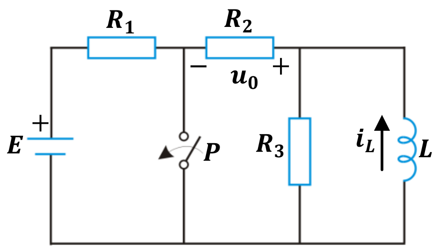
Zadatak 1.

1.1. **(1 bod)** U kolu na slici trenutno se, u trenutku $t = 0$, zatvara prekidač P. Diferencijalna jednačina koja opisuje promjenu struje $i_L(t)$ ima oblik:

$$L\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R_3 R_2}{R_2 + R_3} i_L(t) = 0.$$

Potrebno je odrediti vremensku funkciju promjene napona $u_0(t)$ nakon komutacije. Poznato je: $E = 10\ (V), R_1 = 2\ (\Omega), R_2 = 3\ (\Omega), R_3 = 6\ (\Omega)$, $L = 2\ (H), i_L(0) = -2\ (A)$.



Rješenje:

Karakteristična jednačina je: $2p + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -1$

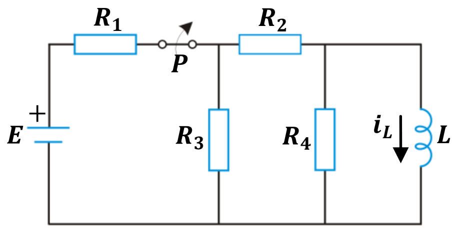
Opšte rješenje diferencijalne jednačine je: $i_L(t) = Ae^{-t}\ (A)$

Konstanta A može se odrediti na osnovu nezavisnog početnog uslova: $i_L(0) = A = -2\ (A)$

Vremenski izraz koji opisuje promjenu struje kroz zavojnicu je: $i_L(t) = -2e^{-t}\ (A)$

Funkcija promjene napona $u_0(t)$ je: $u_0(t) = -L\frac{di_L(t)}{dt} = -4e^{-t}\ (V)$

1.2. **(1 bod)** U kolu na slici, koje je bilo u stacionarnom stanju, trenutno se, u trenutku $t = 0$, otvara prekidač. Odredite nezavisni početni uslov za struju kroz zavojnicu. Poznato je:
$E = 40\ (V), R_1 = 2\ (\Omega), R_2 = 4\ (\Omega), R_3 = 12\ (\Omega)$, $R_4 = 16\ (\Omega), L = 2\ (H)$.



Rješenje:

Za $t < 0$ prekidač je zatvoren, zavojnica L predstavlja kratak spoj, odnosno otpornik R_4 je kratko spojen. Otpornici R_2 i R_3 su vezani paralelno:

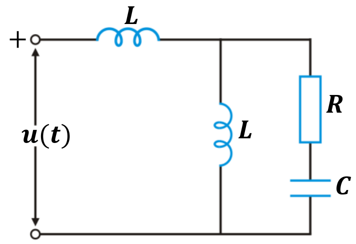
$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 3\ (\Omega)$$

Ukupna struja u takvom ekvivalentnom kolu je: $i_1 = \dfrac{E}{R_1 + R_{23}} = 8\ (A)$

Struju $i_L(0)$ možemo naći pomoću metoda grananja struja:

$$i_L(0) = \frac{R_3}{R_3 + R_2} i_1 = 6\ (A)$$

1.3. (1 bod) Za kolo na slici poznato je: $X_L = 16\ (\Omega)$, $X_C = 12\ (\Omega), U = 64\ (V), \omega = 1000\ (s^{-1})$. Potrebno je odrediti otpornost otpornika R tako da kolo bude u faznoj rezonanciji.

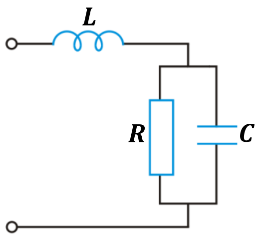


Rješenje:

Ulazna impedansa je: $$\mathcal{Z}_{ul} = \frac{R{X_L}^2}{R^2 + (X_L - X_C)^2} + jX_L\frac{2R^2 - (X_L - X_C)(2X_C - X_L)}{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Iz uslova fazne rezonancije izračunavamo: $$R = \sqrt{\frac{(X_L - X_C)(2X_C - X_L)}{2}} = 4\ (\Omega)$$

1.4. (2 boda) Odredite učestanost fazne rezonancije za kolo predstavljeno na slici.



Rješenje:

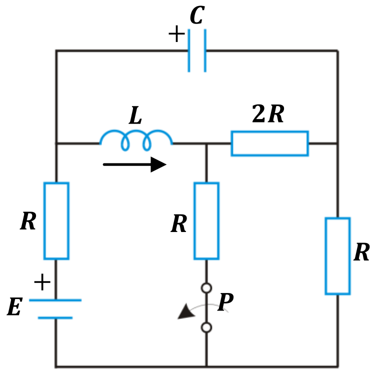
Ulazna impedansa kola je: $$\mathcal{Z}_{ul} = \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} + j\left(\omega L - \frac{\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2}\right)$$

Da bi u kolu nastupila fazna rezonancija, potrebno je ispuniti uslov:

$$Im\{\mathcal{Z}_{ul}\} = X_{ul} = \omega L - \frac{\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2} = 0$$

Učestanost fazne rezonancije je: $$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R^2C^2}}$$

Zadatak 2.



2. **(10 bodova)** U kolu na slici, koje je bilo u stacionarnom stanju, trenutno se otvara prekidač u trenutku $t = 0$. Koristeći klasičnu metodu odredite vremensku promjenu $u_c(t)$ za napon na krajevima kondenzatora poslije komutacije. Poznato je:
$E = 14\ (V), R = 5\ (\Omega), L = 10\ (H), C = 0{,}1\ (F)$.

Rješenje:

Nezavisni početni uslovi su:

$$i_L(0) = \frac{4E}{7R} = 1{,}6\ (A) \qquad u_c(0) = \frac{2R \cdot R}{R + 3R} i_L(0) = 4\ (V)$$

Nakon komutacije vrijedi:

$$2R\left(i_L(t) + C\frac{du_c(t)}{dt}\right) + u_c(t) = E \tag{1}$$

$$2Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = u_c(t) \tag{2}$$

Iz relacije (1) slijedi: $$i_L(t) = \frac{E - u_c(t)}{2R} - C\frac{du_c(t)}{dt} \tag{3}$$

Iz relacije (3) je: $$L\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{L}{2R}\frac{du_c(t)}{dt} - LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} \tag{4}$$

Uvrštavanjem relacija (3) i (4) u relaciju (2), dobija se:

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \left(2RC + \frac{L}{2R}\right)\frac{du_c(t)}{dt} + 2u_c(t) = E$$

Za date parametre korijeni karakteristične jednačine su: $p_{1,2} = -1 \pm j\ (1/s)$

Zavisni početni uslov je: $$\frac{du_c(0)}{dt} = \frac{E - u_c(0)}{2RC} - \frac{i_L(0)}{C} = -6\ (V/s)$$

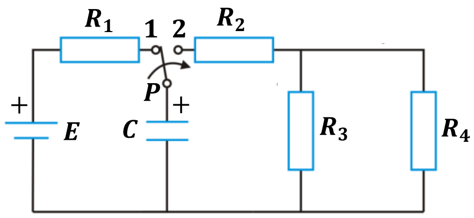
Opšte rješenje ima oblik: $u_c(t) = 7 + (A \cdot cost + B \cdot sint)e^{-t}\ (V)$

Integracione konstante su: $A = -3\ (V), \quad B = -9\ (V)$

Traženo rješenje je: $u_c(t) = 7 - (3cost + 9sint)e^{-t}\ (V), \quad t \geq 0$

Zadatak 3.

3.1. (1 bod) Prekidač P u kolu sa slike bio je u položaju (1) dovoljno dugo da se može smatrati da je uspostavljen stacionarni režim. U trenutku $t = 0$, prekidač P trenutno se prebacuje u položaj (2). Odredite zavisni početni uslov za promjenu napona na kondenzatoru u trenutku komutacije. Poznato je: $E = 100\ (V), C = 0{,}5\ (\mu F)$, $R_1 = 10\ (k\Omega), R_2 = 32\ (k\Omega), R_3 = 240\ (k\Omega)$, $R_4 = 60\ (k\Omega)$.



$a)\ \frac{du_c(0)}{dt} = 2500\ \left(\frac{V}{s}\right)$ $\boxed{b)\ \frac{du_c(0)}{dt} = -2500\ \left(\frac{V}{s}\right)}$ $c)\ \frac{du_c(0)}{dt} = -2500\ \left(\frac{kV}{s}\right)$ $d)\ \frac{du_c(0)}{dt} = 2500\ \left(\frac{kV}{s}\right)$

Rješenje:

Kako je prekidač u kolu bio zatvoren dovoljno dugo da se može smatrati da je u kolu uspostavljeno stacionarno stanje, možemo zaključiti da je za $t < 0$ napon na kondenzatoru $u_c(0) = 100\ (V)$.

Ekvivalentiranjem paralelne veze otpora R_3 i R_4 koja je serijski vezana sa otporom R_2, dobija se:

$$R_e = R_2 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = 80\ (k\Omega)$$

Diferencijalna jednačina koja opisuje vremensku promjenu napona na kondenzatoru za $t \geq 0$ je:

$$R_e C \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0$$

Zavisni početni uslov za promjenu napona na kondenzatoru u trenutku komutacije je:

$$\frac{du_c(0)}{dt} = -\frac{u_c(0)}{R_e C} = -2500\ (V/s)$$

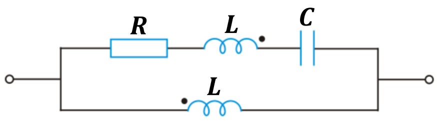
3.2. (1 bod) Potrebno je odrediti vremensku konstantu serijskog RL kola, ako je $R = 2\ (\Omega)$ i $L = 4\ (H)$.

$a)\ \tau = 0{,}5\ (s)$ $\boxed{b)\ \tau = 2\ (s)}$ $c)\ \tau = 4\ (s)$ $d)\ \tau = 0{,}25\ (s)$

Rješenje:

Vremenska konstanta serijskog RL kola je: $\tau = \frac{L}{R} = 2\ (s)$

3.3. (1 bod) Posmatra se kolo prema slici. Odredite kružnu učestanost prave antirezonancije. Poznato je: $R = 5\ (\Omega), X_L = 8\ (\Omega), X_M = 2\ (\Omega), X_C = 10\ (\Omega)$, $\omega = 5000\ (rad/s)$.



$a)$ 4841,23 (rad/s) | $\boxed{b)\ 3479{,}85\ (rad/s)}$ | $c)$ 4443,90 (rad/s) | $d)$ 6109,53 (rad/s)

Rješenje:

Kružna učestanost prave antirezonancije određuje se na osnovu slobodnog radnog režima kola čiji su ulazni krajevi otvoreni. Ovako dobijeno kolo odgovara rezonantnom RLC kolu sa ekvivalentnom induktivnom reaktansom:

$$X_e = 2(X_L + X_M) = 20\ (\Omega)$$

Iz jednačina kola napisanih preko KZ nije teško zaključiti da je sopstveni odziv kola opisan diferencijalnom jednačinom:

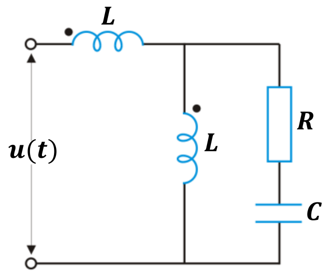
$$L_e C \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0$$

Rješenja karakteristične jednačine su: $p_{1,2} = -\dfrac{R}{2L_e} \pm j\omega\sqrt{\dfrac{X_C}{X_e} - \left(\dfrac{R}{2X_e}\right)^2}$

Kružna učestanost prave antirezonancije je: $\omega_{pa} = \omega\sqrt{\dfrac{X_C}{X_e} - \left(\dfrac{R}{2X_e}\right)^2} = 3479{,}85\ (rad/s)$

3.4. (2 boda) Koji odnosi trebaju biti između reaktansi zavojnice i kondenzatora pa da je u kolu moguće ostvariti faznu rezonanciju samo promjenom koeficijenta induktivne sprege k. Poznato je:

$$b = \frac{R}{X_C} = \sqrt{\frac{5}{8}}, \qquad k = \frac{2R^2 + (X_L - X_C)(X_L - 2X_C)}{X_L(X_L - X_C)}$$



$\boxed{a)\ \dfrac{X_L}{X_C} \geq \dfrac{13}{8}}$ | $b)\ \dfrac{X_L}{X_C} \geq \dfrac{12}{5}$ | $c)\ \dfrac{X_L}{X_C} \leq \dfrac{13}{8}$ | $d)\ \dfrac{X_L}{X_C} \leq \dfrac{12}{5}$

Rješenje:

Uvodeći smjenu: $a = \dfrac{X_L}{X_C}$

Uz dati odnos u zadatku, dobija se: $k = \dfrac{8a^2 - 24a + 26}{8a(a-1)}$

Imajući u vidu da je $0 < k \leq 1$, granice promjena vrijednosti uvedenog parametra a određujemo kao rješenje sistema nejednačina:

$$0 < \frac{8a^2 - 24a + 26}{8a(a-1)} \leq 1$$

Brojnik gornje nejednačine je pozitivan za svako a, pa je lijeva strana nejednačine zadovoljena za $a > 1$. Imajući u vidu uslov koji određuje lijeva strana, desna strana nejednačine je zadovoljena za:

$$8a^2 - 24a + 26 \leq 8a^2 - 8a$$

$a \geq \dfrac{13}{8}$ Ovo je ujedno i traženo rješenje sistema nejednačina.