Harmonički složeni valni oblici

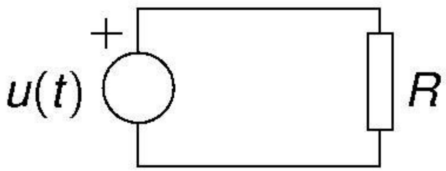
Uvod

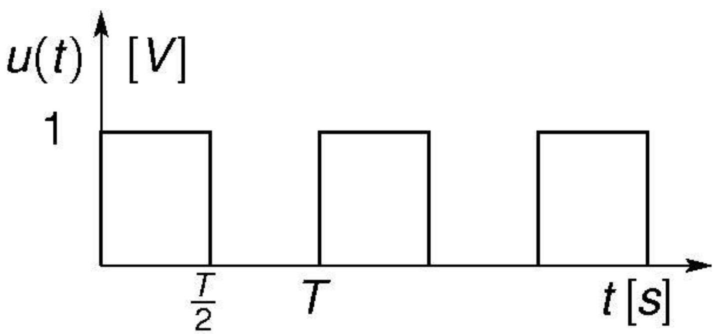
- svaka periodička funkcija može se prikazati redom sinusoidalnih veličina s različitim frekvencijama
- ako periodička funkcija predstavlja napon odnosno struju, na taj način dobivamo *spektar* struje odnosno napona
- matematički postupak kojim periodičku funkciju prikazujemo redom sunusoidalnih veličina naziva se *Fourierova analiza* ili *Fourierova transformacija*

- *Fourierovu analizu* danas primjenjujemo isključivo uz pomoć računala
- u praktičnom smislu na taj način dobijemo uvid koje frekvencije i amplitude sačinjavaju napon odnosno struju . . .
- . . . a također mreže sa nesinusoidnim izvorima mogu se rješiti primjenom kompleksnog računa

Uvodni primjer

Neka je zadan $u(t)$ prema slici. Potrebno je odrediti efektivnu vrijednost i spektar napona $u(t)$ te snagu na otporu $R = 600\Omega$.





a) bez Fourierove analize–koristeći ranije navedeno

b) primjenom Fourierovih redova u analizi periodički promijenjivih funkcija

Uvodni primjer–(a)

- od ranije je poznato ($T_i = \frac{T}{2}$):

$$U_{eff} = U_{max}\sqrt{\frac{T_i}{T}} = 0.707V$$

$$P = \frac{U_{eff}^2}{R} = 0.833mW$$

prije nego nastavimo sa Uvodnim primjerom, nekoliko uvodnih činjenica o *Fourierovom redu* ...

Fourierov red

- svaki se periodički valni oblik y(t) može rastaviti na harmoničke komponente (harmonike) u obliku Fourierovog reda:

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

gdje je:

- n–cijeli broj koji označava harmonike ($n = 1, 2, 3, \ldots$)
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ kružna frekvencija osnovnog ($n = 1$) harmonika periode T
- $\frac{A_0}{2}$ istosmjerna komponenta – srednja vrijednost $y(t)$
- A_n i B_n Amplitude ili maksimalne vrijednosti(napona ili struje) ili Fourierovi koeficijenti

Efektivne vrijednosti

- A_n i B_n postaju maksimumi struje odnosno napona
- effektivna U_{eff} vrijednost napona u(t) za prvih k komponenti je:

$$U_{eff} = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{1_{max}}^2}{2} + \frac{U_{2_{max}}^2}{2} + \frac{U_{3_{max}}^2}{2} + \ldots + \frac{U_{k_{max}}^2}{2}}$$

$$U_{eff} = \sqrt{U_0^2 + U_{1_{eff}}^2 + U_{2_{eff}}^2 + U_{3_{eff}}^2 + \ldots + U_{k_{eff}}^2}$$

- effektivna I_{eff} vrijednost struje i(t) za prvih k komponenti je:

$$I_{eff} = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{1_{max}}^2}{2} + \frac{I_{2_{max}}^2}{2} + \frac{I_{3_{max}}^2}{2} + \ldots + \frac{I_{k_{max}}^2}{2}}$$

$$I_{eff} = \sqrt{I_0^2 + I_{1_{eff}}^2 + I_{2_{eff}}^2 + I_{3_{eff}}^2 + \ldots + I_{k_{eff}}^2}$$

ako se primjeni na Uvodni primjer ...

Uvodni primjer–primjenom Fourijerove analize

- ...pravokutni napon $u(t)$ prikazujemo u obliku beskonačnog reda kao:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\omega t + \frac{2}{3\pi}\sin 3\omega t + \frac{2}{5\pi}\sin 5\omega t + \frac{2}{7\pi}\sin 7\omega t \dots$$
$$u(t) = 0.5 + 0.637\sin\omega t + 0.212\sin 3\omega t + 0.127\sin 5\omega t + 0.091\sin 7\omega t \dots$$

gdje su:

$n = 1, 2, 3, \dots$
$\omega = \frac{2\pi}{T}$ kružna frekvencija osnovnog ($n = 1$) harmonika periode T
$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2}$ istosmjerna komponenta – srednja vrijednost napona u(t)
Fourierovi koeficijenti:

$$A_n = 0$$
$$B_n = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \qquad n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

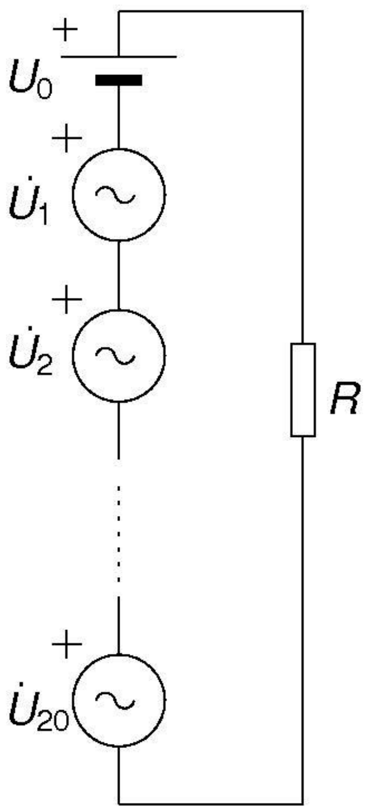
- Efektivna vrijednost napona za prvih $k = 20$ harmonika je:

$$U_{eff} = \sqrt{0.5^2 + \frac{1}{2}(0.637^2 + 0.212^2 + 0.127^2 + \ldots)} = 0.703518V$$

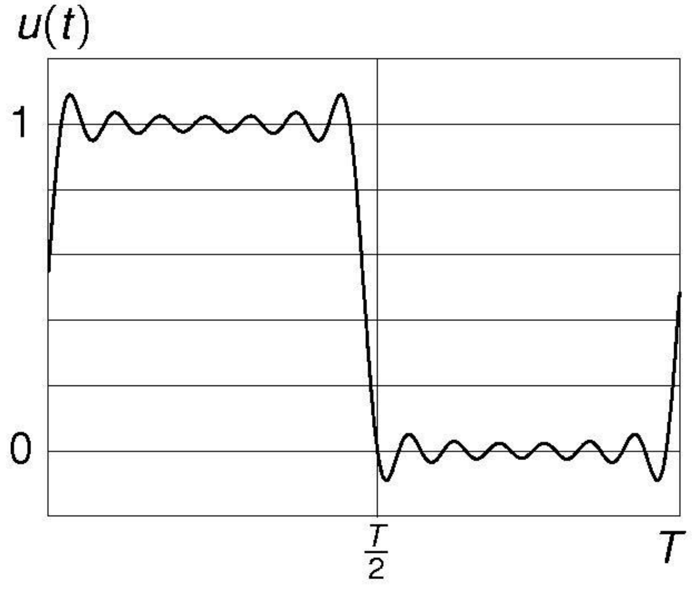
- Snaga je:

$$P = \frac{U_{eff}^2}{R} = 0.825mW$$

- Rasprava: usporedba rezultata, kako broj harmonika k utječe na točnost ?

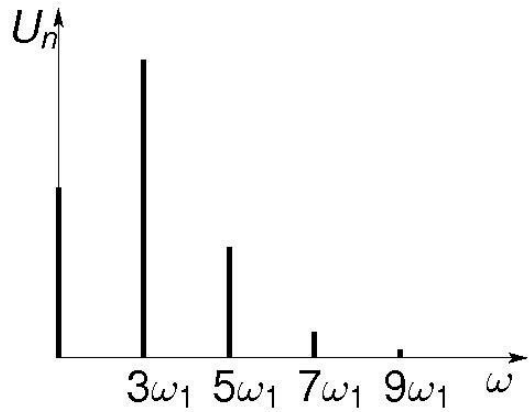


- $u(t)$ predstavljen kao suma istosmjernog i sinusoidnih izvora
- "originalni" pravokutni impuls nadomješten sa prvih 20 harmonika:



Spektar

- spektar prikazuje doprinose pojedinih frekvencija zadanog valnog oblika u(t)



detaljnije simulacije mogu se vidjeti na:

`http://osnove.tel.fer.hr/simupokusi/fourier/nesinusni.htm`

`http://osnove.tel.fer.hr/simupokusi/fourier/primjer-RC.htm`

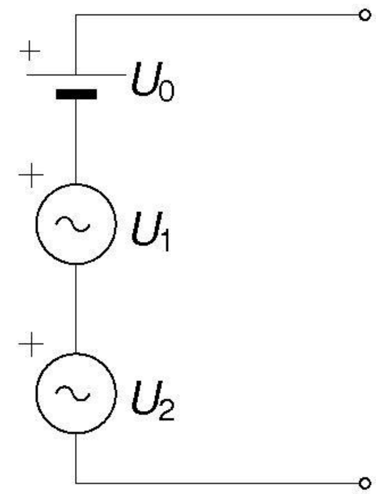
Primjer 1

Nesinusoidalni napon efektivne vrijednosti $U = 200\,V$ može se prikazati u obliku $u(t) = U_0 + U_{m1} \sin \omega t - U_{m3} \sin 3\omega t$. Ako je $U_{m1} = 0.8 U_0$, $U_{m3} = 0.5 U_0$ izračunajte U_0 !

Rješenje:

u(t) može se prikazati kao serijski spoj tri izvora:

- U_0 za istosmjernu komponentu
- U_1 za kružnu frekvenciju ω
- U_3 za kružnu frekvenciju 3ω



Primjer1 - nastavak

- Efektivnu vrijednost nesinusoidnog napona $u(t)$ računamo kao:

$$U_{eff} = 200 = \sqrt{U_0^2 + U_{1eff}^2 + U_{3eff}^2}$$

- Rješavanjem po U_0 dobija se:

$$U_0 = 166.38\,V$$

Primjer 2

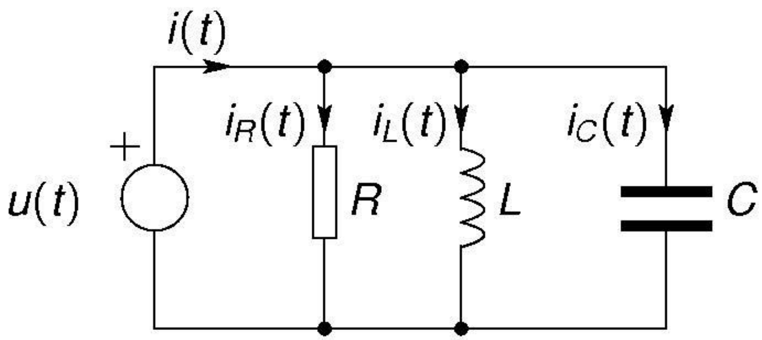
Za mrežu prema slici odrediti:

a) efektivnu vrijednost napona izvora $u(t)$

b) efektivne vrijednosti struja $i_R(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$

c) $i_R(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$ u vremenskoj domeni

Zadano: $\omega = 1000\frac{1}{s}$, $R = 100\Omega$, $L = 0.1H$, $C = 10\mu F$ i
$u(t) = 100\sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) + 30\sin(3\omega t) + 10\sin(5\omega t - \frac{3\pi}{4})$



Primjer 2 – nastavak

Rješenje:

a)

$$U_{eff} = \sqrt{U_{1eff}^2 + U_{3eff}^2 + U_{5eff}^2}$$

$$U_{eff} = \sqrt{\left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$U_{eff} = 74.162\,V$$

Primjer 2 – nastavak

b) za $i_R(t)$ vrijedi:

$$I_{Reff} = \sqrt{I_{R1eff}^2 + I_{R3eff}^2 + I_{R5eff}^2}$$

$$I_{Reff} = \sqrt{\left(\frac{100}{100 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30}{100 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{100 \cdot \sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I_{Reff} = 0.741 A$$

Primjer 2 – nastavak

- za prividni otpor X_L vrijedi $X_L = n \cdot \omega L$ gdje je n broj harmonika
- za $n = 1$ (osnovni harmonik) $\omega L = 100\Omega$
- $i_L(t)$ je:

$$I_{Leff} = \sqrt{I_{L1eff}^2 + I_{L3eff}^2 + I_{L5eff}^2}$$

$$I_{Leff} = \sqrt{\left(\frac{100}{100 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30}{100 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{100 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I_{Leff} = 0.711A$$

Primjer 2 – nastavak

- za prividni otpor X_C vrijedi $X_C = \frac{1}{n \cdot \omega C}$ gdje je n broj harmonika
- za $n = 1$ (osnovni harmonik) $\frac{1}{\omega C} = 100\Omega$
- $i_L(t)$ je:

$$I_{Ceff} = \sqrt{I_{C1eff}^2 + I_{C3eff}^2 + I_{C5eff}^2}$$

$$I_{Ceff} = \sqrt{\left(\frac{100}{100 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30}{100 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I_{Ceff} = 1.015A$$

Primjer 2 – nastavak

- $i_R(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$:

$$i_R(t) = 1 \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) + 0.30 \cdot \sin(3\omega t) + 0.10 \cdot \sin(5\omega t - \frac{3\pi}{4})$$

$$i_L(t) = 1 \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{3}) + 0.10 \cdot \sin(3\omega t - \frac{\pi}{2}) + 0.02 \cdot \sin(5\omega t + \frac{3\pi}{4})$$

$$i_C(t) = 1 \cdot \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) + 0.90 \cdot \sin(3\omega t + \frac{\pi}{2}) + 0.50 \cdot \sin(5\omega t - \frac{\pi}{4})$$

- Za vježbu: nacrtati spektre izračunatih struja i napona !
- nacrtati vektorske dijagrama za svaku od frekvencija !
- Rasprava: ovisnost $i_R(t)$, $i_L(t)$ i $i_C(t)$ o frekvenciji
- Rasprava: postoji li rezonancija ?