veliki moment, a može se konfigurirati i za koračne kuteve do 1.8° .

Za sve ove tipove koračnog motora načelo rada je u osnovi isto: kad se magnetiziraju zavojnice, u statoru se stvore magnetski polovi i rotor se postavlja u odnosu na smjer proizvedenog polja statora. Reverziranjem faza struja u zavojnicama, ili magnetiziranjem samo nekih zavojnica (što je moguće u motorima koji imaju više od dva statorska pola), postavljanje statorskog magnetskog polja može zauzeti jedno od konačnog (diskretnog, a ne kontinuiranog) broja pozicija. Ako je struja u zavojnicama pulzirajuća u odgovarajućem redoslijedu, na isti način će se pomicati i rotor. Tako ovaj motor može biti vrlo koristan kad god se želi precizno koračno (inkrementalno) pomicanje. To je posebno traženo u kompjutorskim i upravljačkim sustavima (npr. upravljanje ventila u hidrauličkim ili pneumatskim sustavima i sl.).

Primjer 11.1

Za dvofazni koračni motor s permanentnim magnetom neka su poznate fazne struje i_1 i i_2 , te neka je start motora za niz $i_1 > 0$ i $i_2 = 0$. Treba odrediti niz strujne uzbude za puni okret: ako su:



- s punim korakom za jednu fazu
- s punim korakom za dvije faze
- s polu-korakom.

Rješenje

S pretpostavljenim početnim vrijednostima (faza 1 magnetizirana) motor na slici će biti u mirovanju. Niz za jednu fazu sastoji se od uključivanja dvijuzavojnica u nizu, reverzirajući polaritet struje svaki drugi put. Onda će se rotor koračnog motora s permanentnim magnetom pozicionirati s obzirom na polaritet magnetskog polja generiranog svakim parom polova zavojnice. Na primjer, ako je zavojnica 1 isključena, a zavojnica 2 uključena s pozitivnim polaritetom struje, onda će rotor rotirati u smjeru kazaljke na satu za 90° . Tablicom je pokazan niz struja zavojnice i odgovarajuća pozicija motora.

i_1	i_2	θ
+	0	0°
0	+	90°
-	0	180°
0	-	270°
+	0	0°

i_1	i_2	θ
+	+	45°
-	+	135°
-	-	225°
+	-	315°
+	+	45°

Ako su obje zavojnice aktivirane, onda je moguće da se rotor postavi između statorskih polova, također s povećanjem od 90° , ali pomaknut u fazi za 45° s obzirom na koračni niz jedne faze.

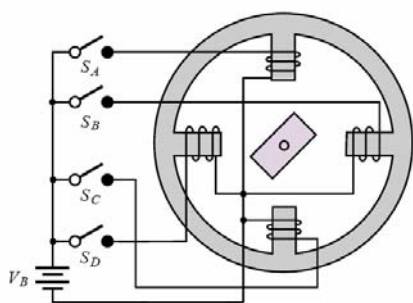
Konačno, ako se kombiniraju oba niza (što se lako postiže, budući da su naredbe za struje dviju sekvenci različite), moguće je dobiti povećanja od 45° . To je vidljivo u tablicama. Još finija rezolucija zahtijevat će povećanje broja namota i utora (zuba) u statoru ili mogućnost različitih (diskretnih) iznosa struja u zavojnicama.

i_1	i_2	θ
+	0	0°
+	+	45°
0	+	90°
-	+	135°
-	0	180°
-	-	225°
0	-	270°
+	-	315°
+	0	0°

Primjer 11.2

Za koračni motor s promjenljivom reluktancijom treba odrediti strujni uzbudni niz da bi se postigli koraci od 45° .

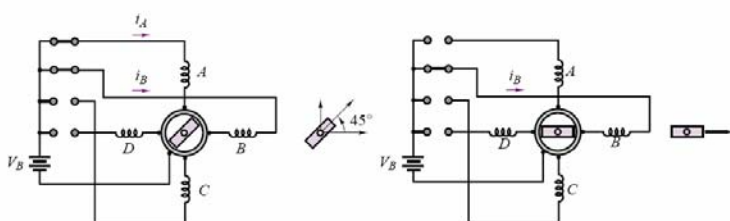
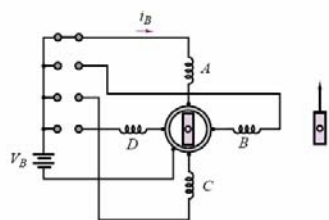
Rješenje



Rad ovakvog motora jednostavniji je od koračnog motora s permanentnim magnetom, jer rotor nije magnetiziran, pa nije potrebno imati bipolarne struje da bi postiglo željeno okretanje rotora. Stator je uzbuđen preko istosmjernog (unipolarnog) napajanja. Sklopke pokazane na slici mogu se upravljati jednostavnim logičkim krugom za sve četiri odijeljene zavojnice.

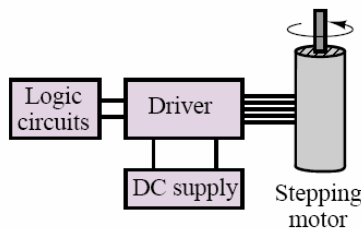
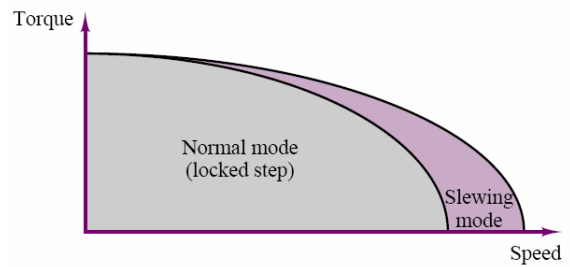
U tablici desno pokazane su sekvence, nizovi, a na slikama ispod prva tri odgovarajuća koraka, pomaka rotora.

S_A	S_B	S_C	S_D	Rotor position
1	0	0	0	0°
1	1	0	0	45°
0	1	0	0	90°
0	1	1	0	135°
0	0	1	0	180°
0	0	1	1	225°
0	0	0	1	270°
1	0	0	1	315°
1	0	0	0	360°



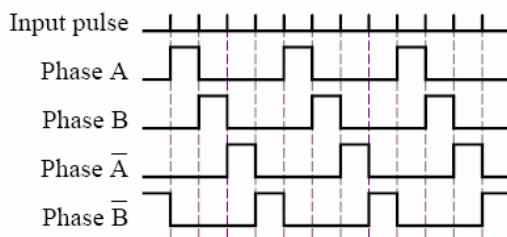
Idealna momentna karakteristika koračnog motora prikazana je na slici. Razlikuju se dva načina rada: *locked-step mode* i *slewing mode*.

U prvom načinu rotor se odmara (ili barem usporava) između koraka. Taj način se obično koristi da se postigne zadana pozicija rotora. U zaključani-korak načinu ne dopušta se zaustavljanje ili reverziranje rotora, iako se rotor još pomiče u sinkronizmu s koračnim nizom. Ovaj drugi način može se koristiti na primjer, za premotavanje magnetske vrpce.

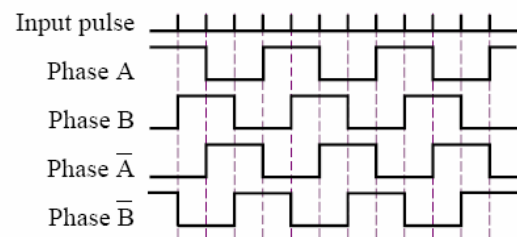


Pogon koračnog motora sastoji se od DC napajanja i logike s preklopnim krugovima koja daje odgovajuće impulse. U uzбудnom načinu rada ovi krugovi pripremaju, pojačavaju i šalju koračne nizove u jednoj ili dvije faze. U jednofaznoj uzbudu struja teče u svakom trenutku u samo jednoj fazi što štedi energiju, a daje i zadovoljavajuću točnost. U dvofaznoj uzbudu struja teče kroz obje faze u isto vrijeme, što je

pokazano dijagramom:



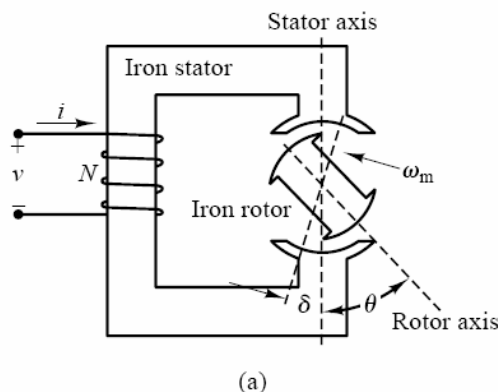
Jednofazna uzbuda



Dvofazna uzbuda

11.3 Preklopni reluktantni motori (SR – switched reluctance motors)

Preklopni reluktantni motori su najjednostavniji električni strojevi koji dozvoljavaju rad s promjenljivom brzinom. Slika pokazuje najjednostavniju konfiguraciju ovog motora iz koje se vidi kako se reluktancija i indukcija mijenjaju u ovisnosti o poziciji. Treba primjetiti da se

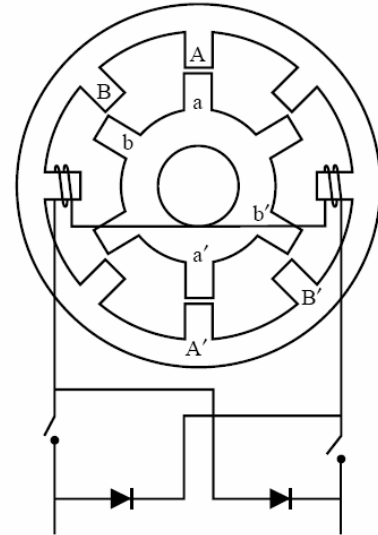


magnetski krug sastoji samo od željeza i zraka, ne postoji permanentni magnet. Rotor ima polove od običnog željeza što je najjeftinija moguća izvedba. Kad se struja dovede zavojnici, na rotor djeluje moment tražeći ravnotežni položaj u odnosu na magnetske polove statora. Kad je kut θ jednak nuli, moment je jednak nuli i rotor se ne pokreće, postizujući pritom poziciju s najmanjom reluktancijom. Ta reluktancija odgovara i minimumu spremljene energije u sustavu. Na taj način se razvija moment, jer se mijenja reluktancija u odnosu na rotorsku poziciju. Ovo načelo razlikuje ove strojeve od svih dosadašnjih AC i DC strojeva. Kao i induksijski (asinkroni) AC motori i koračni motori s promjenljivom reluktancijom, ovi motori imaju samo jedan izvor magnetskog polja.

Preklopni reluktantni stroj je posebna varijanta jednostavnog stroja koja se temelji na kontinuiranom preklapanju struje u statoru što garantira pokretanje rotora. Tipična konfiguracija prikazana je na slici, na kojoj se vidi sličnost sa koračnim motorom promjenljive reluktancije. Razlika je samo u tomu što je ovaj motor predviđen za kontinuirani, a ne diskretni (koračni) rad.

Uzbuduje se diskretnim pulsevima struje koji moraju biti vremenski određeni s obzirom na poziciju rotorskih polova u odnosu na statorske polove. To zahtijeva povratnu vezu pozicije. Brzina rotora određena je preklopnom frekvencijom struja statorskih zavojnica.

Stvaranje momenta ovisi o promjenama spremljene magnetske energije kao funkcije pozicije.



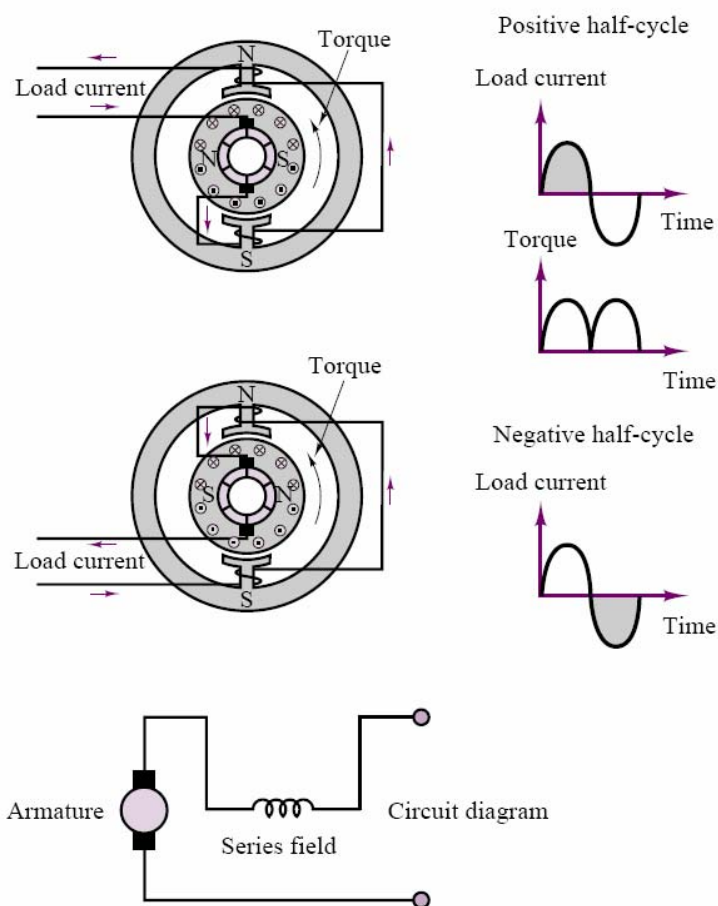
Osnovne značajke su sljedeće:

1. Reluktantni stroj ovisi o srednjem momentu samo na jednoj pojedinačnoj (sinkronoj) brzini, $\omega = \omega_m$. Zato je reluktantni stroj sinkroni stroj.
2. Razvijeni moment ovisan je o amplitudi promjene induktiviteta (ili reluktancije), pa se stoga zove *reluktantni moment*.
3. Moment se mijenja s kutem θ_0 koji je ekvivalentan kutu momenta sinkronih strojeva. Maksimalni moment događa se za $\theta_0 = \pi/4$ i naziva se *prekretni* (engl. pull-out) moment.

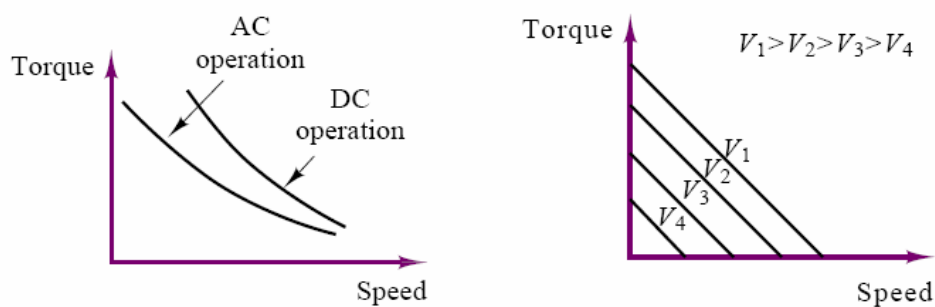
Osim opisanog kontinuiranog reluktantnog stroja, postoji i preklopivi reluktantni stroj koji ima diskontinuirane struje, pa prema tomu i nesinusnu reluktanciju. To dovodi do diskontinuiranog momenta.

11.4 Univerzalni motor

Smjer momenta stvorenog u DC stroju određen je smjerom struje u armaturnim vodičima i polaritetu električnog polja. Komutator (kolektor) se brine da polje i armaturna struja ostanu u fazi i tako moment zadrži konstantan smjer. Slični rezultati mogu se postići upotrebom AC napajanja i spajanjem armature i namota polja u seriju, kako je prikazano na slici. Serijski dc motor spojen u ovakvoj konfiguraciji da može raditi na jednoj fazi AC napajanja, zove se *univerzalni motor*. Zbog izmjenične uzbude potrebno je reducirati gubitke u željezu statora. Zato se magnetski krug ovog motora izvodi od međusobno izoliranih limova, a i po drugim konstrukcijskim značajkama znatno se razlikuje od serijskog DC motora.



Tipične momentne karakteristike za AC i DC rad univerzalnog motora prikazane su na slici:



Struja je sinusna i zbog toga mijenja smjer svaku polovicu ciklusa. Međutim, moment kojeg motor generira je uvijek u istom smjeru, što rezultira pulzirajućim momentom sa srednjom vrijednosti različitom od nule. Kao i u slučaju serijskog DC motora, najbolja metoda za kontroliranje brzine univerzalnog motora je promjena njegovog ulaznog napona. Povećanjem ulaznog napona povećava se i brzina motora.

LITERATURA

Osnovna domaća literatura

Essert, M., Valter, Z., *Osnove elektrotehnike*, Sveučilišna naklada Liber, 1991.

Grilec, J., Zorc, D., *Osnove elektronike*, Školska knjiga Zagreb, 1995.

Skalicki, B., Grilec, J., *Električni strojevi i pogoni*, FSB, 2005.

Osnovna strana literatura

John O. Attia, *Electronics and Circuits Analysis using MATLAB*, Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.

The Electrical Engineering Handbook, Ed. Richard C. Dorf, Boca Raton: CRC Press LLC, 2000

Giorgio Rizzoni, *Principles and Applications of Electrical Engineering*, 3rd edition, McGraw-Hill, 2001.

Dodatna domaća literatura

Lončar, J. , *Osnovi elektrotehnike*, knjiga prva i druga, 4. izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb 1956. i 1958.

Marinović, N. , *Opća elektrotehnika i elektronika*, Školska knjiga, Zagreb 1979.

Maletić, A. , *Osnove elektrotehnike za studente strojarstva*, Sveučilište u Splitu, FESB, Split 1987.

Pinter, V. , *Osnove elektrotehnike*, knjiga prva i druga, Tehnička knjiga, Zagreb 1975.

Dodatna strana literatura

Matlab

Biran, A. and Breiner, M., *MATLAB for Engineers*, Addison- Wesley, 1995.

Etter, D.M., *Engineering Problem Solving with MATLAB*, 2nd Edition, Prentice Hall, 1997.

Beiser, A., *The Foundations of Physics*, Addison-Wesley, Palo Alto, USA 1964.

Dorf, R.C. and Svoboda, J.A., *Introduction to Electric Circuits*, 3rd Edition, John Wiley & Sons, 1996.

Edminister, J. A. , *Theory and Problems of Electric Circuits in SI Units*, Schaum's Outline Series, Mc Graw-Hill, London 1972.

Ferris, C.D., *Elements of Electronic Design*, West Publishing Co., 1995.

Grob, B., *Direct and Alternating Current Circuits*, Mc Graw - Hill, New York 1986.

Johnson, D.E., Johnson, J.R. and Hilburn, J.L., *Electric Circuit Analysis*, 3rd Edition, Prentice Hall, 1997.

Lexton, R. *Problems and Solutions in Electronics*, Chapman & Hall, 1994

Meador, D. A., *Laplace Circuit Analysis and Active Filters*, Prentice Hall, New Jersey, 1991.

Nilsson, J.W., *Electric Circuits*, 3rd Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

Richards, J. A., Sears, F. W. , Wehr, M. R. , Zemansky, M. W., *Modern University Physics*, Addison-Wesley, Massachusetts, USA 1960.

Savant, Jr., C.J., Roden, M.S., and Carpenter, G.L., *Electronic Circuit Design: An Engineering Approach*, Benjamin/Cummings Publishing Co., 1987.

Schilling, D.L. and Belove, C., *Electronic Circuits - Discrete and Integrated*, 3rd Edition, McGraw Hill, 1989.

Sedra, A.S. and Smith, K.C., *Microelectronic Circuits*, 4th Edition, Oxford University Press, 1997.

Sears, F. W., *Electricity and Magnetism*, Addison-Wesley, Massachusetts, USA 1951.

Shah, M. M., *Design of Electronics Circuits and Computer Aided Design*, John Wiley & Sons, 1993.

Warner Jr., R.M. and Grung, B.L. *Semiconductor Device Electronics*, Holt, Rinehart and Winston, 1991.

Wait, J.V., Huelsman, L.P., and Korn, G.A., *Introduction to Operational Amplifiers - Theory and Applications*, 2nd Edition, McGraw Hill, 1992.