

Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet elektrotehnike i računarstva

A.Pavić-L.Felja

## OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

### PRIMJERI I ZADACI ZA VJEŽBU

(1. CIKLUS NASTAVE)

FOTOKOPIRANO  
S DOZVOLOM  
AUTORA

Zagreb 2011



Rezultati prethodnih dvaju međuispita pokazali su da studenti, iako razumniju većinu zadataka na međuispitu, tijekom (ne baš malog) trajanja međuispita (90 minuta) najčešće ne stignu obraditi i ispravno riješiti sve zadatke koje razumiju. Osnovni razlog tome je nedovoljna rutina u samostalnom rješavanju, tj. nedovoljan broj samostalno riješenih zadataka, što dodatno ističe važnost samostalne uporabe ove zbirke zadataka.

Zadaca ove zbirke zadataka jest dati širi izbor zadataka, grupiranih po tjednima nastave (a unutar njih po temama nastavnog programa) koji će omogućiti pripremanje međuispita i završnog ispita, kao i kontinuirano samostalno vježbanje koje najdjelotvornije otkriva praznine i slabosti u razumijevanju nastavnog gradiva. Obradeni problemi karakteristični su za pojedinu nastavnu cjelinu, a ukupni broj problema nastojali smo održati u studentima prihvatljivim granicama. Nakon rješavanja zadataka preporuča se studentima odgovarati na pitanja za provjeru znanja u obliku testova sa ponudnim odgovorima, koja nalazite na kraju svake nastavne cjeline. Takav oblik pitanja dobivate na ispitima. Kao izazov i poticaj studentima koji hoće više od minimuma znanja potrebnog za prolaz na ispitu, dani su i neki složeniji zadaci označeni zvjezdicom. Uz zadatke iz ove zbirke studenti za pripremu ispita imaju na raspolaganju zadatke i pitanja iz laboratorijskih vježbi kao i zadatke i pitanja na web stranicama Osnova.

Zagreb 12.9.2011.

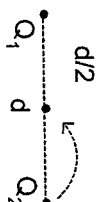
Autori

I. 1 Osnove elektriciteta Primjeri Zadaci Test pitanja	I-1 I-6 I-9
II. 1 Električna struja i pripadne pojave Primjeri Zadaci	II-1 II-2
II. 2 Osnovne veličine električnih krugova Primjeri Zadaci Test pitanja	II-6 II-7 II-10
III. 1 Jednostavni krugovi istosmjernje struje Primjeri Zadaci Test pitanja	III-1 III-4 III-9
III. 2 Kondenzatorski spojevi Primjeri Zadaci Test pitanja	III-13 III-15 III-16
IV. 1 Složeni krugovi istosmjernje struje Primjeri Zadaci Test pitanja	IV-1 IV-4 IV-8
V. 1 Elektromagnetizam Primjeri Zadaci Test pitanja	V-1 V-6 V-9
VI. 1 Sinusoidno promjenjive električne veličine Primjeri Zadaci Test pitanja	VI-1 VI-5 VI-7
VI. 2 Načelo rješavanja krugova izmjenične struje Primjeri Zadaci Test pitanja	VI-9 VI-10 VI-12
VII. 1 RLC krugovi Primjeri Zadaci Test pitanja	VII-1 VII-4 VII-9
VII. 2 Frekvencijske ovisnosti Primjeri Zadaci Test pitanja	VII-12 VII-15 VII-18

## I. 1. OSNOVE ELEKTRICITETA

## Primjeri I.1

**I.1-P1.** Dva pozitivna točkasta naboja  $Q_1$  i  $Q_2$  nalaze se u zraku na međusobnoj udaljenosti  $d$ , daleko od drugih naboja. Odredite: a) iznos i smjer sile na svaki od naboja b) kolika će biti sila ako naboju  $Q_2$  primaknemo naboju  $Q_1$  na dvostruko manji razmak? c) iznos i smjer električnog polja koje naboju  $Q_1$  stvara u točki gdje se nalazi naboju  $Q_2$



Zadano je:  $Q_1=1 \text{ nAs}$ ;  $Q_2=0,1 \text{ nAs}$   $d=5 \text{ mm}$ ;  $\epsilon_r=1$ ;  $\epsilon_0=8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$

**Rješenje:** Naboji su jednakog polariteta pa je sila odbijna. Iznos te sile izračunamo pomoću Coulombovog zakona. Vodimo računa da je sila vektorska veličina. Na svaki od naboja djeluje jednaka sila.

$$F = \frac{(Q_1 \cdot Q_2)}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot d^2} \quad F = 3,595 \times 10^{-3} \text{ N}$$

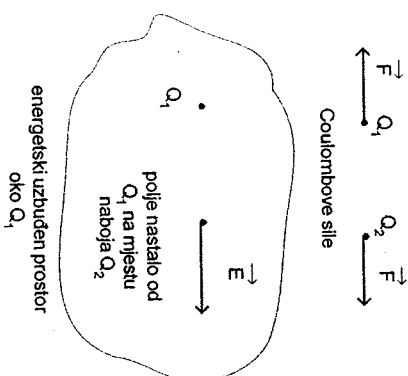
Iz jednadžbe slijedi: dvostruko manji razmak  $\rightarrow$  četverostruko veća sila.

Silu na naboju  $Q_2$  možemo izračunati koristeći koncepciju elektrostatskog polja. Zamislimo na čas da u prostoru imamo samo naboju  $Q_1$ . Taj naboju u okolnom prostoru stvara posebno energetsko stanje koje nazivamo elektrostatsko polje. Na naboju  $Q_2$  postavljen u taj prostor zbog toga (posredstvom polja) djeluje sila. Ako iznos te sile (koju na gornji način izračunamo) podijelimo sa samim nabojem  $Q_2$  dobivamo fizikalnu veličinu koju nazivamo jakost elektrostatskog polja,

$$E = \frac{F}{Q_2} \quad E = 3,595 \times 10^6 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^3 \text{ A}} \quad E = 3,595 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Uobičajeno je da u elektrotehničkoj praksi jakost polja izražavamo jedinicom: V/m (pokazuje da vrijedi  $1 \text{ V/m} = 1 \text{ N/C}$ , nadalje je  $1 \text{ C (Coulomb)} = 1 \text{ As}$ ).

**Paznja:** Ako vektor (silu) djelimo sa skalarom (naboju) dobivamo vektor. Dogovorno je uzeto da je smjer vektora polja, smjer sile na pozitivan naboju. Naboju  $Q_2$  kojim smo se "poslužili" naziva se općenito: probni naboju. Sila na naboju  $Q_2$  je sada:  $F = E \cdot Q_2$  **Zaključak:** Ako odredimo vektor elektrostatskog polja naboja  $Q_1$  u svim točkama prostora možemo jednostavno određivati smjer iznos sile na bilo koji naboju koji

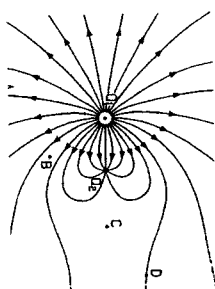


postavljamo u te točke. Na ovaj način došli smo zapravo do jednadžbe ("formule") za izračun polja točkastog naboja

$$E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

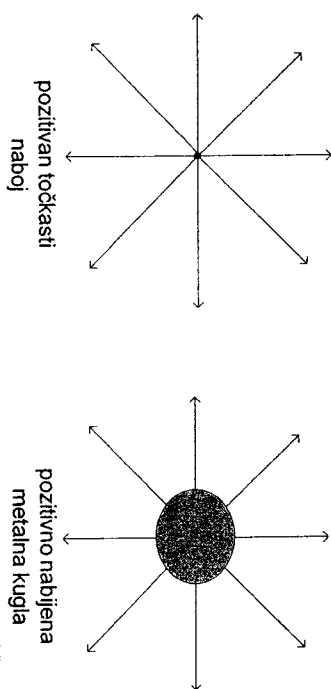
Sa  $r$  (ili  $x$ ) označavamo udaljenost točke u kojoj želimo izračunati polje. **Zaključak:** 1. polje opada sa kvadratom udaljenosti 2. postoje točke na kuglastim ploham oko naboja, u kojima polje ima jednaki iznos. 3. smjer polja je radijalan 4. polje je radijalno simetrično 5. polje je slabije u sredstvu sa većom dielektričkom konstantom.

**I.1-P2.** Na slici desno su prikazane silnice polja dvaju točkastih naboja  $Q_1$  i  $Q_2$ . Kojih su predznaka naboji, i koji je odnos njihovih veličina? U kojoj od označenih točaka je polje najjače? Opišite ukratko pojam: silnice polja.



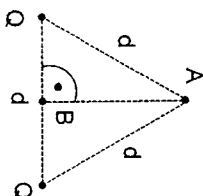
**Rješenje:** Silnice elektrostatskog polja su linije koje "izviru" na pozitivnim, a "poniru" (završavaju) na negativnim naboima. Njihova gustoća ukazuje na jakost polja. Prema obliku silnica razlikujemo homogena i nehomogena polja. Kod homogenih su silnice jednake gustoće. Silnice su linije sile tj. tangenta na silnicu u nekoj točki pokazuje smjer sile na naboju koji bismo postavili u tu točku. U prikazanom slučaju polje je nehomogeno. Lijevi naboju je pozitivan jer iz njega silnice izlaze. Ujedno je taj naboju veći po iznosu od desnog, jer dio njegovih silnica odlazi (završava) negdje drugdje. Polje je najjače tamo gdje su silnice najgušće (točka B). Poseban slučaj su silnice usamljenog točkastog naboja. To su (za pozitivan naboju) radijalni pravci koji "završavaju" u beskonačnost. Pojam točkastog naboja važan je u stvaranju teorije (modela) električnog polja. U stvarnosti naboji imaju konačne dimenzije kao i masu (nabijene čestice). Pjedline nakupine naboja mogu se pri tom "zamijeniti" skupinama točkastih naboja. Silnice usamljene metalne kuglaste elektrode slične su silnicama točkastog naboja. Počinju na površini kugle (za pozitivno nabijenu kuglu) i šire se radijalno na sve strane. Pri tom su okomite na površinu elektrode. Unutar metalne elektrode nema elektrostatskog polja niti silnica.

Polje je prostorni fenomen pa se tako i silnice nalaze u prostoru. Grafički prikaz polja silnicama u prostoru (3D) je prilično složen i nepregledan. Zato se silnice prikazuju u dvije dimenzije pa zapravo predstavljaju sliku polja u presjeku sa nekom ravninom.

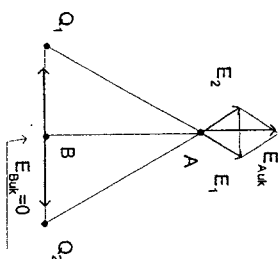


Naboj na usamljenoj kugli rasporedi se jednoliko po površini. Taj se naboj "zamijeni" skupinom jednoliko raspoređenih točkastih naboj. Kod elektroda nepravilnog oblika više se naboj nakuplja na "isturenim" dijelovima npr. na šiljcima. Sličice su međutim i u tom slučaju, okomite na površinu elektrode.

**1.1-P3.** Dva jednaka pozitivna točkasta naboja  $Q_1 = Q_2 = Q$  nalaze se u zraku na međusobnoj udaljenosti  $d$ , daleko od drugih naboj. Odredite : a) iznos i smjer električnog polja koje zadani naboji stvaraju u točkama A i B. Zadano je:  $Q = 1 \text{ nAs}$ ;  $d = 5 \text{ mm}$ ;  $\epsilon_r = 1$ ;  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$



Rješenje: U ovom slučaju električno polje u prostoru nastaje zajedničkim djelovanjem zadanih naboj. Svaki od naboj stvara u pojedinim točkama «svoj» vektor polja. Nakon određivanja tih vektora ukupno polje dobivamo njihovim zbrajanjem. Jednostavno je npr. određivanje ukupnog vektora polja u točki B. Pojedinačni vektor polja imaju očigledno jednaki iznos, a suprotan smjer pa je ukupno polje jednako nuli. Nije tako jednostavno u točki A. Tamo imamo dva vektora koje stvarno treba zbrojiti po pravilima zbrajanja vektora. To možemo učiniti grafički, kako je prikazano slikom ili računski.



Prije bilo kakvog računanja potrebna je skica u pravokutnom koordinatnom sustavu. Pojedinačnim vektorima odredimo sastavnice (komponente) u smjeru osi x kao i u smjeru osi y. Zbog simetrije su u ovom slučaju komponente u smjeru osi x jednakog iznosa, a protivnog smjera pa se poništavaju. Preostaju komponente u smjeru osi y koje

su jednakog iznosa. Rezultantno polje je zbroj tih komponenti. Potrebno je dakako poznavanje trigonometrijskih formula. Npr. komponenta polja  $E_1$  u smjeru osi y će biti:  $E_{1y} = E_1 \cdot \cos 30^\circ$ . Polja  $E_1$  i  $E_2$  izračunavamo prema jednadžbi za polje točkastog naboj.

$$E_1 = \frac{(Q_1)}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot d^2} \quad E_1 = 3.595 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_{1y} = E_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad E_{1y} = 3.113 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_{2y} = E_{1y} \quad E_y = E_{2y} + E_{1y}$$

$$E_{1x} = E_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad E_{1x} = 1.797 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_{2x} = -E_{1x} \quad E_x = E_{1x} + E_{2x} \quad E_x = 0$$

$$E_{uk} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad E_{uk} = 6.226 \cdot 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

U općenitom slučaju kada su naboji različita iznosa i polariteta, proračun polja, iako se radi prema istom načelu, neće biti tako jednostavan. Još će biti složeniji proračun polja kada u prostoru postoji veći broj naboj.

napomena: U svakoj točki prostora gdje postoji elektrostatsko polje osim vektora polja imamo i skalarnu veličinu tzv. potencijal. Proračun potencijala i u slučaju većeg broja naboj doista jednostavan. Naime potencijal je definiran kao potencijalna energija jediničnog naboj. Energija, a prema tome i potencijal su skalarni veličine. Biti će potrebno algebarski zbrojiti (sa predznakom) doprinose potencijalu svih naboj koji se nalaze u promatranom prostoru. Jednadžba za proračun potencijala u polju točkastog naboj je:  $\varphi = Q/(4 \cdot \pi \cdot \epsilon_r \cdot r)$  gdje je  $r$  udaljenost točke u kojoj želimo izračunati potencijal od naboj. Točke jednakog potencijala čine tzv. ekvipotencijalnu plohu.

(u dvodimenzionalnom prikazu dobivamo ekvipotencijalne linije). Polje možemo osim sa silnicama prikazati ekvipotencijalnim linijama. Kod točkastog naboj ekvipotencijalne linije su koncentrične kružnice. Lako je zaključiti da su silnice i ekvipotencijalne linije međusobno okomite. Zanimljivi čitatelj neka izračuna potencijal u točkama A i B. ( $\varphi_A = 3595 \text{ V}$ ;  $\varphi_B = 7190 \text{ V}$ ). Razlika potencijala naziva se napon. Napon između točaka A i B je:  $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$

**1.1-P4.** Naboj  $Q$  u točki A električnog polja ima potencijalnu energiju  $W_A$ . Premjesti li se taj naboj u točku B polja u njoj će imati potencijalnu energiju  $W_B$ . Odredite: a) rad izvršen pri premještanju naboj b) napon  $U_{AB}$ . Zadano je:  $Q = 50 \text{ nAs}$ ;  $W_A = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Js}$ ;  $W_B = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Js}$

Rješenje. Rad na putu od A prema B je razlika potencijalnih energija. Potencijalna energija je veća u točki B. To znači da je utrošen vanjski rad za premještanje naboja. Pri tom su vanjskom silom savladane sile polja. Energija će se vratiti prilikom premještanja naboja iz točke B u točku A. Ovo premještanje izvršile bi sile polja (naboj bi se sam vratio u točku A), a rad bi bio pozitivan. Ako to napišemo "matematički" dobivamo:

$$A_{AB} = W_A - W_B \quad A_{AB} = -2 \times 10^{-5} \text{ J} \quad A_{BA} = W_B - W_A \quad A_{BA} = 2 \times 10^{-5} \text{ J}$$

Kod ovakvog računanja (redoslijeda) nam negativan predznak rezultata ukazuje da je rad utrošen. Potencijali u točkama A i B su:

$$\varphi_A = \frac{W_A}{Q} \quad \varphi_A = 400 \text{ V} \quad \varphi_B = \frac{W_B}{Q} \quad \varphi_B = 800 \text{ V}$$

Napon je razlika potencijala:  $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = -400 \text{ V}$ . Točka A je negativnija od točke B. Zaključak: Ako pozitivan naboj prenještavamo u točku polja višeg potencijala potrebno je utrošiti vanjski rad (energiju). Takav rad, matematički gledano, je negativan.

**1.1-P5.** Električna sila pomakne naboj  $Q$  iz točke 1 s potencijalom  $\varphi_1 = 40 \text{ V}$  u točku 2 s potencijalom  $\varphi_2 = 0 \text{ V}$ . Ako pri tom električne sile izvrše rad  $\Delta W = 0,1 \text{ mWs}$  odredite koliki je napon  $U_{12}$  b) predznak i veličinu naboja  $Q$ .

Rješenje: Rad izvrše električne sile. Naboj ide iz točke nižeg potencijala ( $40 \text{ V}$ ) u točku višeg potencijala ( $0 \text{ V}$ ). To je moguće samo ako je naboj negativan, jer su onda sile privlačne.

$$\text{a) } U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad U_{12} = -40 \text{ V}$$

$$\text{b) iznos naboja je } Q = \frac{\Delta W}{U_{12}} \quad Q = -2,5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

(rad  $\Delta W$  je dobiven tj. pozitivan, a napon  $U_{12}$  negativan)

**1.1-P6.** Pločasti kondenzator s pločama površine  $S$  razmaknutim za  $d$ , ispunjen je izolatorom dielektričnosti  $\epsilon_r$ , probojne čvrstoće  $E_p$ . Kondenzator je priključen na stalni napon  $U$ . Odredite: a) kapacitet kondenzatora b) naboj na elektrodama kondenzatora c) energiju pohranjenu u kondenzatoru d) maksimalni napon koji možemo priključiti na kondenzator. e) kolika je plošna gustoća naboja na elektrodama.  
Zadano je:  $S = 0,5 \text{ m}^2$ ,  $d = 1 \text{ mm}$ ,  $\epsilon_r = 1$ ,  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$ ,  $E_p = 3 \text{ kV/mm}$ ,  $U = 1 \text{ kV}$

Rješenje:

$$C = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d}$$

$$C = 4,427 \times 10^{-9} \text{ F}$$

$$Q = C \cdot U$$

$$Q = 4,427 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$W = \frac{Q^2}{2 \cdot C}$$

$$W = 2,213 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$$E = \frac{U}{d}$$

$$E = 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$U_{\max} = E_p \cdot d$$

$$U_{\max} = 3 \times 10^3 \text{ V}$$

Veći napon mogao bi prouzročiti proboj u izolatoru što bi se kod zračnog kondenzatora vidjelo odnosno čulo kao iskra. U krutom dielektriku dolazi do trajnog uništenja tj. gubitka svojstva izolatora. Takav kondenzator je neispravan tj. gubi svoj kapacitet.  
e) naboj se u kondenzatoru rasporedi u tankom sloju na unutarnjim površinama ploča. Plošna gustoća tog naboja je  $\sigma = Q/S = 8,854 \mu\text{As/m}^2$ .

#### Zadaci 1.1

**1.1-1.** Iznosi naboja dvaju točkastih naboja odnose se ovako:  $|Q_1/Q_2| = n$ . Naboji razmaknuti za  $d$  postavljeni su u zraku i privlače se silom  $F$ . Odredite a) iznos sile  $F$  b) predznak naboja  $Q_2$  ako je  $Q_1$  pozitivan c) silu kada se razmak smanji na  $d/2$   
Zadano:  $Q_1 = +30 \text{ nC}$ ;  $n = 10$ ;  $d = 10 \text{ cm}$ ,  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$ .

Rezultat: a)  $81 \mu\text{N}$  b) neg. c) povećala se na  $324 \mu\text{N}$

**1.1-2.** Kako se promijeni sila na naboj  $Q_2$  iz prethodnog zadatka (1-1) ako se na polovinu razmaka postavi treći naboj  $Q_3$  tj. a)  $Q_3 = +Q_1$  b)  $Q_3 = -Q_1$

Rezultat: a)  $405 \mu\text{N}$  b)  $243 \mu\text{N}$  (odbojna)

**1.1-3.** Dvije jednake metalne kuglice mase  $m$  i polumjera  $r$  naelektrizirane su jednakim količinama naboja  $Q$  i obješene su o tanke niti od izolatora dužine  $l$  (zanemarivje mase). U ravnotežnom položaju (ravnoteža elektrostatske i gravitacijske sile) kuglice su razmaknute za  $d$ . a) Odredite  $Q$  b) razmak kuglica ako se naboj nejednoliko raspodijeli na kuglice tako da prva primi  $3/4$ , a druga  $1/4$  ukupnog naboja. Napomena: pojednostavnite izraze uzimajući u obzir da je:  $l \gg d$  i  $r \ll d$ .  
Zadano:  $m = 10^{-3} \text{ kg}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $d = 0,1 \text{ m}$ .

Rezultat: a)  $2,336 \cdot 10^{-8} \text{ As}$  b)  $9,1 \text{ cm}$

**1.1-4.** Dva točkasta naboja  $Q$  i  $3Q$  postavljena su u točke A i B na razmaku  $d$ . U koju točku na spojnici točaka A i B treba postaviti probni naboj pa da sila na taj naboj bude jednaka nuli. U rješenju navedite udaljenost tražene točke od naboja  $Q$ .  
Rezultat:  $0,366 \cdot d$

- I.1-5. Na simetriji polja točkastog naboja odabrane su točke A, B i C tako da je točka B na sredini dužine AC. Uz zadane iznose polja u točkama A i C a) odredite polje u točki B, b) izračunajte iznos naboja ako je udaljenost točke C od naboja 1 cm.

Zadano:  $E_A = 36 \text{ V/m}$ ;  $E_C = 9 \text{ V/m}$ .

Rezultat:  $16 \text{ V/m}$ ;  $10^{-13} \text{ C}$  (kulona)

- I.1-6. Dva pozitivna točkasta naboja  $Q_1$  i  $Q_2$  postavljena su na razmak  $d$ . Ako je jakost polja u točki T jednaka nuli odredite odnos naboja  $Q_2/Q_1$ . \*Koliki je potencijal u točki T

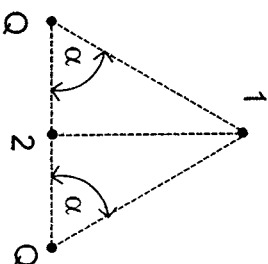
Zadano:  $Q_1 = 1 \text{ nAs}$ ,  $d = 1 \text{ cm}$

Rezultat: 4; 8,1 kV  
\*nije obavezno

- I.1-7. Dva točkasta naboja jednakih iznosa postavljena su na razmak  $d$ . Odredite iznos jakosti polja u točki 1 te omjer jakosti električnog polja u točkama 2 i 1 ( $E_2/E_1$ ) ako su naboji a) istog b) različitog polariteta.

Zadano:  $|Q_1| = 1 \text{ nAs}$ ,  $d = 5 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

Rezultat: a)  $6,235 \text{ kV/m}$ , nula b)  $3,6 \text{ kV/m}$ , 8.



- I.1-8. Izračunajte razliku potencijala točaka 1 i 2 iz prethodnog zadatka ako se pri pomicanju probnog naboja  $q = 1 \text{ pAs}$  iz točke 1 u točku 2 duž spojnice tih točaka utroši rad od  $360 \text{ pWs}$ . Da li su naboji: a) pozitivni b) negativni c) različitog polariteta?

Rezultat: a)  $U_{12} = -360 \text{ V}$ , naboji su pozitivni

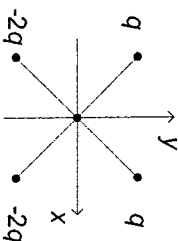
- I.1-9. Četiri točkasta naboja nalaze se u vrhovima kvadrata stranice  $a$ . Središte kvadrata je u ishodištu xy koordinatnog sustava. Odredite: a) smjer i iznos el. polja u ishodištu b) potencijal u ishodištu\*.

Zadano:  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $q = 1 \text{ nAs}$

Rezultat: a) smjer  $-y$ ,  $7626 \text{ V/m}$  b)  $-254 \text{ V}$

- I.1-10. Četiri točkasta naboja smještena su u vrhovima kvadrata stranice  $a$ . Naboji su istog iznosa i polariteta. Ako silu između dva naboja razmaknuta za  $a$  označimo sa  $F$  kolika će biti rezultantna sila na svaki od naboja?

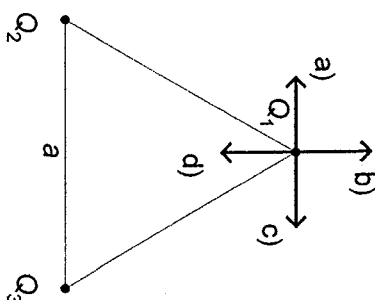
Rezultat:  $1,91 F$



- I.1-11. Tri točkasta naboja smještena su u vrhove jednakokraničnog trokuta stranice  $a$ . U kojem od označenih smjerova djeluje rezultantna sila na naboju  $Q_1$ ? Kolika je ta sila?

Zadano:  $Q_1 = Q_2 = 100 \text{ nAs}$ ;  $Q_3 = -100 \text{ nAs}$ ;  $a = 2 \text{ cm}$ ;  $\epsilon_r = 1$ .

Rezultat: smjer c),  $225 \text{ mN}$ .



- I.1-12. Dva točkasta naboja smještena su u pravokutni koordinatni sustav i to:  $Q_1 = 1 \text{ nAs}$  je u ishodištu, a  $Q_2 = -1 \text{ nAs}$  je na x osi udaljen  $1 \text{ m}$  (u smjeru  $+x$  osi) od ishodišta. Odredite omjer jakosti električnog polja ( $E_A/E_B$ ) u točkama A(0,5m;0,5m) i B(0,5m;0).

Rezultat: 0,354

- I.1-13. Da bi se naboju od  $q$  prenio iz točke A u točku B električnog polja potrebno je obaviti (utrošiti) rad  $W$ . Kolika je razlika potencijala (napon) između tih točaka? Koja je točka na višem potencijalu?

Zadano:  $q = +1 \mu\text{C}$   $W = 20 \mu\text{J}$

Rezultat:  $20 \text{ V}$ , na višem potencijalu je točka B.

- I.1-14. Naboju  $Q$  u točki A ima potencijalnu energiju  $W_{pA}$ . Premjesti li se naboju u točku B, u njoj će imati potencijalnu energiju  $W_{pB}$ . Odredite rad izvršen pri tom premještanju naboja. Zadano:  $Q = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ As}$ ;  $W_{pA} = -10^{-4} \text{ Js}$ ;  $W_{pB} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Js}$ .

Rezultat:  $0,1 \text{ mWs}$

- I.1-15. Pločasti zračni kondenzator s dvjema pločama površine  $S$  i razmaka  $d$ , spojen je na izvor stalnog napona  $U$ . Odredite kapacitet ploča, te na njima razdvojeni naboju.

Zadano:  $U = 1,7 \text{ kV}$ ;  $S = 200 \text{ cm}^2$ ;  $d = 1 \text{ mm}$ .

Rezultat:  $177 \text{ pF}$ ,  $300 \text{ nAs}$

- I.1-16. Dvije paralelne i suprotno nabijene metalne ploče razmaknute su na razmak  $d$ . Ploče su nabijene nabojeima  $Q$  suprotnog predznaka. Negativna ploča je uzemljena. Da bi se probni naboju  $+q$  prebacio sa negativne do pozitivne ploče potrebno je obaviti rad  $W$ . Koliki je napon između ploča (napon izvora)? Koliki je potencijal negativne ploče? Kolika je jakost električnog polja u prostoru između ploča? Nacrtajte graf promjene potencijala idući od negativne prema pozitivnoj ploči. Kako se promijeni graf potencijala ako ploče približimo na  $d/2$ .

Zadano:  $d = 4 \text{ cm}$ ,  $q = 10 \text{ nC}$ ,  $W = 20 \mu\text{J}$ .

**Rezultat:** 2000V; potencijal je nula; 50 kV/m.

**1.1-17.** Pločasti kondenzator površine ploča  $S$ , razmaknutih za  $d$ , ispunjen je izolatorom dielektričke čvrstoće  $E_p$ . Koliki je probojni napon kondenzatora? Koliki maksimalni naboj može primiti ovaj kondenzator te kolika je maksimalna energija koja se u njemu može pohraniti?

**Zadano:**  $S=100 \text{ cm}^2$ ,  $d=0,2 \text{ mm}$ ;  $E_p=60 \text{ kV/cm}$ ,  $\epsilon_r=3$ .

**Rezultat:** 1,2 kV, 1,6  $\mu\text{As}$ , 960  $\mu\text{J}$

**1.1-18.** Kolika je energija pohranjena u kondenzatoru te koliki je kapacitet ako je prilikom priključenja na napon  $U$  nabijen nabojem  $Q$ ? Koliki je pri rast energije ako se napon poveća na  $2U$ ?

**Zadano:**  $U=400 \text{ V}$ ;  $Q=60 \mu\text{As}$ .

**Rezultat:** 12 mVAs, 0,15  $\mu\text{F}$ , 36 mJ.

**1.1-19.** Ploče zračnog pločastog kondenzatora razmaknute za  $d$  nabijene su nabojem  $Q$  i privlače se silom  $F$ . Koliki je kapacitet tog kondenzatora?

**Zadano:**  $d=1 \text{ mm}$ ;  $Q=200 \text{ nAs}$ ;  $F=200 \text{ mN}$ .

**Rezultat:** 100 pF

**1.1-20\*.** Probojna čvrstoća zraka je 3 kV/mm. Sa kojim maksimalnim nabojem možemo nabiti usamljenu metalnu kuglu polumjera  $R=10 \text{ cm}$  koja ima kapacitet  $C=11,1 \text{ pF}$ ? Koliki je potencijal (napon prema Zemlji) tako nabijene kugle? Napomena: « usamljena » je elektroda ako je dovoljno udaljena od okolnih predmeta npr. za ovu kuglu bi predmeti morali biti udaljeni barem 1 m.

**Rezultat:** 3,34  $\mu\text{As}$ , 300kV. Uputa: maksimalno polje je tik uz površinu kugle koje se računa pomoću formule:  $Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ . Napomena: probojna čvrstoća zraka ovisi o raznim faktorima (npr. vlažnost). Obično je manja od navedene (3 kV/mm) tako da je maksimalni potencijal manji od 300 kV. U prirodi je npr. oblak neka vrst nabijene « elektrode ». Kako se povećava naboj sakupljen u oblaku raste potencijal (napon prema Zemlji) i el. polje pa dolazi do munje (proboja).

### Test pitanja 1.1

1) Kako se promijeni sila između točkastih naboja ako se njihov razmak udvostruči?

- A) smanji se dva puta
- B) ovisi o polaritetu naboja
- C) smanji se četiri puta
- D) ostane jednaka
- E) smanji se 1,41 puta

2) Četiri jednaka naboja nalaze se u vrhovima kvadrata stranice  $a$ . Ukupna sila na naboju u vrhu kvadrata ima smjer?

- A) dijagonale
- B) jednaka je nuli
- C) stranice
- D) neki drugi

3) Tri jednaka točkasta naboja nalaze se u vrhovima jednakokrakog trokuta koji su označeni sa  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Sila na naboju u točki  $a$  je  $F$ . Kako se promijeni ta sila ako maknemo naboju iz vrha  $b$ ?

- A) smanji se na 0,577F
- B) poveća se dva puta
- C) ne promijeni se
- D) smanji se na 0,866F
- E) poveća se 0,866 puta

4) Sila između dva točkasta naboja jednakog iznosa  $Q$ , a različita predznaka je  $F$ . Kolika je sila na pozitivan naboju  $Q$  koji postavimo točno na polovicu razmaka?

- A) 8 F B) 4 F C) 2 F D) F E) nula

5) U prostoru na razmaku  $d$  nalaze se dva naboja  $Q$  i  $2Q$ . U kakvom su odnosu sile na te naboje?

- A) veća je sila na naboju  $Q$
- B) veća je sila na naboju  $2Q$
- C) jednaka je sila na oba naboja

6) Sila između dva točkasta naboja će se dvaput povećati ako:

- A) udvostručimo iznose oba naboja
- B) udvostručimo razmak
- C) udvostručimo iznos jednog od naboja
- D) smanjimo razmak na pola
- E) smanjimo razmak na četvrtinu

7) Dva nabijene čestice postavljene su na razmak  $d$ , a zatim prepuštene djelovanju Coulombovih sila. Ako nakon toga brzina naboja raste naboju su:

- A) jednakog polariteta
- B) različitog polariteta
- C) nema dovoljno podataka

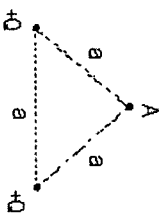
8) Sila između dva sićušna naboja na udaljenosti  $d$  u nekoj tekućini ista je kao sila između ta dva naboja u zraku kada su na udaljenosti  $2d$ . Kolika je relativna dielektrična konstanta te tekućine?

- A) 2 B) 4 C) 1,41 D) 3 E) 8

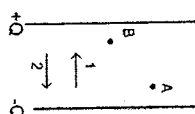
9) Sila na negativan točkasti naboju  $1 \text{ nAs}$  u točki T iznosi 0,01 mN. Kolika je jakost polja u toj točki?

- A) 100 V/m B) 1000 V/m C) 10 kV/m D) -10 kV/m E) -1 kV/m

- 10) Jakost električnog polja na udaljenosti  $d$  od točkastog naboja je  $E$ . Na kojoj je udaljenosti jakost polja  $E/2$ ?
- A)  $2d$  B)  $1,41 d$  C)  $4d$  D)  $0,7d$  E)  $0,5 d$
- 11) U vrhovima kvadrata su naboji (redom)  $Q, Q, -Q, -Q$ . Ako je iznos polja u središtu koje stvara naboj  $Q$  jednak  $E$  tada je ukupno polje u središtu tog kvadrata:
- A)  $2,82E$  B)  $4E$  C) nula D)  $2E$  E)  $1,41E$
- 12) \*Potencijal na udaljenosti  $10\text{ cm}$  od točkastog naboja iznosi  $100\text{ V}$ . Koliki je potencijal na udaljenosti  $5\text{ cm}$ ?
- A)  $50\text{ V}$  B)  $25\text{ V}$  C)  $141\text{ V}$  D)  $200\text{ V}$  E)  $400\text{ V}$
- 13) Ako se prilikom gibanja elektrona u električnom polju njegove kinetička energija povećava elektron se giba u smjeru:
- A) porasta potencijala  
B) smanjivanja potencijala  
C) nepromijenjenog potencijala
- 14) Negativan naboj  $q = -1\text{ nAs}$  premješten je iz točke A u točku B polja uz utrošak rada od  $1\text{ nJ}$ . Koja je tvrdnja ispravna?
- A) točka A je na nižem potencijalu od točke B  
B) točka A je na višem potencijalu od točke B  
C) ovisi o putu kojim je naboj premješten
- 15) Kako se promijeni jakost polja u točki A ako odstranimo desni naboj?
- A) poraste dva puta  
B) smanji se dva puta  
C) smanji se  $1,73$  puta  
D) ne mijenja se  
E) poraste  $1,73$  puta



- 16) Metalna usamljena elektroda nakon što je nabijena nabojem od  $1\text{ nAs}$  dolazi na potencijal od  $1000\text{ V}$ . Koliki je kapacitet te elektrode?
- A)  $1\text{ pF}$  B)  $1\text{ nF}$  C)  $1\text{ }\mu\text{F}$  D)  $1\text{ mF}$  E)  $1\text{ F}$
- 17) Koje od navedenih formula vrijede za pločasti kondenzator koji je priključen na napon  $U$ ?
- A)  $E=U/d$  B)  $E=Ud$  C)  $E=Q/\epsilon_0 S$  D)  $E=Q/\epsilon_0 Sd$  E)  $E=Q/Sd$
- 18) Nabijenom kondenzatoru električne sile:
- A) nastoje povećati kapacitet  
B) nastoje smanjiti kapacitet  
C) nemaju nikakvog utjecaja na kapacitet
- 19) Pločasti kondenzator nabijen je i odspojen sa izvora. Koje su tvrdnje ispravne ako prostor između ploča ispunimo dielektrikom sa  $\epsilon_r=2$ :
- A) naboj ostane jednak  
B) kapacitet se povećava dva puta  
C) napon se povećava dva puta  
D) polje se povećava dva puta  
E) polje se smanji dva puta
- 20) Odredite smjer polja i polaritet napona  $U_{AB}$  u prikazanom pločastom kondenzatoru. Napomena: referentna je točka B.
- A)  $U_{AB}$  je pozitivan; smjer polja 1  
B)  $U_{AB}$  je pozitivan; smjer polja 2  
C)  $U_{AB}$  je negativan; smjer polja 1  
D)  $U_{AB}$  je negativan; smjer polja 2  
E)  $U_{AB}$  je nula; smjer polja 1



- 21) Kondenzator je nabijen na napon  $U$  i ima energiju  $W$ . Kako se promijeni ta energija ako napon povećamo na  $2U$ ?
- A) povećá se dva puta  
B) povećá se četiri puta  
C) povećá se  $1,5$  puta
- 22) Dva kondenzatora (1 i 2) jednakog kapaciteta nabijena su tako da na prvom vlada napon  $U$ , a na drugom  $2U$ . Koji je odnos pohranjenih energija u kondenzatorima?
- A)  $W_1=W_2$  B)  $W_1=2W_2$  C)  $W_1=0,5W_2$  D)  $W_1=4W_2$  E)  $W_1=0,25W_2$
- 23) Sila između ploča kondenzatora priključenog na napon  $U$  je  $F$ . Kako se promijeni ta sila ako napon dvaput povećamo?
- A) ne promijeni se  
B) povećá se dva puta  
C) povećá se četiri puta  
D) povećá se  $1,41$  puta

#### Rješenja test pitanja I.1

- 1.C; 2.A; 3.A; 4.A; 5.C; 6.C; 7.B; 8.B; 9.C; 10.B; 11.A; 12.D; 13.A; 14.B; 15.C;  
16.A; 17.AC; 18.A; 19.ABE; 20.D; 21.B; 22.E; 23.C;



## II. 1. ELEKTRIČNA STRUJA OTPOR I ENERGIJA, OHMOV ZAKON

### Primjeri II.1

II.1-P1. Kroz poprečni presjek vodiča tijekom 1 minute prostruji količina naboja od  $Q=30$  C. Uzevši brzinu gibanja naboja stalnom, odredite jakost struje kroz vodič u tom vremenu. Kolika je gustoća struje ako je presjek vodiča  $0,2 \text{ mm}^2$ ?

Rješenje: Jednoliko strujanje naboja znači da je struja stalna (istosmjerna)

$$Q = 30 \text{ C} \quad t = 1,60 \text{ s} \quad I = \frac{Q}{t} \quad I = 0,5 \text{ A}$$

U svakoj sekundi kroz poprečni presjek vodiča prolazi naboje  $0,5 \text{ As}$ .

Naboji u vodiču (elektroni) gibaju se pod djelovanjem električnih sila, jer se u vodiču uspostavi električno polje. Radi se o gibanju ogromnog broja naboja. U stvarnosti su brzine i putanje pojedinih naboja vrlo različite. U mnoštvu putanja i brzina, statistički gledano, može se govoriti o nekoj srednjoj brzini elektrona (eng. drift) i o usmjerenom gibanju. Zanimljivo je da je ta srednja brzina naboja vrlo mala, ali se efekt sile (polje) širi velikom brzinom po vodiču tako da se gotovo "istovremeno" svi naboji (elektroni) počinju gibanje (oni s početka i kraja voda). Još nešto je jako važno: iako se u metalu stvarno usmjereno gibaju elektroni, kao smjer struje se uzima onaj suprotni tj. kao da se giba pozitivan naboj. Gustoća struje je  $j=0,5/0,2=2,5 \text{ A/mm}^2$ .

II.1-P2. Vodič iz prethodnog primjera dugačak je 10 metara i načinjen je od bakra.

Odredite otpor vodiča i utrošenu energiju u vodiču. Koliki je napon (pad napona) između krajeva vodiča? Bakar ima specifičnu otpornost  $\rho=1,75 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$ .

Rješenje:  $R=\rho \cdot l/S=1,75 \cdot 10^{-8} \cdot 10/0,2 \cdot 10^{-6}=0,875 \Omega$

Napon između krajeva vodiča je  $\Delta U=0,875 \cdot 0,5=0,44 \text{ V}$

Energija utrošena u vodiču je  $W=I^2 \cdot R \cdot t=0,5^2 \cdot 0,875 \cdot 60=13,125 \text{ J}$

napomena: Prilikom prolaska struje dolazi do zagrijavanja vodiča. Prevelika struja dovela bi do prevelikog zagrijavanja. Zato je za svaki vodič i uvjete njegova korištenja propisana nazivna (dovoljena) gustoća struje.

II.1-P3. Kroz otpornik priključen na napon od 120 V teče struja od 800 mA. Odredite otpor vodljivosti i snagu otpornika.

Rješenje: Primjenimo Ohmov zakon i dobivamo da je:

$$R = \frac{U}{I} \quad R = 150 \Omega \quad G = \frac{1}{R} \quad G = 6,667 \times 10^{-3} \text{ S}$$

vodljivost možemo izračunati i direktno ovako:  $G = \frac{1}{R}$

snaga je:  $P=I^2 \cdot R = I^2/G = U^2/R = U \cdot I = 96 \text{ W}$

II.1-P4. Otpor bakrenog namota pri  $20^\circ \text{C}$  iznosi  $30 \Omega$ . Za koliko se taj otpor poveća pri temperaturi od  $80^\circ \text{C}$ ? Temperaturni koeficijent otpora za baker je:  $\alpha = 0,0039 \text{ } 1/^\circ \text{C}$

Rješenje: Otpor metalnih vodiča raste s temperaturom. Kao početna temperatura se uzima  $20^\circ \text{C}$ . Za temperature u uobičajenom području rada uređaja uzimamo da ta ovisnost linearna (na vrlo visokim i vrlo niskim temperaturama ovisnost nije linearna i iskazuje se kompliciranim formulama kojima se ovdje ne bavimo).

Za rješavanja ovog zadatka koristimo jednostavnu formulu (pravac-načrtajte ga):

$$R_g = R_{20} [1 + \alpha (g - 20)] \quad R_g = 37,02 \Omega$$

Povećanje otpora je za  $7 \Omega$ , napomena: mjerenjem otpora možemo posredno odrediti temperaturu namota!

II.1-P5. Otpor bakrenog namota nekog transformatora od  $440 \Omega$  pri  $20^\circ \text{C}$  u radu poraste na  $510 \Omega$ . Kolika je radna temperatura?

Zadano:  $R_{20} = 440 \Omega \quad R_g = 510 \Omega \quad \alpha = 0,0039$

Rješenje: Preuredimo formulu iz prethodnog primjera tako da je nepoznanica temperatura  $g$ :

$$g = 20 + \frac{(R_g - R_{20})}{R_{20} \cdot \alpha} \quad g = 60,8^\circ \text{C}$$

II.1-P6. Ugljeni otpornik na  $20^\circ \text{C}$  ima otpor  $1000 \Omega$ . Odredite njegov otpor na a)  $100^\circ \text{C}$  b)  $-30^\circ \text{C}$ .

Zadano  $R_{20} = 1000 \Omega \quad g_1 = 100 \quad g_2 = -30 \quad \alpha = -0,0008$

Rješenje: Ugljen za razliku od metalnih vodiča ima negativan temperaturni koeficijent otpora tj. otpor mu pada sa porastom temperature. Formula za izračun je ista s tim da se  $\alpha$  uvijetava kao negativan broj.

$$a) \quad R_{g1} = R_{20} [1 + \alpha (g_1 - 20)] \quad R_{g1} = 936 \Omega$$

$$b) \quad R_{g2} = R_{20} [1 + \alpha (g_2 - 20)] \quad R_{g2} = 1,04 \times 10^3 \Omega$$

napomena: Osim ugljena postoje i neki drugi materijali koji pokazuju takvo svojstvo. Od njih se izrađuju tzv. NTC otpornici koji se koriste u elektroničkim (mjernim i regulacijskim) sklopovima... Posebnim postupcima legiranja dobiveni su temperaturno postojani materijali koji se onda koriste za izradu preciznih otpornika. Temperaturni koeficijent otpora takvih materijala je praktički jednak nuli (npr. manganin).

### Zadaci II.1

II.1-1. Ravni vodič duljine  $l$  priključen je na izvor stalnog napona  $U$ . Ako kroz

poprečni presjek vodiča  $S$  u svakoj sekundi prostruji  $6,24 \cdot 10^{18}$  elektrona, odredite a) struju b) otpor vodiča c) specifičan otpor d) gustoću struje e) električno polje u vodiču.

Zadano:  $U=1,11 \text{ V}$ ;  $l=1 \text{ m}$ ;  $S=1 \text{ mm}^2$ .

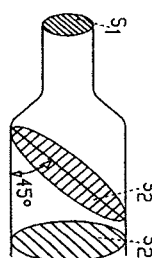
Rezultat: a)  $1 \text{ A}$  b)  $1,1 \Omega$  c)  $1,1 \cdot 10^8 \Omega \text{ m}$  d)  $1 \text{ A/mm}^2$  e)  $1,11 \text{ V/m}$

II.1-2 Odredite srednju brzinu gibanja elektrona u ravnom vodiču protječanom strujom stalne gustoće  $j$ , uzevši da u jednom  $\text{cm}^3$  volumena vodiča ima  $N$  slobodnih elektrona. Zadano:  $j=8 \text{ A/mm}^2$ ,  $N=10^{22}$  elektrona/ $\text{cm}^3$ .

Rezultat:  $5 \text{ mm/s}$

II.1-3. U vodiču nejednakog presjeka prema slici gustoća  $S_1$  struje kroz presjek  $S_2$  iznosi  $J_2$ . Odredite a) struju kroz presjek  $S_1$ . b) struju kroz presjek  $S_2$  c) gustoću struje kroz  $S_1$

Zadano:  $S_1=0,5 \text{ mm}^2$ ;  $S_2=2 \text{ mm}^2$ ;  $J_2=10^6 \text{ A/m}^2$ .



Rezultat: a) 2 A b) 2 A c)  $4 \cdot 10^6 \text{ A/m}^2$

II.1-4. Vodič specifičnog otpora  $p$  priključen na napon  $U$  razvija u svakoj sekundi toplinu  $W$ . Odredite a) otpor vodiča. b) struju c) dužinu vodiča ako je  $S=0,23 \text{ mm}^2$

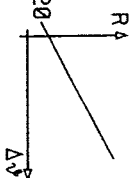
Zadano:  $U=220 \text{ V}$ ;  $W=2000 \text{ Ws}$ ;  $p=1,11 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ .

Rezultat: a) 24,2  $\Omega$  b) 9,1 A c) 5 m

II.1-5. Otpor vodiča pri temperaturi 20  $^\circ\text{C}$  je  $R_{20}$ . Ako zagrijavanjem otpor linearno raste s temperaturom uz temperaturni koeficijent otpora  $\alpha$ , odredite otpor vodiča pri temperaturi  $\theta$ . Da li temperaturni koeficijent otpora ovisi o  $R_{20}$  početnoj temperaturi?

Zadano:  $R_{20}=100 \Omega$ ;  $\alpha=0,004 \text{ } 1/^\circ\text{C}$ ;  $\theta=120 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Rezultat: 140  $\Omega$ , da



II.1-6. Bakreni vodič presjeka  $S$  treba zamijeniti aluminijskim jednake dužine i otpora. Ako je poznat omjer otpornosti bakra i aluminija ( $\rho_{Cu}/\rho_{Al}$ ), odredite potrebni presjek aluminijskog vodiča. Koji vodič pri opisanoj zamjeni ima veću masu? Zadano:  $S_{Cu}=1,5 \text{ mm}^2$ ;  $\rho_{Cu}/\rho_{Al}=0,63$  (podatak o specifičnoj masi potražite u tablici)

Rezultat: 2,38  $\text{mm}^2$ , bakreni

II.1-7. Grijač otpora  $R$  priključen je na stalni napon  $U$ . Koliko se električne energije pretvori u toplinsku na grijaču u vremenu od pola sata? Za koliko posto se smanji ta energija ako je napon manji za 10%? Zadano:  $R=25 \Omega$ ;  $U=110 \text{ V}$ .

Rezultat: 871 kJ, smanji se za 19%.

II.1-8. S porastom temperature otpori dvaju otpornika rastu linearno od iste početne vrijednosti  $R$  (pri 20  $^\circ\text{C}$ ) do vrijednosti  $3 \cdot R$  (prvi otpornik) odnosno  $2 \cdot R$  (drugi otpornik) na nekoj temperaturi  $\theta$ . Koliki je omjer temperaturnih koeficijenata otpora  $\alpha_1/\alpha_2$ .

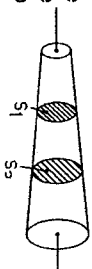
Rezultat: 2

II.1-9. Za koliko se postotaka poveća otpor bakrenog namotaja stroja, ako mu se temperatura poveća za  $\Delta\theta$  uz zadani temperaturni koeficijent za bakar  $\alpha$ ?

Zadano:  $\Delta\theta=40 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $\alpha=0,004 \text{ } 1/^\circ\text{C}$ .

Rezultat: 16%

II.1-10. Vodič nejednolikog presjeka (krmji stožac) priključen je svojim krajevima na izvor električne energije konstantnog napona. U kakvom su odnosu a) gustoće struje kroz presjek  $S_1$  i  $S_2$ ? b) jakosti polja u točkama po presjeku  $S_1$  i  $S_2$ ?



Rezultat: a) veća je gustoća po presjeku  $S_1$  b) jače je polje po presjeku  $S_1$

II.1-11. Od iste količine vodljivog materijala otpornosti (specifičnog otpora)  $p$  načinjena su dva cilindrična vodiča. Prvi vodič ima presjek  $S_1$ , a drugi dvostruko veći presjek 2  $S_1$ . Koji je odnos otpora vodiča?

Rezultat:  $R_1=4R_2$

II.1-12. Koliko naboja je prošio kroz neki otpornik ako je prvih 5 sati jakost struje bila 2 A, a sljedeća 2 sata 1 A. Naboj izrazite u  $As$  (kulon) i  $Ah$  (amper sati).

Rezultat: 12Ah,  $4,32 \times 10^4 As$

II.1-13. Žica ima promjer  $d$  i dužinu  $l$ . Mjerenjem je ustanovljen otpor žice  $R$ . (na temperaturi od 20  $^\circ\text{C}$ ) Kolika je specifična vodljivost materijala tog vodiča.

Zadano:  $d=0,4 \text{ mm}$ ,  $l=33 \text{ m}$ ,  $R=80 \Omega$

Rezultat:  $\kappa=3,28 \text{ Sm/mm}^2$  napomena: ovaj podatak se odnosi na temperaturu od 20  $^\circ\text{C}$

II.1-14. Na okrugli komad izolatora (valjak) namotana je zavojnica sa bakrenom žicom promjera 0,4 mm. Zavojnica ima 1620 zavoja. Dužina jednog zavoja je 8,4 cm. Izračunajte omksi otpor te zavojnice. Uzmite da je specifičan otpor  $1,75 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ .

Rezultat:  $R=18,96 \Omega$

II.1-15. Koliko žice od konstantana presjeka 0,07  $\text{mm}^2$  trebamo za izradu otpornika od 2,5  $\Omega$ ? (konstantan je materijal za izradu otpornika, ima specifičnu vodljivost 2  $\text{Sm/mm}^2$ ).

Rezultat: 350 mm

II.1-16. Prvi otpornik je načinjen od otporne žice okruglog presjeka koja ima promjer  $d$  i dužinu  $l$ . Drugi otpornik je napravljen od žice koja ima 20 % veći promjer i 20% manju dužinu. Koliki je otpor tog otpornika u odnosu na onaj prvi. Materijal je u oba slučaja isti.

Rezultat:  $R_2=0,55 R_1$

II.1-17. Na koju temperaturu treba zagrijati bakreni namot da bi se otpor namota povećao za 20% u odnosu na onaj pri 20  $^\circ\text{C}$ . Temperaturni koeficijent za bakar je 0,0039  $1/^\circ\text{C}$ .

Rezultat: 71,3  $^\circ\text{C}$

**II.1-18.** Za koliko se promijeni otpor otpornika koji je napravljen od a) konstantana b) volframa , ako se zagrije od 20 na 120 °C? Promijenu otpora izrazite u postotku. (temperaturni koeficijent otpora za konstantan je 0,00005 , a za volfram 0,0046 1/°C )

**Rezultat:** 0,4% ; +41% (otpornik od konstantana je praktički neovisan o temperaturi)

**II.1-19.** Temperaturno promjenjivi otpornik (senzor) koristimo pri mjerenju temperature. U hladnom stanju (20°C) otpor tog otpornika je 1000 Ω. Pri povećanju temperature za 80 °C se je otpor smanjio na 400 Ω. Koliki je temperaturni koeficijent otpora? Kojia je kratica za otpore koji imaju takvo svojstvo?

**Rezultat:** -0,0075 1/°C, NTC

**II.1-20.** Namotaj aluminijske žice s temperaturnim koeficijentom  $\alpha=0,0037\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$  i namotaj mjedene žice s temperaturnim koeficijentom  $\alpha=0,0015\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$  imaju na sobnoj temperaturi (20°C) isti otpor,  $R_{Al}=R_{Mj}=2\text{ }\Omega$ . Na kojoj će temperaturi otpor aluminijske žice biti za 30% veći od otpora mjedene žice. Koliki će tada (pri toj temperaturi) biti  $R_{Al}$  i  $R_{Mj}$ ?

**Rezultat:**  $\theta=191,43\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;  $R_{Al}=3,27\text{ }\Omega$  ;  $R_{Mj}=2,514\text{ }\Omega$

**II.1-21.** Otpornik je priključen na napon od 12 V koji se postepeno (linearno) smanjuje na 10V kroz vrijeme od 1 sat (npr. akumulator koji se troši-prazni). Struja je u početku bila 1,2 A. a) Koliko je naboja prošlo kroz taj otpornik b) Koliko bi naboja prošlo da je napon cijelo vrijeme bio jednak onom početnom?

**Rezultat:** 1,1 Ah; 1,2 Ah

**II.1-22.** Napon na žarulji se postepeno povećava i pri tom se mjeri struja. Dobiveni su rezultati prikazani tabelarno. Nacrtajte graf ovisnosti struje o naponu. Dobivate nelinearnu ovisnost struje o naponu, a) Odredite otpor žarulje pri naponu 25, 100 i 220 V. b) Zbog čega taj otpor nije konstantan? c) Koliki je omjer snage žarulje pri naponu od 220 i 25 V

U, V	0	25	50	75	100	120	140	160	180	200	220
I, mA	0	41	73	96	112	123	133	143	152	159	168

**Rezultat:** a) 610 Ω, 892 Ω, 1310 Ω. b) zbog temperaturne ovisnosti volframa c) 37

## II. 2. Osnovne veličine električnih krugova (Kirchhoffovi zakoni)

### Primjeri II.2

**II.2-P1.** Serijski su spojena dva otpornika i priključena su na izvor stalnog napona U. Odredite: a) ukupan otpor spoja b) struju i napon svakog otpornika c) snagu na svakom otporniku kao i ukupnu snagu spoja.

Zadano:  $R_1=220\text{ }\Omega$ ;  $R_2=150\text{ }\Omega$ ;  $U=12\text{ V}$

**Rješenje:** a) ukupan otpor je  $R_{12}=R_1+R_2=220\text{ }\Omega+150\text{ }\Omega=370\text{ }\Omega$   
napomena: ukupan otpor se naziva još: ekvivalentni ili nadomjesni otpor. Osim indeksa koji označavaju od kojih se otpornika sastoji, rabimo još i oznake  $R_{uk}$ ,  $R_{ekv}$  i sl.  
b) struja je jednaka kroz svaki otpor  $I=U/R_{12}=12/370=32,4\text{ mA}$   
naponi na otpornicima su:  $U_1=I\cdot R_1=7,135\text{ V}$ ;  $U_2=I\cdot R_2=4,865\text{ V}$   
suma tih napona mora biti jednaka naponu izvora (Kirchhoffov zakon za napone)!  
c) snage su:  $P_1=I^2\cdot R_1=0,23\text{ W}$ ;  $P_2=I^2\cdot R_2=0,16\text{ W}$  ;  $P_{12}=I^2\cdot R_{12}=P_1+P_2=0,39\text{ W}$

napomena: 1. struja koju daje izvor stalnog napona (naponski izvor) ovisi o ukupnom otporu koji priključimo na njegove stezaljke. 2. serijski spoj otpornika nazivamo: naponsko djeljilo, jer se ukupan napon raspodijeli po otpornicima. Na manjem otporu pri tom je manji napon.  
Čitajući prepuštamo da izvede praktične jednadžbe (formule) za djeljilo napona:  $U_1=U\cdot R_1/(R_1+R_2)$  i  $U_2=U\cdot R_2/(R_1+R_2)$  koje ponekada znatno "ubrzavaju" proračun napona u serijskom spoju.

**II.2-P2.** Serijski su spojena dva otpornika i priključena su na izvor stalne struje I. Odredite: a) ukupan otpor spoja b) struju i napon svakog otpornika c) snagu na svakom otporniku kao i ukupnu snagu spoja.

Zadano:  $R_1=220\text{ }\Omega$ ;  $R_2=150\text{ }\Omega$ ;  $I=50\text{ mA}$ .

**Rješenje:** a) ukupan otpor je  $R_{12}=R_1+R_2=220\text{ }\Omega+150\text{ }\Omega=370\text{ }\Omega$   
b) struja je jednaka kroz svaki otpor  $I=50\text{ mA}$   
naponi na otpornicima su:  $U_1=I\cdot R_1=11\text{ V}$ ;  $U_2=I\cdot R_2=7,5\text{ V}$   
suma tih napona mora biti jednaka naponu na stezaljkama izvora (Kirchhoffov zakon za napone)!  $U=18,5\text{ V}$   
c) snage su:  $P_1=I^2\cdot R_1=0,55\text{ W}$ ;  $P_2=I^2\cdot R_2=0,375\text{ W}$  ;  $P_{12}=I^2\cdot R_{12}=P_1+P_2=0,925\text{ W}$   
napomena: napon na stezaljkama izvora stalne struje (strujni izvor) ovisi o ukupnom otporu koji priključimo na njegove stezaljke.

**II.2-P3.** Paralelno su spojena dva otpornika i priključena su na izvor stalnog napona U. Odredite: a) ukupan otpor spoja b) struju i napon svakog otpornika c) snagu na svakom otporniku kao i ukupnu snagu spoja.

Zadano:  $R_1=220\text{ }\Omega$ ;  $R_2=150\text{ }\Omega$ ;  $U=12\text{ V}$

**Rješenje:** a) ukupan otpor je  $R_{12}=R_1\cdot R_2/(R_1+R_2)=89,2\text{ }\Omega$

Napomena: ukupan otpor kod paralelnog spoja uvijek je manji od onog najmanjeg u tom spoju! Ako je paralelno spojeno više od dva otpornika , ukupan otpor možemo određivati zbrajanjem njihovih vodljivosti.

b) struje kroz otpornike su  $I_1=U/R_1=12/220=54,5\text{ mA}$ ;  $I_2=U/R_2=12/150=80\text{ mA}$  (napori na otpornicima su jednaki naponu izvora)  
 Ukupna struja je zbroj struja  $I=I_1+I_2=134,5\text{ mA}$ , (Kirchoffov zakon za struje)! Ta se struja može izračunati i ovako:  $I=U/R_{12}=12/89,2=134,5\text{ mA}$

c) snage su:  $P_1=I_1^2 \cdot R_1=0,653\text{ W}$ ;  $P_2=I_2^2 \cdot R_2=0,96\text{ W}$   $P_{12}=P_1+P_2=1,61\text{ W}$   
 ukupnu snagu možemo izračunati i ovako:  $P_{12}=U^2/R_{12}=P_1+P_2=1,61\text{ W}$

napomena: paralelni spoj otpornika nazivamo: strujno djeljilo, jer se ukupna struja raspodijeli po otpornicima. Kroz manji otpor pri tom prolazi veća struja.

11.2-P4. Paralelno su spojena dva otpornika i priključena su na izvor stalne struje  $I$ . Odredite: a) ukupan otpor spoja b) struju i napon svakog otpornika

c) snagu na svakom otporniku kao i ukupnu snagu spoja.  
 Zadano:  $R_1=220\ \Omega$ ;  $R_2=150\ \Omega$ ;  $I=50\text{ mA}$

Rješenje: a) ukupan otpor je  $R_{12}=R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = 89,2\ \Omega$

b) ukupna struja spoja je sada upravo struja izvora ( $50\text{ mA}$ ). Ta se struja dijeli u dva dijela. Preko

ukupnog otpora spoja izračunamo napon  $U=I \cdot R_{12}=0,05 \cdot 89,2=4,46\text{ V}$

Pojedine struje su  $I_1=U/R_1=4,46/220=20,2\text{ mA}$ ;  $I_2=U/R_2=4,46/150=29,8\text{ mA}$

Ako zbrojimo ove "pojedinačne" struje dobivamo ukupnu struju. Čitatelju prepuštamo da izvede praktične jednadžbe (formule) za dijelove struje:  $I_1=I \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$  i

$I_2=I \cdot R_1 / (R_1 + R_2)$  koje ponekada znatno "ubrzavaju" proračun struja u paralelnom spoju.  
 c) snage će biti:  $P_1=U^2/R_1=0,09\text{ W}$ ;  $P_2=U^2/R_2=0,133\text{ W}$ ;  $P_{12}=I_2^2 \cdot R_{12}=0,223\text{ W}$

## Zadaci 11.2

11.2-1. Otpori  $R_1$  i  $R_2$  spojeni su serijski, pri čemu su na njima napori  $U_1$  i  $U_2$ . Ako je poznat otpor  $R_2$  koliki je  $R_1$ ? Zadano je:  $U_1=14,4\text{ V}$   $U_2=9,6\text{ V}$   $R_2=100\ \Omega$

Rezultat:  $150\ \Omega$

11.2-2. Koliki otpor treba spojiti u seriju sa žaruljom oznake  $12\text{ V}/0,5\text{ A}$  da bi u spoju na izvor napona  $U$  (većeg od nazivnog napona žarulje) žarulja normalno svijetlila? Kolika je nazivna snaga žarulje?

Zadano je:  $U_n=12\text{ V}$  (nazivni napon žarulje);  $U=24\text{ V}$ ;  $I_n=0,5\text{ A}$  (nazivna struja žarulje)  
 Rezultat:  $24\ \Omega$ ;  $6\text{ W}$

11.2-3. Koliki je ukupni otpor serijskog spoja otpora ako je odnos napona na njima 1:2:3. Poznat je napon na prvom otporniku  $U_1=60\text{ V}$  i struja drugog otpornika  $I_2=0,5\text{ A}$ .

Rezultat:  $720\ \Omega$

11.2-4. Paralelno su spojeni otpori  $R_1$  i  $R_2$ . Poznata je (izmjerena je) struja  $I_1$  kroz otpor  $R_1$ . Treba izračunati napon izvora, struju kroz drugi otpor  $I_2$ , ukupnu struju  $I_{uk}$  te ukupni (nadmjerni) otpor spoja.

Zadano je:  $R_1=12\ \Omega$ ;  $R_2=6\ \Omega$ ;  $I_1=2\text{ A}$

Rezultat:  $24\text{ V}$ ,  $4\text{ A}$ ,  $6\text{ A}$ ,  $4\ \Omega$

11.2-5. Struje kroz tri paralelno spojena otpora se odnose ovako  $I_1:I_2:I_3=2:3:6$ . Ako je poznat otpor  $R_2$  izračunajte  $R_1$ ,  $R_3$  i ukupni otpor spoja. Kolika je ukupna struja ako je spoj priključen na napon  $U$ . Zadano:  $R_2=33\ \Omega$   $U=99\text{ V}$

Rezultat:  $R_1=49,5\ \Omega$ ,  $R_3=16,5\ \Omega$ ,  $I_{uk}=11\text{ A}$ ,  $R_{uk}=9\ \Omega$

11.2-6. U električnoj grijalici priključenoj na izvor napona  $U$  koriste se dva grijača jednakih otpora. Ovisno o stupnju grijanja grijače spajamo u seriju ili u paralelu. Ako pri paralelnom spoju grijalica uzima struju  $I_p$  kolika je struja  $I_s$  kada grijače spojimo u seriju? Odredite odnos snaga  $P_{paralelno}/P_{serijski}$ . Zadano:  $I_p=8\text{ A}$   
 Rezultat:  $I_s=2\text{ A}$ , odnos snaga je  $\frac{1}{4}$

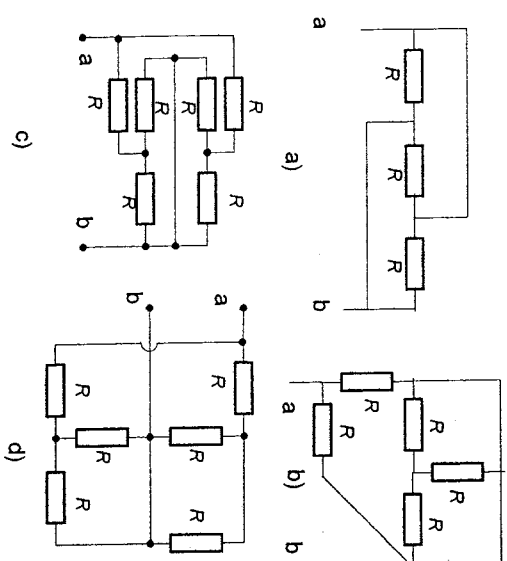
11.2-7. Dva jednaka otpornika nazivnih snaga  $P_n$  i napona  $U_n$  spojeni su serijski i priključeni su na napon  $U=U_n$ . Kolika je ukupna snaga spoja? (nazivna snaga je ona za koju je otpornik projektiran, veća snaga može prozročiti pregrijanje otpornika)

Rezultat:  $0,5 P_n$

11.2-8. U serijskom spoju snage otpornika  $R_1$  i  $R_2$  odnose se kao  $P_1:P_2=3:2$ . Kako će se odnositi snage ako otpornike spojimo paralelno?

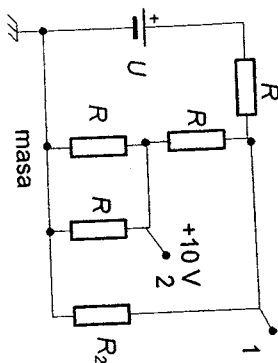
Rezultat:  $2/3$

11.2-9. Odredite ukupni otpor s točaka a i b u prikazanim spojevima ako je otpor  $R=10\ \Omega$ . Uputa: spojeve treba drugačije nacrtati tako da se vide serijski i paralelni spojevi.



Rezultat: a)  $3,33\text{ oma}$  b)  $5\text{ oma}$  c)  $7,5\text{ oma}$  d)  $7,5\text{ oma}$

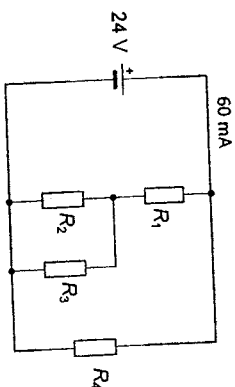
11.2-10. Primjenom Kirchhoffovih zakona odredite potencijal točke 1 i napon izvora ako potencijal točke 2 iznosi 10 V. (potencijal je napon prema masi). Kako će se promijeniti potencijal točke 2 ako odspojimo otpor  $R_2$ ? Svi otpori imaju po 10  $\Omega$ .



Rezultat: potencijal točke 1 je +30 V, a napon izvora 80 V. Ako odspojimo  $R_2$  potencijal točke 2 je +16 V.

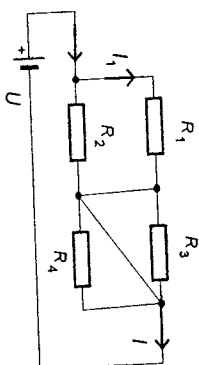
11.2-11. U prikazanom spoju struja izvora je 60 mA. Odredite koliki trebaju biti  $R_1$  i  $R_2$  da bi otpornik  $R_3$  dobio napon od 9 V uz snagu od 45 mW. Otpornik  $R_4$  uzima snagu od 480 mW.

Rezultat: 375  $\Omega$  i 257  $\Omega$



11.2-12 Ako je poznata struja  $I_1$  i svi otpori odredite primjenom Kirchhoffovih zakona ukupnu struju  $I$  te napon izvora  $U$ . Zadano:  $R_1=6 \Omega$ ;  $R_2=3 \Omega$ ;  $R_3=8 \Omega$ ;  $R_4=8 \Omega$ ;  $I_1=1$  A.

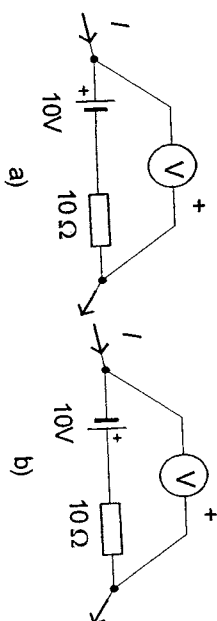
Rezultat: 6 V, 3 A  
Uputa: treba primijetiti da su  $R_3$  i  $R_4$  kratko spojeni



11.2-13. Dva otpornika jednakog nazivnog napona  $U_n$ , a različitih nazivnih snaga  $P_{n1}=50$  W i  $P_{n2}=100$  W serijski su spojena na izvor nazivnog napona. Odredite ukupnu snagu spoja.

Rezultat: 33.33 W

11.2-14. Na slici a) i b) je prikazan dio strujnog kruga. Koristeći KZN odredite kolika je struja  $I$  ako idealni voltmetar pokazuje 20 V označenog polariteta? Riješite zadatak i za slučaj kada je polaritet napona voltmetra suprotan.



Rezultat: a) -3 A b) -1 A (negativan predznak znači struju u suprotnom smjeru), za suprotan polaritet: a) 1 A b) 3 A

11.2-15. Struja kroz serijski spoj nelinearnog elementa i omskog (linearnog) otpornika ima stalan iznos od 2 A. Ovisnost struje i napona za otpornik je  $I=k_1 U$  ( $k_1=1$  A/V) dok je za nelinearni element ta ovisnost  $U=k_2 I^2$ . ( $k_2=1$  V/A<sup>2</sup>) Koliki je ukupni napon na tom spoju elemenata? Nacrtajte u istom koordinatnom sustavu  $U$ -karakteristike opisanih elemenata.

Rezultat: 6 V

11.2-16. Paralelno su spojeni omski otpornik i nelinearni element iz zadatka 11.2-15. Spoj je priključen na napon od 4 V. Kolika je ukupna struja spoja?

Rezultat: 6 A

11.2-17. Nelinearni otpornik ima ovisnost struje o naponu  $I=k \cdot U^2$  ( $k=0.1$  mA/V<sup>2</sup>). Nacrtajte graf ovisnosti struje za napone od 0 do 5 V. Na istom grafu nacrtajte ovisnost struje o naponu za (linearni) otpornik od 2 k $\Omega$ . Ako taj nelinearni element i otpornik od 2 k $\Omega$  spojimo paralelno na napon od 2.5 V odredite ukupnu struju i snagu spoja.

Rezultat: 1.875 mA, 4.68 mW

11.2-18. Kako se mijenja otpor nelinearnog elementa sa porastom struje ako je ovisnost napona o struji zadana funkcijom  $U=I(I-k \cdot I^{0.5})$  ( $k=1$  V/A<sup>0.5</sup>) Ako u seriju sa ovim elementom spojimo otpornik od 1  $\Omega$  struja u krugu je 2 A. Koliki je napon na spoju?

Rezultat: otpor pada,  $U=3.41$  V

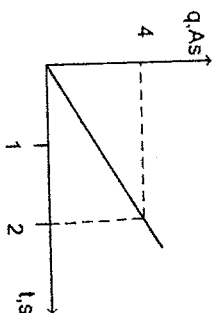
## Test pitanja 11.

1) Ako kroz poprečni presjek nekog vodljivog medija prođe naboj od 2 Coulomba u vremenu od 10 s električna struja je:

- A) 1 A B) 2 A C) 0.2 A D) 0.02 A

- 2) Za pomicanje naboja od 1 mikroC od mjesta A do mjesta B u nekom vodiču električno polje izvrši rad od 2 mikroJ. Koliki je napon između točaka A i B?  
 A) 1 V B) 0.5 V C) 2 V D) nula
- 3) Snimljena je vremenska ovisnost ukupnog naboja koja prolazi poprečnim presjekom nekog vodiča. Kolika je jakost struje u trenutku 1 ms?

- A) 1 A  
 B) 1 mA  
 C) 2 A  
 D) 4 A  
 E) 0.5 A



- 4) Grijачa ploča štednjača snage 1500 W uključena je 10 minuta. Koliko je električne energije primila ta ploča?  
 A) 1.5 kWh B) 0.25 kWh C) 2.5 kWh D) 0.1 kWh
- 5) Koliko se energije utroši na otporniku od 5 Ω ako 5 sati kroz njega prolazi struja jakosti 5 A?  
 A) 125 kWh B) 0.125 kWh C) 1.25 Wh D) 45000 Ws E) 18000 Ws

6) Snaga je:

- A) umnožak sile i puta  
 B) brzina pretvorbe energije  
 C) umnožak energije i vremenom  
 D) umnožak rada i energije  
 E) umnožak rada i brzine

7) Razlika potencijala na priključnicama otpornika od 100 oma je u nekom trenutku 100 V. Kolika je u tom času brzina pretvorbe električne energije u toplinu?

- A) 100 J/s B) 1 J/s C) 10000 J/s D) 10 J/s

8) S porastom temperature otpori dvaju otpornika linearno rastu od iste početne vrijednosti  $R$  (kod 20 stupnjeva) do vrijednosti  $4R$  (prvi otpornik) odnosno  $2R$  (drugi otpornik). Koji je odnos temp. koeficijenta otpora  $\alpha_1/\alpha_2$ ?

- A) 1 B) 3 C) 2 D) 4

9) Opor nekog otpornika ima na 20 stupnjeva iznos 1 Ω, a na 21 stupanj 1.1 Ω. Koliki je temperaturni koeficijent otpora?

- A) 1 B) 0.1 C) 0.01 D) 1.1

10) Otpornik ima na 20° otpor od 1 Ω i temperaturni koeficijent otpora  $\alpha=0.01$ . Na kojoj temperaturi će se otpor podvostručiti?

- A) 100 stupnjeva B) 80 stupnja C) 120 stupnjeva D) 40 stupnjeva

11) Kroz neki otpornik  $R$  (trošilo) prolazi struja od 1 A kroz vrijeme od 1 minute. Utrošena energija je pri tom 300 Ws. Koliki je otpor  $R$ ?

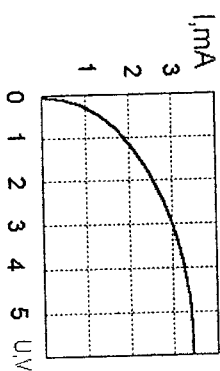
- A) 300 Ω B) nema dovoljno podataka C) 5 Ω D) 100 Ω E) 50 Ω

12) Nelinearni element ima U-I karakteristiku koja se aproksimira funkcijom  $I=kU^2$ . Kako se mijenja dinamički otpor sa porastom napona?

- A) raste B) pada C) ne mijenja se D) raste, a zatim pada E) pada, a zatim raste

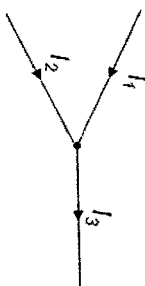
13) Koliki je statički otpor nelinearnog elementa zadane karakteristike kod struje od 3 mA?

- A) 1 kΩ  
 B) 3 kΩ  
 C) 1 mΩ  
 D) 2 kΩ  
 E) 6 kΩ



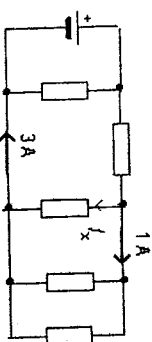
14) Kojom jednačbom je iskazan Kirchhoffov zakon za struje (I. Kirch. zakon)

- A)  $I_1 + I_2 + I_3 = 0$   
 B)  $I_1 + I_2 = I_3$   
 C)  $I_1 + I_2 - I_3 = 0$   
 D)  $I_1 + I_3 = -I_2$



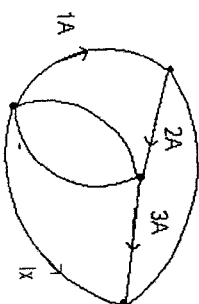
15) U prikazanom strujnom krugu poznate su označene struje. Vrijednosti otpornika nisu zadane. Odredite struju  $I_x$ .

- A) 2 A  
 B) 1 A  
 C) 3 A  
 D) 4 A  
 E) nema dovoljno podataka



16) Prikazana je topološka struktura el. mreže (grane i čvorovi). Označene struje su poznate. Elementi u granama nisu poznati. Kolika je struja  $I_x$ ?

- A) 2 A  
 B) -2 A  
 C) nula  
 D) 3 A  
 E) nema dovoljno podataka



17) S koliko neovisnih naponskih jednažbi Kirchhoffovih zakona se opisuje mreža koja ima 7 grana i 4 čvora?

- A) 3 B) 4 C) 7 D) 6 E) 5

18) Dva cilindrična vodiča napravljena su od istog materijala. Prvi ima otpor  $R$ , dužinu  $l$  i poluprečnik  $r$ , a drugi ima dužinu  $3l$  i poluprečnik  $r/2$ . Koliki je otpor drugog vodiča?

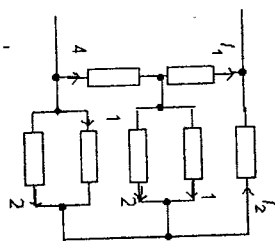
- A) 3R B) 12R C) 6R D) 8R E) 4R

19) Koji su od navedenih izraza ispravni?

- A)  $I=U/R$  B)  $I=U \cdot R$  C)  $U=I/R$  D)  $G=1/R$  E)  $I=U \cdot G$

20) Prikazani spoj otpornika priključen je na napon  $U$ . Ako su poznate označene struje, odredite struju  $I_2$ .

- A) 6 A  
B) 3 A  
C) 2 A  
D) 1 A  
E) nema dovoljno podataka

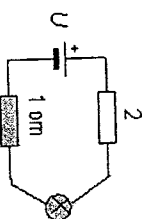


21) Serijski spojeni otpornici  $R_1$  i  $R_2$  priključeni su na napon  $U$ . Napon na otporniku  $R_1$  je:

- A)  $U \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$   
B)  $U \cdot R_1 / (R_1 + R_2)$   
C)  $U \cdot R_1 / R_2$   
D)  $U \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$   
E)  $U / (R_1 + R_2)$

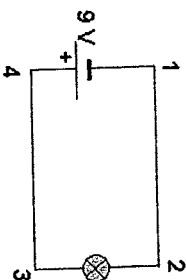
22) Ako otpornik od 1  $\Omega$  zamijenimo s 4  $\Omega$  dogodi se sljedeće:

- A) struja se poveća  
B) žarulja slabije svijetli  
C) struja se smanji  
D) žarulja jače svijetli  
E) napon izvora se smanji



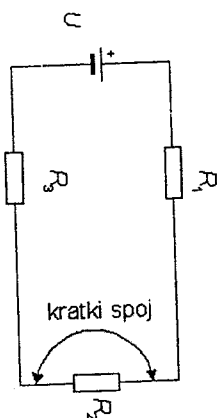
23) Koliki je napon (razlika potencijala) između pojedinih točaka. Označite točne odgovore:

- A)  $U_{12}=0$   
B)  $U_{13}=-9$  V  
C)  $U_{42}=+9$  V  
D)  $U_{34}=0$   
E)  $U_{32}=-9$  V



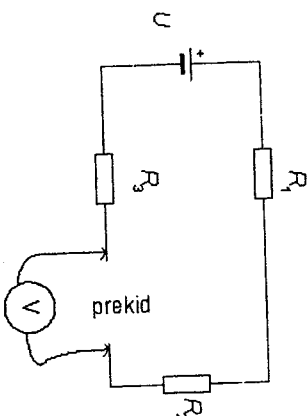
24) Serijski su spojena tri otpornika. Spoj je priključen na napon  $U$ . Na jednom otporniku došlo je do kratkog spoja između stezaljki. Kako se promijene naponi na preostala dva otpornika?

- A) smanje se  
B) povećaju se  
C) na većem se poveća, a na manjem smanji  
D) na manjem se poveća, a na većem smanji  
E) ne promijene se



25) U serijskom spoju otpornika došlo je do prekida vodiča. Koliki napon pokazuje voltmetar spojen na mjesto prekida ako je  $R_1=R_2=R_3$ ?

- A) nula  
B)  $U$   
C)  $U/2$   
D)  $U/3$



26) Serijski je spojeno 20 jednakih žarulja predviđenih za nazivni napon od 1,5 V. Koliki napon treba priključiti na ovaj spoj da bi žarulje normalno svijetlele?

- A) 1,5 V B) 20 V C) 30 V D) 60 V

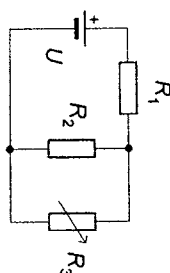
### Rješenja test pitanja II.

1. C; 2. C; 3. C; 4. B; 5. B; 6. B; 7. A; 8. B; 9. B; 10. C; 11. C; 12. B; 13. A; 14. BC; 15. A; 16. B; 17. B; 18. B; 19. ADE; 20. A; 21. D; 22. BC; 23. ABCD; 24. B; 25. B; 26. C;

## III. 1. JEDNOSTAVNI KRUGOVI ISTOSMJERNE STRUJE

## Primjeri III.1

III.1-P1. Izračunajte struje kroz sve otpornike u prikazanom strujnom krugu.  
Zadano:  $R_1=20\ \Omega$ ;  $R_2=60\ \Omega$ ;  $R_3=30\ \Omega$ ;  $U=40\text{ V}$ .



Rješenje: Najprije odredimo ukupan otpor mješovitog spoja otpornika. Paralelni spoj  $R_2$  i  $R_3$  zamijenimo sa jednim otpornikom koji ima iznos  $R_{23}=R_2 \cdot R_3 / (R_2 + R_3) = 20\ \Omega$ . Sada imamo pojednostavljenu shemu u kojoj su na izvor serijski spojena dva otpornika  $R_1$  i  $R_{23}$  koje zamijenimo sa jednim otpornikom  $R_{uk}=R_1 + R_{23}=40\ \Omega$ . Ohmovim zakonom izračunamo ukupnu struju  $I_{uk}=U/R_{uk}=1\text{ A}$ . To je ujedno struja kroz  $R_1$ . Ta se struja grana na paraleli  $R_2$  i  $R_3$ . Napon na paraleli je  $U_{12}=U - I_{uk} \cdot R_1 = 20\text{ V}$ . Pojedine struje su  $I_2=U_{12}/R_2=20/60=1/3\text{ A}$ ;  $I_3=U_{12}/R_3=20/30=2/3\text{ A}$  (naravno provjerom trebamo ustanoviti da je  $I_1=I_2+I_3$ )

Kod rješavanja ovog i sličnih zadataka korisno je nacrtati sve pojednostavljene sheme i na njima upisivati izračunate veličine (struje, napone, nadomjesne otpore, smjerove struja, polaritete napona...)

napomena: Ovdje se javlja problem označavanja nadomjesnih otpora, napona i struja. Polazište su oznake otpornika. Prikladno je nadomjesne otpore označavati indeksiranim oznakama u kojima se nalaze oznake otpora npr. nadomjesni otpor paralelnog spoja  $R_2$  i  $R_3$  označen je sa  $R_{23}$ . U tom smislu bi se  $R_{uk}$  ovdje mogao označiti kao  $R_{123}$ .

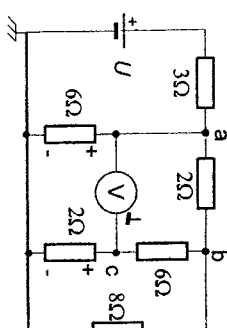
III.1-P2. Na koji iznos treba podesiti promjenjivi otpornik  $R_3$  u spoju iz prethodnog primjera da bi na otporu  $R_2$  napon bio  $U/5$ ? Zadano:  $R_1=20\ \Omega$ ;  $R_2=60\ \Omega$ . Kako se mijenja struja kroz  $R_2$  prilikom smanjivanja otpora  $R_3$ ?

Rješenje: Napon na  $R_2$  je napon na paraleli  $R_{23}$ . Na izvor kao da su serijski spojena dva otpornika:  $R_1$  i  $R_{23}$ . Ako je na  $R_{23}$  napon  $U/5$  znači da je taj otpor 4 puta manji od  $R_1$ , tj.  $5\ \Omega$ . Dakle, vrijedi jednakost  $R_{23}=R_2 \cdot R_3 / (R_2 + R_3) = 5$ . Iz "ovoga" izračunamo da  $R_3$  mora biti  $5,45\ \Omega$ .

Promjenom nekog parametra strujnog kruga dolazi do promjene pojedinih fizikalnih veličina: struja, napona i snaga. Konkretno u ovom primjeru analiziramo posljedice koje nastupaju kada se  $R_3$  smanjuje. Potrebno je napraviti niz zaključaka u kojima moraju biti postovani Ohmov i Kirchhoffovi zakoni. Krenimo: Ako se  $R_3$  smanji tada se smanji iznos nadomjesnog otpora paralele. To povlači za sobom smanjenje ukupnog otpora. Znači da se poveća ukupna struja odnosno struja kroz  $R_1$ . To opet znači da se poveća napon na  $R_1$ . Veći napon na  $R_1$  (zbog Kirchhoffovog zakona za napone) znači smanjenje napona na paraleli pa prema tome i smanjenje napona na  $R_2$ . Manji napon na  $R_2$  znači i manju struju kroz taj otpornik. Ponekada je prikladno funkciju povezanost pojedinih veličina strujnog kruga prikazati grafičkom. Za vježbu nacrtajte (skicirajte) graf funkcije  $I_2=f(R_3)$ . Početna vrijednost  $R_3$  neka je nula (na mjestu otpornika  $R_3$  je kratkospojnik), a završna

beskonačno (otpor  $R_3$  je odspojen). Čitatelju prepuštamo da analizira i druge fizikalne veličine ovog strujnog kruga kao i promjene drugih parametara kruga.

III.1-P3. U prikazanom električnom krugu voltmetrom je izmjerjen napon od  $+10\text{ V}$ . Izračunajte ukupan otpor spoja otpornika kao i napon izvora  $U$ . Koliki je napon  $U_{ab}$ ?



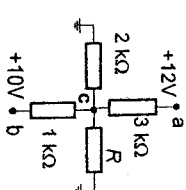
Rješenje: U ovom primjeru je na naponski izvor priključen mješoviti spoj otpornika. Ukupan otpor određujemo postepeno uočavajući serijske i paralelne spojeve koje onda zamjenjujemo njihovim nadomjesnim otporima. Krenemo od serije 6 i 2  $\Omega$  za koju je ukupni otpor 8  $\Omega$ . Taj otpor je u paraleli sa (sasvim desno) otpornikom od 8  $\Omega$ . Ukupan otpor ove paralele je dakle 4  $\Omega$ . U seriju sa tim otporom je otpornik od 2  $\Omega$  što daje 6  $\Omega$ . Taj je pak u paraleli sa 6  $\Omega$  što daje 3  $\Omega$ . Preostaje serijski spoj 3+3 pa je ukupan otpor gledano sa stezaljki izvora 6  $\Omega$ . Sve smo računali "napamet" zbog jednostavnosti zadanih podataka. Jasno da bi u općenitom slučaju trebalo više računanja sa kalkulatorom. Dapače u takvom slučaju čitatelju se preporuča postepeno crtanje nadomjesnih shema sa upisivanjem izračunatih vrijednosti pojedinih nadomjesnih otpora. Time je prvi dio zadatka riješen. Za drugi dio tj. za proračun napona izvora treba malo razmisliti. U točki a ukupna struja se dijeli u dva dijela. Zanimljivo je da su ta dva dijela struje jednaka, jer zapravo imamo zatamnjeni otpornik od 6  $\Omega$  paralelno sa onim nadomjesnim od 6  $\Omega$ .

Struju kroz zatamnjeni otpornik od 6  $\Omega$  označimo sa  $I_1$ , a zatim se pitamo kolika je struja kroz zatamnjeni otpornik od 2  $\Omega$ . Ta je struja  $I/2$  jer se u čvoru b struja opet grana u dvije jednake struje. Oznakičmo polaritet napona na zatamnjениm otpornicima. Tamo gdje struja ulazi postavimo oznaku + (ta stezaljka otpornika je na višem potencijalu). Napon voltmetra je algebarska suma napona na zatamnjениm otpornicima. Polazimo od referentne stezaljke voltmetra:

$U_V = U_2 + U_6 = 0,5 \cdot I + 6 \cdot I = 6,5 I$  iz čega slijedi da je  $I = U_V / 6,5 = 2\text{ A}$ . Ukupna struja koja ulazi u čvor a je dakle 4 A pa je napon izvora  $U = 4 \cdot R_{uk} = 4 \cdot 6\ \Omega = 24\text{ V}$

Napon  $U_{ab}$  je napon na otporniku od 2  $\Omega$  kroz koji prolazi struja od 2 A:  $U_{ab} = 4\text{ V}$ . Treba primjetiti da će napon  $U_{ab}$  biti  $-4\text{ V}$  (promjena redoslijeda stezaljki mijenja polaritet napona)

III.1-P4. Izračunajte kod kojeg iznosa otpora  $R$  će potencijal točke c u spoju na slici desno biti jednak  $+6\text{ V}$ .



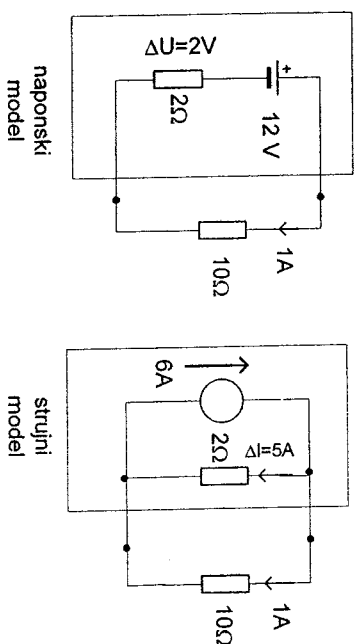


Rješenje: Ponekada na shemama (osobito u elektronici) koristimo posebnu oznaku za masu tj. za zajedničku točku strujnog kruga (eng. ground). Treba voditi računa da su sve «mase» galvaniski (vodljivo) međusobno spojene. U ovom primjeru je dakle otpornik  $R$  spojen paralelno sa otpornikom od  $2\text{ k}\Omega$ . Na shemi su označeni potencijali pojedinih točaka prema masi. Npr. točka  $a$  je na  $+12\text{ V}$  što znači da bismo mogli uccati naponski izvor od  $12\text{ V}$  između točke  $a$  i mase. Iz poznatih potencijala možemo odrediti napone na pojedinim otpornicima, a zatim i njihove struje.

Napon na otporniku od  $3\text{ k}\Omega$  je  $6\text{ V}$  (razlika potencijala točaka  $a$  i  $c$ ). Pozitivna je gornja stazaljka tog otpornika pa struja teče "od gore prema dolje"  $I_3=2\text{ mA}$ . Na jednak način dobivamo struju kroz otpornik od  $1\text{ k}\Omega$ :  $I_1=4\text{ mA}$  (smjer prema čvoru  $c$ ). Struja kroz otpornik od  $2\text{ k}\Omega$  ima smjer "u lijevo" tj. teče od čvora  $c$  prema masi. Iznos te struje je  $6\text{ V}/2\text{ k}\Omega=3\text{ mA}$ . Sada treba primijeniti Kirchhoffov zakon za struje na čvor  $c$  i ustanoviti da kroz (zasada) nepoznati otpornik  $R$  prolazi struja od  $3\text{ mA}$  i to "u desno" tj. od čvora  $c$  prema masi. Budući da je napon na otporniku  $R$ ,  $6\text{ V}$  tada iz Ohmovog zakona slijedi da je  $R=6/0.003=2000\Omega=2\text{ k}\Omega$ . Čitatelju preporučamo da prilikom rješavanja ovog i sličnih zadataka na shemi upisuje pojedine struje i napone (pazeći na smjer i polaritet).

III.1-P5. Istosmjerni izvor ima napon praznog hoda  $12\text{ V}$ . Ako na taj izvor priključimo otpornik (trošilo) od  $10\text{ }\Omega$  napon na stezaljkama se smanji na  $10\text{ V}$ , koliki je unutarnji otpor tog izvora? Prikazite opisani izvor shematski a) naponskim b) strujnim modelom.

Rješenje: Struja kroz otpornik (trošilo) je  $I=10/10=1\text{ A}$ . Smanjenje napona za  $2\text{ V}$  možemo protumačiti "padom napona" unutar samog izvora. U seriji sa (idealnim) naponskim izvorom od  $12\text{ V}$  treba zamisliti serijski spojen unutarnji otpor izvora. Taj otpor lako izračunamo jer znamo pad napona na njemu ( $2\text{ V}$ ) i struju ( $1\text{ A}$ ). Dakle unutarnji otpor je:  $R_i=2\text{ V}/1\text{ A}=2\text{ }\Omega$ . Time je dobiven model (realnog) naponskog izvora. Možemo izračunati struju koju bi takav izvor davao ako mu stezaljke kratko spojimo. Ta struja je  $I_{ks}=12/2=6\text{ A}$ . Međutim kada na izvor spojimo otpornik od  $10\text{ }\Omega$  struja će biti samo  $1\text{ A}$ . Znači da se dio struje "troši" u samom izvoru. Možemo zamisliti kao da je paralelno (idealnom) strujnom izvoru od  $6\text{ A}$  spojen "unutarnji" otpornik kroz koji prolazi struja  $5\text{ A}$ . Kako je na stezaljkama izvora napon od  $10\text{ V}$  taj unutarnji otpornik ima iznos  $10/5=2\text{ }\Omega$ . Zaključujemo da su u modelu naponskog i strujnog realnog izvora unutarnji otpori jednaki. Za vanjski krug (trošilo) je sasvim svejedno koji model izvora koristimo. Pažnja: struje i napori na unutarnjem otporu ovise o modelu.

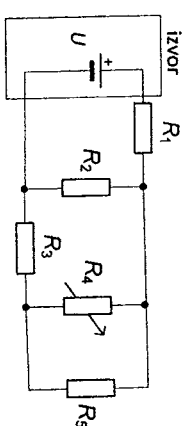


### Zadaci III.1

III.1-1. Na nekom istosmjernom izvoru električne energije izvršena su dva mjerenja. Prvo mjerenje je bilo sa otporom trošila  $10\text{ }\Omega$  kada je ustanovljena struja od  $1\text{ A}$ . Kod drugog mjerenja je otpor trošila promijenjen na  $2,5\text{ }\Omega$ , a struja je bila  $2\text{ A}$ . Odredite (uz pretpostavku da je UI-karakteristika tog izvora pravac) koliki su a) struja kratkog spoja b) napon praznog hoda c) unutarnji otpor. Nacrtajte UI-karakteristiku izvora i njegovu shemu koristeći model strujnog odnosno naponskog izvora. d) Izračunajte snagu trošila ako je otpor trošila redom:  $2,5\text{ }\Omega$ ,  $5\text{ }\Omega$  i  $10\text{ }\Omega$ .

Rezultat: a)  $3\text{ A}$  b)  $15\text{ V}$  c)  $5\text{ }\Omega$  d)  $10\text{ W}$ ,  $11,25\text{ W}$  i opet  $10\text{ W}$

III.1-2. U spoju na slici smanjuje se otpor  $R_4$ . S tim u vezi navedene su sljedeće tvrdnje: 1.  $R_{uk}$  pada 2.  $I_1$  raste 3.  $I_2$  se ne mijenja; 4.  $I_3$  pada; 5.  $I_5$  raste (indeksi struja i napona odnose se na otpore). Koje su tvrdnje točne?

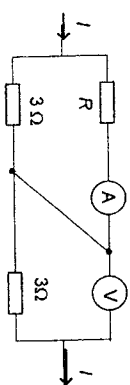


Rezultat: 1. i 2. je točno. Uputa: kod ovakvih zadataka prikladno je koristiti oznake: ↑ raste, ↓ pada, – ne mijenja se. Treba krenuti od veličine koja je zadana kao promjenjiva:  $R_4 \downarrow$  (pada) posljedično je da  $R_{45} \downarrow$  pa onda  $R_{345} \downarrow$ ,  $R_{345} \downarrow$ ,  $R_{uk} \downarrow$ ,  $I_1 \uparrow$ ,  $I_2 \downarrow$  itd. Kod zaključivanja o promjeni pojedine struje ili napona treba voditi računa o KZS odnosno o KZN.

Pitanje Na prikazani spoj otpornika umjesto naponskog izvora  $U$  priključimo strujni  $I$ . Koje su u tom slučaju tvrdnje ispravne ako se  $R_4$  smanjuje? odg. točno je 1.

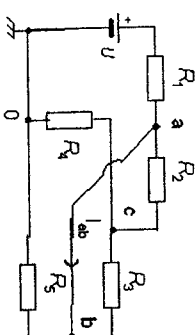
III.1-3. Idealni instrumenti ( $R_a=0$ ,  $R_v=\text{beskonačno}$ ) pokazuju  $I=2\text{ A}$ ,  $U=18\text{ V}$ . Koliki su a) iznos otpora  $R$  b) struja  $I$  c) ukupna snaga spoja.

Rezultat:  $R=6\text{ }\Omega$ ,  $I=6\text{ A}$ ,  $P=180\text{ W}$

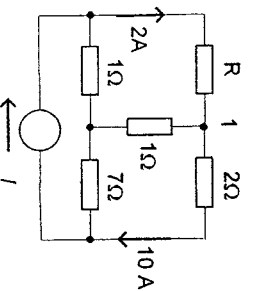


III.1-4. U prikazanom spoju izračunajte struje  $I_{R1}$  i  $I_{R2}$ . Zadano je  $R_1=R_2=R_3=4\text{ }\Omega$ ,  $R_4=2\text{ }\Omega$ ,  $U=10\text{ V}$ .

Rezultat:  $2,5\text{ A}$ ;  $1,88\text{ A}$

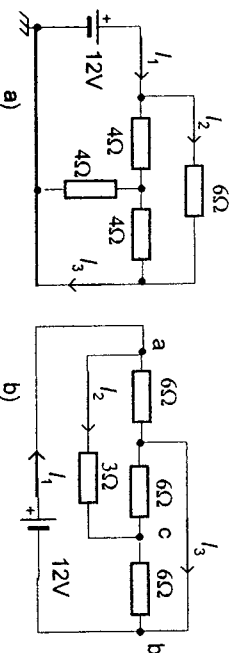


III.1-5. Uz poznate otpore i struje označene na slici desno, odredite otpor  $R$  i struju izvora  $I$  te napon na stezaljkama strujnog izvora. Uputa: primijete naprijed KZS za čvor 1, zatim KZN za desnu konturu itd.



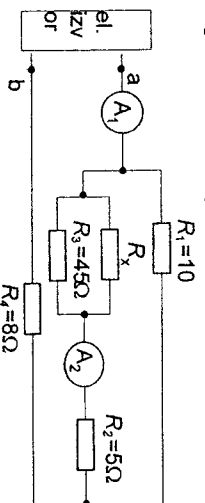
Rezultat: 10 Ω, 14 A, 40 V

III.1-6. U prikazanom spoju otpornika prema slici a) i b) izračunajte struje  $I_1$ ,  $I_2$  i  $I_3$ . Koliki je potencijal točke c u spoju na slici b) ako je referentna točka minus pol izvora?



Rezultat: a)  $I_2=2A$ ,  $I_1=4A$ ,  $I_3=3A$ ,  
b)  $I_2=2A$ ,  $I_1=4A$ ,  $I_3=3A$ . Potencijal točke c je +6V.

III.1-7. U prikazanom mješovitom spoju otpornika izmjerene su struje  $I_1=3A$  i  $I_2=1A$ . Svi otpornici su poznati (zadani) osim onog koji je označen s  $R_x$ . Koliki je taj  $R_x$ ? Kakav bi se "idealni" izvor mogao nalaziti u kutiji sa oznakom el. izvor?

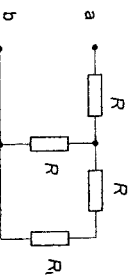


Rezultat:  $R_x=22,5 \Omega$ , u kutiji se može nalaziti strujni izvor  $I = 3 A$  ili naponski  $U = 44 V$ .

III.1-8. U prikazanom spoju otpornika treba izračunati otpor  $R$  uz koji će ukupan otpor sa priključnica a i b biti jednak  $R_1$ .

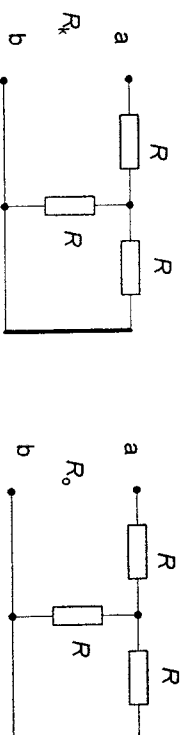
Zadano:  $R_1 = 100\Omega$

Rezultat:  $R=57,735 \Omega$

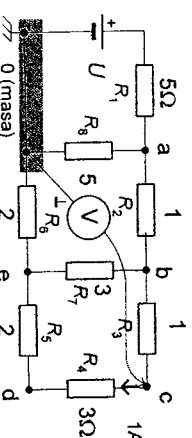


III.1-9. Odredite otpor sa stezaljki a i b ako otpor  $R_1$  iz prethodnog zadatka ima iznos nula (kratki spoj, označite ga s  $R_k$ ) slika lijevo, odnosno beskonačno (prekid, označite ga s  $R_o$ ) slika desno. Izračunajte  $\sqrt{R_o R_k}$  i dobiveni rezultat usporedite sa prethodnim zadatkom!

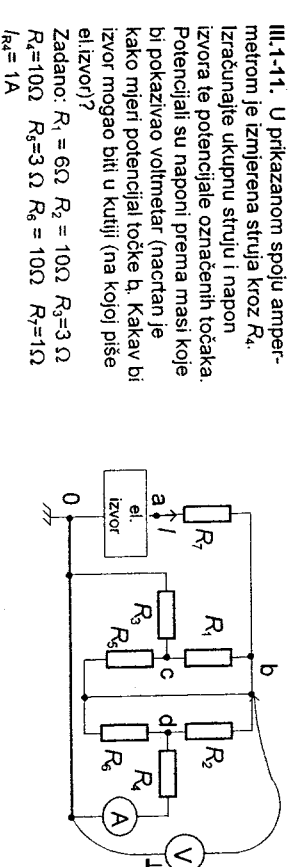
Zadano:  $R = 57,735 \Omega$  Rezultat:  $R_k=86,6\Omega$ ,  $R_o=115,47 \Omega$



III.1-10. U prikazanom mješovitom spoju otpornika poznata je označena struja i vrijednosti svih otpornika. Odredite napon izvora i potencijale (napone prema masi) točaka a, b, c, d i e (na slici je prikazan voltmetar kako mjeri potencijal točke c) Rezultate upišite na shemu spoja (označite polaritete napona i smjerove struja).



Rezultat:  $U=45 V$ ,  $\varphi_a=+15 V$ ,  $\varphi_b=+12V$ ,  $\varphi_c=+11 V$ ,  $\varphi_d=+8 V$ ,  $\varphi_e=+6 V$ .



III.1-11. U prikazanom spoju ampermetrom je izmjerena struja kroz  $R_4$ . Izračunajte ukupnu struju i napon izvora te potencijale označenih točaka. Potencijali su naponi prema masi koje bi pokazivao voltmetar (nactan je kako mjeri potencijal točke b. Kakav bi izvor mogao biti u kutiji (na kojoj piše el. izvor)?

Zadano:  $R_1 = 6\Omega$ ,  $R_2 = 10\Omega$ ,  $R_3=3 \Omega$ ,  $R_4=10\Omega$ ,  $R_5=3 \Omega$ ,  $R_6 = 10\Omega$ ,  $R_7=1\Omega$ ,  $I_{R_4} = 1 A$

Rezultat:  $I=4A$ ,  $\varphi_a=19V$ ,  $\varphi_c=9V$ ,  $\varphi_d=10V$ ,  $\varphi_e=15V$  strujni od 4 A ili naponski od 19 V.

III.1-12. U prikazanom spoju naponskog dijela treba odrediti potencijale točaka a i b u tri slučaja 1. dijelilo je neopterećeno (sklopke S1 i S2 su otvorene) 2. sklopka S1 je zatvorena, a S2 otvorena 3. sklopke S1 i S2 su zatvorene

Zadano  $R_{11} = 10\text{ k}\Omega$   $R_{12} = 20\text{ k}\Omega$

$U = 10\text{ V}$  (1 k je skraćena od 1 k $\Omega$ )

Rezultat: 1. neopterećeno dijelilo

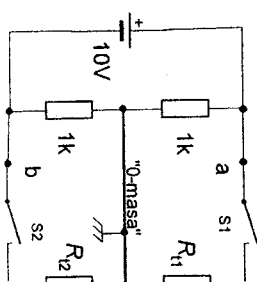
$$\varphi_a = 5\text{ V} \quad \varphi_b = -5\text{ V}$$

2. opterećen je gornji (pozitivni) dio dijelila

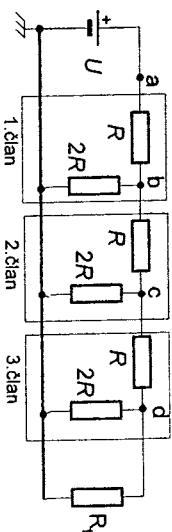
$$\varphi_a = 4,762\text{ V} \quad \varphi_b = -5,238\text{ V}$$

3. opterećen je gornji i donji dio dijelila.

$$\varphi_a = 4,884\text{ V} \quad \varphi_b = -5,116\text{ V}$$



III.1-13. Na izvor napona  $U$  spojeno je trošilo  $R_1=2R$  preko tri " $R-2R$ " člana kako je prikazano slikom. Treba izračunati a) ukupan otpor ovog mješovitog spoja otpornika sa strane izvora b) potencijale točke a ako je potencijal točke d 1V.

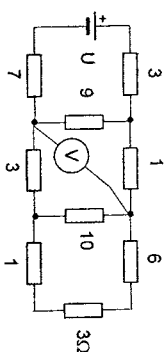


Rezultat: a) ukupan otpor  $2R$  bez obzira na broj članova " $R-2R$ " u nizu.

b) potencijal točke a je 8 V. To je ujedno napon izvora.

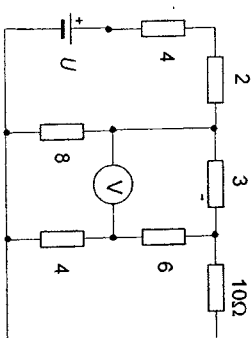
III.1-14. Koliki je napon izvora ako voltmetar pokazuje 16 V?

Rezultat: 58 V



III.1-15. Izračunajte snagu izvora kao i snage na pojedinim otpornicima ako voltmetar pokazuje  $U_V=6\text{ V}$ ? Koliko će pokazivati voltmetar ako umjesto naponskog izvora priključimo strujni od 4 A?

Rezultat: 40 W, 12 V



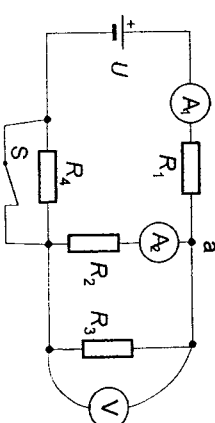
III.1-16. Izmjerene su struje  $I_1$ ,  $I_2$  te napon  $U_V$ . a) Kirchhoffovim zakonima (i naravno Ohmovim zakonom) odredite nepoznate otpore. b) izračunajte pokazivanja instrumenata nakon otvaranja sklopke S

Zadano je  $I_1 = 1\text{ A}$   $I_2 = 0,6\text{ A}$   $U_V = 6\text{ V}$   $U = 12\text{ V}$   $R_4 = 6\Omega$

Rezultat:

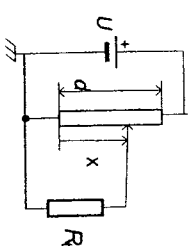
$$\text{a) } R_3=15\Omega, R_2=10\Omega, R_1=6\Omega$$

$$\text{b) } I_{1n} = 0,667\text{ A} \quad I_{2n} = 0,4\text{ A} \quad U_{Vn} = 4\text{ V}$$



III.1-17. Za podešavanje napona na trošilu  $R_1=55\Omega$  koristi se prikazani spoj sa kliznim otpornikom. Dužina kliznog otpornika  $d=30\text{ cm}$ , a ukupan otpor je  $55\Omega$ . U koji položaj treba postaviti kliznik ( $x=?$ ) da bismo na trošilu dobili napon a)  $0,25U$  b)  $0,5U$  c)  $0,75U$ . Skicirajte grafičku funkciju  $U_1=f(x)$ .

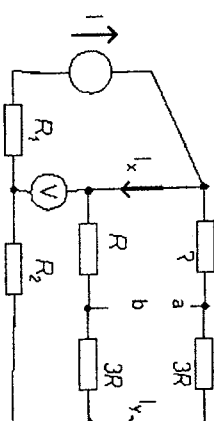
Rezultat: a) 9,1 cm b) 18,5 cm c) 25,4 cm



III.1-18. Serijski su spojena dva otpornika  $R_1=10\Omega$  i promjenjivi otpornik  $R_2$  (od nula do  $100\Omega$ ). Spoj je priključen na naponski izvor od 12 V nazivne struje 2A. a) Kod kojeg iznosa  $R_2$  će snaga na  $R_2$  biti najveća moguća b) Kolika je ta snaga c) Kod kojih iznosa otpora  $R_2$  će snaga na  $R_2$  biti jednaka polovici maksimalne d) Kolika treba biti nazivna struja otpornika.

Rezultat: a) najveća snaga je kod  $R_2=R_1=10\Omega$ , b) 3,6 W c) 1,7157 $\Omega$  i 58,284  $\Omega$  d) nazivna struja treba biti veća od 1,2 A.

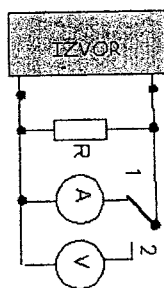
III.1-19. U prikazanom spoju voltmetar pokazuje 14 V. Izračunajte struje: a)  $I_x$  te  $I_y$ . b) napon  $U_{ab}$ . Zadano je:  $R=2\Omega$ ,  $R_1=2\Omega$ ,  $R_2=4\Omega$ . Rezultat:  $I_x=2\text{ A}$ ;  $I_y=1\text{ A}$ ;  $U=0\text{ V}$



## Test pitanja III.1

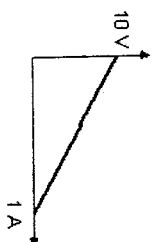
1) Otpor  $R=1\ \Omega$ . Ampermetar pokazuje 2 A, a voltmetar 1 V (kada prebacimo preklopku). Izvor (u kutiji) je:

- A) strujni 2 A  
B) naponski 1 V  
C) naponski 2 V  $R_1=1\ \Omega$   
D) strujni 2 A  $R_1=2\ \Omega$   
E) nema dovoljno podataka



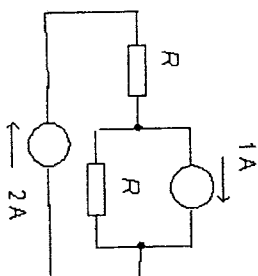
2) Izvor ima prikazanu karakteristiku. Ako na taj izvor priključimo otpornik  $R=10\ \Omega$  struja kroz taj otpor će biti:

- A) 0,5 A  
B) 1 A  
C) 2 A  
D) nema dovoljno podataka



3) Koliki je napon na stezaljkama izvora od 1 A? Otpor  $R=1\ \Omega$

- A) 1 V, + na lijevoj stezaljci  
B) nula  
C) 1 V, + na desnoj stezaljci  
D) 2 V, + na lijevoj stezaljci  
E) 2 V, + na desnoj stezaljci



4) Paralelno su spojena dva otpornika  $R_1=1\ \Omega$  i  $R_2=11\ \Omega$ . Struje  $I_1, I_2$  se odnose ovako:

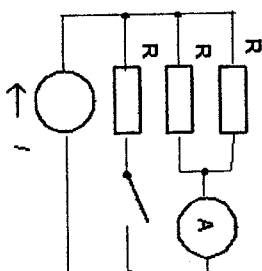
- A) 1:10 B) 11:1 C) 1:9 D) 1:11 E) 10:1

5) Paralelni spoj dva otpornika  $R_1$  i  $R_2$  priključen je na strujni izvor  $I$ . Kolika je struja kroz  $R_1$ ?

- A)  $I \cdot R_1 / R_2$   
B)  $I \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$   
C)  $I \cdot R_1 / (R_1 + R_2)$   
D)  $I \cdot R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$   
E)  $I (R_1 + R_2) / R_1$

6) Kako se promijeni struja ampermetra ako zatvorimo sklopku?

- A) smanji se  
B) poveća se  
C) ostane jednaka  
D) ovisi o iznosu otpora



7) Omjer otpora dvaju otpornika jednak je  $R_1, R_2=1:4$ . Kakav će biti omjer snaga  $P_1, P_2$  ako otpornike spojimo u paralelu i priključimo na izvor napona  $U$ ?

- A) 1:1 B) 1:4 C) 4:1 D) 2:1 E) 1:2

8) Pomoću koje od navedenih formula možemo izračunati ukupan otpor tri paralelno spojena otpornika:

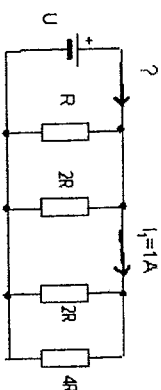
$$R_{uk} = \frac{(R_1 \cdot R_2 \cdot R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (1)$$

$$R_{uk} = \frac{(R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad (2)$$

$$R_{uk} = \frac{(R_1 \cdot R_2 \cdot R_3)}{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3} \quad (3)$$

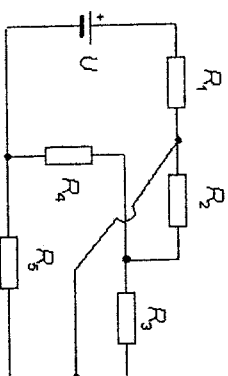
9) Odredite struju izvora ako je struja  $I_1 = 1\ \text{A}$ .

- A) 1,5 A  
B) 2 A  
C) 3 A  
D) 0,5 A  
E) nema dovoljno podataka



10) Koji otpornici su u prikazanom strujnom krugu spojeni paralelno?

- A)  $R_1$  i  $R_2$   
B)  $R_4$  i  $R_5$   
C)  $R_2$  i  $R_3$   
D)  $R_3$  i  $R_5$   
E) nema paralelno spojenih otpornika

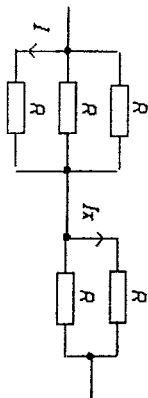


11) Paralelno su spojeni otpornici od  $R_1, 3R$ . Ukupan otpor je 7,5  $\Omega$ . Koliki je  $R$ ?

A)  $R=10\ \Omega$  B)  $R=7,5\ \Omega$  C)  $R=2,5\ \Omega$  D)  $R=5\ \Omega$  E)  $R=15\ \Omega$

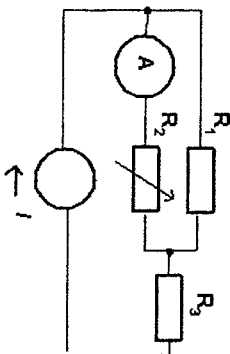
12) Kolika je struja  $I_x$  ako je struja  $I=1\text{ A}$ ?

- A)  $0,5\text{ A}$   
 B)  $1\text{ A}$   
 C)  $1,5\text{ A}$   
 D)  $2\text{ A}$   
 E) ovisi o iznosu otpora



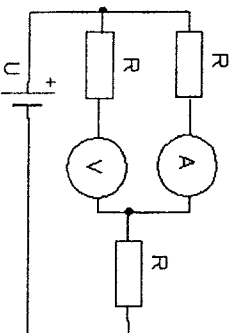
13) Otpor  $R_2$  se povećava. Da li se i kako mijenja pokazivanje ampermetra?

- A) smanjuje se  
 B) raste  
 C) ne mijenja se



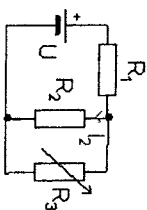
14) U prikazanom spoju voltmetar pokazuje  $1\text{ V}$ , a ampermetar  $1\text{ A}$ . Koliki je napon izvora?

- A)  $1\text{ V}$   
 B)  $2\text{ V}$   
 C)  $1,5\text{ V}$   
 D)  $3\text{ V}$   
 E) nema dovoljno podataka



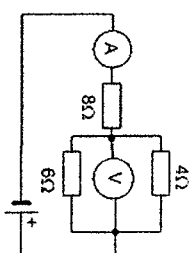
15) Što se dogodi sa strujom izvora i sa strujom kroz otpornik  $R_2$  ako se  $R_3$  smanjuje?

- A) ukupna struja se povećava  
 B)  $I_2$  se smanji  
 C)  $I_2$  ostaje ista  
 D) ukupna struja se smanji  
 E)  $I_2$  se povećava



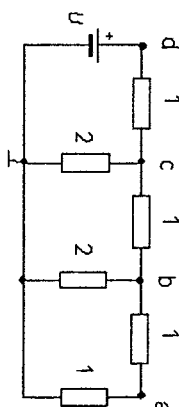
16) Voltmetar pokazuje  $12\text{ V}$ . Koliko pokazuje ampermetar?

- A)  $10\text{ A}$   
 B)  $5\text{ A}$   
 C)  $4\text{ A}$   
 D)  $16\text{ A}$



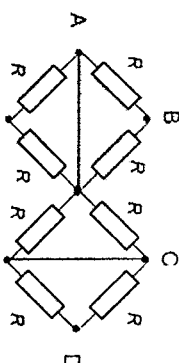
17) Potencijal točke a je  $+1\text{ V}$ . Koliki je potencijal točke d?

- A)  $1\text{ V}$   
 B)  $2\text{ V}$   
 C)  $4\text{ V}$   
 D)  $8\text{ V}$   
 E)  $16\text{ V}$



18) Koliki je otpor između točaka B i C ako je  $R=1\ \Omega$ ?

- A)  $1\ \Omega$   
 B)  $2\ \Omega$   
 C)  $3\ \Omega$   
 D)  $1,5\ \Omega$   
 E)  $2,5\ \Omega$



19) Serijski su spojene dvije žarulje  $100\text{ i }25\text{ W}$  (jednakog nazivnog napona U). Koja žarulja ima veći napon kada spoj priključimo na napon U?

- A) ona od  $100\text{ W}$   
 B) ona od  $25\text{ W}$   
 C) jednaki je napon na obje žarulje  
 D) nema dovoljno podataka

20) Strujni izvor  $I=1\text{ A}$  ima unutarnji otpor od  $1\ \Omega$ . Na taj izvor priključimo promjenjivi otpornik  $R$  (trošilo). Koliku je najveću snagu moguće postići na trošilu  $R$ ?

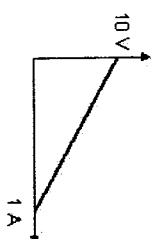
- A)  $0,5\text{ W}$  B)  $0,25\text{ W}$  C)  $1\text{ W}$  D)  $2\text{ W}$

21) Dva jednaka otpornika spojena su jednom serijski (1) a zatim paralelno(2). Kakav je odnos snaga ako se spoj priključuje na isti strujni izvor?

- A)  $P_1=P_2$  B)  $P_1=4P_2$  C)  $P_1=2P_2$  D)  $P_1=0,5P_2$  E)  $P_1=0,25P_2$

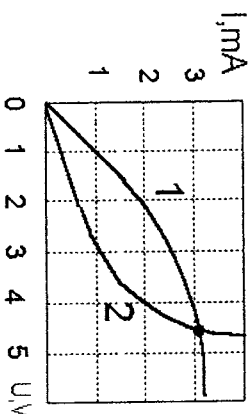
22) Na izvor koji ima prikazanu karakteristiku priključen je nelinearni element. Koliki je napon na nelinearnom elementu ako je struja  $0,75\text{ A}$ ?

- A) 2,5 V  
B) 7,5 V  
C) 5 V  
D) ovisi o karak. n. elementa  
E) 10 V



- 23) Dva nelinearna elementa spojena su serijski i priključena su na naponski izvor  $U$ . Kod kojeg napona  $U$  će napori na nelinearnim elementima biti jednaki?

- A) 3 V  
B) 4,5 V  
C) 9 V  
D) 3 V  
E) 6 V



Rješenja test pitanja III.1

1. C; 2. A; 3. A; 4. B; 5. B; 6. A; 7. C; 8. C; 9. C; 10. C; 11. A; 12. C; 13. A; 14. B; 15. AB; 16. B; 17. D; 18. A; 19. B; 20. B; 21. B; 22. A; 23. C;

### III.2. KONDENZATORSKI SPOJEVI

#### Primjeri III.2

- III.2-P1. Imamo dva kondenzatora  $C_1 = 3,3 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 4,7 \mu\text{F}$ . Prvi je predviđen za nazivni napon od 63 V, a drugi za 100V. Koliki najveći napon smijemo priključiti na: a) paralelno b) serijski spojene kondenzatore? Izračunajte naboje na kondenzatorima za oba slučaja.

Rješenje: Ako se napon na kondenzatoru poveća iznad nazivnog napona električno polje u kondenzatoru postaje preveliko i može doći do proboja u izolatoru odnosno do uništenja kondenzatora.

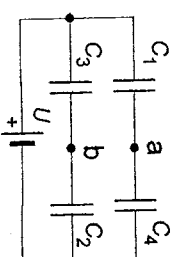
- a) U paralelnom spoju napon će biti jednak na oba kondenzatora. Najveći napon koji smijemo priključiti na ovaj spoj je 63 V. Time je prvi kondenzator maksimalno opterećen, a drugi podopterećen. Naboji će biti:  $Q_1 = C_1 \cdot 63 = 207 \mu\text{As}$ ,  $Q_2 = C_2 \cdot 63 = 296 \mu\text{As}$ . Ukupan naboj na kondenzatorima je  $Q = Q_1 + Q_2 = 503 \mu\text{As}$   
b) Kod serijskog spoja se napon izvora raspodijeli na kondenzatorima. Pri tom manji kondenzator dobiva veći napon. Prvi kondenzator dakle  $C_1$  će dobiti veći napon. Taj napon može biti najviše 63 V. Naboji na kondenzatorima su jednaki:  $C_1 \cdot 63 = C_2 \cdot U_2$

iz čega slijedi da je  $U_2 = 63 \cdot C_1 / C_2 = 44,23 \text{ V}$ . Ukupan napon je dakle:  $U = U_1 + U_2 = 107,23 \text{ V}$  iznosi naboj na kondenzatorima su  $Q_1 = Q_2 = 207 \mu\text{As}$ . Taj naboj možemo izračunati i ovako: ukupan kapacitet je  $C_{uk} = C_1 \cdot C_2 / (C_1 + C_2) = 1,93 \mu\text{F}$ , a zatim je  $Q = C_{uk} \cdot U = 1,93 \cdot 107,23 = 207 \mu\text{As}$ .

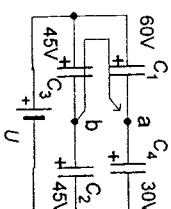
- III.2-P2. Kondenzator  $C_1 = C$  nabijemo na napon  $U$ , a zatim ga odspojimo sa izvora. Na stezaljke kondenzatora spojimo prazan kondenzator  $C_2$  kapaciteta  $3C$ . Koliki će biti naboj na svakom od kondenzatora? Koliki je napon na kondenzatorima?  
Zadano  $C = 10 \text{ nF}$  i  $U = 100 \text{ V}$

Rješenje: Priključivanjem na izvor od 100V, kondenzator  $C_1$  primi naboj  $Q = C_1 \cdot 100\text{V} = 1000 \text{ nAs}$ . Nakon odspajanja izvora i spajanja kondenzatora  $C_2$  dio naboja sa kondenzatora  $C_1$  prelazi na  $C_2$ . Ukupan naboj sustava ostaje jednak početnom naboju koji je bio na  $C_1$ . Prijelaz naboja prestaje kada se napori na kondenzatorima izjednače. Taj napon označimo kao  $U_k$ . To možemo matematički iskazati jednažbama:  $U_k = Q_1 / C_1 = Q_2 / C_2$  i  $Q_1 + Q_2 = Q$ . Dobivamo da će napon na kondenzatorima biti:  $U_k = Q / (C_1 + C_2) = 25 \text{ V}$   
Preostali naboj na  $C_1$  je:  $25 \cdot C_1 = 250 \text{ nAs}$  dok je  $C_2$  primio naboje:  $25 \cdot C_2 = 750 \text{ nAs}$ .

- III.2-P3. Izračunajte napon između točaka a i b u prikazanom spoju kondenzatora. Koliki je ukupan naboj kojim je izvor nabio ovaj spoj kondenzatora?  
Zadano:  $C_1 = 30 \text{ nF}$ ,  $C_3 = C_2 = C_4 = 60 \text{ nF}$   
 $U = 90\text{V}$



Rješenje: Na izvor su paralelno spojene dva serijska spoja kondenzatora. Svaki od spojeva možemo zasebno rješavati tj. izračunati napone na kondenzatorima. Napon na  $C_1$  će biti:  $U_{C1} = U \cdot C_3 / (C_1 + C_3) = 60 \text{ V}$ , a na  $C_4$  je napon  $U_{C4} = U - U_{C1} = 30 \text{ V}$ . Na serijskom spoju  $C_2$  i  $C_3$  dobivamo jednake napone, jer su kapaciteti tih kondenzatora jednaki.  $U_{C2} = U_{C3} = U/2 = 45\text{V}$ . Izračunati napori su prikazani na slici:



Za dobivanje napona  $U_{ab}$  treba krenuti od točke b i "pokupiti" napone (sa polaritetom) na putu prema točki a. Dobivamo:  $U_{ab} = +45\text{V} - 60\text{V} = -15 \text{ V}$ . Točka a je negativna u odnosu na točku b.

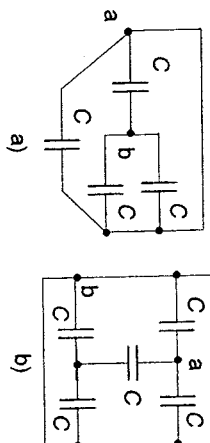
Ukupan kapacitet spoja je:  $C_{uk} = C_1 \cdot C_3 / (C_1 + C_3) + C_2 \cdot C_4 / (C_2 + C_4) = 50 \text{ nF}$ . Prilikom nabijanja spoja je primio naboj  $Q = U \cdot C_{uk} = 4500 \text{ nAs}$ .

### Zadaci III.2

III.2-1 Na naponski izvor  $U$  spojimo u seriji kondenzatore  $C_1$  i  $C_2$ . Koji je odnos kapaciteta kondenzatora  $C_2/C_1$  ako je odnos napona  $U/U_2$  a) 2 b) 9?

Rezultat: a) 1 b) 8

III.2-2 Koliki je ukupni kapacitet sa stezaljki a i b u spoju prema slici a) i b) ?

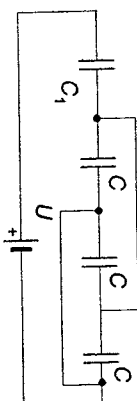


Rezultat: a) 3 C b) 8/3 C

III.2-3 U prikazanom spoju kondenzatora izračunajte ukupan kapacitet i napon na kondenzatoru  $C_1$ .

Zadano:  $C = 10 \text{ nF}$   $C_1 = 30 \text{ nF}$   $U = 10 \text{ V}$

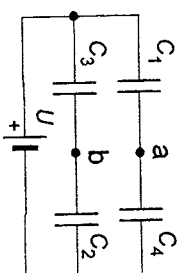
Rezultat:  $C_{uk} = 15 \text{ nF}$ ,  $5 \text{ V}$ .



III.2-4. Izračunajte napon između točaka a i b u prikazanom spoju kondenzatora. Koliki bi bio taj napon ako  $C_1$  i  $C_4$  zamijene mjestima?

Zadano:  $C_1 = C_3 = 30 \text{ nF}$   $C_2 = C_4 = 60 \text{ nF}$   $U = 90 \text{ V}$

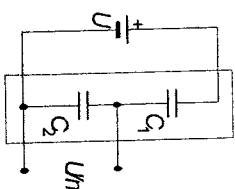
Rezultat: nula (most je u ravnoteži),  $U_{ab} = +30 \text{ V}$  (tj. plus je na a)



III.2-5. Neki izvor visokog napona ima napon  $U$ . Potrebno je proračunati kondenzatore kapacitivnog dijela napona kojim će se napon smanjiti  $n$  puta. Pritom ukupna energija koja će se pohraniti u dijelu treba biti  $W_{uk}$ .

Zadano:  $U = 20 \text{ kV}$ ,  $n = 100$ ,  $W_{uk} = 0.1 \text{ J}$

Rezultat:  $C_1 = 505.1 \text{ pF}$   $C_2 = 50 \text{ nF}$ .



III.2-6. Elektrostatskim voltmetrom mjerimo napon na kondenzatoru  $C_2$  u prikazanom spoju. Kolika je pogreška (apsolutna i relativna) izmjenjenog napona ako voltmetar ima kapacitet  $C_v$ ?

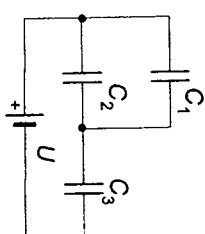
Zadano:  $C_1 = 2.2 \text{ nF}$   $C_2 = 330 \text{ pF}$   $C_v = 150 \text{ pF}$   $U = 100 \text{ V}$

Rezultat:  $-4.867 \text{ V}$ ,  $-5.6 \%$

III.2-7. U spoju prema slici poznate su veličine:  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $Q_{C1}$  i  $U_{C3}$ . Odredite a) kapacitet kondenzatora  $C_1$  b) napon izvora  $U$  c) ukupan kapacitet spoja

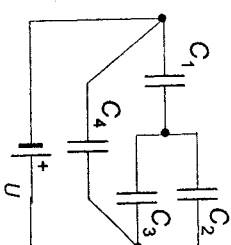
Zadano:  $C_2 = 5 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 11 \mu\text{F}$ ,  $Q_{C1} = 100 \mu\text{C}$ ,  $U_{C3} = 20 \text{ V}$ .

Rezultat: a)  $U = 44 \text{ V}$ , b)  $C_1 = 4.16 \mu\text{F}$  c)  $C_{uk} = 5 \mu\text{F}$ .



III.2-8. Odredite naboj na  $C_4$  ako je zadano:  $Q_1 = 10 \text{ nAs}$   $C_1 = 1 \text{ nF}$   $C_2 = 2 \text{ nF}$   $C_3 = 3 \text{ nF}$   $C_4 = 4 \text{ nF}$ .

Rezultat:  $48 \text{ nAs}$



III.2-9. Serijski su spojeni kondenzator  $C_1$  i kondenzator promjenljivog kapaciteta  $C_2$ . Spoj je priključen na stalan napon  $U$ . Na koji iznos treba podesiti  $C_2$  da bi njegova energija bila najveća moguća (maksimalna)? Kolika je ta energija? Nacrtajte graf ovisnosti energije o  $C_2$  ako se  $C_2$  mijenja od 2 do 20 nF.

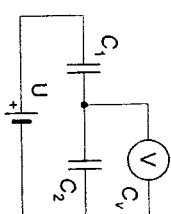
Zadano:  $C_1 = 10 \text{ nF}$ ,  $U = 10 \text{ V}$

Rezultat:  $C_2 = 10 \text{ nF}$ ,  $125 \text{ nJ}$

### Test pitanja III.2

1) Ako serijski spojimo kondenzatore od 5 i 6 nF ukupan kapacitet je:

- A) veći od 6 nF
- B) manji od 5 nF
- C) jednak 5,5 nF
- D) različit od 5,5 nF, ali između 5 i 6 nF



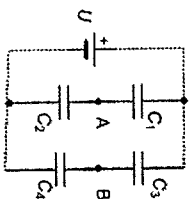
- 2) Na kondenzatoru kapaciteta  $C$  nalazi se naboj  $Q$ . Hoće li se i kako promijeniti taj naboj ako zatvorimo sklopku?

- A) smanji se  
B) poveća se  
C) ostane isti



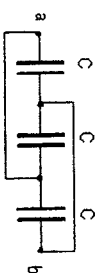
- 3) Svi kondenzatori imaju isti kapacitet  $C$ . Koliki je napon  $U_{ab}$  ako je napon izvora  $10\text{ V}$ ?

- A)  $-5\text{ V}$   
B)  $5\text{ V}$   
C) nula  
D)  $10\text{ V}$   
E)  $-10\text{ V}$



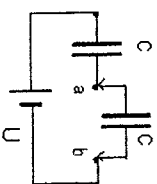
- 4) Koliki je kapacitet  $C_{ab}$ ?

- A)  $2C$   
B)  $C/3$   
C)  $3C$   
D)  $C$



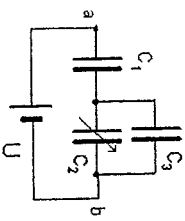
- 5) Serijski su spojena dva jednaka kondenzatora. Nakon nabijanja odstranimo desni kondenzator. Koliki je sada napon  $U_{ab}$ ?

- A)  $U/2$   
B) nula  
C)  $U$   
D)  $U/4$



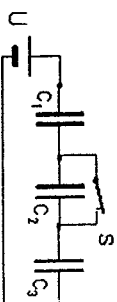
- 6) Da li se i kako promijeni napon na  $C_1$  ako se poveća kapacitet  $C_2$ ?

- A) ne promijeni se  
B) poraste  
C) smanji se



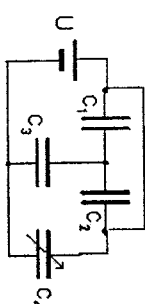
- 7) Tri kondenzatora jednakog kapaciteta priključena su na izvor  $U$ . Nakon nabijanja otvara se sklopka  $S$ . Da li se i kako promijeni napon na  $C_1$ ?

- A) ne promijeni se  
B) smanji se  
C) poraste



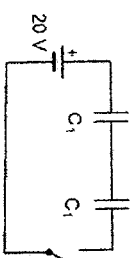
- 8) Svi kondenzatori imaju jednaki kapacitet  $C$ . Koliki je ekvivalentan kapacitet sa strane izvora?

- A)  $1,66C$   
B)  $1,5C$   
C)  $2C$   
D)  $3C$   
E) nula



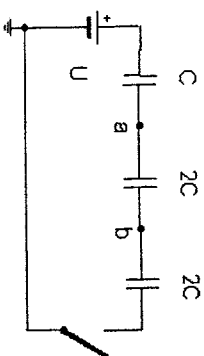
- 9) U prikazanom spoju  $C_1$  je puno veći od  $C_2$ . Nakon zatvaranja sklopke vrijedi odnos:

- A)  $Q_1 > Q_2$   
B)  $Q_1 = Q_2$   
C)  $U_1 > U_2$   
D)  $U_2 > U_1$   
E)  $U_1 = U_2$



- 10) Nakon zatvaranja sklopke napon  $U_{ab} = +1\text{ V}$ . Koliki je napon  $U$ ?

- A)  $3\text{ V}$   
B)  $4\text{ V}$   
C)  $6\text{ V}$   
D)  $2,5\text{ V}$



- 11) Koliko raznih iznosa kapaciteta možemo dobiti spajanjem tri jednaka kondenzatora na razne načine? (napomena: uvijek spajamo sva tri)
- A) 4 B) 3 C) 2 D) 5

### Rješenja test pitanja III.2

1. B; 2. C; 3. C; 4. C; 5. A; 6. B; 7. A; 8. A; 9. BD; 10. B; 11. A;