by: Tywin 

Tutorial za rad sa kompleksnim bojevima.

Kompleksni nam brojevi u predmetu osnove elektrotehnike (ali i drugim predmetima!) služe kako bi što lakše mogli opisati ponašanje strujnog kruga izmjenične struje.

Iako se vrijednosti zadaju u vremenskom obliku, npr.:

$$u(\mathrm{t}) = \mathrm{U_m}\cos(2\pi f\cdot \mathrm{t} + \varphi) = \mathrm{U_m}\cos(\omega\cdot\mathrm{t}+\varphi)\ \mathrm{V}$$

I pri tome znamo da taj napon ima maksimalnu vrijednost (amplitudu) $\mathrm{U_m}$, vremenski pomaknut spram neke nazivne veličine (najčešće napona izvora) za φ te da je frekvencija cijelog kruga *f*. Ukoliko znamo iznos amplitude možemo i naći i efektivni iznos koji se koristi pri računanju. On iznosi:

$$\mathrm{U} = \mathrm{U_{ef}} = \frac{\mathrm{U_m}}{\sqrt{2}}$$

Sada možemo taj napon zapisati u kompleksnom obliku:

$$\dot{\mathrm{U}} = \mathrm{U}\, e^{-j\varphi}$$

No, da bi mogli uspješno koristi kompleksne brojeve prvo ćemo proučiti njih. Općenito se neki kompleksni broj zadaje kao:

$$\dot{\mathrm{z}} = \mathrm{x} + j\mathrm{y}$$

I taj oblik nazivamo *opći oblik kompleksnog broja*. On se sastoji od realnog i imaginarnog djela i to na način da vrijedi:

$$Re(\dot{\mathrm{z}}) = \mathrm{x}$$

$$Im(\dot{\mathrm{z}}) = \mathrm{y}$$

No, osim ovoga za kompleksni broj možemo reći da ima *iznos* i *kut* (odnosno *smjer*). Iznos kompleksnog broja **z** je:

$$|\dot{\mathrm{z}}| = \mathrm{z} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}$$

A kut kompleksnog broja **z** je:

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$$

No, pri računanju kuta moramo biti pažljivi jer se kompleksni broj može nalaziti u bilo kojem od četiri kvadranta koordinatnog sustava (realna os – x, os apscisa; imaginarna os – y, os ordinata). Tako da se kut, ovisno o kvadrantu računa na slijedeći način:

I. kvadrant → **x > 0** ; **y > 0** → $\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

II. kvadrant → **x < 0** ; **y > 0** → $\varphi = 180° - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

III. kvadrant → **x < 0** ; **y < 0** → $\varphi = 180° + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

IV. kvadrant → **x > 0** ; **y < 0** → $\varphi = 360° - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

Tako smo dobili jedinstveno određen iznos i kut kompleksnog broja. Sa tim vrijednostima kompleksni broj možemo zapisati u tri oblika:

1. polarni: $\dot{z} = z\,\underline{|\varphi}$
2. eksponencijalni: $\dot{z} = z\,e^{-j\varphi}$
3. trigonometrijski: $\dot{z} = z\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

Jedino što je ostalo je pretvaranje jednog od ova tri oblika u opći oblik. Taj se prijelaz vrši preko trigonometrijskog oblika i to na način:

$$\dot{z} = z \cdot \cos\varphi + z \cdot j\sin\varphi$$

Gdje je:

$$Re(\dot{z}) = z \cdot \cos\varphi = x$$

$$Im(\dot{z}) = z \cdot \sin\varphi = y$$

Sada znamo kompleksni broj zapisati na četiri načina i pretvarati iz jednog oblika u drugi. To nam je bitno jer ćemo sa kompleksnim brojevima vršiti operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja te dijeljenja, a najčešće koristimo samo opći i polarni oblik. Zbrajanje i oduzimanje može se vršiti jedino u općem obliku, dok se množenje i dijeljenje može u oba oblika iako je polarni pogodniji.

Istaknimo još jedno svojstvo kompleksnog broja **z**, a to je konjugirano kompleksni broj **z***.

$$\dot{z} = x + jy = z\,\underline{|\varphi}$$

$$\dot{z}^* = x - jy = z\,\underline{|-\varphi}$$

Primjeri rada s kompleksnim bojevima, neka su zadana dva kompleksna broja:

$$\dot{z}_1 = -5 + j2$$

$$\dot{z}_2 = 4 - j7$$

Prikaz u polarnom obliku je:

$$\dot{z}_1 = \sqrt{5^2 + 2^2}\ \lfloor 180° - \tan^{-1}\left|\frac{2}{-5}\right| = 5{,}385\ \lfloor 158{,}2°$$

$$\dot{z}_2 = \sqrt{4^2 + 7^2}\ \lfloor 360° - \tan^{-1}\left|\frac{-7}{4}\right| = 8{,}06\ \lfloor 299{,}74°$$

Neke operacije:

$$\dot{z}_1 + \dot{z}_2 = -5 + j2 + 4 - j7 = -1 - j5 = 5{,}1\ \lfloor 258{,}7°$$

$$\dot{z}_1 - \dot{z}_2 = -5 + j2 - (4 - j7) = -9 + j9 = 12{,}73\ \lfloor 135° = 9\sqrt{2}\ \lfloor 135°$$

$$\dot{z}_1 \cdot \dot{z}_2 = 5{,}385 \cdot 8{,}06\ \lfloor (158{,}2° + 299{,}74°) = 43{,}4\ \lfloor 457{,}94° = 43{,}4\ \lfloor 97{,}94° = -6 + j43$$

$$\dot{z}_1 \cdot \dot{z}_2 = (-5 + j2) \cdot (4 - j7) = -20 + j35 + j8 - j^2 14 = -20 + j35 + j8 + 14 = -6 + j43$$

$$\frac{\dot{z}_1}{\dot{z}_2} = \frac{5{,}385}{8{,}06}\ \lfloor (158{,}2° - 299{,}74°) = 0{,}668\ \lfloor -141{,}54° = 0{,}668\ \lfloor 218{,}46° = -0{,}523 - j0{,}415$$

$$\frac{\dot{z}_1}{\dot{z}_2} = \frac{-5 + j2}{4 - j7} = \frac{-5 + j2}{4 - j7} \cdot \frac{4 + j7}{4 + j7} = \frac{-20 - 14 - j35 + j8}{4^2 + 7^2} = \frac{-34 - j27}{65} = -0{,}523 - j0{,}415$$

$$\dot{z}_1^{\,*} = -5 - j2 = 5{,}385\ \lfloor -158{,}2° = 5{,}385\ \lfloor 201{,}8°$$

$$\dot{z}_2^{\,*} = 4 + j7 = 8{,}06\ \lfloor -299{,}74° = 8{,}06\ \lfloor 60{,}26°$$

$$\dot{z} = 1\ \lfloor -90° = -j$$

Čemu nam služe kompleksni brojevi??

Kompleksni nam brojevi služe kako bi mogli matematički opisati krugove izmjenične struje sinusnog oblika. Jedini podatak iz gore danog napona koji nismo iskoristili je frekvencija, dok sve ostale podatke možemo i znamo iskoristiti.

Frekvencija koja je dana u vremenskom obliku neke vrijednosti u mreži je zapravo frekvencija *f* cijele mreže. Ona nam koristi kako bi izračunali imaginarne impedancije (ekvivalent otpora u krugovima istosmjerne struje) u strujnom krugu. Imaginarne impedancije su na zavojnicama i kapacitetima, iako oni zapravo ne postoje njihov utjecaj na cijelu mrežu opisujemo ovim svojstvom. Tako uz zadane induktivitete zavojnica L i kapaciteti kondenzatora C impedancije iznose:

$$x_L = 2\pi f \cdot L = \omega \cdot L$$

$$x_C = \frac{1}{2\pi f \cdot C} = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

A njihov je zapis u kompleksnom obliku:

$$\dot{x}_L = jx_L$$

$$\dot{x}_C = -jx_C$$

Dok je impedancija na otporniku realna vrijednost.

Iako svi zakoni koje smo naučili u krugovima istosmjerne struje i dalje vrijede (Ohmov zakon, I. i II. Kirchhoff zakon) svaki matematički račun je u kompleksnom obliku. Pa tako na primjer ukupni otpor serijskog kruga znamo da je jednak sumi svih otpora, no što ako imamo serijski spoj otpornika, zavojnice i kondenzatora? Tada je njihova ukupna impedancija jednaka (impedancija se označava slovom „Z"):

$$\dot{Z}_{uk} = R + jx_L - jx_C$$

A za paralelni spoj znamo da je recipročna vrijednost ukupnog otpora jednaka recipročnoj vrijednosti pojedinih otpora. Odnosno kod paralelnog spoja otpornika, zavojnice i kondenzatora ukupna impedancija iznosi:

$$\frac{1}{\dot{Z}_{uk}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jx_L} + \frac{1}{-jx_C}$$

Što to zapravo znači te čemu sve ti kompleksni brojevi?

Zbog takvih struktura zavojnica i kondenzatora u strujnom se krugu prividno stvara neki otpor, koji zapravo ne postoji. Oni se stvaraju zbog izmjeničnog toka struje a u načelu „rade“ tako da stvaraju vremensko kašnjenje između struje i napona koji vlada na njima.

Impedancija na kapacitetima se stvara zato što struja može normalno proći kroz kondenzator, dok će napon na kondenzatoru kasniti za 90˚ s obzirom na struju koja teče kroz njega. Odnosno, kažemo da **napon na kondenzatoru kasni za strujom**.

Impedancija na induktivitetima se stvara zato što će pad napona na zavojnici vladati odmah dok će struja zakasniti za tim naponom za 90˚. Odnosno, kažemo da **napon na zavojnici prethodi struji**.

Zbog tih vremenskih pomaka stvara se i imaginarni otpor, no iako je on imaginaran njemu se trebat dovest neka snaga. Kako ti elementi ne mogu iskoristit tu snagu (kao otpor sa npr. pretvaranjem u toplinu) ta će se snaga vratiti izvoru i tako nepotrebno opterećivati vodove. Zbog toga snagu na ovim elementima (često zvanim: reaktivni) nazivamo jalova snaga i označavamo sa Q. Pri tome uzimamo da je snaga na zavojnici pozitivnog predznaka a na kapacitetu negativnog.

Snaga na otporima je radna snaga, iskoristiva je i označavamo ju sa P.

Ukupna snaga koja je u strujnom krugu nazivamo prividna snaga i označavamo sa slovom S. Ona iznosi:

$$\mathrm{S} = \mathrm{U} \cdot \mathrm{I}$$

No, i ona je kompleksni broj pa se sastoji od realnog i imaginarnog dijela. Realni je dio realna snaga P dok je imaginarni dio jalova snaga Q. Pa vrijedi:

$$\dot{S} = \mathrm{P} + j\mathrm{Q} = \mathrm{P} + j(\mathrm{Q}_L - \mathrm{Q}_c)$$

A vrijedi i:

$$\dot{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^{*} = \mathrm{S}\,\lfloor\varphi$$