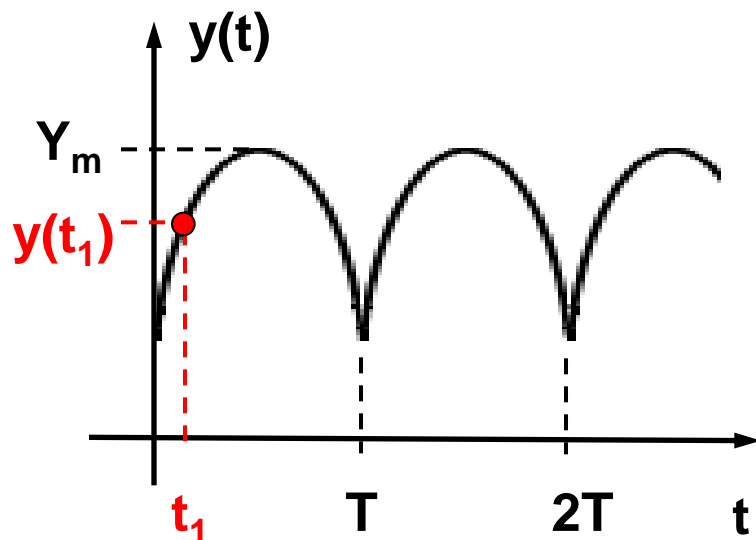


Nesinusoidalne periodičke električke veličine

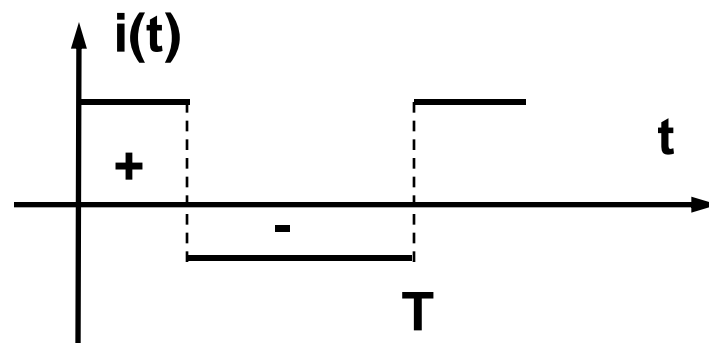
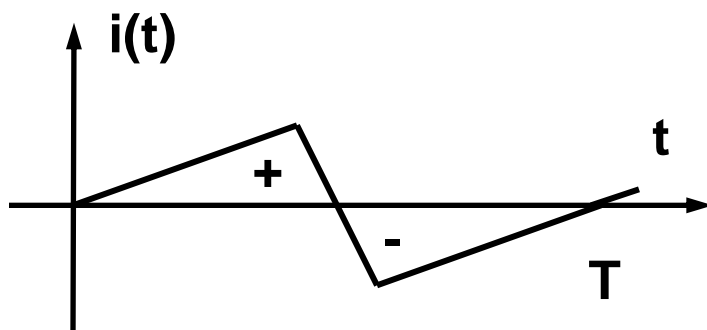
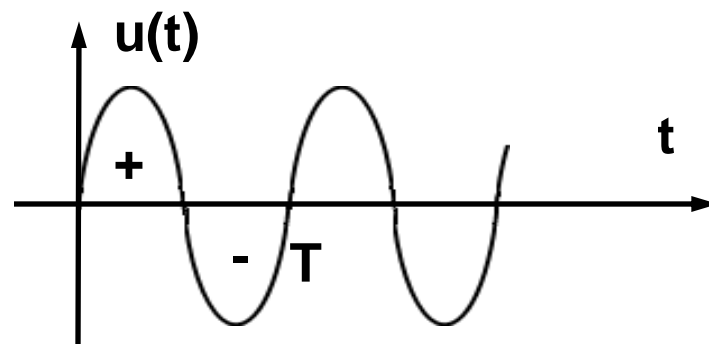
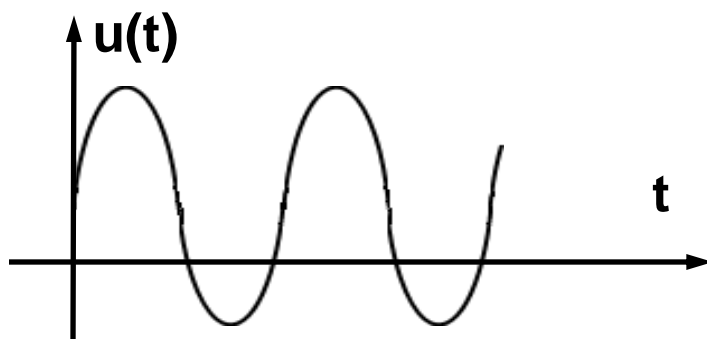
- ♦ U odnosu na nezavisnu varijablu t (vrijeme), električke veličine, naponi i struje mogu biti:
 - vremenski nepromjenjivi (konstantni) ili
 - vremenski promjenjivi.
- ♦ Razlikujemo vremenski promjenjive:
 - neperiodičke veličine (npr. struja nabijanja kondenzatora koji je preko otpora spojen na izvor konstantnog napona) i
 - periodičke veličine čije se promjene trenutnih vrijednosti tijekom vremena periodički ponavljaju.
- ♦ Vremenske ovisnosti periodičkih električkih veličina $u(t)$ ili $i(t)$ nazivamo **valni oblici**.



- ♦ $y(t_1)$ - trenutna vrijednost.
- ♦ T - perioda ponavljanja (u sekundama).
- ♦ $f=1/T$ - frekvencija (u Hz). (Broj ponavljanja periode u jednoj sekundi.)
- ♦ Y_m - maksimalna ili tjemena vrijednost. (Najveća vrijednost koju veličina postigne u zadanoj periodi).

- ♦ Matematički se periodičnost veličine (funkcije) izražava kao: $y(t) = y(t+T) = \dots = y(t+kT)$, $k \in \mathbb{N}$
gdje je $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

- Ukoliko periodički promjenjivi napon ili struja u vremenu jedne periode promijeni i svoj smjer (poprimi negativne trenutne vrijednosti) - takve veličine nazivamo **izmjenične električne veličine**. U praksi je čest slučaj da izmjenična veličina ima jednake pozitivne i negativne površine u vremenskom dijagramu (čista izmjenična vel.).



- ♦ Vremenski nepromjenjive veličine precizno se mogu opisati samo pomoću jednog parametra npr. baterija 1,5 V ili akumulator 12 V.
- ♦ Pored trenutnih vrijednost (kojih ima beskonačno mnogo), za karakteriziranje periodički promjenjivih električkih veličina (napona i struja) koriste se sljedeći parametri:
 - ♦ maksimalna ili tjemena vrijednost,
 - ♦ srednja vrijednost (istosmjerna komponenta),
 - ♦ vrijednost od vrha do dna,
 - ♦ efektivna vrijednost te
 - ♦ omjerni faktori.

- ♦ Srednja vrijednost struje/napona definira se kao:

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$$

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

i predstavlja matematičku srednju vrijednost odnosno prosječnu vrijednost periodičke veličine u intervalu vremena T.

- ♦ Količina naboja koja se u vremenu T prebaci strujom $i(t)$ jednaka je:

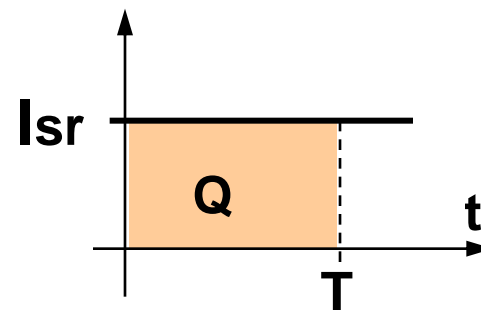
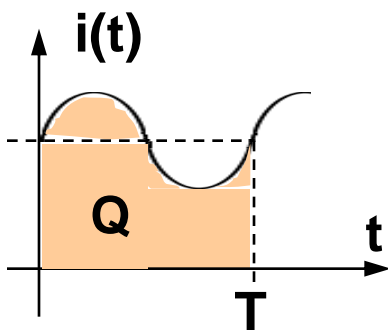
$$Q = \int_0^T i(t) dt$$

- ♦ Ista količina naboja prebacila bi se u istom vremenu T konstantnom strujom I_{sr} :

$$Q = I_{sr} \cdot T$$

- ♦ Dakle vrijedi:

$$\int_0^T i(t) dt = I_{sr} \cdot T$$



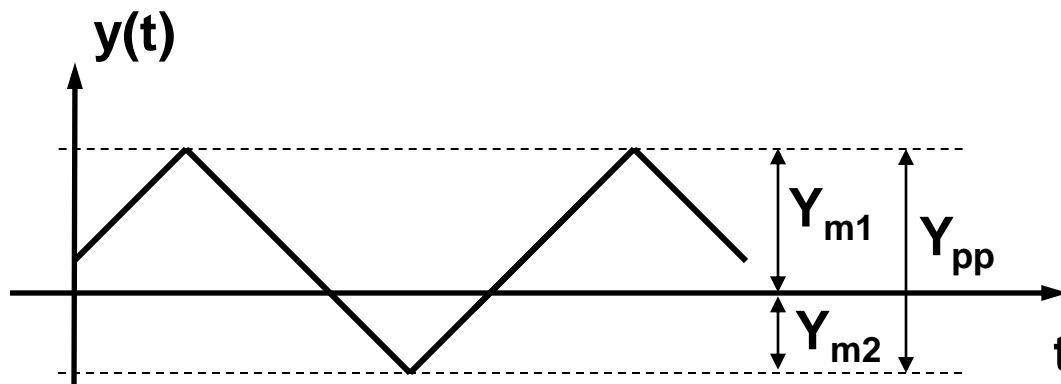
- ♦ I_{sr} predstavlja **istosmjernu komponentu** električne veličine (struje ili napona).

- ♦ Elektrolitska srednja vrijednost struje/napona definira se kao:

$$I_{el} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt$$

$$U_{el} = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$$

i predstavlja srednju vrijednost apsolutnih iznosa izmjenične veličine.



- ◆ Y_{pp} je oznaka parametra napona/struje kojeg nazivamo “**od vrha do dna**” (peak to peak). Vrijednost tog parametra jednaka je razlici max i min vrijednosti napona/struje ($Y_{pp} = Y_{m1} - Y_{m2}$) i ne mijenja s promjenom srednje vrijednosti (istosmjerne komponente) valnog oblika.
- ◆ Primjer: uz $U_{m1} = 4 \text{ V}$ i $U_{m2} = -2 \text{ V}$, $U_{pp} = U_{m1} - U_{m2} = 6 \text{ V}$.

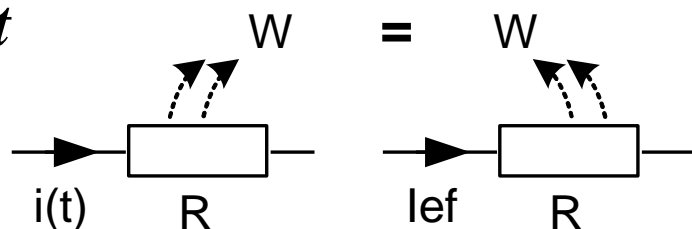
- ♦ Efektivna vrijednost struje/napona definira se kao:

$$I_{ef} = I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

$$U_{ef} = U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

- ♦ Efektivnu vrijednost periodički promjenjive struje određujemo tako da usporedimo toplinu koju razvija ta struja s toplinskim učinkom konstantne, istosmjerne struje u istom periodu vremena T .
- ♦ Toplina koju razvija vremenski promjenjiva struja $i(t)$ jednaka je:
- ♦ Jednaka količina topline koju daje istosmjerna struja I_{ef} :

$$W = \int_0^T i^2(t) \cdot R \cdot dt$$



$$W = I_{ef}^2 \cdot R \cdot T$$

Dakle vrijedi:

$$\int_0^T i^2(t) \cdot R \cdot dt = I_{ef}^2 \cdot R \cdot T \Rightarrow I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

- ♦ **Tjemeni faktor** karakterizira izobličenje struje/napona u odnosu na sinusni oblik. Definira se kao:

$$\sigma = \frac{I_m}{I_{ef}}$$

$$\sigma = \frac{U_m}{U_{ef}}$$

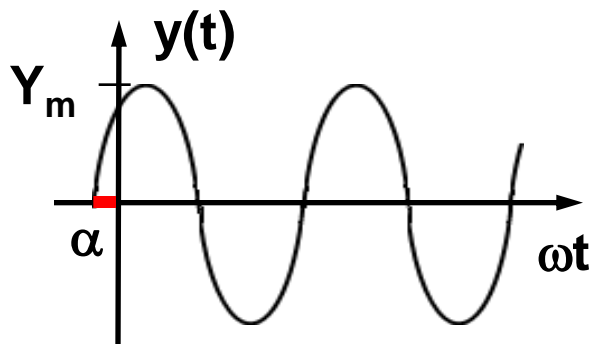
- Za sinusni valni oblik vrijedi: $\sigma = \sqrt{2}$

- ♦ **Faktor oblika** omogućava određivanje efektivnih vrijednosti kod instrumenata sa srednjim odklonom. Definira se kao:

$$\xi = \frac{I_{ef}}{I_{sr}}$$

$$\xi = \frac{U_{ef}}{U_{sr}}$$

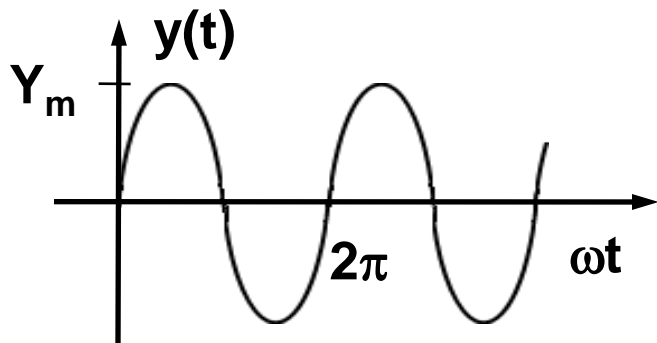
- ◆ Sljedeći valni oblici jesu osnovni (najčešće se koriste u praksi):
 - sinusni,
 - pilasti i
 - vremenski nepromjenjivi (konstanta).



♦ Sinusni valni oblik karakterizira:

- **amplituda** Y_m ,
- **kružna frekvencija** $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ (u rad/s) te
- **fazni pomak (kut)** α u odnosu na ishodište.

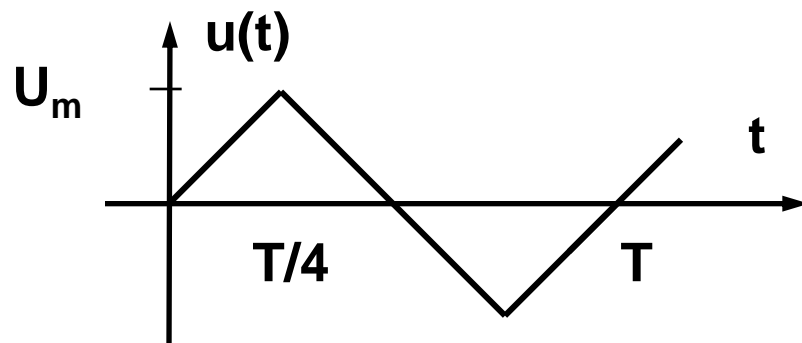
$$y(t) = Y_m \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right) = Y_m \sin(\omega t + \alpha)$$



- ♦ Ako je $\alpha = 0$, sinusoida prolazi kroz ishodište.

$$y(t) = Y_m \sin \frac{2\pi}{T}t = Y_m \sin \omega t$$

Pilasti valni oblik (izmjenična verzija)



$$u(t) = \frac{4U_{\max}}{T} t$$

$$\text{za } 0 < t < T/4$$

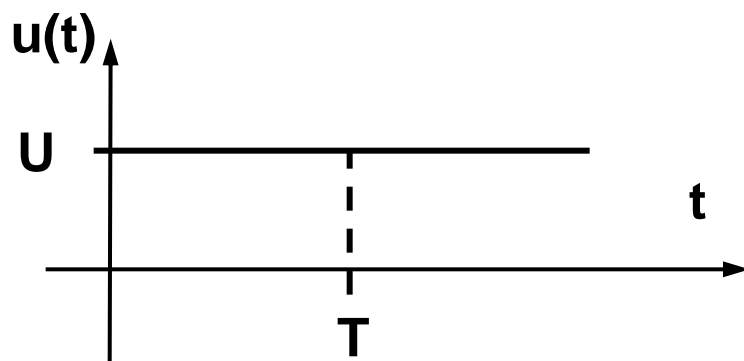
$$u(t) = -\frac{4U_m}{T} t + 2U_m$$

$$\text{za } T/4 < t < 3T/4$$

$$u(t) = \frac{4U_m}{T} t - 4U_m$$

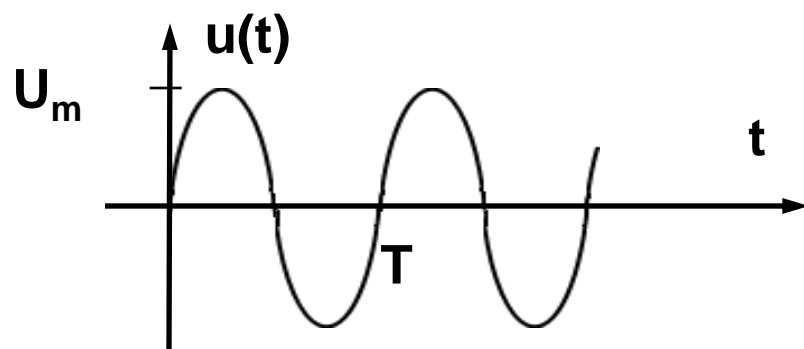
$$\text{za } 3T/4 < t < T$$

- ♦ Vremenski nepromjenjiva električna veličina (konstanta) može se promatrati kao periodički valni oblik. Vrijednost periode T može se **proizvoljno** odabrati.



$$u(t) = U$$

Primjer: parametri sinusnog valnog oblika



- ♦ Srednja vrijednost:

$$U_{sr} = 0$$

- ♦ Efektivna vrijednost:

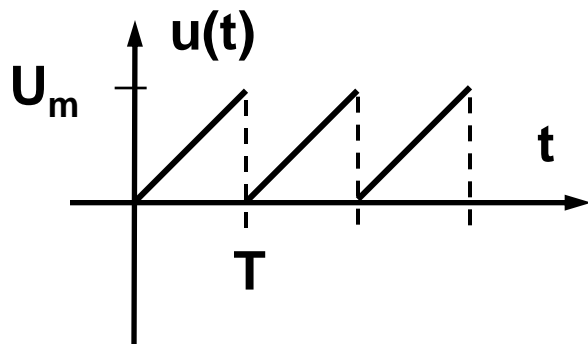
$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{U_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt =$$

$$\frac{U_m^2}{2T} \left[\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t dt \right] = \frac{U_m^2}{2T} \cdot T \Rightarrow U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

- ♦ Tjemeni faktor: $\sigma = \frac{U_m}{U} = \sqrt{2}$

Primjer: parametri pilastog valnog oblika (1)

Istosmjerna verzija



- ◆ Srednja vrijednost: $U_{sr} = \frac{U_m}{2}$
- ◆ Faktor oblika: $\xi = \frac{U}{U_{sr}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$
- ◆ Efektivna vrijednost: $U = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$
- ◆ Tjemeni faktor: $\sigma = \frac{U_m}{U} = \sqrt{3}$

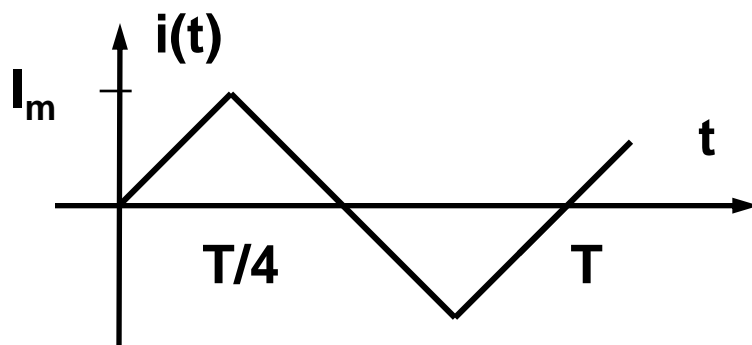
$$U^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{U_m}{T} t \right)^2 dt = \frac{U_m^2}{T^3} \int_0^T t^2 dt = \frac{U_m^2}{3T^3} T^3 = \frac{U_m^2}{3} \Rightarrow U = \frac{U_m}{\sqrt{3}}$$

Primjer: parametri pilastog valnog oblika (2)

Izmjenična verzija

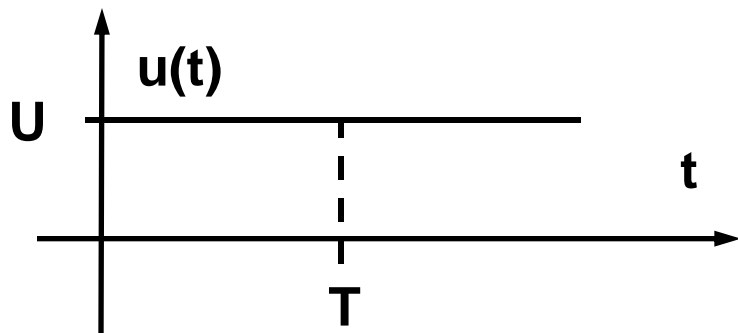
- ♦ Srednja vrijednost:

$$I_{sr} = 0$$



- ♦ Efektivna vrijednost: $I = \frac{I_m}{\sqrt{3}}$
- ♦ Tjemeni faktor: $\sigma = \frac{I_m}{I} = \sqrt{3}$

Primjer: parametri konstantnog valnog oblika



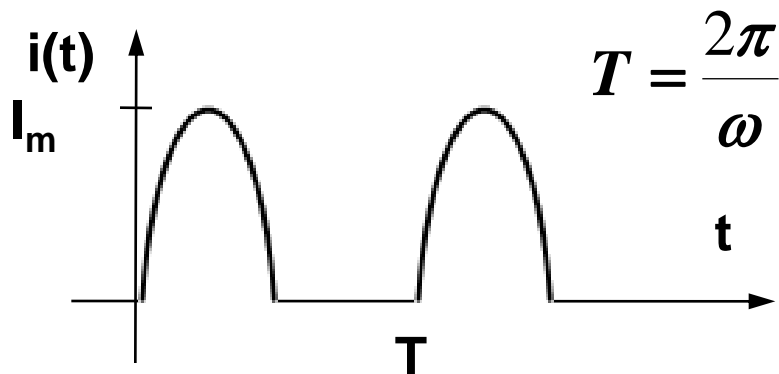
♦ Srednja vrijednost: $U_{sr} = U$

♦ Efektivna vrijednost: $U_{ef} = U$

$$U_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T U^2 dt = \frac{1}{T} U^2 \int_0^T dt = \frac{1}{T} U^2 T = U^2 \Rightarrow U_{ef} = U$$

Primjer: poluvalno/punovalno ispravljena sinusoida

◆ Poluvalno ispravljena sinusoida

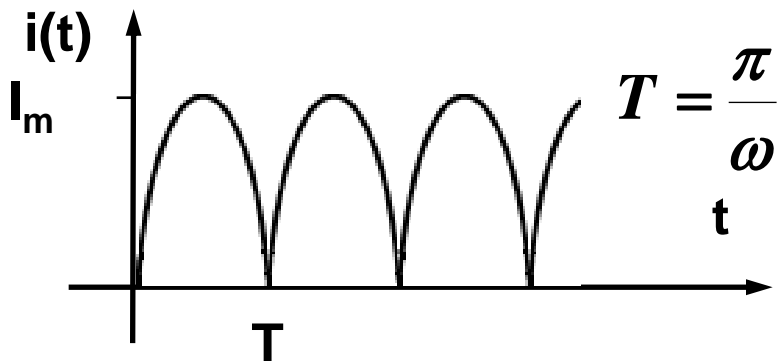


$$I_{sr} = \frac{1}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin(\omega t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T 0 dt \right) =$$

$$\frac{2I_m}{T\omega} = \frac{I_m}{\pi} = 0,318I_m$$

$$I = \frac{I_m}{2}$$

◆ Punovalno ispravljena sinusoida



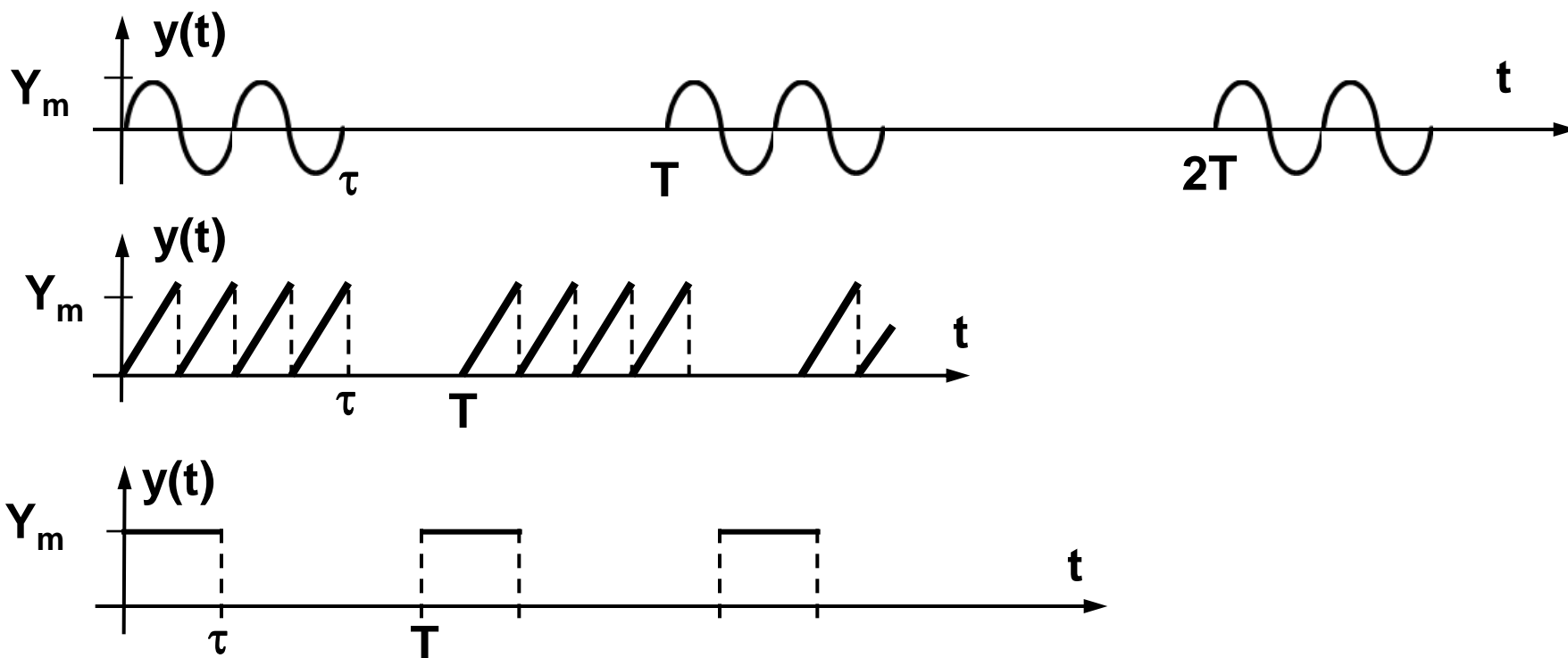
$$I_{sr} = \frac{2I_m}{\pi} = 0,637I_m$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

- ◆ Razlikujemo dva posebna slučaja valnih oblika:
 - **periodički niz impulsa i**
 - **složeni valni oblik.**

Periodički niz impulsa (1)

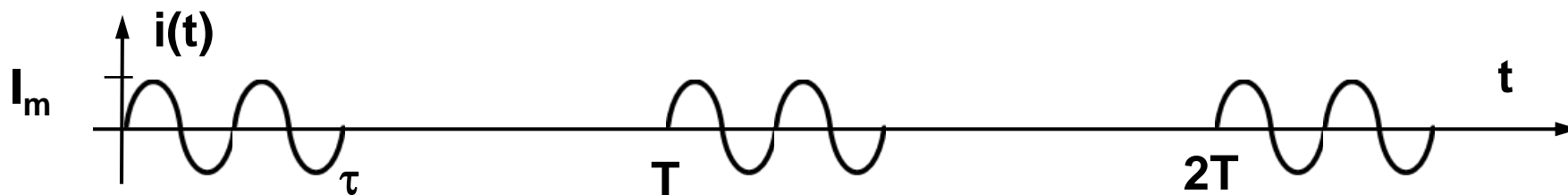
- ◆ Periodički niz impulsa struje/napona $y(t)$ dobije se tako da se osnovni valni oblik (sinusni, pilasti ili vremenski nepromjenjivi) "gasi" u određenim vremenskim intervalima (najčešće su to višekratnici perioda osnovnog valnog oblika). Na taj način dobivamo niz **sinusoidalnih, pilastih ili pravokutnih impulsa**.



- ◆ Impulse karakteriziramo s dva vremenska parametra:
 - **period ponavljanja** T i
 - **vrijeme trajanja impulsa** τ .
- ◆ Ukoliko znamo efektivnu i srednju vrijednost osnovnog valnog oblika, onda jednostavno možemo proračunati efektivne i srednje vrijednosti impulsa. Pri proračunu parametara impulsa efektivna odnosno srednja vrijednost osnovnog oblika umanjuje se za odgovarajući faktor :
 - Efektivna vrijednost impulsa:
$$Y_{ef} = Y_{ef \text{ osnovno}} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}}$$
 - Srednja vrijednost impulsa:
$$Y_{sr} = Y_{sr \text{ osnovno}} \cdot \frac{\tau}{T}$$
- ◆ Za $\tau \rightarrow T$ niz impulsa se pretvara u osnovni valni oblik.

Primjer: parametri sinusnih impulsa

- ♦ Za niz sinusnih strujnih impulsa poznat je omjer $\frac{\tau}{T} = 0,4$. Odredite efektivnu i srednju vrijednost takvih impulsa. Odredite također snagu koju bi takva struja razvijala prolazeći kroz otpor $R = 4 \Omega$. Zadano: $I_m = 2 \text{ A}$.



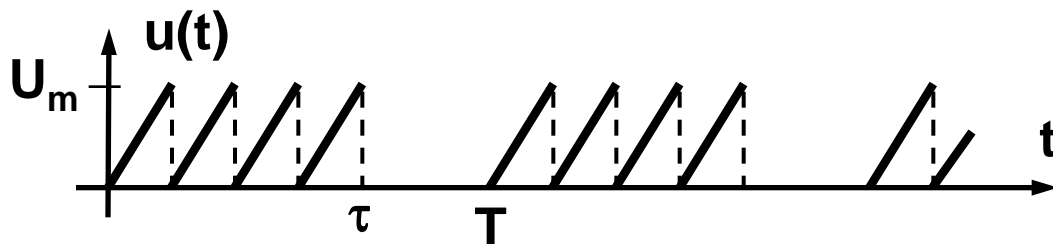
$$I_{ef} = I_{ef \text{ osnovno}} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\tau}{T}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} 0,632$$

$$P = I_{ef}^2 R$$

- ♦ Srednja vrijednost impulsa: $I_{sr} = I_{sr \text{ osnovno}} \cdot \frac{\tau}{T} = 0$

Primjer: parametri pilastih impulsa

- ♦ Odredite efektivnu i srednju vrijednost niza pilastih impulsa zadanog dijagramom ako je poznato: $\frac{\tau}{T} = 0,667$.



- ♦ Efektivna vrijednost impulsa:

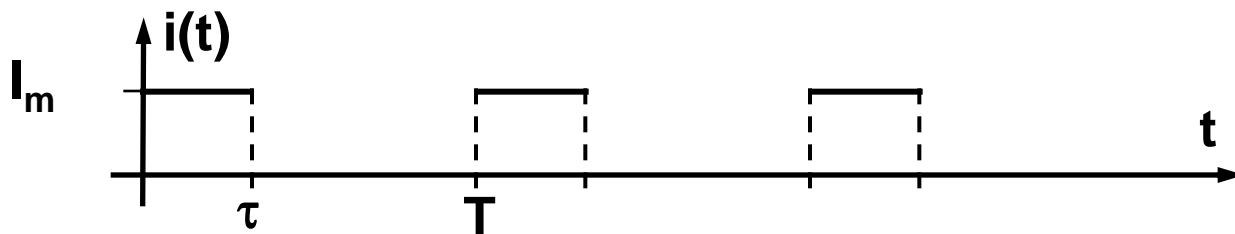
$$U_{ef} = U_{ef \text{ osnovno}} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = \frac{U_m}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = \frac{U_m}{\sqrt{3}} \cdot 0,816$$

- ♦ Srednja vrijednost impulsa:

$$U_{sr} = U_{sr \text{ osnovno}} \cdot \frac{\tau}{T} = \frac{U_m}{2} \cdot 0,666$$

Primjer: parametri pravokutnih impulsa

- ♦ Odredite efektivnu i srednju vrijednost niza pravokutnih impulsa zadanog dijagramom ako je poznato: $\frac{\tau}{T} = 0,33$.



- ♦ Efektivna vrijednost impulsa:

$$I_{ef} = I_{ef \text{ osnovno}} \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = I_m \cdot \sqrt{\frac{\tau}{T}} = I_m \cdot 0,577$$

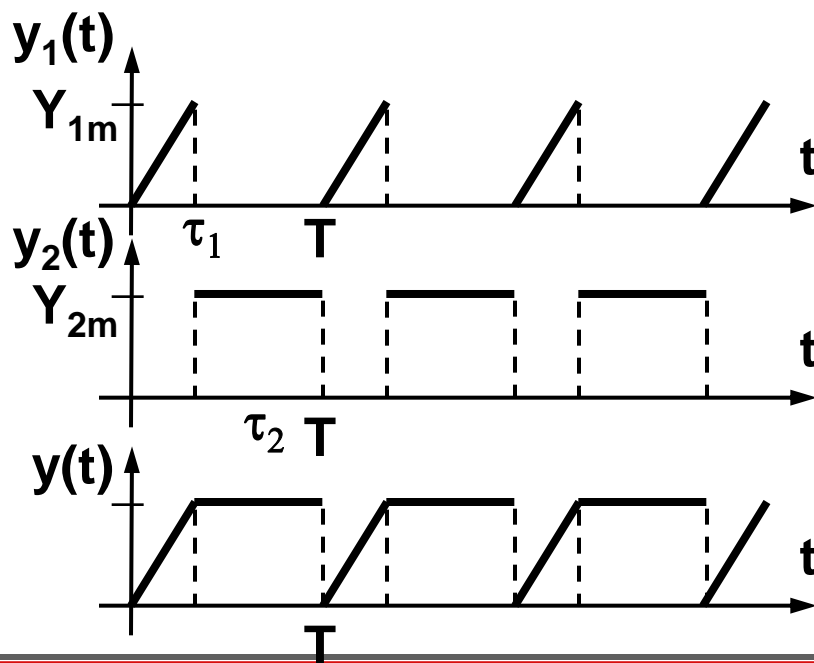
- ♦ Srednja vrijednost impulsa:

$$I_{sr} = I_{sr \text{ osnovno}} \cdot \frac{\tau}{T} = I_m \cdot 0,333$$

- ♦ Općenito, složeni valni oblik predstavlja zbroj više (npr. N) valnih oblika koje nazivamo **komponente**. Komponente imaju vlastite srednje i efektivne vrijednosti Y_{1sr}, \dots, Y_{Nsr} odnosno Y_{1ef}, \dots, Y_{Nef} . Za praksu su zanimljivi složeni valni oblici koji se mogu predstaviti **zbrojem po vremenu nepreklapajućih (disjunktih) impulsa** ili koji se mogu dobiti **dodavanjem istosmjerne komponente**.

Zbroj N po vremenu nepreklapajućih impulsa

- ♦ Za impulse koji se ne preklapaju u vremenu vrijedi: kad je jedan aktivan, svi ostali moraju biti "ugašeni". Zbrajanjem N takvih impulsa dobije se složeni valni oblik: $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_N(t)$.
- ♦ Može se dokazati da općenito vrijedi: kvadrat efektivne vrijednost takvog složenog oblika jednak je zbroju kvadrata efektivnih vrijednosti komponenata tj.:
$$Y_{ef} = \sqrt{Y_{1ef}^2 + Y_{2ef}^2 + \dots + Y_{Nef}^2}$$
- ♦ Primjer: složeni valni oblik sastavljen od 2 komponente:



$$Y_{1ef} = \frac{Y_{1m}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\tau_1}{T}}$$

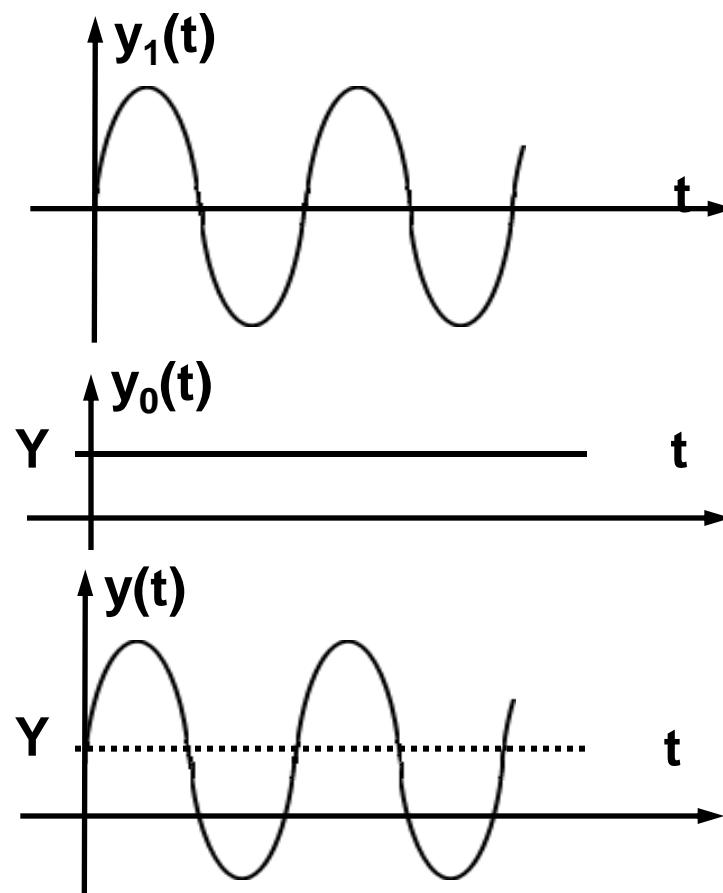
$$Y_{2ef} = Y_{2m} \sqrt{\frac{\tau_2}{T}}$$

$$Y_{ef} = \sqrt{Y_{1ef}^2 + Y_{2ef}^2}$$

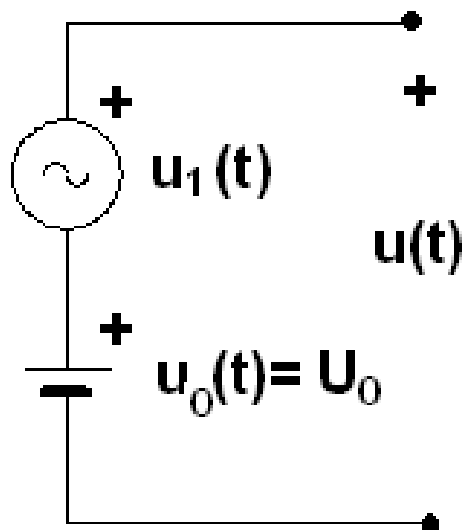
- ♦ Ako osnovnom valnom obliku $y_1(t)$ dodamo istosmjernu komponentu $y_0(t) = Y$ dobijemo složeni valni oblik: $y(t) = y_0(t) + y_1(t)$
- ♦ Moguće je dokazati da za efektivnu vrijednost složenog valnog oblika vrijedi izraz:

$$Y_{ef} = \sqrt{Y_{0ef}^2 + Y_{1ef}^2}$$

- ♦ Napomena: izraz vrijedi samo ako je $y_1(t)$ čisti izmjenični valni oblik tj. ako je njegova srednja vrijednost jednaka nuli! $Y_{1sr} = 0$



- ♦ Odredi efektivnu vrijednost izvora $u(t)$ prema slici.



$$u_1(t) = U_{1m} \sin \omega t$$

$$u(t) = U_0 + u_1(t)$$

- ♦ Efektivna vrijednost:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{1m}^2}{2}}$$