6. predavanje iz OE

SINUSOIDNO PROMJENJIVE VELIČINE
I
NAČELA RJEŠAVANJA
KRUGOVA IZMJENIČNE STRUJE
U KOMPLEKSNOM PODRUČJU

(pripremio prof.dr.sc. Armin Pavić)

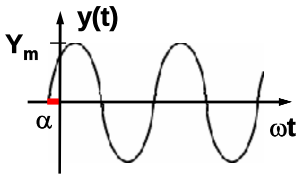
6. predavanje iz OE

Sadržaj:

- Opći oblik i osnovne značajke sinusne funkcije - sinusoide
- Predstavljanje sinusnih funkcija vektorima
- Pojam i oblici prikaza kompleksnih brojeva
- Prikaz rotirajućeg vektora u kompleksnoj ravnini, pojmovi rotirajućeg i mirnog vektora te fazora struje i napona
- Impedancija i admitancija
- Jednadžbe Kirchhoffovih zakona u kompleksnom području
- Postupak rješavanja el. krugova u kompleksnom području

Opći oblik i osnovne značajke sinusne funkcije - sinusoide

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Opći izraz za vremenski promjenjivu sinusnu funkciju (sinusoidu) na slici lijevo jest:

$$\mathbf{y(t) = Y_m sin(\omega t} + \alpha)$$

- Osnovni elementi sinusne funkcije:
  - *kut*, ili *argument*, **(ωt+α), koji se raste u vremenu sa stalnom *kutnom brzinom* ω, od početne vrijednosti α (*početni kut* – u trenutku t=0);**
  - ***tjemena vrijednost*, ili *amplituda*, Y_m**
- Periodičnost sinusne funkcije: sin(α)=sin(α+k·2π) (k∈N)
  - **Vrijednosti sinusne funkcije se ponavljaju nakon svakog povećanja kuta za 2π. To se dogodi tijekom vremena od jedne *periode T*, pa je stoga (stalna) brzina promjene kuta u vremenu *ω*=2π/*T* ([*ω*]=rad/s), gdje je broj perioda u jednoj sekundi *f* =1/*T* frekvencija sinusoide ([*f*]=1/s=Hz)**

3

Još neka važna svojstva sinusne funkcije

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- sin(π/2)=1, sin(3π/2)=–1, sin(0+kπ)=0 (k∈N);
- sin(α+π/2)=cos(α), tj. sin(α)=cos(α–π/2);
- sin(α–π/2)=–cos(α), tj. sin(α)=–cos(α+π/2);
- Zbroj sinusnih funkcija (jednakih frekvencija) jest sinusna funkcija (iste frekvencije);
- Razlika dviju sinusnih funkcija (jednakih frekvencija) jest sinusna funkcija (iste frekvencije);
- Derivacija sinusne funkcije jest sinusna funkcija:

$$\frac{d}{d\alpha}\sin(\alpha) = \cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \pi/2\right)$$

- Integral sinusne funkcije jest sinusna funkcija:

$$\int \sin(\alpha)\, d\alpha = -\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha - \pi/2\right)$$

4

Predstavljanje sinusnih funkcija vektorima

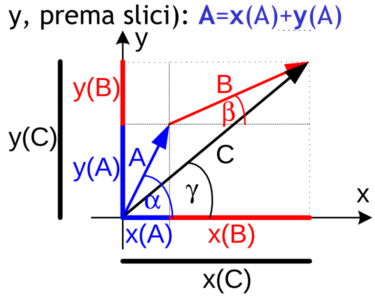
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- U pravokutnom (XY) koordinatnom sustavu, bilo koji vektor **A** može se prikazati kao zbroj svojih komponenata u smjerovima x i y (projekcije vektora na apscisnu os x i na ordinatnu os y, prema slici): **A**=**x**(A)+**y**(A)

Komponente vektora **A** mogu se izraziti ovako: x(**A**)=A$\cos\alpha$ i y(**A**)=A$\sin\alpha$

Jednako se mogu izraziti i komponente vektora **B**: x(**B**)=B$\cos\beta$ i y(**B**)=B$\sin\beta$

Zbroj vektora **A** i **B** daje vektor **C** s komponentama x(**C**)=C$\cos\gamma$ i y(**C**)=C$\sin\gamma$



Pritom vrijedi: y(**C**)=y(**A**)+y(**B**), tj.

$A\sin\alpha + B\sin\beta = C\sin\gamma$

Zbrajanje sinusnih funkcija, umjesto složenim trigonometrijskim formulama, može se ovako obaviti jednostavnim zbrajanjem vektora!

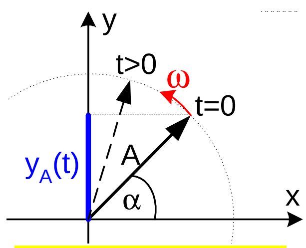
- Pokažite da isto vrijedi i za oduzimanje sinusnih funkcija!

5

Sveza sinusoide i rotirajućeg vektora

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- Ako kut vektora **A** prema apscisnoj osi x, od neke početne vrijednosti α raste u vremenu sa stalnom kutnom brzinom ω, taj se kut može se izraziti vremenskom funkcijom ($\omega t+\alpha$)
- Vektor **A** tu rotira stalnom brzinom u smjeru suprotnom okretanju kazaljki sata, a njegova komponenata y_A u smjeru osi y (projekcija vektora na os y) mijenja se u vremenu po funkciji



$y_A(t)=A\sin(\omega t+\alpha)$

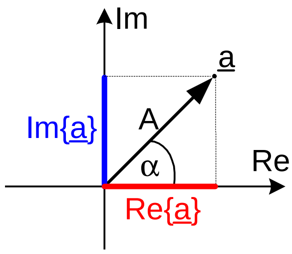
- Ovakav ***rotirajući vektor*** svojom komponentom y predstavlja opći oblik vremenski promjenjive sinusne funkcije – sinusoide. Stalna brzina kruženja vektora ω, naziva se još i *kružna frekvencija* ($\omega=2\pi f$).

6

Matematička osnova:
Pojam i način prikaza kompleksnih brojeva

- Kompleksni broj $\underline{a}$ može se općenito predstaviti kao zbroj jednog realnog i jednog imaginarnog broja: $\underline{a}=b+jc$

  gdje je $b=\mathrm{Re}\{\underline{a}\}$, $c=\mathrm{Im}\{\underline{a}\}$, a $j=\sqrt{-1}$ (imaginarna jedinica)
- Kompleksni broj $\underline{a}$ predstavlja jednu točku u *kompleksnoj ravnini* desno
- Osim svojim koordinatama na Re i Im osi (Re i Im dio kompleksnog broja), točka u kompl. ravnini određena je i duljinom svoje spojnice s ishodištem A i kutem α koji ona čini s realnom osi (*modul* i *kut* kompl. broja)



$\underline{a}=\mathrm{Re}\{\underline{a}\}+j\mathrm{Im}\{\underline{a}\}=A\cos\alpha+jA\sin\alpha=Ae^{j\alpha}=A\angle\alpha$

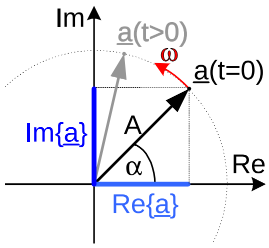
Sveza ovih parametara je: $A=\sqrt{\mathrm{Re}(\underline{a})^2+\mathrm{Im}(\underline{a})^2}$ $\quad \alpha=\arctan\dfrac{\mathrm{Im}(\underline{a})}{\mathrm{Re}(\underline{a})}$

Matematička osnova:
Računanje s kompleksnim brojevima

- **Zbrajanje** i **oduzimanje** kompleksnih brojeva (algebarski oblik)
  - Realni (odnosno imaginarni) dio zbroja (ili razlike) jednak je zbroju (ili razlici) realnih (odnosno imaginarnih) dijelova dvaju brojeva.
- **Množenje** kompleksnih brojeva (eksponencijalni, ili polarni oblik)
  - Modul umnoška jednak je umnošku modula dvaju brojeva;
  - Kut umnoška jednak je zbroju kutova dvaju brojeva.
- **Dijeljenje** kompleksnih brojeva (eksponencijalni, ili polarni oblik)
  - Modul kvocijenta jednak je kvocijentu modula dvaju brojeva;
  - Kut kvocijenta jednak je razlici kutova dvaju brojeva.
- **Deriviranje** kompleksnog broja (po α) = **množenje** broja s **j**
  - Množenje s j = povećanje kuta (rotacija oko ishodišta) za $+\pi/2$
- **Integriranje** kompleksnog broja (po α) = **dijeljenje** broja s **j**
  - Dijeljenje s j = promjena kuta (rotacija oko ishodišta) za $-\pi/2$

Rotirajući vektor u kompleksnoj ravnini

- Svaka točka (kompleksni broj a) u kompleksnoj ravnini može se predstaviti vektorom s hvatištem u ishodištu. Duljina vektora A jednaka je modulu, a kut vektora α jednak je kutu kompleksnog broja a u točki na vrhu vektora.
- Raste li kut s vremenom od početne vrijednosti α stalnom kutnom brzinom ω, tada vektor rotira u smjeru suprotnom od kazaljki sata (+ smjer) sa stalnom kružnom frekvencijom ω. Taj rotirajući vektor određuje kompleksni broj **a**, tako da je



$$\underline{a}=A\cos(\omega t+\alpha)+jA\sin(\omega t+\alpha)=Ae^{j(\omega t+\alpha)}$$

- Imaginarni dio kompleksnog broja **a**, koji predstavlja rotirajući vektor, mijenja se u vremenu kao opća sinusna funkcija – sinusoida:

$$\mathrm{Im}\{\ \underline{a}\ \} = A\sin(\omega t+\alpha)$$

- Sinusoidno promjenjivi naponi i struje mogu se predstaviti kompleksnim brojem (vektorom u k. ravnini), što pojednostavnjuje računanja s njima!

Predstavljanje sinusoidnih napona i struja u kompleksnom području

- U kompleksnoj ravnini ***rotirajući vektor***

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t+\alpha_u)} = U_m e^{j\alpha_u}\cdot e^{j\omega t}$$

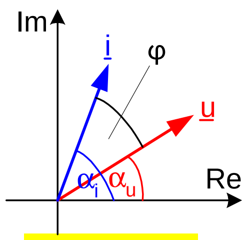
predstavlja napon $u(t)=U_m\sin(\omega t+\alpha u)$: $\mathbf{u(t)=Im\{\ \underline{u}\ \}}$

gdje dio kompleksnog broja $U_m e^{j\alpha_u} = \underline{U}_m$ određuje početni položaj (u t=0) vektora ($\underline{U}_m$=***mirni vektor***), dok dio $e^{j\omega t}$ određuje rotaciju vektora $\underline{u}$.

- Slično, struju $i(t)=I_m\sin(\omega t+\alpha i)$ predstavlja vektor

$$\underline{i} = I_m e^{j(\omega t+\alpha_i)} = I_m e^{j\alpha_i}\cdot e^{j\omega t}$$

gdje je $I_m e^{j\alpha_i} = \underline{I}_m$ mirni vektor (maksimalne vrijednosti) struje.



$\varphi = \alpha_u - \alpha_i$
fazni pomak

- Amplitudni i fazni odnos veličina (određen mirnim vektorima) ne mijenja se pri rotaciji vektora (iste kružne frekvencije), pa se računanja u kompleksnom području mogu obavljati samo s mirnim vektorima, a dio koji određuje rotaciju ($e^{j\omega t}$) dodaje se mirnom vektoru rezultata prije njegova prebacivanja u vremensko područje.

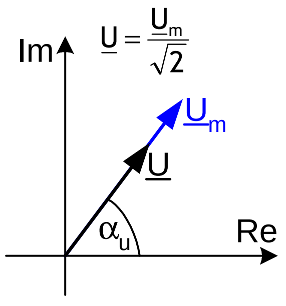
Efektivna vrijednost sinusoidne struje (i napona)

- Efektivna vrijednost vremenski promjenjive struje $i(t)$ jednaka je vrijednosti stalne, istosmjerne struje I koja bi na istom otporu R, u jednakom vremenu, stvorila jednaku količinu topline. Isto vrijedi za napon
- Efektivna vrijednost struje, ili napona, označava se velikim slovom bez indeksa, ili s indeksom "$_{ef}$", tj., $I=I_{ef}$ ($U=U_{ef}$)
- Efektivna vrijednost sinusoidne struje (ili napona) je $\sqrt{2}$ puta manja od maksimalne (vršne) vrijednosti, tj.,

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Mirni vektori efektivne vrijednosti el. veličina

- U krugovima izmjenične struje u pravilu rabimo efektivne vrijednosti struja i napona, koje u kompleksnom području predstavljamo mirnim *vektorima efektivne vrijednosti*
- ***Vektor efektivne vrijednosti*** jest mirni vektor, koji ima isti kut (početni položaj u času t=0) kao mirni vektor maksimalne vrijednosti, a od njega je manji $\sqrt{2}$ puta.



- Vektore efektivne vrijednosti označavamo velikim slovom struje ili napona, npr. $\underline{U}=Ue^{j\alpha_u}=U\angle\alpha_u$ ili $\underline{I}=Ie^{j\alpha_i}=I\angle\alpha_i$.
- Smjer mirnih vektora u kompleksnoj ravnini ne određuje njihov prostorni smjer, nego kut (fazni pomak), pa se vektore struje i napona stoga još naziva i ***fazori***. Da bi ih razlikovali od ostalih kompleksnih brojeva, označava ih se i s *točkom iznad slova*.

Primjeri

1. Odredite kompleksne izraze za: a) rotirajući vektor; b) mirni vektor maksimalne vrijednosti; i c) mirni vektor efektivne vrijednosti napona zadanog kao: u(t)=311cos(314t) V
2. Izrazite fazor struje zadane kao i(t)=14,14sin(314t +30°) A u: a) eksponencijalnom; b) polarnom; i c) pravokutnom (algebarskom) obliku kompleksnog broja.
3. Kolika je veličina ove struje u trenutku t=0?
4. Koliki je fazni pomak između struje i napona iz gornjih primjera? Koja od ovih veličina prethodi, a koja zaostaje u fazi?

- Što bi dobili dijeljenjem fazora napona s fazorom struje iz gornjih primjera?

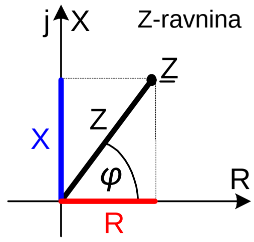
Rješenja primjera

1. a) $\underline{u} = 311\ e^{j(314t+\pi/2)}$ V;
   b) $\underline{U}_m = 311\ e^{j\pi/2}$ V;
   c) $\underline{U} = 220\ e^{j\pi/2}$ V.
2. Izrazite fazor struje zadane kao $i(t)$=14,14sin(314t +30°) A u:
   a) $\underline{I} = 10\ e^{j\,30°}$ A;
   b) $\underline{I} = 10\ e\ \underline{|30°}$ A;
   c) $\underline{I} = 8{,}66 + j\ 5$ A .
3. $i(t=0)$=14,14sin(30°) A = 7,07 A .
4. 60°; napon prethodi u fazi.

- Dobili bi kompleksni broj.

Pojam i značajke impedancije

- Omjer kompleksnih izraza napona i struje nekog elementa daje kompleksni broj koji predstavlja značajku toga elementa koju nazivamo ***impedancija*** i označavamo sa $\underline{Z}$



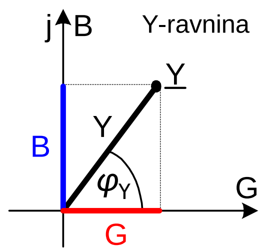
$$\underline{Z}=\frac{\underline{u}}{\underline{i}}=\frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}=\frac{U\angle\alpha_u}{I\angle\alpha_i}=\frac{U}{I}\angle(\alpha_u-\alpha_i)=Z\angle\varphi$$

- $Z=U/I$ jest *iznos impedancije*, ili *prividni otpor* ([Z]=Ω), a
  $\varphi=\alpha_u-\alpha_i$ je *kut impedancije* koji pokazuje *fazni pomak napona prema struji*.
- Impedancija se prikazuje u posebnoj kompleksnoj (Z) ravnini s imaginarnim dijelom X i realnim dijelom impedancije R

$$\underline{Z}=Z\angle\varphi=Z\cos\varphi+jZ\sin\varphi=R+jX$$

Pojam i značajke admitancije

- Recipročna vrijednost impedancije, ili omjer kompleksnih izraza struje i napona nekog elementa daje kompleksni broj koji predstavlja značajku toga elementa što ju nazivamo ***admitancija*** i označavamo s $\underline{Y}$



$$\underline{Y}=\frac{\underline{i}}{\underline{u}}=\frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m}=\frac{\underline{I}}{\underline{U}}=\frac{I\angle\alpha_i}{U\angle\alpha_u}=\frac{I}{U}\angle(\alpha_i-\alpha_u)=Y\angle\varphi_Y$$

- $Y=I/U=1/Z$ je *iznos admitancije*, ili *prividna vodljivost* ([Y]=S)
  $\varphi_Y=\alpha_i-\alpha_u=-\varphi$ je *kut admitancije* koji pokazuje *fazni pomak struje prema naponu*.
- Admitancija se prikazuje u posebnoj kompleksnoj (Y) ravnini s imaginarnim dijelom B i realnim dijelom admitancije G

$$\underline{Y}=Y\angle\varphi_Y=Y\cos\varphi_Y+j\,Y\sin\varphi_Y=G+jB$$

Primjer: Impedancije osnovnih elemenata

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- **Otpor R:** $i(t)=I_m\sin(\omega t)$ $u(t)=R\cdot i(t)= R\cdot I_m\sin(\omega t)=U_m\sin(\omega t)$

  Fazori: $\underline{I} = I\angle 0$; $\underline{U} = U\angle 0 = R\cdot I\angle 0$;

  Impedancija: $\underline{Z}_R = \frac{U\angle 0}{I\angle 0} = \frac{R\cdot I}{I}\angle 0 = R\angle 0 = \mathbf{R}$

- **Induktivitet L:**

  $i(t) = I_m\sin(\omega t)$ $u(t) = L\frac{di(t)}{dt} = \omega L I_m\cos(\omega t) = \omega L I_m\sin(\omega t + 90°)$

  Fazori: $\underline{I} = I\angle 0$; $\underline{U} = U\angle 90° = \omega L\cdot I\angle 90°$;

  Impedancija: $\underline{Z}_L = \frac{U\angle 90°}{I\angle 0} = \frac{\omega L\cdot I}{I}\angle 90° = \omega L\angle 90° = j\boldsymbol{\omega L} = jX_L$

- **Kapacitet C:**

  $u(t) = U_m\sin(\omega t)$ $i(t) = C\frac{du(t)}{dt} = \omega C U_m\cos(\omega t) = \omega C U_m\sin(\omega t + 90°)$

  Fazori: $\underline{U} = U\angle 0$; $\underline{I} = I\angle 90° = \omega C\cdot U\angle 90°$;

  Impedancija: $\underline{Z}_C = \frac{U\angle 0}{I\angle 90°} = \frac{U}{\omega C\cdot U}\angle -90° = \frac{1}{\omega C}\angle -90° = -j\frac{1}{\boldsymbol{\omega C}} = -jX_C$

Kirchhoffovi zakoni u kompleksnom području

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- Pri rješavanju krugova izmjenične struje u kompleksnom području, *Kirchhoffovi zakoni vrijede za fazore* struja i napona, kako slijedi:
- **Kirchhofov zakon za struje:** $\sum_{alg}\underline{I} = 0$ ili $\sum\underline{I}_{ul} = \sum\underline{I}_{iz}$

  Algebarski zbroj fazora struja svih grana spojenih u neki čvor jednak je nuli (algebarski znači da se fazorima ulaznih struja daje jedan predznak (+), a fazorima izlaznih struja drugi (−).
  Ili: *U čvoru je jednak zbroj fazora ulaznih i izlaznih struja.*
- **Kirchhofov zakon za napone:** $\sum_{alg}\underline{U} = 0$ ili $\sum\underline{U}_{akt} = \sum\underline{U}_{pas}$

  Algebarski zbroj fazora svih napona u nekoj petlji el. kruga jednak je nuli (fazori napona koji u smjeru obilaska petlje rastu imaju predznak +, a fazori napona koji padaju imaju −.
  Ili: *U petlji je jednak zbroj fazora aktivnih i pasivnih napona.*

Primjer: Kirchhoffovi zakoni u kompleksnom području

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Kirchhofov zakon za napone (KZN)

petlje 1, 2 i 3 :

1 $\underline{U}_1 - \underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_5(-j/\omega C_1) + \underline{I}_4(j\omega L_1) = 0$

2 $\underline{U}_2 - \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_6(-j/\omega C_2) - \underline{I}_5(-j/\omega C_1) = 0$

3 $\underline{U}_3 - \underline{I}_4(j\omega L_1) - \underline{I}_6(-j/\omega C_2) - \underline{I}_3(j\omega L_2) = 0$

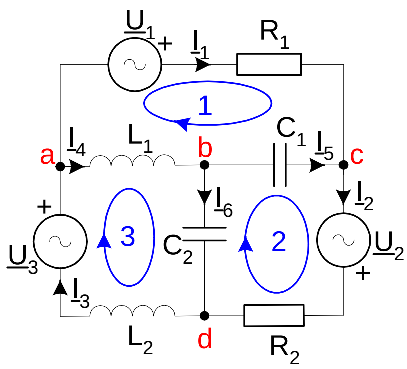
Kirchhofov zakon za struje (KZS)

čvorovi a, b i c :

a $\underline{I}_3 - \underline{I}_1 - \underline{I}_4 = 0$

b $\underline{I}_4 - \underline{I}_5 - \underline{I}_6 = 0$

c $\underline{I}_1 + \underline{I}_5 - \underline{I}_2 = 0$



- Kako bi dopunili jednadžbe KZN za petlje 1 i 3 da su induktiviteti L_1 i L_2 povezani međuinduktivitetom M (s točkicama na lijevim stranama oba induktiviteta?

Postupak rješavanja krugova izmjenične struje u kompleksnom području

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

1. *Preslikavanje* prikaza zadanih struja i napona *iz vremenskog u kompleksno područje*, na slijedeći način:
   A. Zadane struje i naponi izraze se kao sinusne funkcije te se odrede njihove efektivne vrijednosti (maksimalne vrijednosti se podijele s $\sqrt{2}$)
   B. Izraze se fazori pojedinih zadanih veličina, tako da je iznos fazora jednak efektivnoj vrijednosti, a kut fazora početnom kutu veličine.
2. Izražavanje impedancija pojedinih pasivnih elemenata kruga
3. Postavljanje jednadžbi i računanje nepoznatih struja i napona u kompleksnom području.
4. *Preslikavanje* kompleksnih prikaza izračunatih struja i napona *u vremensko područje*, na slijedeći način:
   A. Množenjem fazora s faktorom $\sqrt{2}$, pa zatim s $e^{j\omega t}$ odrede se rotirajući vektori izračunatih struja i napona.
   B. Izraze se *vremenske funkcije* traženih veličina, kao *imaginarni dijelovi* njihovih izračunatih *rotirajućih vektora*.