

## OSNOVE MAGNETIZMA

### Sadržaj

Magnetsko polje - poznate činjenice (uzroci, magnetska indukcija, magnetski tok, materijal u magnetskom polju, magnetsko polje ravnog vodiča, zavojnice i torusa)

Magnetska sila

Elektromagnetska indukcija

Lenzovo pravilo

Pojam napona samoindukcije i međusobne indukcije

Induktivitet

Međuinduktivitet

Energija pohranjena u induktivitetu

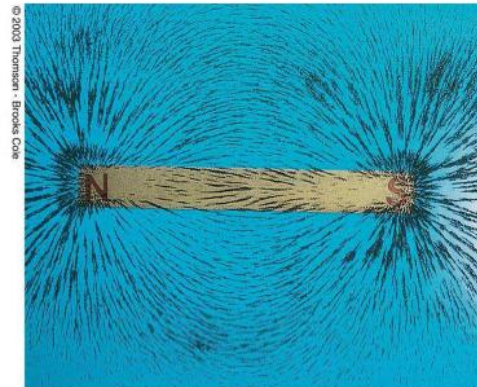
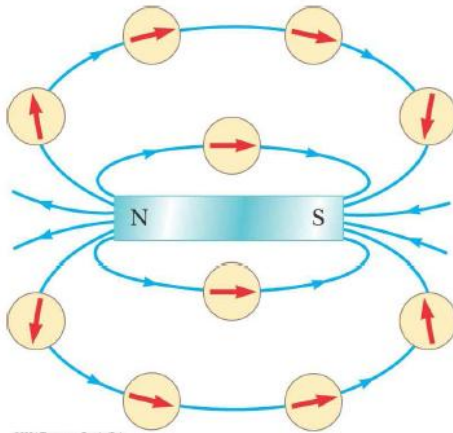
Polaritet napona samoindukcije i međusobne indukcije

Zadaci za vježbu

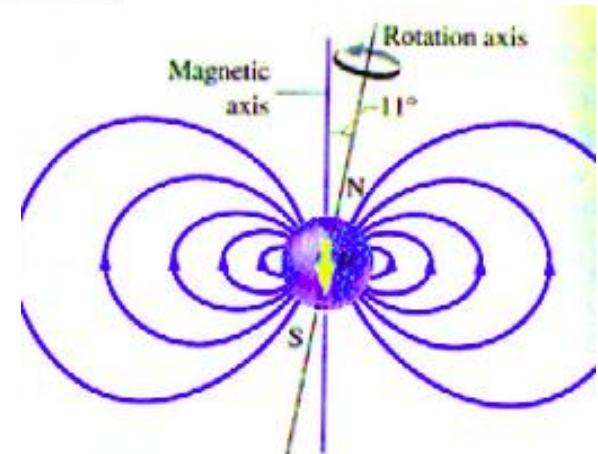
Za one koji žele znati više....

- ◆ Uzbuđeni prostor oko nas može imati dvije komponente: električnu i magnetsku.
- ◆ Pojave koje se odnose na istovremeno sudjelovanje električnog i magnetskog polja obuhvaćene su teorijom elektromagnetskog polja.
- ◆ U elektrostatici promatramo samo električno polje.
- ◆ Isto se tako može razmatrati i samo magnetsko polje ako se električka komponenta može zanemariti.
- ◆ Tri su osnovna učinka električke struje:
  - Toplina (Jouleova toplina)
  - Elektroliza
  - Magnetski učinci

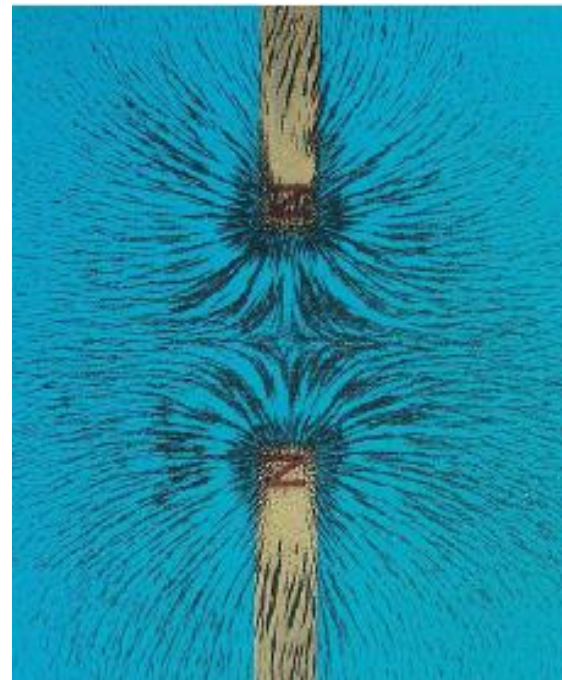
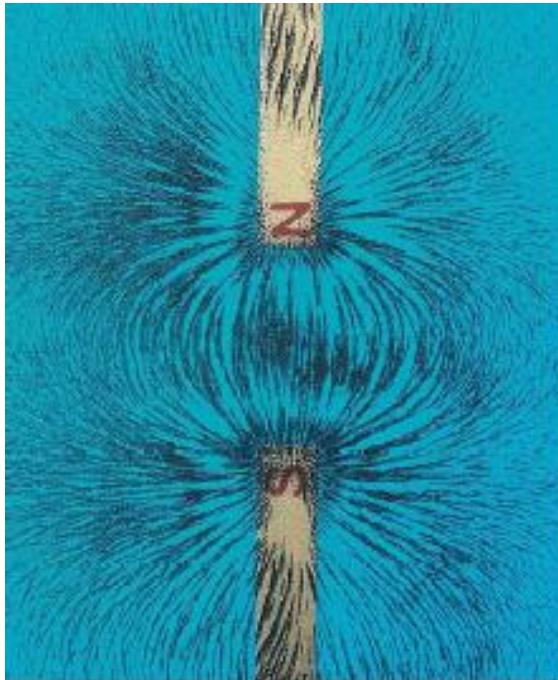
- ♦ Magnetsko polje uzrokuju permanentni magneti
  - Vizualizacija - železni prah u polju



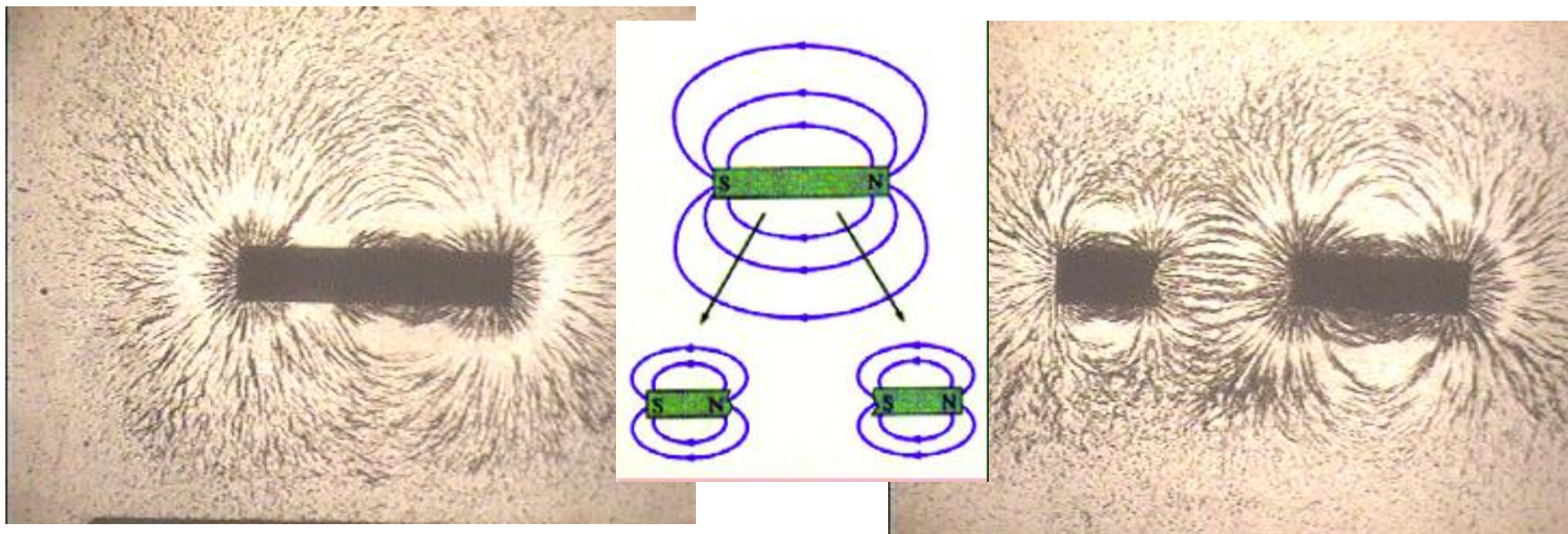
- ♦ Zemlja → magnetsko polje
  - kompas



- ♦ Istoimeni polovi se odbijaju a raznoimeni privlače



- ◆ Nema magnetskih naboja

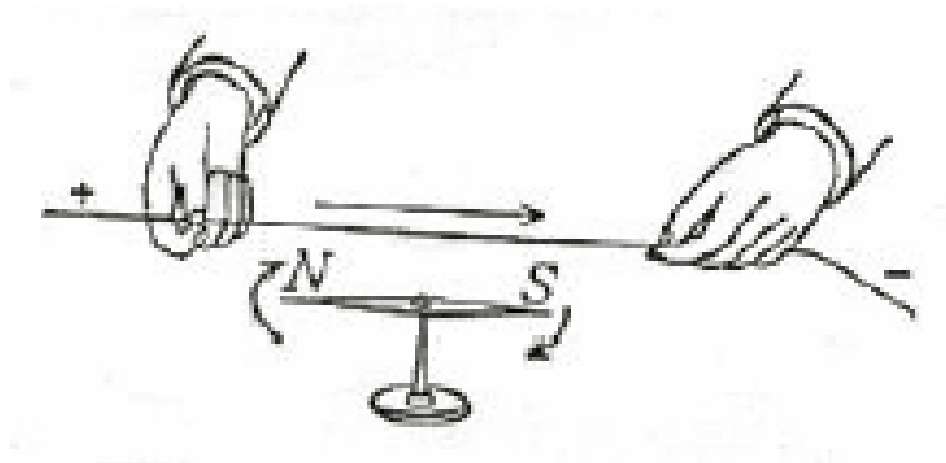


- ◆ Linije magnetskog polja su zatvorene krivulje



# MAGNETIZAM - POZNATE ČINJENICE

- ♦ Struja (naboji u gibanju) uzrokuje magnetsko polje



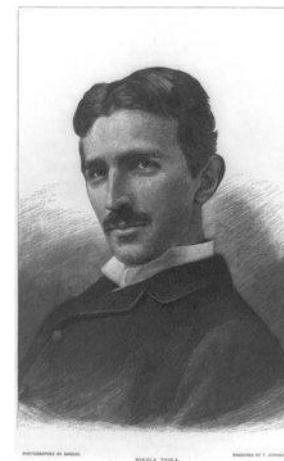
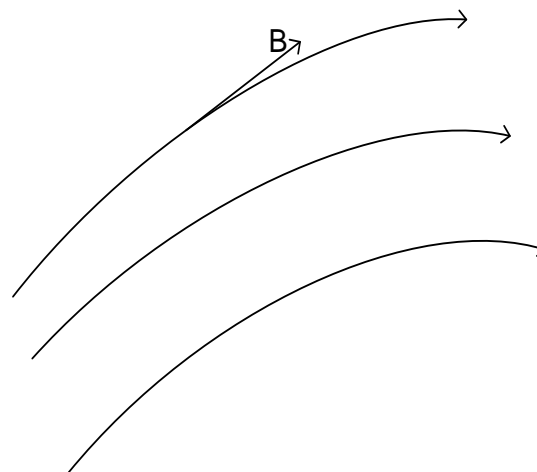
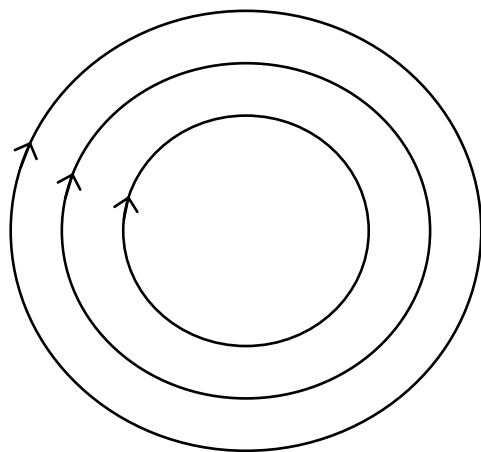
Hans Christian Oersted  
(1777- 1851)

## UZROK MAGNETSKOG POLJA JE STRUJANJE NABOJA ILI VREMENSKA PROMJENA ELEKTRIČNOG POLJA

### Kvantifikacija magnetskog polja

- ♦ Svaka točka magnetskog polja opisana je s vektorom magnetske indukcije (gustoćom magnetskog toka)  $\mathbf{B}$
- ♦ Magnetsko polje zorno prikazujemo pomoću magnetskih silnica.
- ♦ Silnice magnetskog polja su zatvorene krivulje (jer magnetskih naboja nema)

- ♦ U svakoj točki prostora
  - smjer vektora **B** je tangenta na silnicu
  - gustoća silnice kvalitativno opisuje jakost polja



Tesla je jedinica za magnetsku indukciju ( $1\text{T}=1\text{Vs}/\text{m}^2$ )

Nikola Tesla (1856-1943)



Veličina koja predstavlja protjecanje magnetskog polja kroz neku površinu zovemo **magnetski tok  $\Phi$** . Jedinica za magnetski tok: 1Vs

- ♦ Magnetski tok kroz površinu  $S$  koja je okomita na homogeno magnetsko polje

$$\Phi = B \cdot S$$

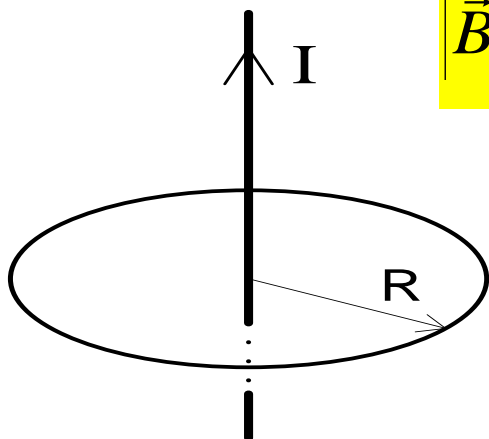
- ♦ Općenito vrijedi

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

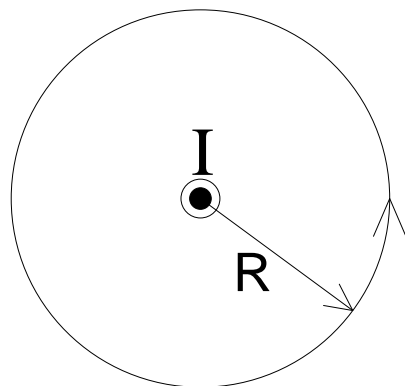
- ♦ Za magnetizam vrijedi (budući da su silnice magnetskog polja zatvorene linije, broj silnica koje uđu u zatvoreni prostor jednak je broju silnica koje iz tog prostora izađu)

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

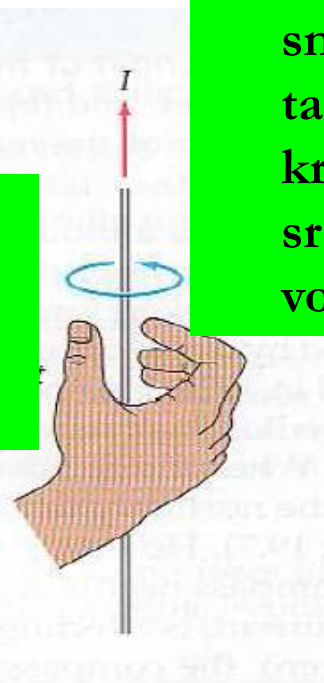
Magnetsko polje (**vektor B**) oko ravnog vodiča protjecanog strujom **I** u vakumu.



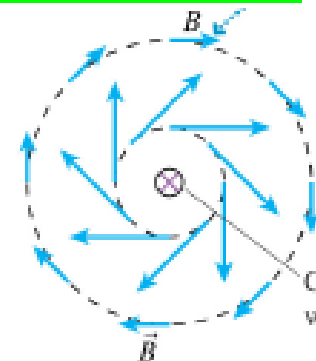
$$|\vec{B}| = \mu_0 \frac{I}{2\pi R} \quad ; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$



- Palac desne ruke pokazuje smjer struje



- Prsti pokazuju smjer polja tangencijalan na kružnicu sa središtem u osi vodiča



Općenito, između smjera obilaska krivulje  $\mathbf{l}$  i smjera struje  $\mathbf{I}$  vrijedi pravilo desne ruke:

***Ako prsti pokazuju smjer krivulje  $\mathbf{l}$ , tada palac pokazuje smjer pozitivne struje.***

Isto pravilo ***definira odnos između smjera obilaska krivulje (smjer prstiju) i smjera normale na površinu (smjer palca) koji zatvara ta krivulja*** (smjer površine je normala na površinu).

## Materijali u magnetskom polju

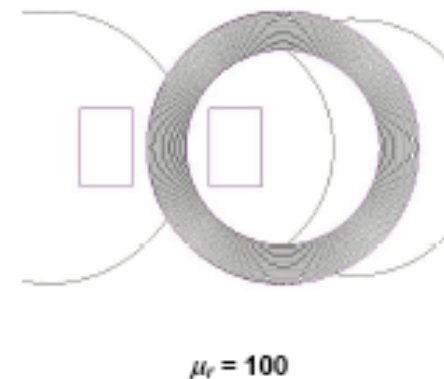
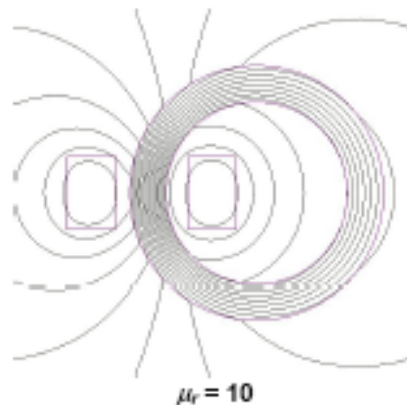
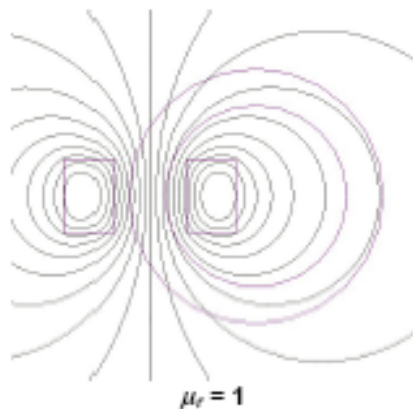
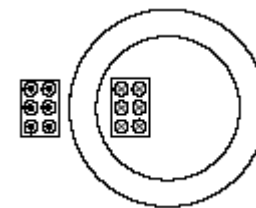
- ♦ Konstantu  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$  nazivamo permeabilnost vakuma.
- ♦ Jedinica za permeabilnost je henri po metru.
- ♦ Uz istu pobudu (struju) magnetska indukcija  $B$  je u materijalima veća  $\mu_r$  puta no u vakuumu. Veličina  $\mu_r$  zove se relativna permeabilnost magnetskog materijala.
- ♦ Veličina  $\mu$  zove se apsolutna permeabilnost magnetskog materijala.
- ♦ Vrijedi  $\mu = \mu_0 \mu_r$ .

## ♦ Magnetske materijale dijelimo u dvije velike skupine:

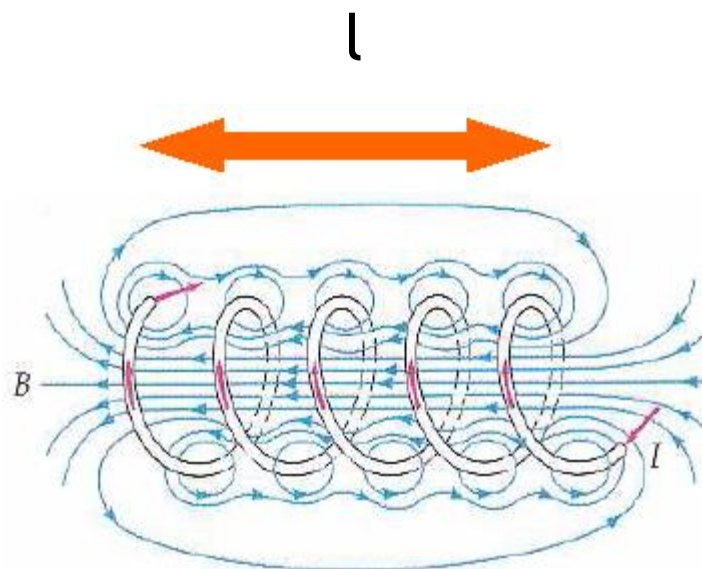
- Neferomagnetske materijale (dijamagnetski i paramagnetski materijali) gdje je  $\mu_r$  približno jednak 1.
- Feromagnetske materijali gdje je  $\mu_r$  puno veći od 1

## ♦ Feromagnetni

- Nelinearnost
- Kanaliziraju magnetski tok



- ♦ Magnetsko polje zavojnice

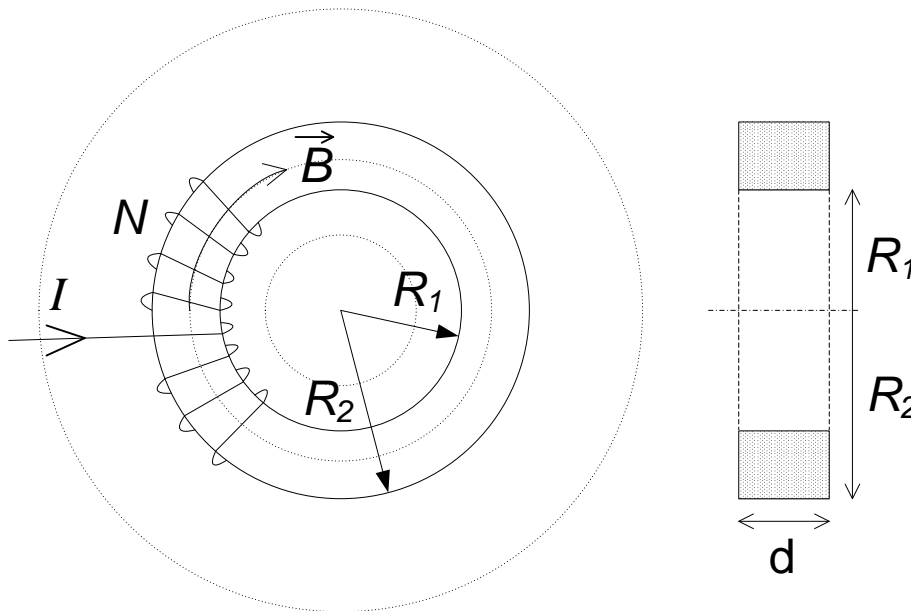


$$B = \mu \frac{NI}{l}$$

- ♦ Možemo smatrati da je magnetsko polje u zavojnici homogeno. Ono ovisi o duljini zavojnice, broju zavoja i struji, te o materijalu od koje je napravljena jezgra zavojnice.



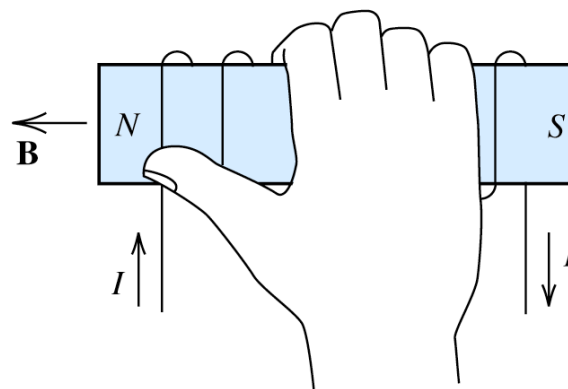
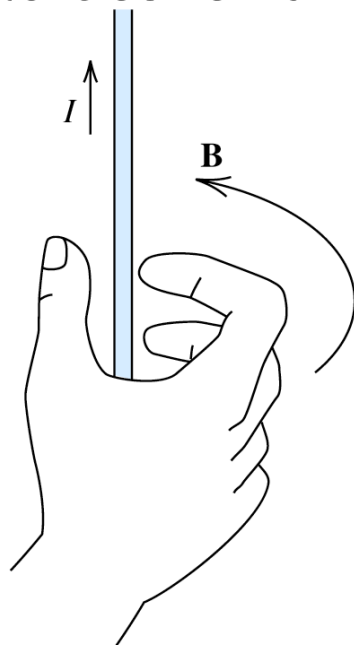
## Magnetsko polje torusne zavojnice ( $\mu = \mu_0$ )



$$B = \mu_0 \frac{NI}{l_{sr}}$$

$$l_{sr} = \frac{R_1 + R_2}{2} 2\pi$$

- ◆ Smjer magnetskog polja zavojnice (torusne zavojnice)
  - Pravilo desne ruke



- Ako palac desne ruke pokazuje smjer struje prsti pokazuju smjer polja

- Ako prsti desne ruke obuhvate zavojnicu u smjeru struje palac pokazuje smjer polja

Dva su osnovna učinka magnetskog polja:

- Sila na naboj u gibanju
- Elektromagnetska indukcija.

## Magnetsko polje djeluje silom na naboje

- Magnetska sila se izražava na sljedeći način

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

- Magnetska sila djeluje samo ako se naboji gibaju
- Smjer sile je okomit na površinu koju određuju brzina gibanja naboja i magnetska indukcije

- Iznos sile je

$$|\vec{F}| = q \cdot v_{\perp} \cdot B$$

- Smjer sile određujemo pravilom lijeve ruke:
  - Silnice udaraju u dlan
  - Prsti pokazuju smjer brzine
  - Palac pokazuje smjer sile.

Veličina sile ako brzina nije okomita na polje:

- $\alpha$  je kut između vektora brzine  $\mathbf{v}$  i vektora  $\mathbf{B}$

$$|\vec{F}| = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha$$

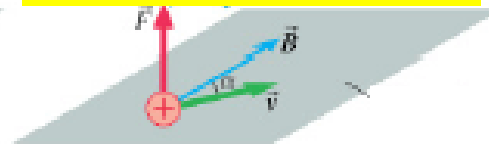
$$\alpha = 0 \quad ; \quad \sin \alpha = 0$$

$$|\vec{F}| = 0$$



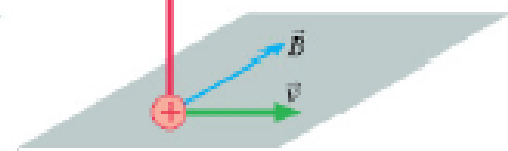
$$\alpha \neq 0$$

$$|\vec{F}| = q \cdot v \cdot B \cdot \sin \alpha$$



$$\alpha = 90^\circ$$

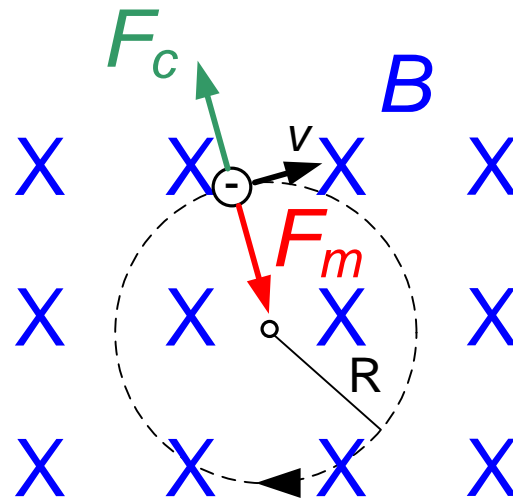
$$|\vec{F}| = q \cdot v \cdot B$$



Ravnina  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{B}$

## Primjer 1

Elektron mase  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg, naboja  $q_e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C upada brzinom  $v = 500$  km/s pod pravim kutem u homogeno magnetsko polje indukcije  $B = 2$  T prema slici. Koliko iznosi magnetska sila? Odrediti polumjer putanje elektrona.





## Primjer 1 - Rješenje

- ♦ Na naboj u gibanju djeluje magnetska sila. Jakost sile ovisi o smjeru brzine naboja prema silnici. Ako se naboj giba okomito na silnice, sila je najveća, a kada se giba u smjeru silnice sila je nula. Iznos sile ovdje izračunamo po formuli

$$F = q \cdot B \cdot v \quad F = 1.6 \times 10^{-13} \text{ N}$$

- ♦ U općenitom slučaju silu izračunavamo vektorskim produktom:

$$F = q \cdot (v \times B) \quad (q \text{ se uvrštava sa predznakom! -pa je iznos sile}$$

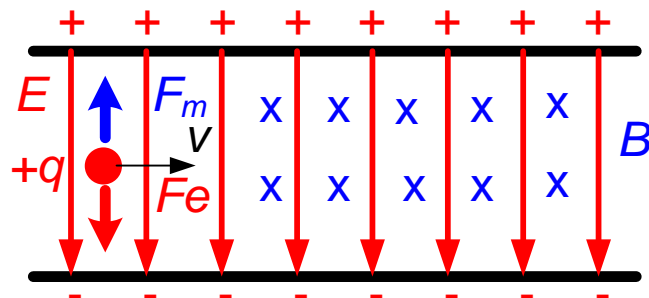
$$F = q \cdot B \cdot v \cdot \sin \alpha$$

- ♦ Magnetska sila ima karakter centripetalne sile (djeluje na smjer gibanja čestice, a ne na njenu brzinu). Izjednačavajući centripetalnu i centrifugalnu silu dobijemo da je putanja čestice kružnica polumjera

$$r = mv / qB$$

## Primjer 2

Mlaz pozitivno nabijenih čestica različitih masa, naboja i brzina ulazi u prostor u kojemu postoje električno i magnetsko polje prema slici. Odrediti brzinu čestica koje će se ulaskom u polje nastaviti gibati pravolinijski (zanemariti gravitacijsku silu).



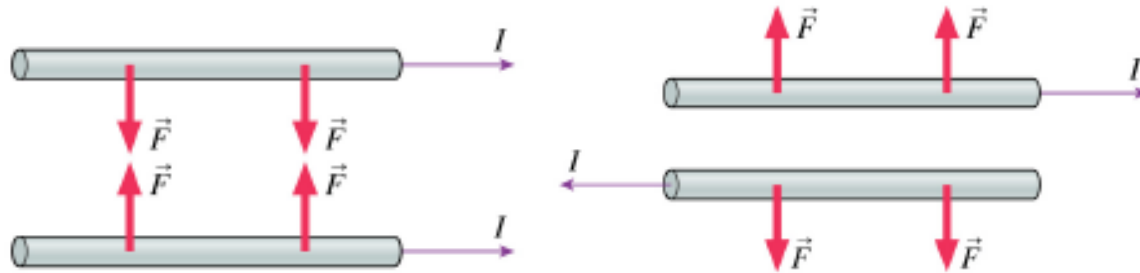
## Rješenje

$$F_e = F_m$$
$$qE = qvB$$

$$v = E/B$$

- Eksperiment: sila između dva paralelna vodiča
  - Jedan vodič uzrokuje magnetsko polje
  - Ono silom djeluje na drugi vodič

## SILA NA NABOJ U GIBANJU U VODIČU



André Marie Ampère  
(1775 - 1836)

## ♦ Sila na ravni vodič

- Vodič duljine  $l$  kojim teče struja  $I$  postavljen je okomito na magnetsko polje indukcije  $B$
- Ako u vremenu  $\Delta t$  brzinom  $v$  prođe  $N$  naboja  $q$  od jednog do drugog kraja vodiča, struja je:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{N \cdot q}{\Delta t}$$

- Na svaki naboj  $q$  djeluje sila iznosa:  $|\vec{f}| = q \cdot v \cdot B$
- Iznos ukupne sile na sve naboje (vodič) je:

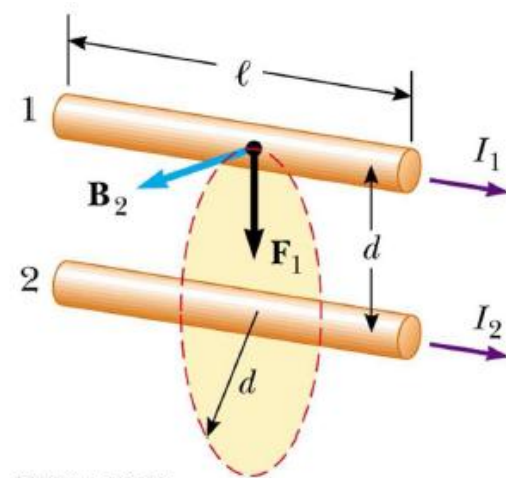
$$|\vec{F}| = N \cdot q \cdot v \cdot B = N \cdot q \frac{l}{\Delta t} B = I \cdot l \cdot B$$

- ◆ Ako vodič nije okomit na polje:

$$|\vec{F}| = I \cdot l \cdot B \cdot \sin \alpha$$

- $\alpha$  je kut između vektora struje  $I$  i vektora  $B$
- ◆ Smjer sile: pravilo lijeve ruke
  - Silnice udaraju u dlan
  - Prsti pokazuju smjer brzine (struje)
  - Palac pokazuje smjer sile.
- ◆ Sila između dva vodiča je:

$$|\vec{F}_1| = B_2 \cdot I_1 \cdot l = \mu_0 \frac{I_2 \cdot I_1 \cdot l}{2\pi d}$$



## Primjer 3

- ♦ Ravni vodič duljine  $l$  nalazi se u homogenom magnetskom polju u kojem je gustoća toka (indukcija)  $B$ . Kut između vodiča i magnetskih silnica je  $\alpha$ , a struja kroz vodič  $I$ . Kolika je sila na taj vodič? Za koji kut a će sila biti najveća, a za koji nula?

Zadano:  $B = 0.5 \text{ T}$ ,  $I = 20 \text{ A}$ ,  $l = 0.1 \text{ m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ .

## Primjer 3 - Rezultat:

$$|\vec{F}| = I \cdot l \cdot B \cdot \sin \alpha$$

- ♦  $F = 0.5 \text{ N}$
- ♦ Sila je najveća kada je  $\alpha = 90^\circ$ , a najmanja za  $\alpha=0$ .



## Primjer 4

- ♦ Odredite magnetsku silu koja djeluje po 1 m duljine između dvaju dugih paralelnih ravnih vodiča udaljenih međusobno 1m, protjecanih strujama od 1 A suprotnog smjera. Da li se ti vodiči privlače ili se odbijaju?

## Primjer 4 - Rješenje

- ♦ Sila postoji između vodiča kroz koje prolaze struje. Ovu pojavu tumačimo ovako: Svaki od vodiča nalazi se u magnetskom polju koje stvara onaj drugi. Prema tome ako vodiče označimo s 1 i 2 možemo izračunati magnetsku indukciju koju vodič **1** stvara na mjestu vodiča **2**, a to je:

$$B_{12} = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d}$$

## Primjer 4 - Rješenje (nastavak)

- ♦ Zamislimo li da je duljina drugog vodiča upravo  $l = 1$  m, dobivamo da je magnetska sila:

$$F_{12} = B_{12} \cdot I_2 \cdot l = 2 \times 10^{-7} \text{ N} = F_{21}$$

- ♦ Ako je smjer struja suprotan, sila je odbojna. Treba napomenuti da se opisana konfiguracija vodiča koristila za definiciju ampera. Prema toj definiciji struja ima iznos 1 A kada je izmjerena sila od  $2 \times 10^{-7}$  N. Ako uređaj za mjerenje sile napravimo kao neku vrst vage tada možemo kazati: važno struju.
- ♦ Primjeri dugih paralelnih vodiča kroz koje prolaze struje su: vodovi u instalacijama, dalekovodi i sl. Postoje dakako i kratki paralelni vodiči u raznim elektrotehničkim uređajima. Npr. “bus” vodovi u računalima. Proračun polja kratkih vodiča prema gornjim formulama će vrijediti samo za vodiče koji su blizu jedan drugome.

## ◆ Gibanje vodiča u magnetskom polju

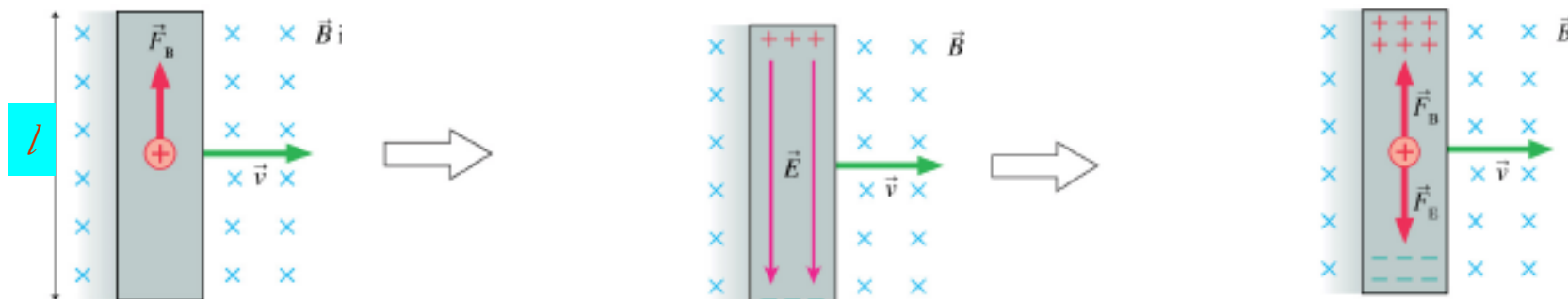
- Polje djeluje silom na naboje

$$F = q \cdot v \cdot B$$

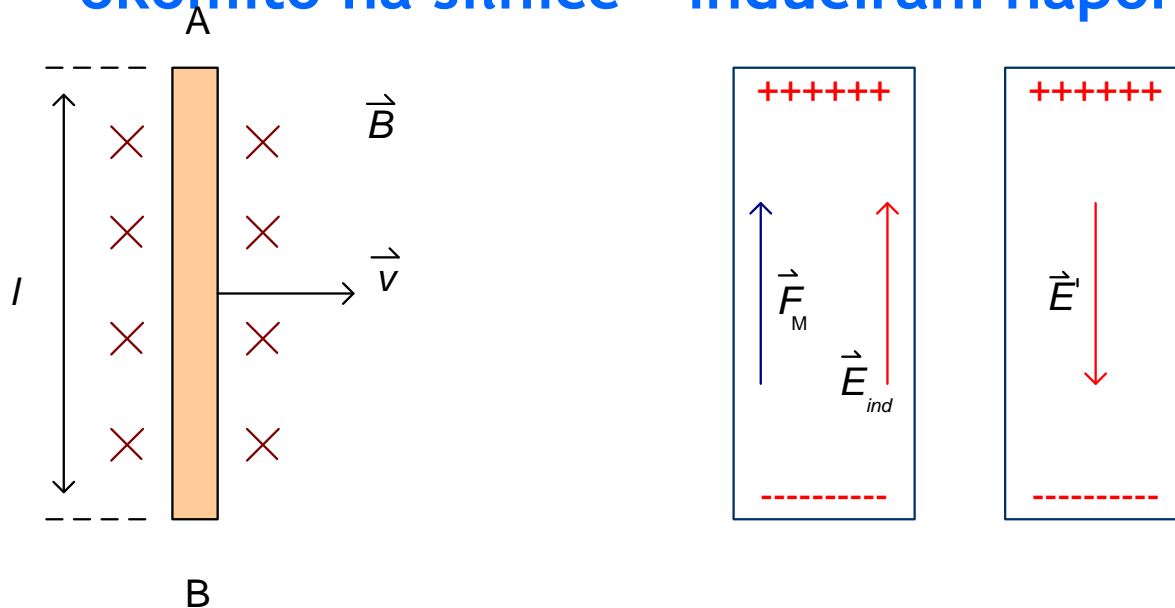
- Naboji se razdvajaju



Michael Faraday  
(1791-1867)

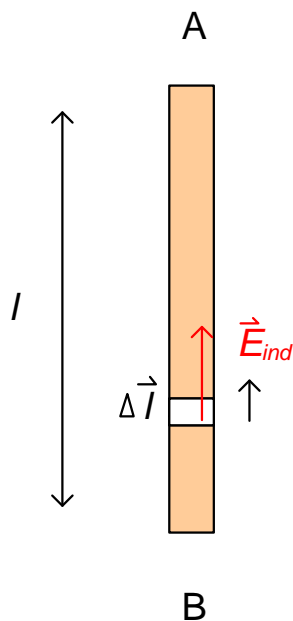


## Gibanja štapa u homogenom magnetskom polju okomito na silnice - inducirani napon



$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad \vec{E}_{ind} = \frac{\vec{F}_m}{Q} = \vec{v} \times \vec{B}$$

## Gibanja štapa u homogenom magnetskom polju okomito na silnice - inducirani napon



Polaritet napona možemo odrediti pravilom desne ruke:

- silnice udaraju u dlan
- palac pokazuje smjer brzine
- prsti pokazuju kraj štapa koji se nalazi na višem potencijalu

$$\Delta e = \vec{E}_{ind} \cdot \Delta \vec{l}$$

$$e_{AB} = \sum \Delta e = \sum_B^A \vec{E}_{ind} \cdot \Delta \vec{l} = \vec{E}_{ind} \cdot \vec{l} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{l} > 0$$

# ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

## Komentar

- ♦ Rad koji obavi sila na elektrone jest

$$A = q \cdot v \cdot B \cdot l$$

- ♦ Između krajeva štapa javlja se razlika potencijala

$$U_{AB} = \frac{A}{q} = v \cdot B \cdot l = E' l$$

- ♦ Ravnoteža se uspostavlja kad je inducirano električno polje  $E_{ind}$  jednako električnom polju  $E'$  razdvojenih naboja

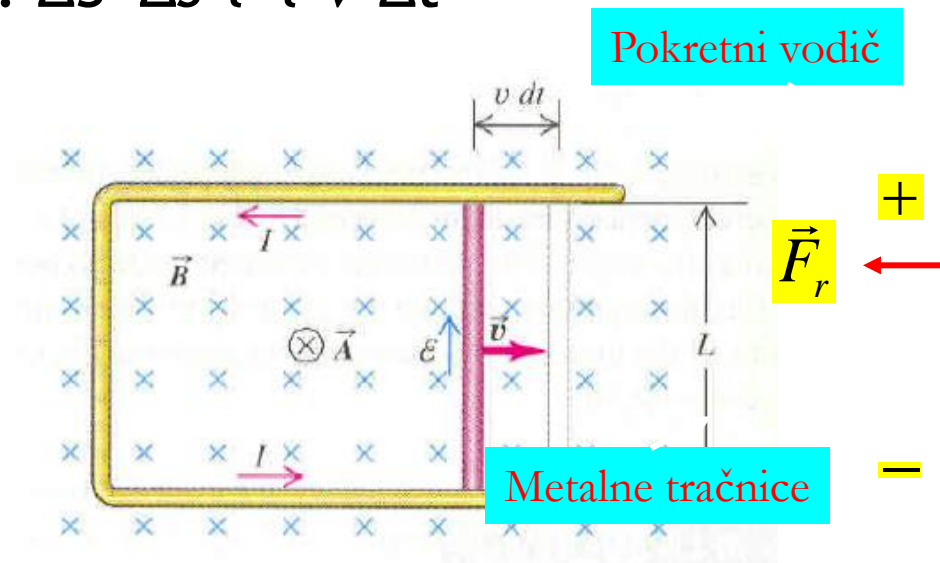


# ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Razmotrimo sada gibanje vodiča duž metalnih tračnica

- Vodič je izvor napona
- Zatvara se strujni krug
- U  $\Delta t$  put vodiča je  $\Delta s = v \cdot \Delta t$
- Površina je:  $\Delta S = \Delta s \cdot l = l \cdot v \cdot \Delta t$



Možemo pisati:

$$|U_{ind}| = v \cdot B \cdot l = \frac{v \cdot B \cdot l \cdot \Delta t}{\Delta t} = \frac{B \Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

- Posljedica: **PROMJENA** toka uzrokuje inducirani napon

Polaritet induciranog napona: Lenzovo pravilo

- Magnetski učinci induciranog napona (struje) se protive promjeni toka (uzroku koji ih je stvorio)
  - Smjer sile  **$F_r$**  na vodič je suprotan brzini  **$v$**

- Faradayev zakon:

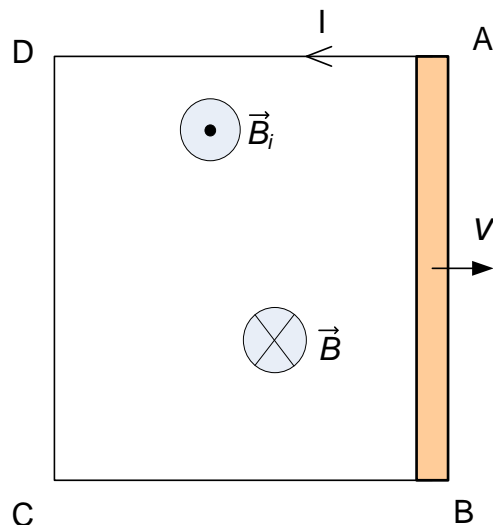
$$U_{ind} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{d\Phi}{dt}$$



Heinrich Friedrich Emil Lenz  
(1804-1865)

## Komentar: Inducirani napon u petlji - Faradayev zakon

### Petlja vodljiva

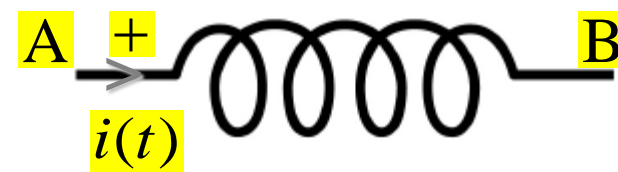
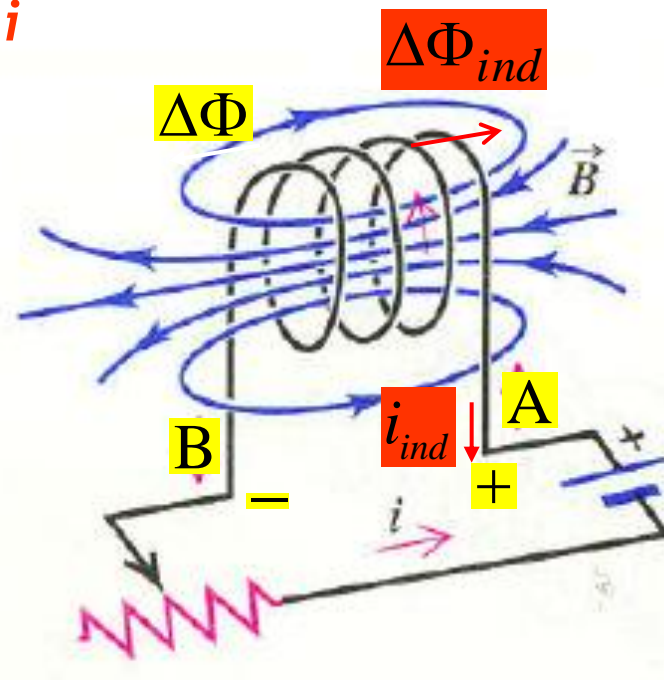


- Štap se giba u smjeru brzine  $v$
- $e_{AB} > 0$  se pojavljuje kao EMS, dakle kao napon izvora
- $e_{AB}$  će potjerati struju  $I$
- Struja  $I$  stvorit će u okolnom prostoru inducirano magnetsko polje, čiji će se tok suprotstavljati magnetskom toku  $\Delta\Phi$

$\Delta\Phi$  raste pa se inducirana struja  $I$  nastoji suprotstaviti promjenama.

## Zavojnica - Polaritet induciranog napona

- U zavojnicu u točku A ulazi rastuća struja  $i$
- Tok kroz zavojnicu raste
- Zavojnica se opire rastu toka
- Inducira se struja  $i_{ind}$  koja nastoji poništiti rast toka
- Zavojnica se ponaša kao izvor.
- $i_{ind}$  teče od B prema A (izlazi na točki A iz zavojnice)
- Na mjestu gdje  $i_{ind}$  izlazi iz zavojnice je točka višeg potencijala.
- Inducirani napon  $U_{AB} > 0$



## Komentar: Inducirani napon u petlji - Faradayev zakon

Lenzov zakon (pravilo):

*Inducirani napon ima takav polaritet da nastoji poništiti svoj uzrok.*

U diferencijalnom obliku Faradayev zakon glasi:

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

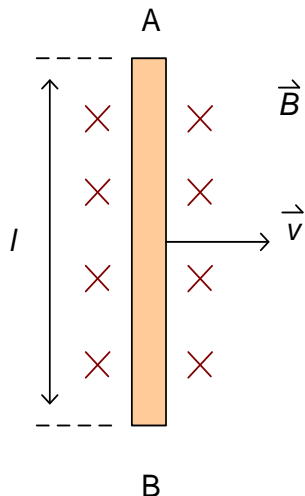
*Inducirani napon (inducirana elektromotorna sila) u zatvorenoj konturi jednaka je negativnoj promjeni magnetskog toka koji je obuhvaćen tom konturom.*

*Između smjera obilaska konture (pozitivni referentni smjer induciranog napona) i smjera pozitivnog referentnog toka vrijedi pravilo desne ruke: prsti određuju smjer obilaska konture, a palac smjer pozitivnog toka.*

## Primjer 5

Ravni vodič (štap) duljine 20 cm giba se brzinom 15 m/s okomito na silnice magnetskog polja gustoće toka (indukcije) 1,2 T. Koliki će se napon pojaviti (inducirati) na krajevima vodiča? Koja je točka (A ili B) na višem potencijalu?

## Primjer 5 - Rješenje



Ako je zadovoljen uvjet međusobne okomitosti smjera gibanja štapa i magnetskih silnica inducirani napon na krajevima štapa je:

$$U_{ind} = Blv, U_{ind} = 3,6 \text{ V}$$

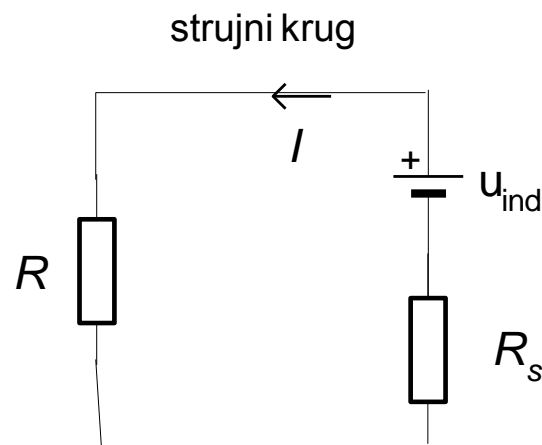
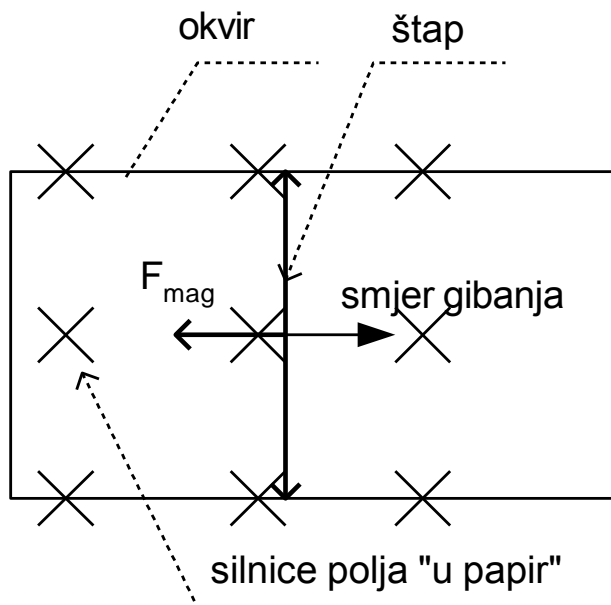
Po pravilu desne ruke točka A je na višem potencijalu

$$U_{AB} = 3,6 \text{ V}$$

## Primjer 6

Vodljivi štap duljine 10 cm klizi brzinom 9 m/s po vodljivom okviru u magnetskom polju gustoće toka (indukcije) 1T. Kolika je magnetska sila na štap ako je ukupan otpor (okvira i štapa) 150 mΩ?

## Primjer 6 - Rješenje



## Primjer 6 - Rješenje (nastavak 1)

- ◆ Ovo je primjer strujnog kruga u kojem je inducirani napon na krajevima štapa izvor napona, otpor štapa je unutarnji otpor izvora, a otpor okvira vanjski otpor. Treba zapaziti da se vanjski otpor tj. otpor okvira povećava kako se štap pomiče. Rješenje odgovara trenutku kad je ukupni otpor kruga  $R_{uk} = 150 \text{ m}\Omega$ .
- ◆ Najprije valja izračunati inducirani napon, a onda Ohmovim zakonom struju:

$$U_{ind} = Blv, \quad U_{ind} = 0,9 \text{ V}, \quad I = U_{ind}/R_{uk}, \quad I = 6 \text{ A}$$



## Primjer 6 - Rješenje (nastavak 2)

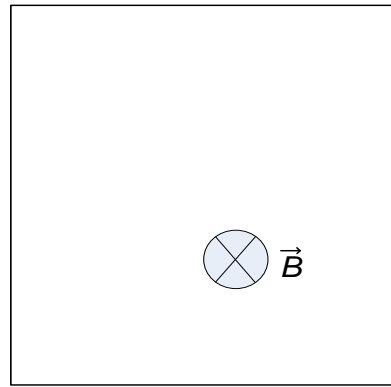
- ◆ Na štap protjecan strujom  $I = 6 \text{ A}$  koji se giba u magnetskom polju djeluje magnetska sila:

$$F_m = BIl, F_m = 0,6 \text{ N}$$

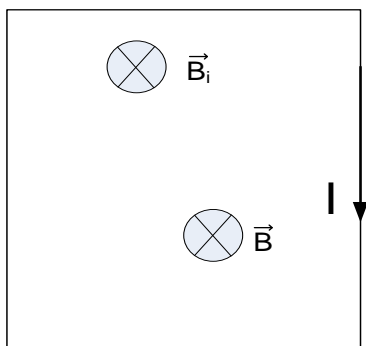
- ◆ Ovu, magnetsku silu, moramo savladavati prilikom pomicanja štapa. Time trošimo mehaničku energiju koja se pretvara u električnu, a ta se onda troši na zagrijavanje otpora.
- ◆ U ovom zadatku je prikazan jednostavni uređaj za proizvodnju el.energije (generator).
- ◆ Umjesto pravocrtnog gibanja pogodnom konstrukcijom se postiže isti efekt, ali pri kružnom gibanju štapa (rotacioni strojevi)

## Primjer 7

Okomito kroz površinu kvadratnog zavoja načinjenog od vodiča prolazi homogeno magnetsko polje indukcije 1 T. Stranica zavoja je  $a=4$  cm a otpor zavoja je  $0,1 \Omega$ . Ako se magnetsko polje smanji linearno na nulu unutar 2 ms odrediti iznos i smjer inducirane struje.



## Primjer 7 - Rješenje



Zbog smanjenja magnetske indukcije inducirani napon će protjerati induciranu struju koja će stvoriti inducirano magnetsko polje  $B_i$  istog smjera kao i  $B$ . Smjer struje prikazan je na slici.

$$\Phi = BS = Ba^2 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}$$

$$\Delta \Phi = 0 - \Phi = -\Phi$$

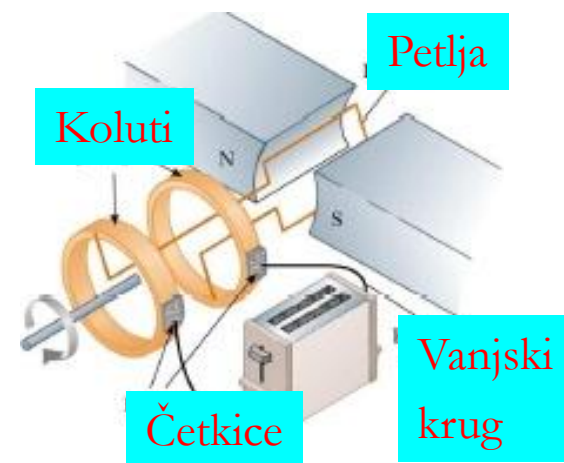
$$U_{ind} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$I = \frac{U_{ind}}{R}$$

$$I = 8 \text{ A}$$

## Generator sinusnog napona

- ◆ Petlju okrećemo u vanjskom polju
  - Inducira se napon u petlji
  - Krajevi petlje su spojeni na kolute koji rotiraju s petljom
  - Vanjski krug je spojen preko fiksnih četkica koje su u kontaktu s kolutima

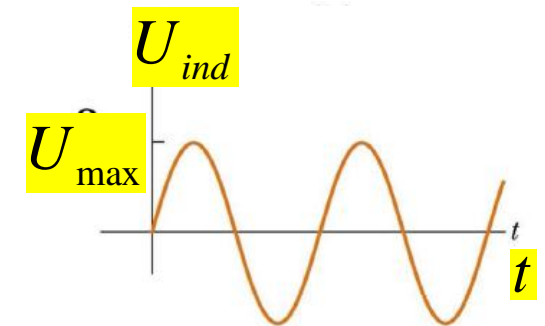
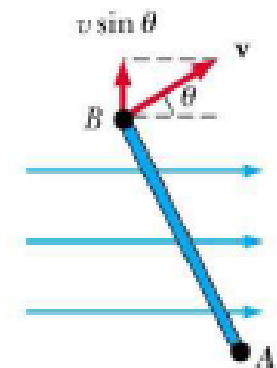
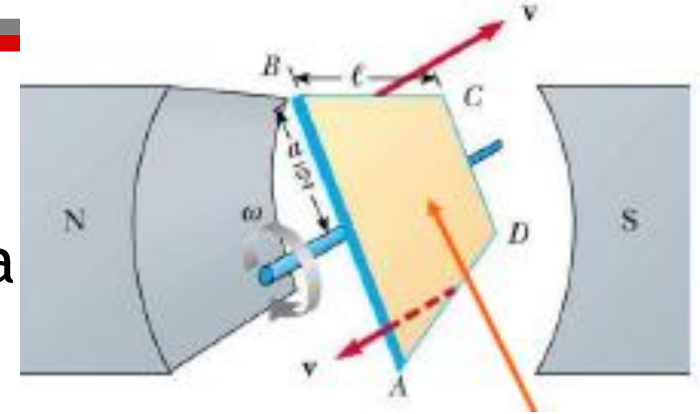




# ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA

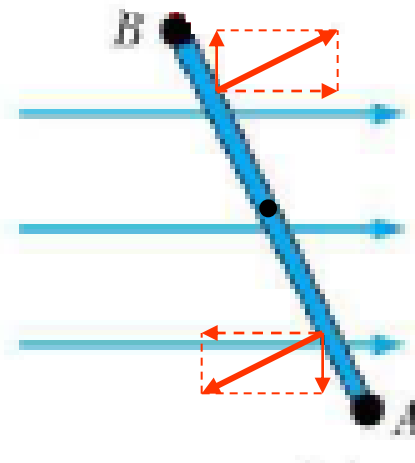
- ◆ Napon se inducira u dijelovima BC i DA
  - Komponenta brzine okomita na BC je  $v_{\perp} = v \sin \theta$
  - U dijelu BC se inducira napon  $U_{BC} = Blv_{\perp} = Blv \sin \theta$
  - U dijelu DA se inducira isti napon, pa je ukupni napon  $U = 2Blv \sin \theta$
  - Vrijedi:

$$v = r\omega = \frac{a}{2}\omega; \theta = \omega t \Rightarrow U_{ind} = Bla\omega \sin \omega t$$



Zašto se napon ne inducira u dijelovima AB i CD ?

- Od središta vrtnje do kraja B vodiča  $v_{\perp}$  je u smjeru prema gore a od središta vrtnje do kraja A vodiča  $v_{\perp}$  je u smjeru prema dolje
- Doprinosi induciranom naponu se poništavaju
- Isto vrijedi za vodič CD



## Primjer 8

Svitak od 200 zavoja površine presjeka  $20 \text{ cm}^2$  rotira oko osi okomite na silnice homogenog magnetskog polja gustoće toka  $1,2 \text{ T}$ . Kojeg je oblika napon induciran u svitku. Ako svitak u svakoj sekundi učini 5 okretaja, odredite najveću vrijednost (amplitudu) induciranog napona.

## Primjer 8 - Rješenje

- ♦ Rješenje: Rotaciono gibanje svitka u magnetskom polju ima veliki praktički značaj za proizvodnju električne energije. Napravljeni su generatori od onog malog, na biciklu snage nekoliko W, pa do ogromnih u hidro i termoelektranama snage više stotina MW (milijuna vata). Prilikom okretanja svitka promjenjivi magnetski tok koji prolazi kroz svitak se mijenja po sinusnom zakonu.

## Primjer 8 - Rješenje (nastavak 1)

- ♦ Derivacijom promjenjivog sinusnog toka dobiva se vremenski promjenjivi sinusoidni napon koji popularno nazivamo: **izmjenični napon** (eng. kratica: AC od alternatnig current). Taj napon vremenski gledano mijenja svoj iznos i polaritet pa uvodimo pojam trenutne vrijednosti. Grafički prikaz momentalnih vrijednosti naziva se valni oblik. Dakle, naš napon ima **sinusni valni oblik**.
- ♦ Ovisno o broju okretaja koje svitak učini u jedinici vremena mijenjaju se dvije značajke induciranog napona: **frekvencija i amplituda**. Kod kružnog gibanja pri jednom okretaju učini se kut od  $2\pi$  radijana odnosno  $360^\circ$  i opisuje se jedna sinusoida. Ako se u jednoj sekundi načini 5 okretaja znači da se u sekundi učini kut od  $10\pi$  radijana. Kutna brzina  $\omega$  je onda  $\omega = 10\pi$  radijana/s. Ovaj napon u jednoj sekundi 5 puta opisuje sinusoidu tj. ponavlja se 5 puta pa mu je frekvencija  $f = 5$  Hz. Općenito je kutna brzina  $\omega = 2\pi f$



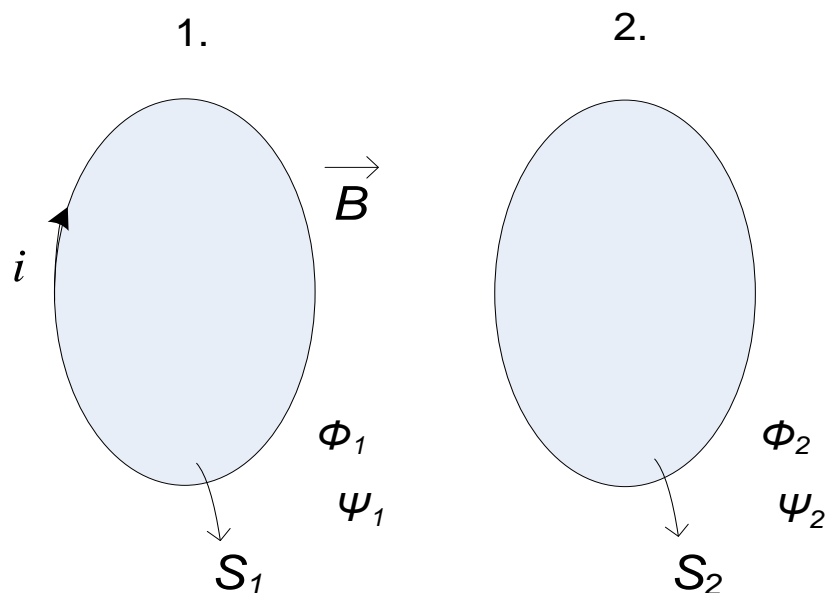
## Primjer 8 - Rješenje (nastavak 2)

- ♦ Amplituda induciranog napona iznosi

$$U_m = N \cdot \omega \cdot B \cdot S \quad U_m = 15.08 \text{ V}$$

- ♦ U prikazu generatora sinusnog napona je površina petlje  $S=a \cdot l$ .
- ♦ Napomena: *Europski standard za proizvodnju električne energije je frekvencija od 50 Hz. To znači da svi generatori uključeni u jedinstveni elektroenergetski sustav proizvode izmjenični napon te frekvencije.*

# POJAM NAPONA SAMOINDUKCIJE I MEĐUSOBNE INDUKCIJE



- Površina  $S_1$  omeđena je petljom kroz koju prolazi struja  $i$ .
- Struja  $i$  u svakoj točki okolnog prostora stvara odgovarajuću magnetsku indukciju  $B$ , pa tako i na svakoj točki površine  $S_1$  i  $S_2$ .

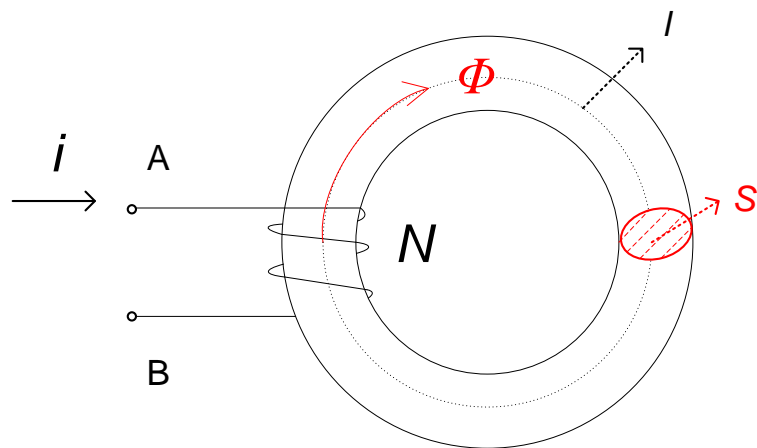
- Kroz površinu  $S_1$  (odnosno  $S_2$ ) prolazi odgovarajući magnetski tok  $\Phi_1$  (odnosno  $\Phi_2$ ).
- Magnetski tokovi  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  mogu biti obuhvaćeni (ulančeni) s više zavoja. Takav obuhvaćeni (ulančeni tok) označavamo s  $\Psi$ . U prvoj petlji imamo  $\Psi_1$ , a u drugoj  $\Psi_2$ .

# POJAM NAPONA SAMOINDUKCIJE I MEĐUSOBNE INDUKCIJE



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ Ukoliko se struja promjeni, promijenit će se,  $\Phi_1$  i  $\Psi_1$  u prvoj petlji te  $\Phi_2$  i  $\Psi_2$  u drugoj. Zbog promjene toka kroz petlje inducirat će se odgovarajući napon.
- ♦ U prvoj petlji je do promjene toka došlo kao posljedica vlastite struje petlje (strujnog kruga). Ovakvu pojavu kad se u petlji inducira napon kao posljedica promjene struje vlastite petlje nazivamo **pojavom samoindukcije**, a inducirani napon nazivamo **naponom samoindukcije**.
- ♦ Promjena struje u prvoj petlji uzrokovat će i promjenu ulančenog (obuhvaćenog) toka u drugoj petlji, zbog toga će se u drugoj petlji inducirati odgovarajući napon. Ovakvu pojavu kad se u jednoj petlji inducira napon kao posljedica promjene struje u drugoj petlji nazivamo **pojavom međusobne indukcije**, a napon **naponom međuindukcije**.



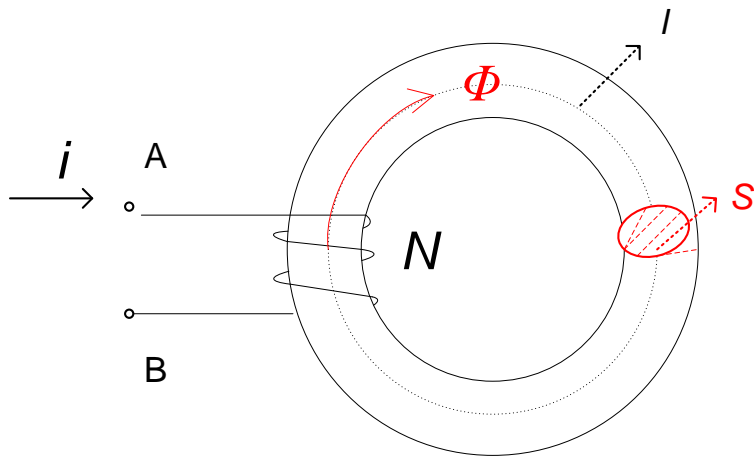
Torus površine presjeka  $S$  i srednje duljine  $l$  s koeficijentom permeabilnosti  $\mu_0$  obuhvaćen je sa  $N$  zavoja (zavojnica).

Struja ulazi na A označeni kraj zavojnice. Kao posljedica struje u torusu postoji magnetsko polje  $\vec{B}$  i odgovarajući tok  $\Phi$  čiji smjer po pravilu desne ruke vidimo na slici.

Tok  $\Phi$  prolazi kroz  $N$  zavoja žice, dakle obuhvaćeni (ulančeni) tok  $\Psi$  iznosi:

$$\Psi = N \Phi = NBS = N\mu_0 \frac{Ni}{l} S = k i$$

gdje je  $k$  konstanta.



Ako struja  $i$  poraste, porast će i ulančeni tok  $\Psi$  te će se inducirati napon samoindukcije  $e_s$ . Pozitivni smjer napona, dakle obilaska petlje (zavojnice) je u smjeru struje od točke A do točke B. Budući da se zavojnica ponaša kao izvor i napon samoindukcije predstavlja EMS (elektromotornu silu), dobijemo:

$$e_s = - \frac{d\Psi}{dt} = u_{BA}$$

Zbog pretpostavke o porastu struje  $i$ , porast će i prirast toka  $d\Psi$  (prirast je veći od 0) te je napon  $u_{BA}$  negativan. Dakle,  $u_{BA} < 0$ , iz čega slijedi da je  $u_{AB} > 0$ . Kad bi mogla poteći struja zbog induciranog napona, ona bi potekla kroz izvor (zavojnicu) od točke B prema točki A.

$$\Psi = N\Phi = NBS = N\mu_0 \frac{Ni}{l} S = \text{nešto} \cdot i = ki$$

Vidimo da postoji odnos između  $\Psi$  i  $i$ . To **nešto** ovisi samo o geometriji prostora kroz koji prolaze magnetske silnice i svojstvu materijala ( $\mu_0$ ). To **nešto** nazivamo **koeficijent samoindukcije L** ili **kraće induktivitet L**.

$$L = \frac{\Psi}{i}$$

$$e_s = U_{ba} = - \frac{d\Psi}{dt} = - \frac{d(Li)}{dt} = - L \frac{di}{dt}$$

**Napon samoindukcije možemo izraziti strujom koja ga je prouzročila i koeficijentom L, a da veličine magnetskog polja ne moramo znati.**

## Izračunavanje induktiviteta- primjer torusa

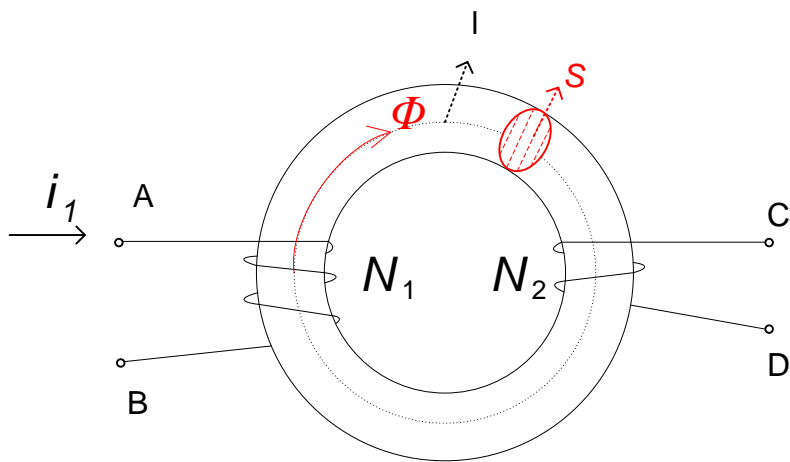
$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{N \cdot \mu_o \cdot \frac{Ni}{l} \cdot S}{i} = \frac{N^2}{\frac{l}{\mu_o} \cdot \frac{1}{S}}$$

Pri tome je magnetski otpor  $R_m$  :

$$R_m = \frac{l}{\mu_o} \cdot \frac{1}{S}$$

Dakle induktivitet L je:

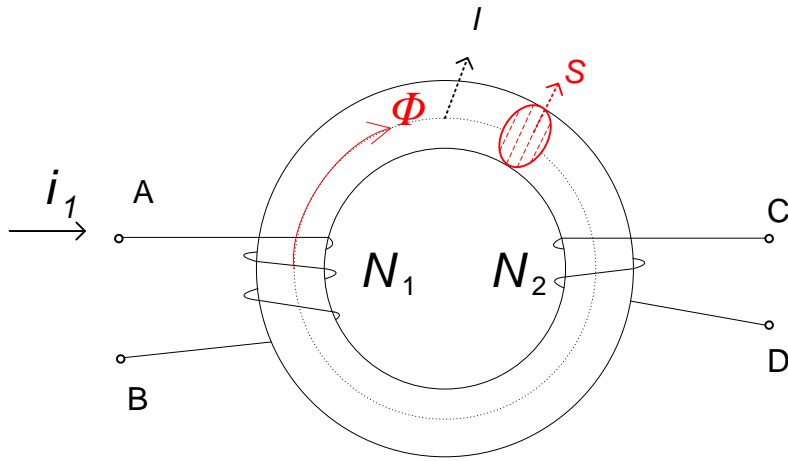
$$L = \frac{N^2}{R_m}$$



Struja  $i_1$  ulazi na A označeni kraj prve zavojnice i stvara odgovarajući tok  $\Phi$   
Tok  $\Phi$  prolazi kroz  $N_1$  zavoja prve zavojnice, ali i  $N_2$  zavoja druge zavojnice

U drugoj zavojnici postoji obuhvaćeni (ulančeni) tok  $\Psi_{12}$  (indeks 1 označava uzrok ulančenog toka, a to je struja  $i_1$ ; indeks 2 označava mjesto gdje ulančeni tok promatramo, a to je druga zavojnica).





Promjena struje  $i_1$  uzrokuje i promjenu  $\Psi_{12}$ . Zbog toga se u drugoj zavojnici inducira napon međusobne indukcije (međuindukcije)  $e_m$ .

$$e_m = - \frac{d\Psi_{12}}{dt}$$

$$\Psi_{12} = N_2 \Phi = N_2 B S = N_2 \mu_0 \frac{N_1 i_1}{l} S = k \cdot i_1 = \text{nešto} \cdot i_1$$

To **nešto** ovisi samo o geometriji prostora kroz koji prolaze magnetske silnice i karakteristici materijala ( $\mu_0$ ). To **nešto** nazivamo **koeficijent međusobne indukcije  $M$**  ili kraće **međuiduktivitet  $M$** .

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_1}$$

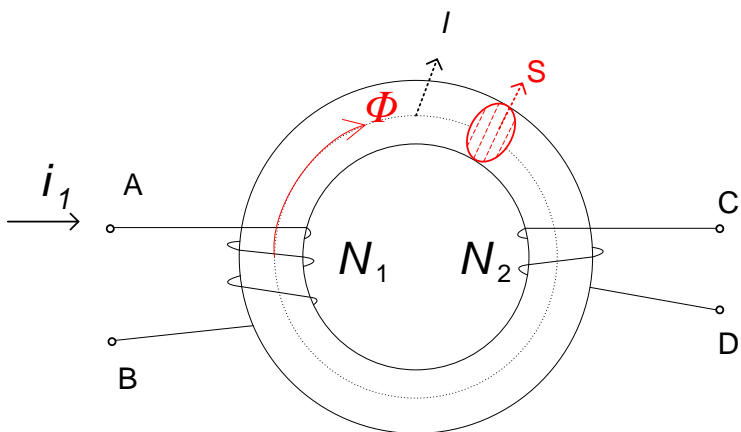
$$e_m = - \frac{d\psi_{12}}{dt} = - \frac{d(M_{12}i_1)}{dt} = - M_{12} \frac{di_1}{dt}$$

*Napon međuidukcije možemo izraziti strujom koja ga je prouzročila ( $i_1$ ) i koeficijentom  $M_{12}$ , a da veličine magnetskog polja ne moramo znati.*

## Izračunavanje međuinduktiviteta - primjer torusa

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_1} = \frac{N_2 \cdot \mu_o \cdot \frac{N_1 i_1}{l} \cdot S}{i_1} = \frac{N_1 N_2}{\frac{1}{\mu_o} \cdot \frac{l}{S}}$$

$$M_{12} = \frac{N_1 \cdot N_2}{R_m}$$



Uočimo da je magnetski otpor  $R_m$  isti i za induktivitet i za međuinduktivitet jer magnetske silnice prolaze kroz isti prostor.  
Vrijedi:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{R_m} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{R_m}$$

$$M_{12}^2 = L_1 \cdot L_2$$

$$M_{12} = M_{21} = M$$

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

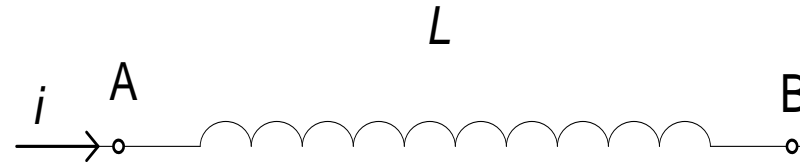
Opći slučaj:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

$$0 \leq k \leq 1$$

# NAPON SAMOINDUKCIJE I PAD NAPONA NA INDUKTIVITETU

Induktivitet je bitan parametar strujnih krugova



**Napon samoindukcije**  $e_s$  se ponaša kao izvor (dakle kao EMS) po je po definiciji mjesto na kojem struja izlazi na višem potencijalu nego mjesto gdje struja ulazi.

Induktivitet možemo smatrati trošilom u strujnom krugu. **Pad napona na trošilu**  $u_L$  definiramo kao potencijal točke gdje struja ulazi prema potencijalu točke gdje struja izlazi.

$$e_s = - L \frac{di}{dt} = u_{BA} \qquad u_L = u_{AB} = - u_{BA} = - e_s = L \frac{di}{dt}$$

Promjenu energije definiramo kao (  $p(t)$  ) je trenutna snaga)

$$\Delta W = p(t) \cdot \Delta t$$

Ukoliko prelazimo na infinitezimalne dijelove tada  $\Delta$  zamijenjujemo s diferencijalom  $d$

$$dW = p(t) \cdot d(t)$$

U elektrotehnici se trenutna snaga izražava produktom trenutnog napona i struje:

$$dW = u(t) \cdot i(t) dt$$

Zamjenom  $u(t)$  s izrazom za pad napona na induktivitetu dobijemo:

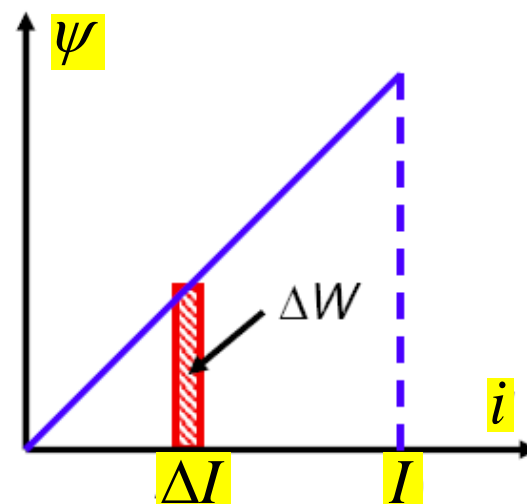
$$dW = i(t) \cdot L \frac{di}{dt} \cdot dt = i(t) \cdot L \cdot di$$

- Promjena energije:

$$\Delta W = p(t)\Delta t = u(t) \cdot i(t) \cdot \Delta t = i \cdot L \frac{\Delta i}{\Delta t} \cdot \Delta t = i \cdot L \cdot \Delta i = \psi \cdot \Delta i$$

- Ukupna energija

$$W = \sum \Delta W = \int_0^I i \cdot L di = L \frac{I^2}{2}$$



Ukupna energija akumulirana u induktivitetu  $L$  (dakle torusu koji taj induktivitet predstavlja) je suma doprinosa  $dW$  od trenutka kad je **struja** kroz zavojnicu bila **0** (nije postojalo magnetsko polje), do trenutka kad je **struja** poprimila iznos  $I$  (za taj iznos postoji magnetsko polje).

$$W = \int_{i=0}^{i=I} i(t) L di = L \frac{I^2}{2}$$

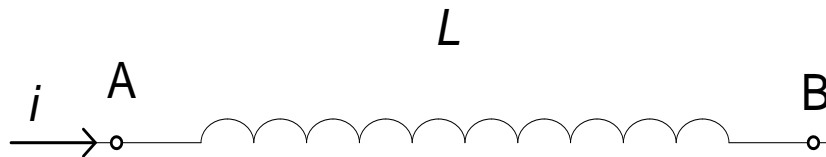
U torusu je akumulirana **magnetska energija**.

***Akumulirana magnetska energija je ovisna o kvadratu trenutne vrijednosti struje.***

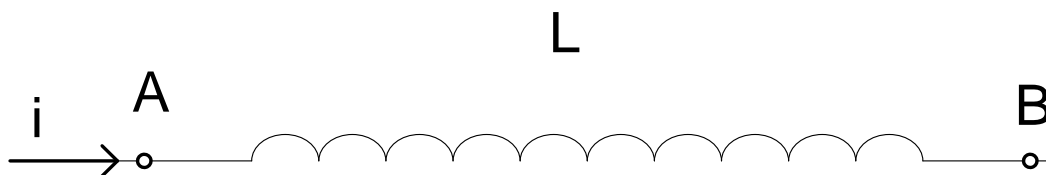
$$W = L \frac{I^2}{2}$$



*Induktivitetom prikazujemo u strujnom krugu pohranjenu (akumuliranu) magnetsku energiju.*



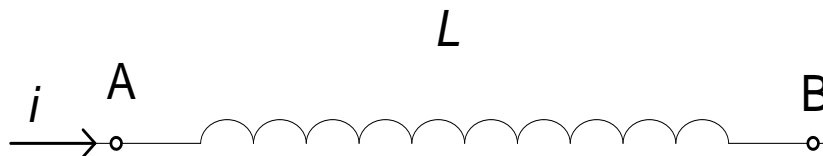
- Energija se ne može trenutno povećati jer bi za to trebala beskonačna snaga.
- Zbog toga nije moguće da se struja kroz induktivitet trenutno poveća.
- Time možemo objasniti i Lenzov zakon koji govori da se inducirani napon želi poništiti svoj uzrok.



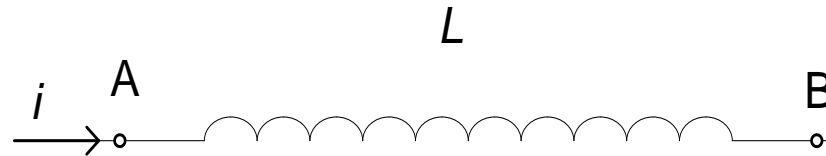
- ♦ U trenucima kad struja  $i$  kroz induktivitet raste, u njemu se povećava magnetska energija (električna energija pretvara se u magnetsku) i induktivitet se ponaša kao trošilo ( $u_{AB} > 0$ ).
- ♦ U trenucima kad struja  $i$  kroz induktivitet opada, u njemu se smanjuje magnetska energija (magnetska energija se pretvara u električnu) i induktivitet se ponaša kao izvor (napon  $u_{AB} < 0$ ,  $u_{BA} > 0$ ).
- ♦ U trenucima kad je struja  $i$  konstantna, tada je napon  $u_{AB} = 0$ , nema promjene magnetske energije.

## Primjer 9

Svitak induktiviteta  $L=1$  H protjecan je strujom  $I=1$  A. Koliki se napon inducira na krajevima svitka, ako se struja linearno smanji na nulu u vremenu  $\Delta t=100$  ms? Koliko napona «otpada» na pojedini zavoj ako zavojnica ima  $N=100$  zavoja? Krajeve svitka označimo s **A** i **B**. Struja ulazi u stezaljku označenu s **A**. Koji je polaritet induciranog napona?



## ♦ Primjer 9 - Rješenje

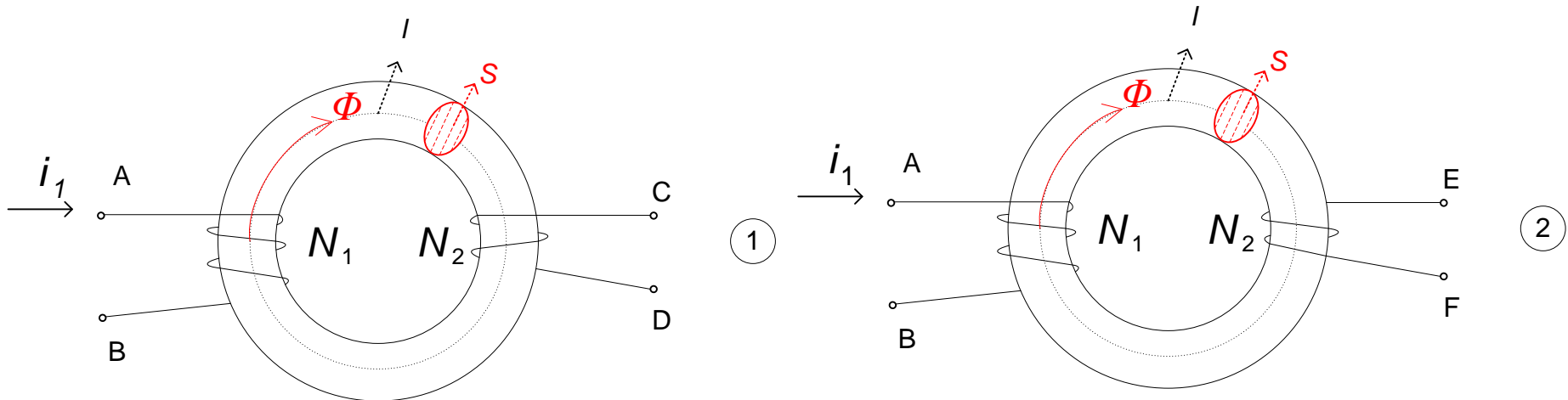


$$u_L = u_{AB} = - u_{BA} = - e_s = L \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

$U_{AB} = -10 \text{ V}$ , po svakom zavoju se inducira 0,1 V

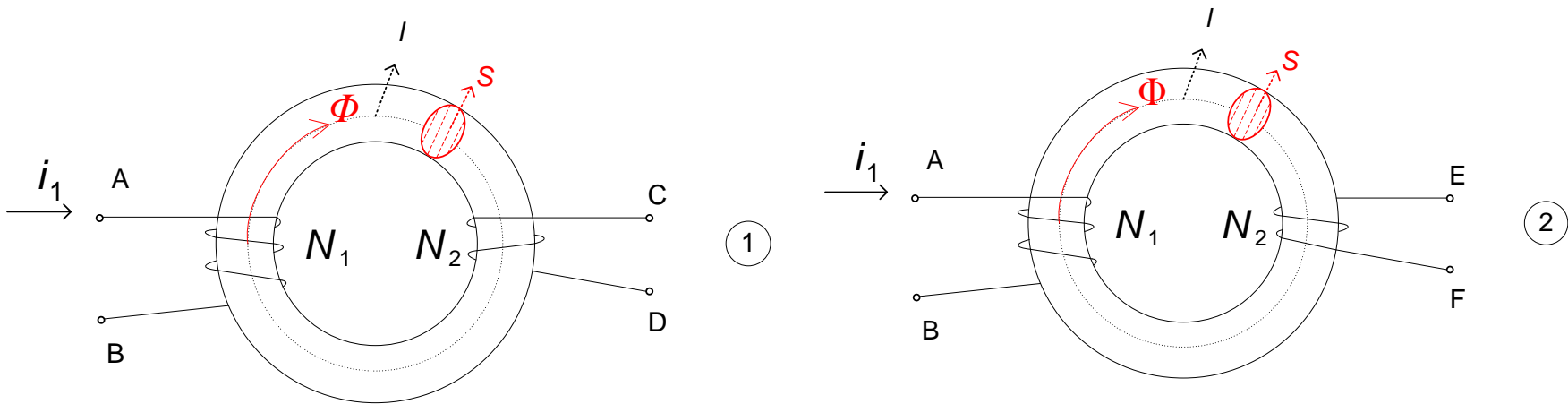
- ♦ **Komentar:** s obzirom da struja opada, promjena struje je negativna

# OVISNOST POLARITETA NAPONA MEĐUINDUKCIJE O SMJERU NAMATANJA ZAVOJNICE



Pretpostavimo da iznos struje  $i_1$  raste. Kao posljedica toga raste i tok  $\Phi$  i ulančeni tok  $\Psi_{12}$  u drugoj zavojnici. Tok  $\Phi$  je isti u oba slučaja (slučaj 1 i slučaj 2). U zavojnici  $N_2$  inducirat će se u oba slučaja odgovarajući napon međusobne indukcije koji će se po Lenzovom zakonu suprotstaviti promjeni. Dakle kroz zavojnicu  $N_2$  bi trebala poteći inducirana struja koja bi stvorila magnetski tok u suprotnom smjeru od toka stvorenog strujom  $i_1$ .

# OVISNOST POLARITETA NAPONA MEĐUINDUKCIJE O SMJERU NAMATANJA ZAVOJNICE



Prije smo ustanovili da je u prvoj zavojnici zbog samoindukcije  $u_{AB} > 0$ . Kad bi mogla poteći struja zbog induciranog napona, ona bi potekla kroz izvor (zavojnicu) od točke B prema točki A.

Analizirajmo inducirani napon međuindukcije u drugoj zavojnici.

U **slučaju 1** inducirana struja bi trebala teći od **točke D** prema **točki C** i napon  $u_{CD}$  bi bio **pozitivan** budući da se zavojnica ponaša kao **izvor**.

U **slučaju 2** inducirana struja bi trebala teći od **točke E** (koja odgovara **točki C** u prvom slučaju) prema **točki F** (koja odgovara **točki D** u prvom slučaju) i napon  $u_{FE}$  bi trebao biti **pozitivan** budući da se zavojnica ponaša kao **izvor**.

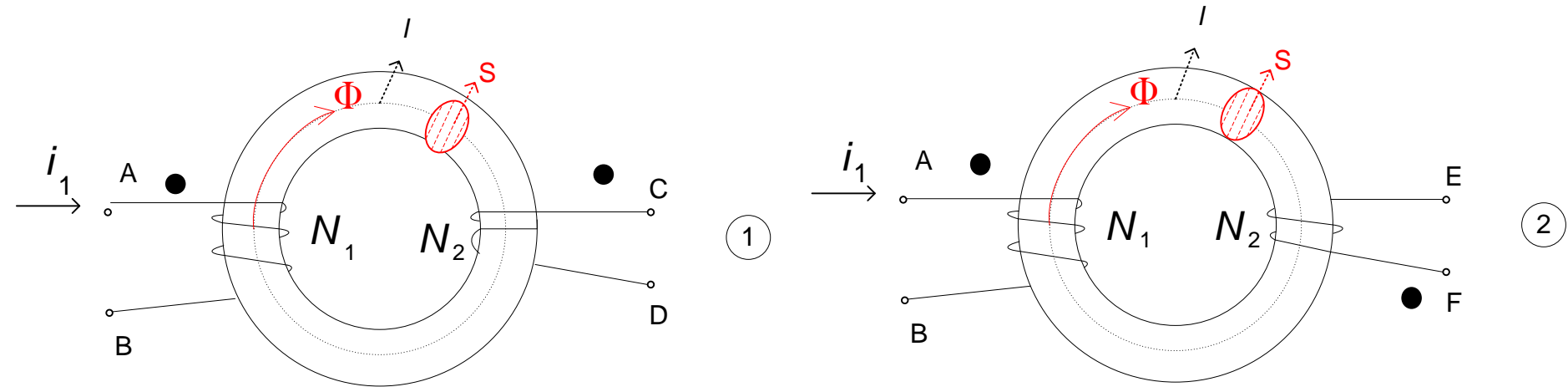
# OVISNOST POLARITETA NAPONA MEĐUINDUKCIJE O SMJERU NAMATANJA ZAVOJNICE

**Zaključak: *polaritet napona međusobne indukcije ovisi o smjeru namatanja zavojnice.***

Problem namatanja zavojnice rješava se sljedećim pravilom:

- ◆ Označimo punim kružićem točku gdje struja ulazi u ***Zavojnicu 1.***
- ◆ Po pravilu desne ruke odredit će se smjer toka  $\Phi$ .
- ◆ Odredimo punim kružićem točku ***Zavojnice 2*** gdje bi struja trebala ulaziti da se stvori tok u istom smjeru.
- ◆ Polaritet induciranog napona između označene točke i neoznačene točke prve zavojnice (napon samoindukcije) i druge zavojnice (napon međuindukcije) bit će isti.

# OVISNOST POLARITETA NAPONA MEĐUINDUKCIJE O SMJERU NAMATANJA ZAVOJNICE



U prvom slučaju označene točke su A i C, u drugom slučaju su to točke A i F.

Slučaj 1

$$e_s = -L \frac{di_1}{dt} = u_{BA}$$

$$e_m = -M_{12} \frac{di_1}{dt} = u_{DC}$$

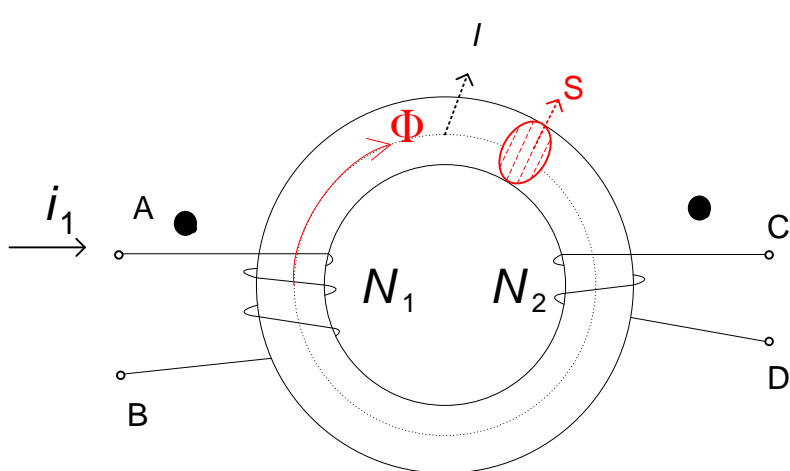
Slučaj 2

$$e_s = -L \frac{di_1}{dt} = u_{BA}$$

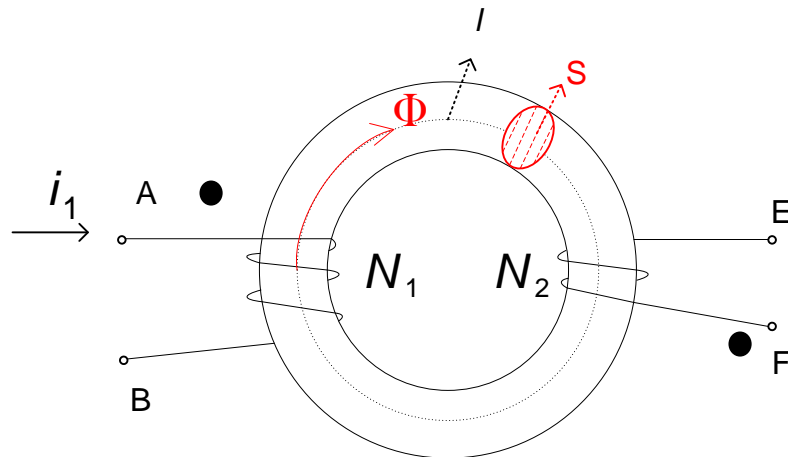
$$e_m = -M_{12} \frac{di_1}{dt} = u_{EF}$$



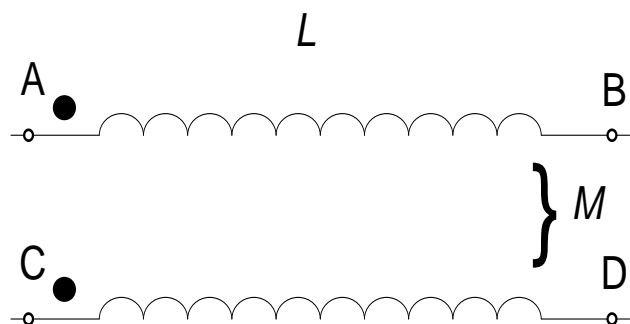
# SIMBOLIČKI PRIKAZ INDUKTIVITETA I MEĐUINDUKTIVITETA



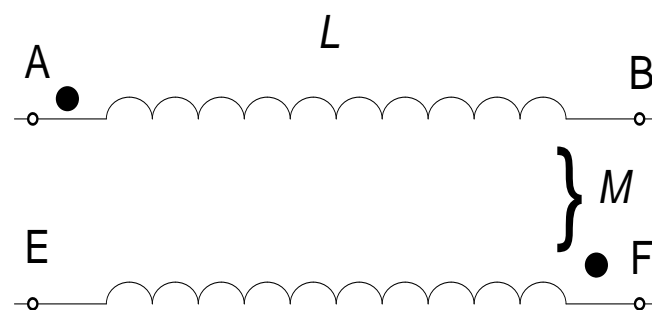
1



2



1



2

## Komentar

- ◆ Inducirani napon međuindukcije ovisi o smjeru namatanja zavojnice
- ◆ Na principu napona međuindukcije radi transformator: transformira odgovarajući napon i struju primara (primarne zavojnice) na odgovarajući napon i struju sekundara (sekundarne zavojnice)
- ◆ Induktivitet i međuinduktivitet su elementi strujnih krugova
- ◆ U okviru OE koristit ćemo većinom induktivitet  $L$

Kroz dva duga paralelna ravna vodiča duljine  $l=10$  m razmaknuta na udaljenost  $d=1$  m teku struje istoga iznosa. Vodiči djeluju jedan na drugoga silom od  $2 \cdot 10^{-6}$  N. Kolika je struja vodiča?

Rješenje:  $I = 1$  A

Avion leti horizontalno brzinom od 900 km/h. Raspon krila aviona je 48 m a vertikalna komponenta Zemljinog magnetskog polja je  $5 \cdot 10^{-5}$  T. Odrediti inducirani napon između krajeva krila.

Rješenje:  $|u_{\text{ind}}| = 0,6 \text{ V}$

Metalni štap duljine 2m giba se u homogenom magnetskom polju indukcije 0,1 T brzinom 5m/s. Štap, magnetska indukcija i brzina su međusobno okomiti. Štap je zanemarivog otpora a na njega je spojen otpor od  $5\Omega$ . Odrediti:

- a) Struju kroz otpor
- b) Silu kojom je potrebno djelovati na štap da bi se štap gibao.
- c) Snagu kojom se obavlja gibanje štapa.

Rješenja: a)  $I = 0,2 \text{ A}$    b)  $F = 0,04 \text{ N}$    c)  $P = 0,2 \text{ W}$

Dvije bliske zavojnice imaju  $N_1=50$  i  $N_2=100$  zavoja. Struja zavojnice 1 je iznosa 1A i u zavojnici stvara magnetski tok  $\Phi_1=2 \cdot 10^{-2}$  Vs. Dio toka zavojnice 1 iznosa  $\Phi_{12}=10^{-2}$  Vs prolazi kroz zavojnicu 2. Odrediti induktivitet prve zavojnice i međuinuktivitet !

Rješenja:

$$L_1 = 1 \text{ H}$$

$$M = 1 \text{ H}$$

Struja kroz zavojnicu induktiviteta 5mH raste linearno brzinom od 2A/s. Koliki su inducirani napon i energija pohranjena u magnetskom polju zavojnice nakon 2s i nakon 4 s?

Rješenja:

$$W_2 = 40 \text{ mJ}$$

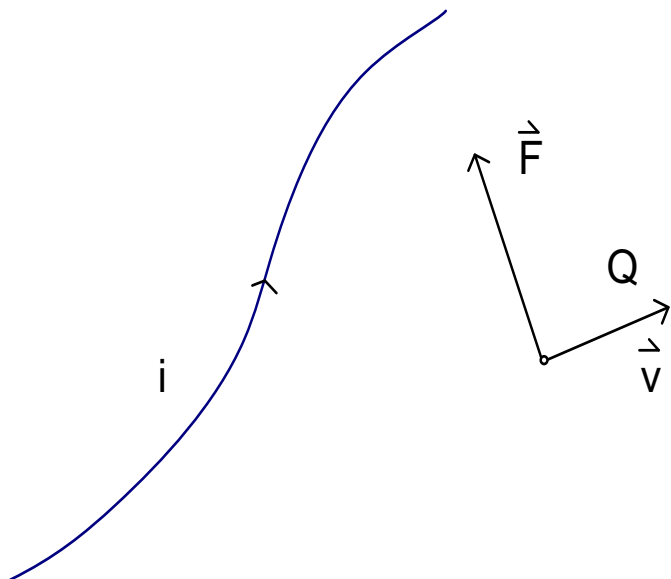
$$W_4 = 160 \text{ mJ}$$

# Osnove magnetizma

*Za one koji žele znati više.....*

---



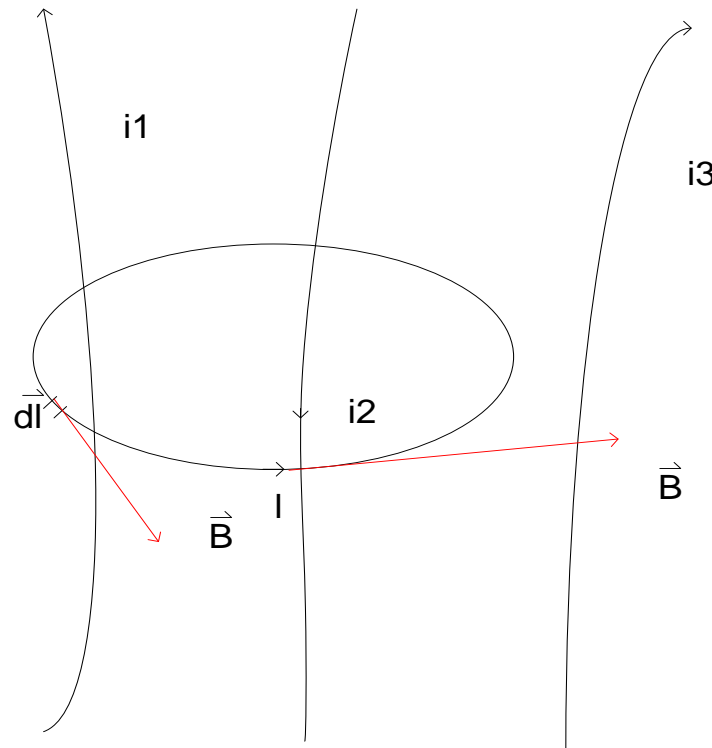


$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Vektor  $\vec{B}$  je vektor magnetske indukcije

**UZROK MAGNETSKOG POLJA JE  
STRUJANJE NABOJA ILI VREMENSKA  
PROMJENA ELEKTRIČNOG POLJA**

Amperov kružni zakon ili Amperov zakon protjecanja definira odnos između struje ***i*** kao uzroka magnetskog polja i vektora magnetske indukcije ***B*** kao posljedice.



$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum i$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

## Komentar

- Amperov kružni zakon govori da za svaku zatvorenu krivulju (petlju) vrijedi da je

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

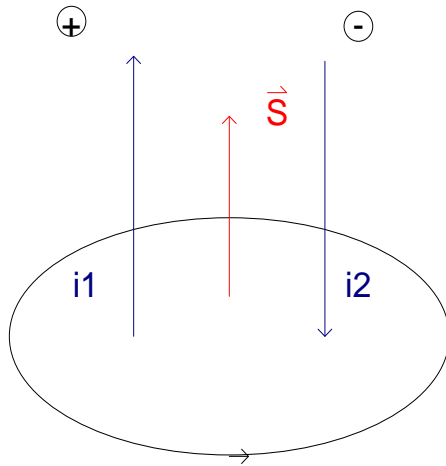
Jednak produktu  $\mu_0$  i sume struja koji prolaze kroz tu zatvorenu petlju (pozitivni smjer struje i obilaska petlje definiran je pravilom desne ruke)

- Dakle, ako na svakom djeliću petlje  $dl$  odredimo skalarni produkt  $\vec{B}d\vec{l}$  i sve te doprinose zbrojimo, konačni rezultat je jednak algebarskoj sumi struja koje prolaze kroz površinu petlje pomnožen s  $\mu_0$
- U ovom obliku izrečen Amperov zakon može se primijeniti samo na neke posebne slučajeve (ravni vodič protjecan strujom, torusna zavojnica)

Između smjera obilaska krivulje  $I$  i smjera struje  $i$  vrijedi pravilo desne ruke:

*Ako prsti pokazuju smjer krivulje  $I$ , tada palac pokazuje smjer pozitivne struje.*

Isto pravilo *definira odnos između smjera obilaska krivulje  $i$  i smjera površine koji zatvara ta krivulja* (smjer površine je normala na površinu).

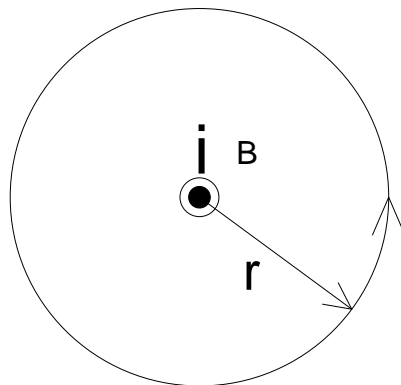
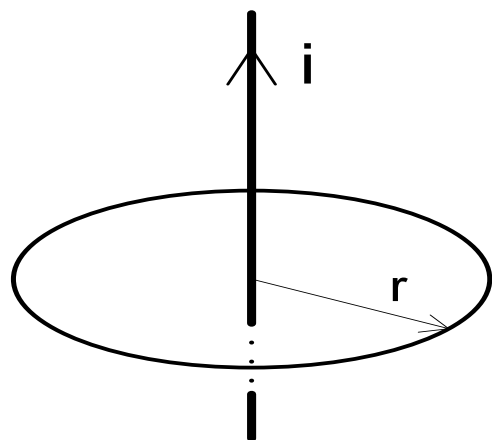


$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(i_1 - i_2)$$

Pozitivni smjer struje se podudara sa smjerom površine.

Kad bi postojala struja  $i_3$  i koja nije obuhvaćena krivuljom  $l$ , one ne bi utjecala na rezultat, iako utječe na iznos vektora  $\vec{B}$ .

Magnetsko polje (**vektor B**) oko ravnog vodiča protjecanog strujom **i** u vakumu.

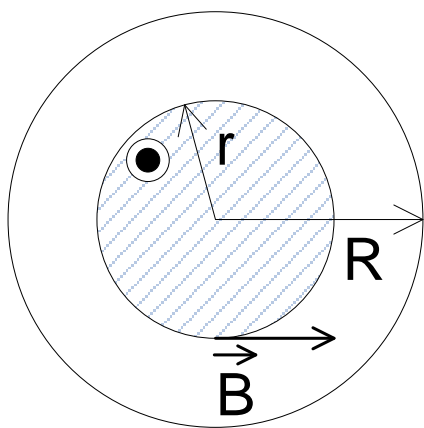


$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B \cdot dl \cdot \cos \alpha = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 i$$

$$\alpha = 0; \cos(\alpha) = 1$$

Magnetsko polje (**vektor B**) unutar ravnog vodiča protjecanog strujom **i** u vakumu.

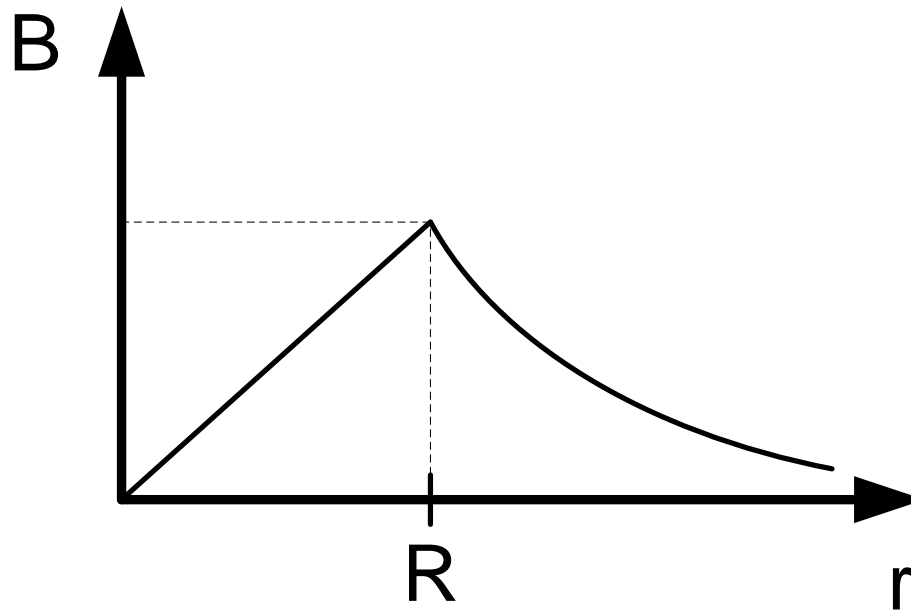


$$B = \frac{\mu_0 \cdot i}{2\pi R^2} r$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_L dl = B \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{i}{R^2 \pi} r^2 \pi$$

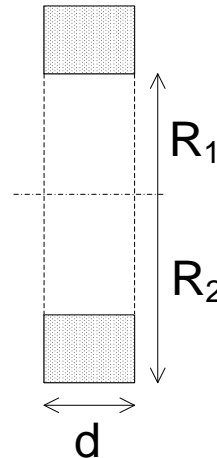
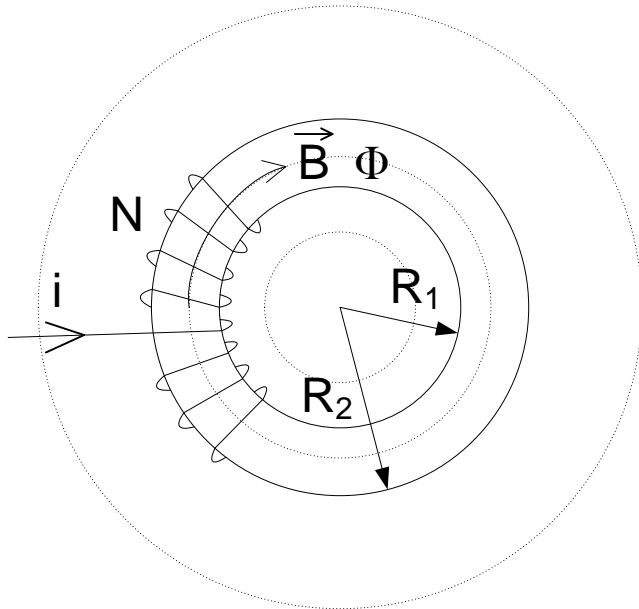
$$\alpha = 0; \cos(\alpha) = 1$$

Magnetsko polje (**vektor  $B$** ) unutar i oko ravnog vodiča protjecanog strujom  **$i$**  u vakumu (grafički prikaz).





## Magnetsko polje u torusu



$$1. \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum i = 0$$

$$B = 0$$

$$2. \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (Ni - Ni) = \mu_0 0$$

$$B = 0$$

$$1. \quad 0 < r < R_1$$

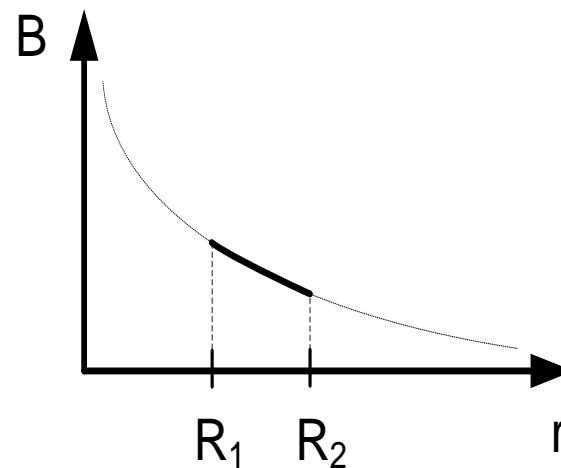
$$2. \quad r > R_2$$

$$3. \quad R_1 \leq r \leq R_2$$

$$3. \quad \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = Ni \mu_0$$

## Magnetsko polje u torusu

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{2\pi r}$$

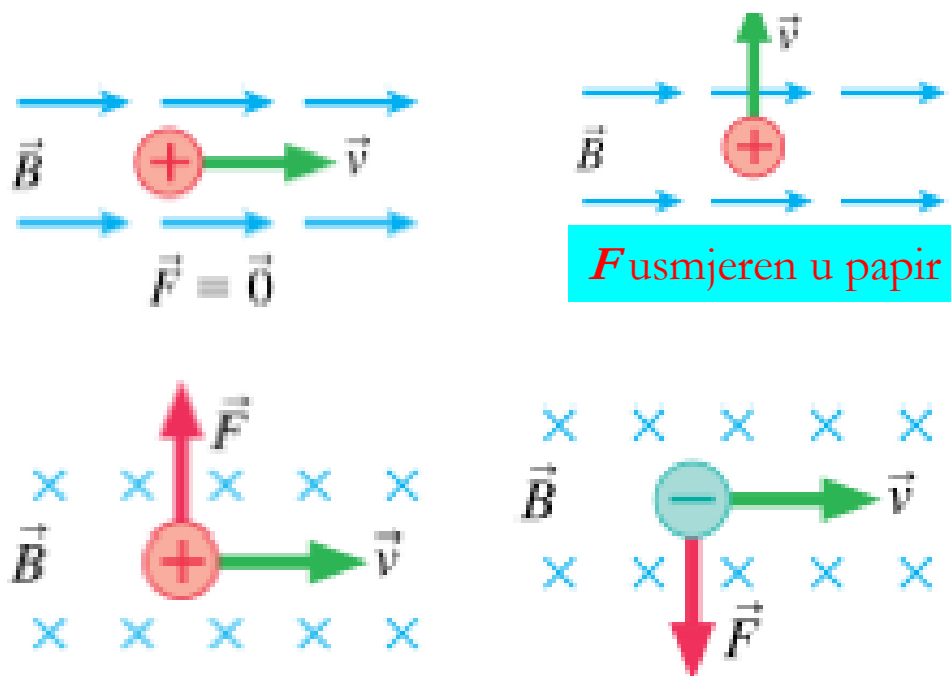


Za  $R_1 \gg R_2 - R_1$  može se aproksimirati da je iznos vektora  $B$  unutar torusa konstantan, **homogeno polje**.

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{l_{sr}}$$

$$l_{sr} = \frac{R_1 + R_2}{2} 2\pi$$

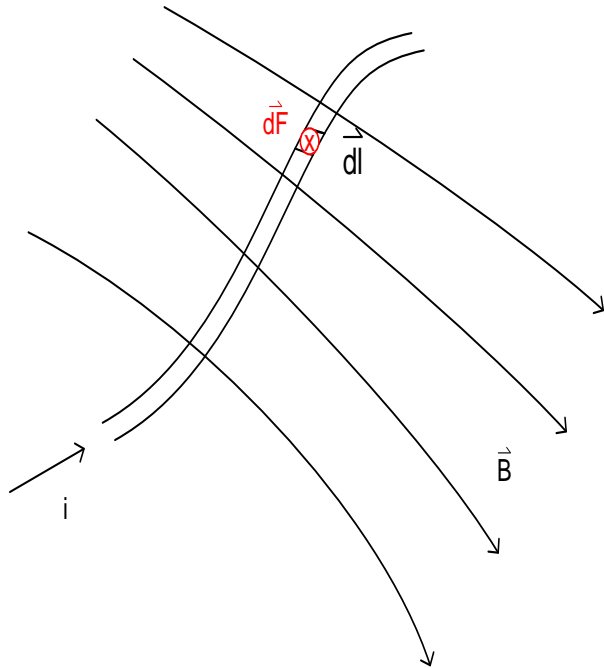
# Sila na naboj koji se giba u magnetskom polju



$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$dQ = i \cdot dt$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$



$$d\vec{F} = dQ \left( \vec{v} \times \vec{B} \right) =$$

$$= i \cdot dt \left( \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} \right)$$

$$d\vec{F} = i \left( d\vec{l} \times \vec{B} \right)$$

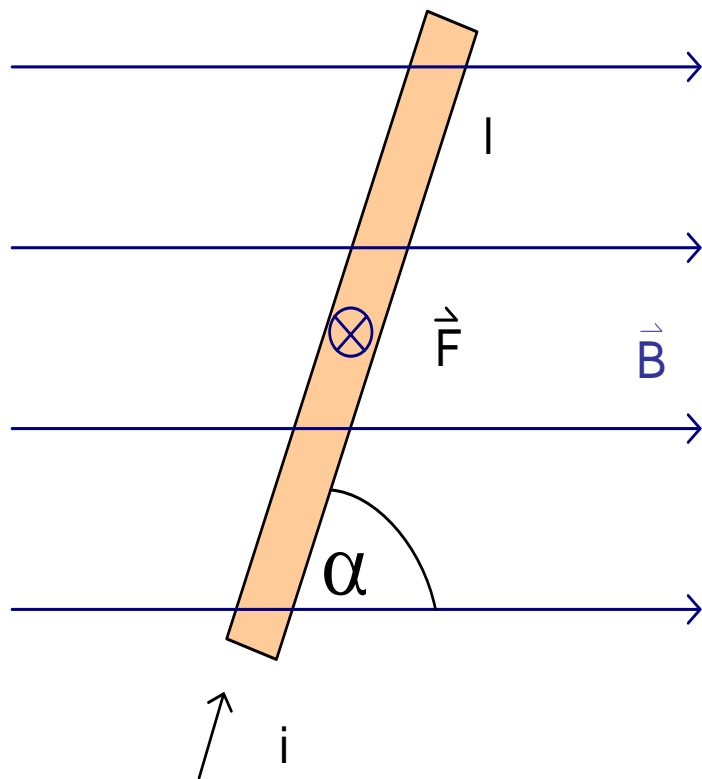
**Smjer sile  $dF$  možemo odrediti pravilom lijeve ruke:**

- **Silnice udaraju u dlan**
- **Prsti pokazuju smjer struje**
- **Palac pokazuje smjer sile.**

**Silu na čitavoj duljini  $l$  dobit ćemo tako da zbrojimo sve doprinose na toj duljini. Matematički se to formalno izražava operatorom integral.**

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F} = \int_l i \cdot d\vec{l} \times \vec{B}$$

## Sila na ravan vodiču u homogenom magnetskom polju

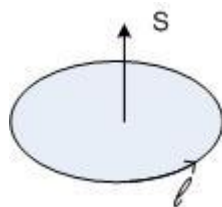
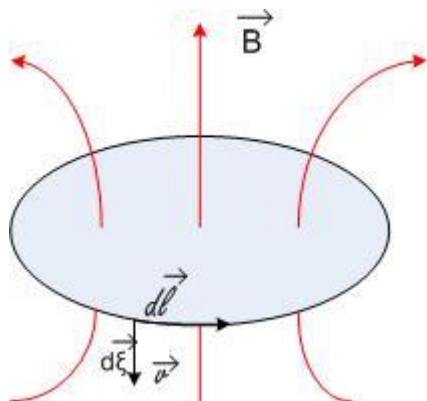


$$\vec{F} = i \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

$$|\vec{F}| = B \cdot i \cdot l \cdot \sin \alpha$$

$$\alpha = 90^0$$

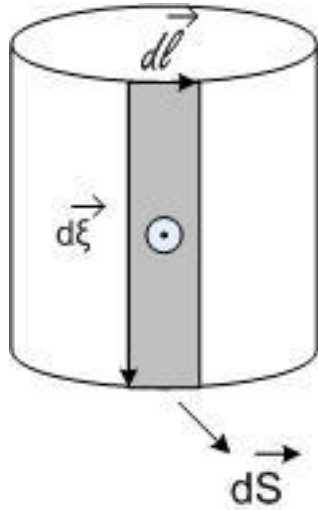
$$F = B \cdot i \cdot l$$



$$\vec{E}_{\text{ind}} = \vec{v} \times \vec{B} = \frac{d\vec{\xi}}{dt} \times \vec{B}$$

$$e_{\text{ind}} = \oint \vec{E}_{\text{ind}} \cdot d\vec{l} = \oint \left( \frac{d\vec{\xi}}{dt} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{l}$$

$$e_{\text{ind}} = \frac{1}{dt} \oint (d\vec{\xi} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$



$$d(d\vec{S}) = d\vec{\xi} \times d\vec{\ell}$$

$$d(d\Phi) = \vec{B} \cdot d(d\vec{S}) = \vec{B} \cdot (d\vec{\xi} \times d\vec{\ell}) = (\vec{B} \times d\vec{\xi}) \cdot d\vec{\ell} = -(d\vec{\xi} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

$$d\Phi = \oint_1 d(d\Phi) = -\oint_1 (d\vec{\xi} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$