

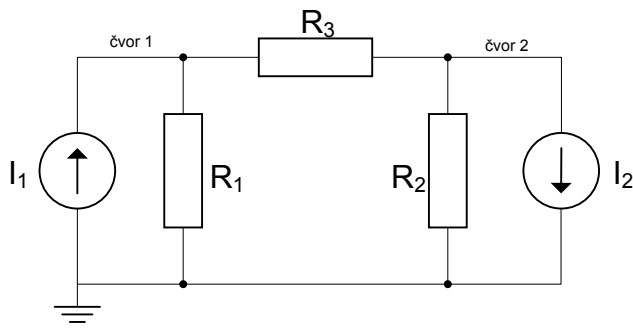
# Rjesenja zbirke zadataka iz Osnova Elektrotehnike za 3. ciklus

by: hmp

January 21, 2010

## 1.1 Zadatak X.1-1

Izračunajte potencijale čvorova 1 i 2 u prikazanom spoju el. elemenata. Koristite metodu napona čvorova. Koliki je napon  $U_{12}$  te kolika struja prolazi kroz  $R_3$ ?



Zadano  $R_1 = 2\Omega$   $R_2 = 6\Omega$   $R_3 = 3\Omega$   $I_1 = 4A$   $I_2 = 2A$

Koristimo metodu potencijala čvorova kako je i navedeno u zadatku:

$$\varphi_1 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_2 \cdot \frac{1}{R_3} = I_1 \quad (1.1)$$

$$\varphi_2 \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) - \varphi_1 \cdot \frac{1}{R_3} = -I_2 \quad (1.2)$$

Sada izmnozimo zagrade i rješavamo 2 jdbu s 2 nepoznanice:

$$\frac{7}{12}\varphi_1 - \frac{1}{12}\varphi_2 = 4 \quad (1.3)$$

$$\frac{3}{12}\varphi_2 - \frac{1}{12}\varphi_1 = -2 \quad (1.4)$$

Mnozimo prvu jdbu s 36, a drugu s 12 - da bi mogli pokratiti  $\varphi_2$

$$21\varphi_1 - 3\varphi_2 = 144 \quad (1.5)$$

$$-\varphi_1 + 3\varphi_2 = -24 \quad (1.6)$$

$$-\varphi_1 + 21\varphi_1 = 144 - 24 \longrightarrow \varphi_1 = 6V \quad (1.7)$$

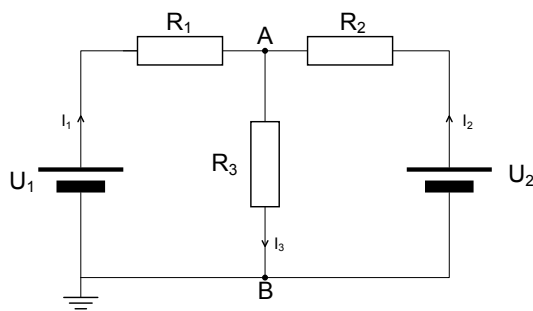
Sada to ubacujemo u (5) i dobivamo da je  $\varphi_2 = -6V$ . Sada trazimo napon  $U_{12}$  i onda struju  $I_3$ . Vidimo da je potencijali  $\varphi_1$  veci, tako da ce struja teci od 1 prema 2.

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 12V \quad (1.8)$$

$$I_3 = \frac{U_{12}}{R_3} = \frac{12V}{12\Omega} = 1A \quad (1.9)$$

## 1.2 Zadatak X.1-2

Odredite struju u granama prikazane mreže a) izravnom primjenom Kirchhoffovih zakona b) Millmanovom metodom



Zadano je:  $R_1 = 3\Omega$   $R_2 = 3\Omega$   $R_3 = 6\Omega$   $U_1 = 24V$   $U_2 = 12V$

Rjesavat cemo zadatak samo Millmanovom metodom, jer je lakse, brzi i to spada u gradivo treceg ciklusa. Na ispitu Vas nitko ne pita koju metodu ste upotrijebili.

$$U_{AB} = \frac{\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{12}{3} + \frac{24}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{72}{5} = 14.4V \quad (1.1)$$

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B \longrightarrow \varphi_A = 14.4V \quad (1.2)$$

Sada moramo izracunati napone na otporima, to cemo racunati tako da cemo krenut iz tocke B, tj. od 0V do tocke A i pozbrajati napone. Naponi od A do B moraju bit jednaki naponu  $U_{ab}$ . Krecemo od lijeve grane, srednja, pa desna. Postujemo smjer ucrtanih struja. Da struje nisu ucrtane, onda bi ih mi proglasili bilo kojeg smjera.

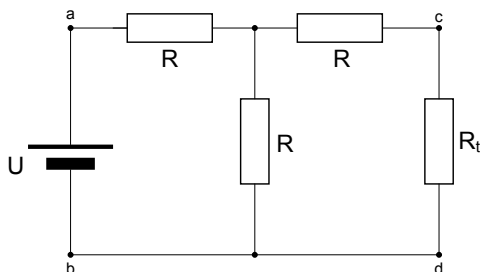
$$+U_1 - I_1 \cdot R_1 = 14.4V \longrightarrow I_1 = \frac{24 - 14.4}{3} = 3.2A \quad (1.3)$$

$$I_3 \cdot R_3 = 14.4V \longrightarrow I_3 = \frac{14.4}{6} = 2.4A \quad (1.4)$$

$$+U_2 - I_2 \cdot R_2 = 14.4V \longrightarrow I_2 = \frac{12 - 14.4}{3} = -0.8A \quad (1.5)$$

### 1.3 Zadatak X.1-3

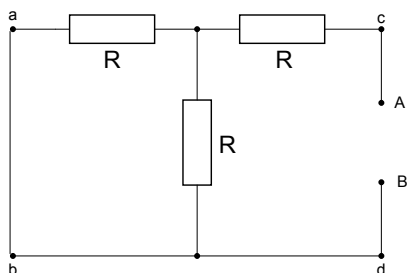
Na stezaljke izvora a i b priključen je (ulazni) napon  $U$ . Nadjite napon na stezaljkama trosila odnosno napon između tocaka c i d. Koji je odnos tih napona  $U_{cd}/U_{ab}=?$  Zadatak rjesite na tri nacina: 1. kao mjesoviti spoj otpornika 2. pomocu Theveninove metode. 3. Nortonove metode



Zadano:  $U = 12V$ ;  $R_t = 100\Omega$   $R = 57.735\Omega$

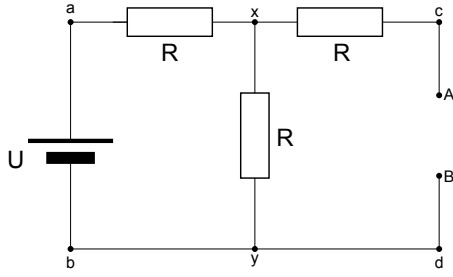
Prvo cemo upotrijebiti Theveninovu metodu, a zatim i Nortonovu. Zadatak necemo rjesavati pomocu mjesovitog spoja otpora, jer je to postupak za 1. ciklus i trebao bi biti trivijalan.

Tako cemo prvo traziti Theveninov otpor  $R_T$ , a zatim i Theveninov napon  $U_T$ . Prvo ugasimo izvor, odspojimo  $R_t$  i trazimo Theveninov otpor, tj. otpor između A i B.



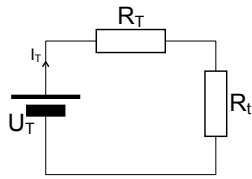
$$R_T = (R \parallel R) + R = \frac{57.735 \cdot 57.735}{2 \cdot 57.735} + 57.735 = 86.6025\Omega \quad (1.1)$$

Napon  $U_T$  je upravo napon između tocaka x i y, odnosno napon na otporu između njih. To je zato što u desnoj grani ne teče struja, pa na desnome otporu nema pada napona. Vidimo da su otpori isti ( $R$ ) pa se napon dijeli na pola, odnosno na oba je napon  $6V$ , pa iz toga zaključujemo da je  $U_T = 6V$ .



$$U_{xy} = U_T = \frac{U}{2} = 6V \quad (1.2)$$

Sada mozemo izracunati napon na  $R_t$  iz Theveninove nadomjesne sheme.

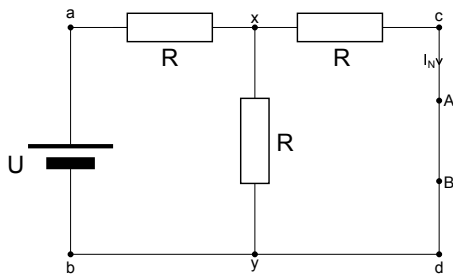


$$I_T = \frac{U_T}{R_T + R_t} = \frac{6V}{186.6025\Omega} = 32.15mA \quad (1.3)$$

$$U_t = I_T \cdot R_t = 3.215V \quad (1.4)$$

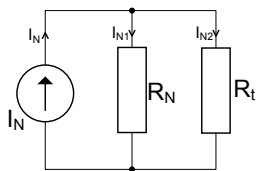
$$\frac{U_{cd}}{U_{ab}} = \frac{U_t}{U} = \frac{3.215}{12} = 0.2679 = 26.79\% \quad (1.5)$$

Sada mozemo istu stvar racunati i preko Nortonovog teorema, pri tome znamo da je  $R_N = R_T = 86.6025\Omega$ . Da bismo izracunali  $I_N$  trebamo kratko spojiti tocke A i B, te naci struju koja ide kroz tu granu. Kao sto vidimo to je polovina ukupne struje, jer su otpori jednaki (R).



$$I_N = \frac{I}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U}{R_N} = 69.28mA \quad (1.6)$$

Sada napravimo nadomjesnu Nortonovu shemu i racunamo struju kroz  $R_t$ , tj. struju  $I_{N2}$



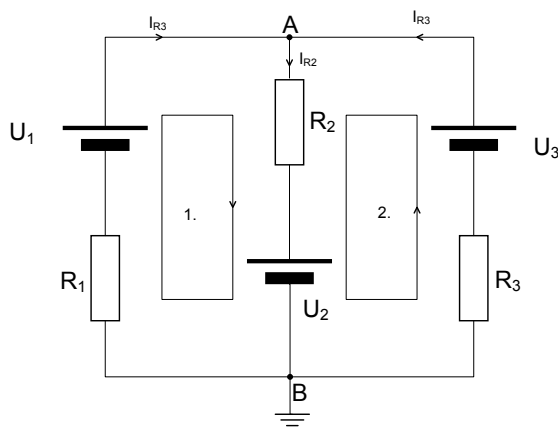
$$I_{N2} = \frac{I_N \cdot R_N}{R_N + R_t} = 32.04mA \quad (1.7)$$

$$U_t = I_{N2} \cdot R_t = 3.215V \quad (1.8)$$

$$\frac{U_{cd}}{U_{ab}} = \frac{U_t}{U} = \frac{3.215}{12} = 0.2679 = 26.79\% \quad (1.9)$$

## 1.4 Zadatak X.1-4

Odredite struje grana na ove nacine a) izravnom primjenom Kirchhoffovih zakona. (jdbe treba napisati u skladu s oznacenim smjerom obilazanja kontura) b) metodom napona cvorova c) superpozicijom.



Zadano je:  $R_1 = 16\Omega$   $R_2 = 4\Omega$   $R_3 = 24\Omega$   $U_1 = 72V$   $U_2 = 8V$   $U_3 = 48V$

Rjesiti cemo zadatak samo metodom napona cvorova, odnosno Millmanovom metodom. Donji cvor mozemo uzemljiti pa pisemo Millmana:

$$U_{AB} = \frac{\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{72}{16} + \frac{8}{4} + \frac{48}{24}}{\frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24}} = \frac{408}{17} = 24V \quad (1.1)$$

Sada moramo izracunati napone na otporima, to cemo racunati tako da cemo krenut iz tocke B, tj. od 0V do tocke A i pozbrajati napone. Naponi od A do B moraju bit jednaki naponu  $U_{ab}$ . Krecemo od lijeve grane, srednja, pa desna. Postujemo smjer ucrtanih struja. Da struje nisu ucrtane, onda bi ih mi proglasili bilo kojeg smjera.

$$-I_{R1} \cdot R_1 + U_1 = 24V \longrightarrow I_{R1} = \frac{72 - 24}{16} = 3A \quad (1.2)$$

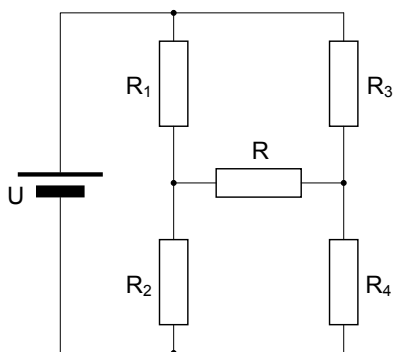
$$+U_2 + I_{R2} \cdot R_3 = 24V \longrightarrow I_{R2} = \frac{24 - 8}{4} = 4A \quad (1.3)$$

$$-I_{R3} \cdot R_3 + U_3 = 24V \longrightarrow I_{R1} = \frac{48 - 24}{24} = 1A \quad (1.4)$$



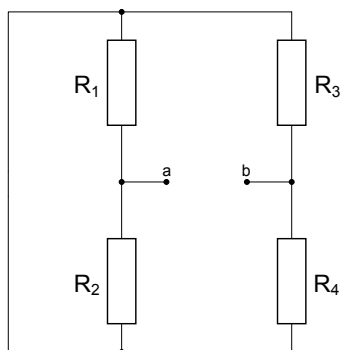
## 1.5 Zadatak X.1-5

U prikazanom mosnom spoju izracunajte struju kroz otpornik u dijagonali mosta. Kolika bi bila struja kroz dijagonalu mosta kada je taj otpor ( $R$ ) jednak nuli? Koliki treba biti  $R_1$  da bi struja kroz otpornik  $R$  bila jednaka nuli? Primjenite Theveninovu ili Nortonovu metodu.

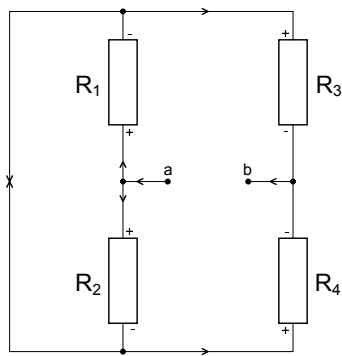


Zadano je:  $U = 72V$   $R = 5\Omega$   $R_1 = 6\Omega$   $R_2 = 3\Omega$   $R_3 = 12\Omega$   $R_4 = 4\Omega$

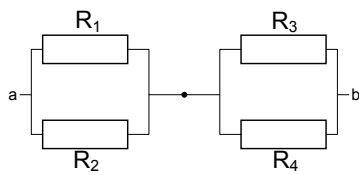
Rjesiti cemo zadatak pomocu Theveninove metode, jer bas ne volim Nortona pretjerano, a u biti je ista stvar. Prva stvar koju trebamo naci je Theveninov otpor. To znaci da moramo odspojiti otpor  $R$ , te kratko spojiti izvor.



Sada treba prepoznati spoj. Mozda nekima nije ocito vidljivo o kakvome se spoju radi, pa cemo na shemu postaviti neku struju koja ce ici od a do b, te gledati kako ce ona ulaziti u otpornike, a kako izlaziti. Na taj nacin cemo najlakse prepoznati spoj,



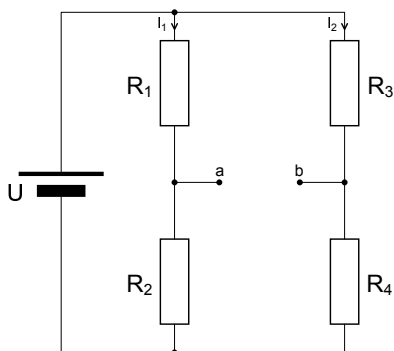
Sada kada smo to ucrtali, treba vidjeti da su ova dva otpora koja su naizgled spojeni serijski, zapravo spojeni paralelno. Kada shemu nacrtamo pojednostavljeno, to izgleda ovako:



Sada mozemo izracunati Theveninov otpor:

$$R_T = (R_1 \parallel R_2) + (R_3 \parallel R_4) = 5\Omega \quad (1.1)$$

Nakon sto smo izracunali Theveninov otpor, moramo izracunati Theveninov napon, odnosno napon izmedju tocaka a i b. Da bismo to napravili, moramo vratiti izvor i izracunati struje kroz te grane, te zatim krenuti od b do a i pozbrajati napone.

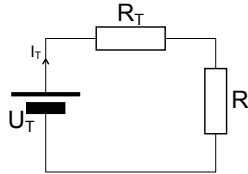


$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{72}{9} = 8A \quad (1.2)$$

$$I_2 = \frac{U}{R_3 + R_4} = \frac{72}{16} = 4.5A \quad (1.3)$$

$$U_{ab} = U_T = I_2 \cdot R_3 - I_1 \cdot R_1 = 4.5 \cdot 12 - 8 \cdot 6 = 6V \quad (1.4)$$

Sada radimo Theveninovu nadomjesnu shemu:



Racunamo ukupnu struju:

$$I_T = \frac{U_T}{R_T + R} = \frac{6}{5 + 5} = 0.6A \quad (1.5)$$

To je struja koja se trazi u zadatku. Kada je  $R = 0$  onda struja iznosi:

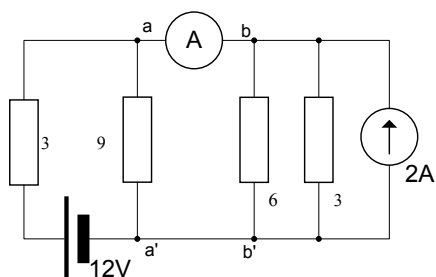
$$I_T = \frac{U_T}{R_T + R} = \frac{6}{5 + 0} = 1.2A \quad (1.6)$$

Sada u zadatku trazi da je struja kroz dijagonalu mosta jednaka 0, a to je upravo ravnoteza mosta koja se racuna tako da umnosci otpora po dijagonali moraju biti jednaki:

$$R_1 \cdot R_4 = R_3 \cdot R_2 \longrightarrow R_1 = \frac{R_3 \cdot R_2}{R_4} = \frac{12 \cdot 3}{4} = 9\Omega \quad (1.7)$$

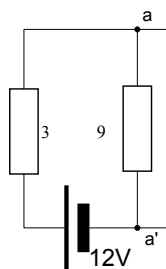
## 1.6 Zadatak X.1-6

U prikazanom spoju elemenata odredite struju koju mjeri ampermetar a) Theveninovom metodom tako da spoj podijelite po presjeku aa' i bb'. b) Millmanovom metodom. Koliki je potencijal lijeve i desne stezaljke ampermetra ( $R_a = 0$ )?



Prvo ćemo rješavati Theveninovom metodom. Kada kaže da nešto nadomjestite (u ovom slučaju podijelite), onda radite Thevenina, samo bez odspajanja ica. Dakle, ovdje ćemo imati dvije Theveninove nadomjesne sheme spojene u jednu.

Sada prvo nadomjestamo lijevu, pa desnu stranu:



Računamo Theveninov otpor i Theveninov napon. Theveninov otpor se računa tako da se naponski izvor kratko spoji, pa imamo samo 2 paralelna otpora:

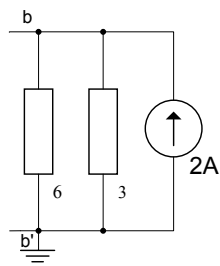
$$R_{T1} = 3 \parallel 9 = \frac{27}{12} \Omega \quad (1.1)$$

Theveninov napon u ovome slučaju, tj. napon između tocaka a i b je upravo jednak padu napona na ovih  $9\Omega$ , pa ga idemo izračunati:

$$I_1 = \frac{12V}{3\Omega + 9\Omega} = 1A \quad (1.2)$$

$$U_{T1} = 1A \cdot 9\Omega = 9V \quad (1.3)$$

Sada gledamo desnu stranu:



Isto tako racunamo Theveninov otpor i napon. Opet imamo dva paralelno spojena otpora, jer trebamo odspojiti strujni izvor:

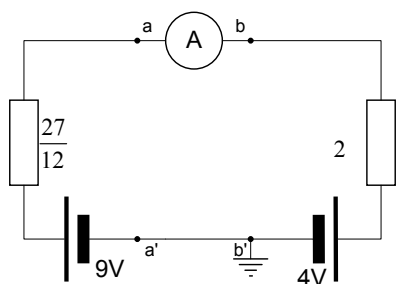
$$R_{T1} = 6 \parallel 3 = 2\Omega \quad (1.4)$$

Sada racunamo napon, a to je najlakse tako da izracunamo ovu paralelu u jedan otpor, i pomnozimo s strujom koju daje strujni izvor da bismo dobili napon na tom otporu, a to je ujedno i napon izmedju b i b', odnosno Theveninov napon.

$$R_{2uk} = 6 \parallel 3 = 2\Omega \quad (1.5)$$

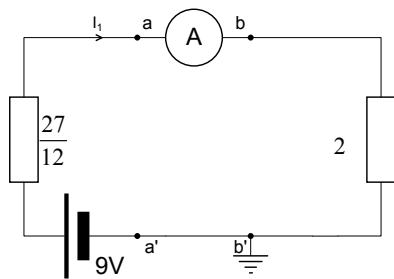
$$U_{T2} = 2\Omega \cdot 2A = 4V \quad (1.6)$$

Sada radimo nadomjesnu Theveninovu shemu, s ovim vrijednostima koje smo dobili:



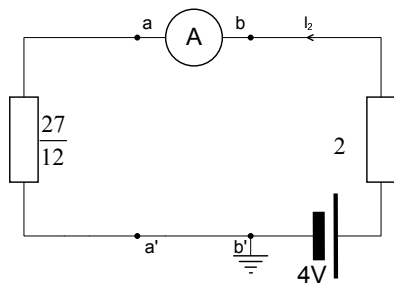
Sada mozemo preko npr. preko superpozicije. Mogli bi i zbrajanjem izvora, ali onda bi morali paziti na to da micemo i vracamo ovo uzemljenje, tako da bi to moglo zbuniti neke, zasto se mora prvo maknuti, pa vratiti.

1. slučaj superpozicije:



$$I_1 = \frac{9V}{\frac{27}{12}\Omega + 2\Omega} = 2.1176A \quad (1.7)$$

2. slučaj superpozicije:



$$I_2 = \frac{4V}{\frac{27}{12}\Omega + 2\Omega} = 0.9411A \quad (1.8)$$

Sada je ukupna struja jednaka:

$$I = I_1 - I_2 = 1.1765A \quad (1.9)$$

I sada bilo kojim putem od uzemljenja do točke a ili b (istog su potencijala, jer je otpor ampermetra jednak nuli) dobivamo potencijal stezaljke ampermetra, mozemo npr. desno:

$$\varphi_a = \varphi_b = +4V + I \cdot 2\Omega = 6.353V \quad (1.10)$$

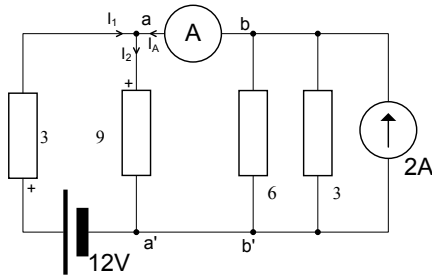
Drugi način rješavanja je korištenje Millmanove metode. Ovaj krug ima 2 čvora, jer ampermetar

mozete zamjeniti kratkim spojem ( $R_a = 0\Omega$ )

$$U_{aa'} = U_{bb'} = \frac{\frac{12}{3} + 2}{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = 6.353V \quad (1.11)$$

$$U_{aa'} = \varphi_a - \varphi_{a'} \longrightarrow \varphi_a = \varphi_b = 6.353V \quad (1.12)$$

Sada treba izracunati struju, a to nam je najlakse tako da zapišemo jdbu nekog cvora, najlakse cvora a. Mi pretpostavimo neke smjerove struja, pa ako dobijemo minus u rjesenju znaci da smo krivo pretpostavili, ali to nam nije ni bitno.



Prvo zapišemo jdbu cvora a:

$$I_1 + I_A = I_2 \quad (1.13)$$

$$I_2 = \frac{U_{aa'}}{9\Omega} = 0.705A \quad (1.14)$$

Sada idemo pozbrajat napone u lijevoj grani kako bismo izracunali struju kroz nju. Krecemo od nule (tocke a') i idemo prema potencijalu tocke a koji je jednak 6.353V, kao sto smo izracunali.

$$+12V - I_1 \cdot 3\Omega = 6.353 \longrightarrow I_1 = 1.882A \quad (1.15)$$

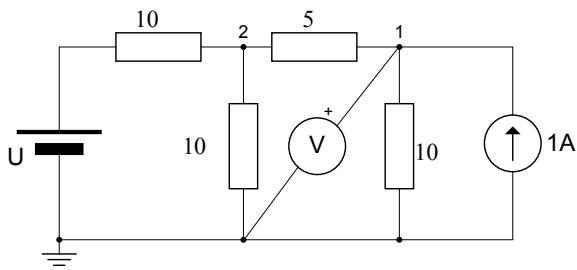
Sada te rezultate vracamo u (12) i dobivamo

$$I_A = I_2 - I_1 = -1.176A \quad (1.16)$$

Mi gledamo apsolutnu vrijednost toga, jer nije ucrtan polaritet ampermetra, a ovo samo znaci da je struja suprotnog smjera nego sto smo mi pretpostavili.

## 1.7 Zadatak X.1-7

Koliki je napon izvora ako voltmetar pokazuje  $U_V = 15V$  oznacenog polariteta.



Ovaj zadatak je radjen jos u prvom ciklusu, ali ovdje cemo ga rijesit metodom potencijala cvorova. Imamo ukupno 3 cvora, od kojih znamo potencijal cvora 1 i zemlje. Potencijal cvora 1 je upravo napon koji mjeri voltmetar, tj. 15V. Pa cemo zapisati metodu potencijala cvorova za taj cvor, gdje je jedina nepoznanica  $\varphi_2$ :

$$\varphi_1 \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right) - \varphi_2 \cdot \frac{1}{5} = 1A \longrightarrow \varphi_2 = \frac{35}{2}V \quad (1.1)$$

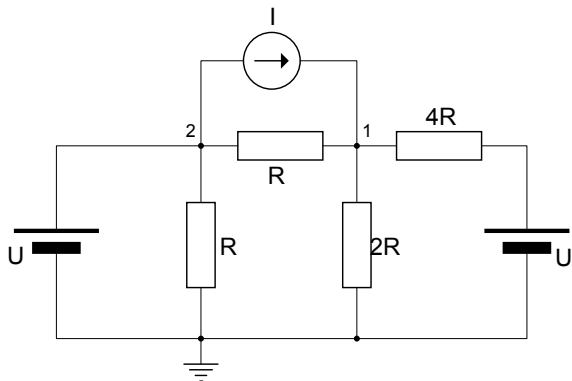
Sada mozemo zapisati i metodu potencijala cvorova za cvor 2:

$$\varphi_2 \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \right) - \varphi_1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{U}{10} \longrightarrow U = 10 \cdot (7 - 3) = 40V \quad (1.2)$$



## 1.8 Zadatak X.1-8

Odredite napon na otporniku  $2R$  u prikazanom spoju. Koliki je napon ako se promjeni smjer strujnog izvora?



Zadano je:  $R = 5\Omega$   $I = 2A$   $U = 20V$

Ovdje cemo opet iskoristiti metodu potencijala cvorova. Potencijal cvora 2 znamo, jer je izmedju zemlje i njega spojen samo naponski izvor od  $20V$ . Toliki je i potencijal tog cvora. Potencijal cvora 1 je jednak i naponu na trazenom otporu, zato sto je otpor spojen izmedju zemlje i tog potencijala.

$$\varphi_1\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R}\right) - \varphi_2 \cdot \frac{1}{R} = I + \frac{U}{4R} \quad (1.1)$$

$$\varphi_1\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right) - 20 \cdot \frac{1}{5} = 2A + \frac{20}{20} \rightarrow \varphi_1 = U_{2R} = 20V \quad (1.2)$$

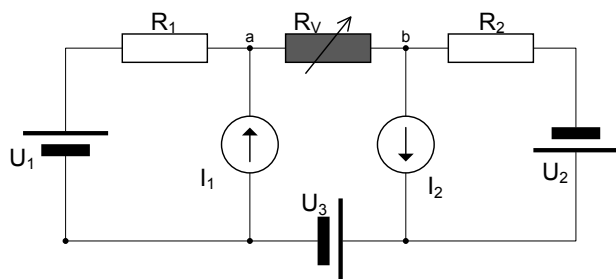
Kada okrenemo strujni izvor, cijela jdbe ostaje ista, samo umjesto dodavanja struje strujnog izvora na desnoj strani jdbe imamo oduzimanje

$$\varphi_1\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R}\right) - \varphi_2 \cdot \frac{1}{R} = -I + \frac{U}{4R} \quad (1.3)$$

$$\varphi_1\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}\right) - 20 \cdot \frac{1}{5} = -2A + \frac{20}{20} \rightarrow \varphi_1 = U_{2R} = 8.57V \quad (1.4)$$

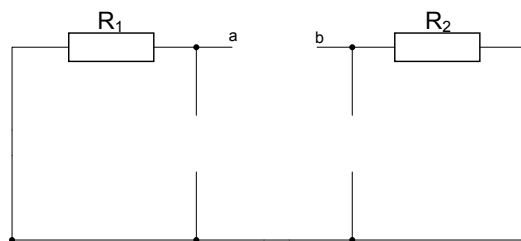
## 1.9 Zadatak X.1-9

Odredite maksimalnu snagu na otporniku  $R_v$ .



Zadano je:  $R_1 = 5\Omega$   $R_2 = 10\Omega$   $U_1 = U_3 = 20V$   $U_2 = 30V$   $I_1 = I_2 = 1A$

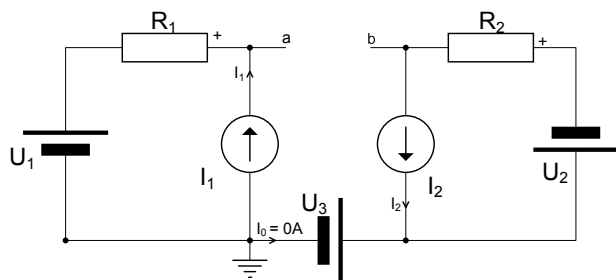
Kada se traži maksimalna snaga na otporu najčešće to znači primjenu Thevenina (ili Nortona). Pa ćemo mi ovdje prvo odspojiti sve izvore kako bismo našli Theveninov otpor, tj. otpor između tocaka a i b.



Kao što vidimo na slici otpor između a i b jednak je serijskom spoju  $R_1$  i  $R_2$ .

$$R_{ab} = R_T = R_1 + R_2 = 30\Omega \quad (1.1)$$

Sada trebamo izračunati Theveninov napon, te vraćamo izvore u shemu. Moramo primjetiti da struja ne teče kroz granu gdje se nalazi  $U_3$ , jer struja teče samo kroz zatvorene krugove, a nemoguće je zatvoriti krug kroz tu granu, jer nemamo granu kojom bi se struja vraćala nazad. Time zaključujemo da struja  $I_1$  prolazi kroz otpor  $R_1$ , kao što i struja  $I_2$  prolazi kroz otpor  $R_2$ . Sada krenemo od nultog potencijala (uzemljenje) i zbrajamo sve napone putem da bismo dobili potencijale tocaka a i b.

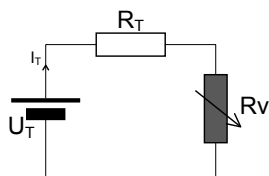


$$+U_1 + I_1 \cdot R_1 = 20V + 1A \cdot 20\Omega = 40V \quad (1.2)$$

$$+U_3 - U_2 - I_2 \cdot R_2 = 20V - 30V - 1A \cdot 10\Omega = -20V \quad (1.3)$$

$$U_{ab} = U_T = \varphi_a - \varphi_b = 40 - (-20) = 60V \quad (1.4)$$

Sada napravimo Theveninovu nadomjesnu shemu za ovaj krug sa naponskim izvorom  $U_T$  i unutarnjim otporom  $R_T$ . Zatim racunamo struju i preko nje snagu. Otpor  $R_v$  mora biti jednak otporu  $R_T$  kako bi snaga bila maksimalna.  $R_v = 30\Omega$

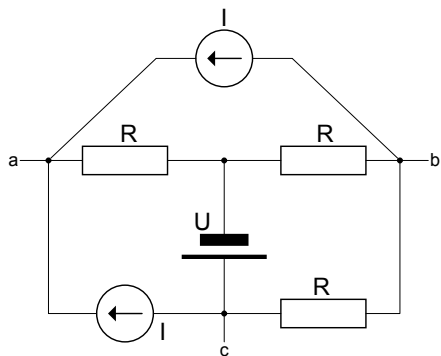


$$I_T = \frac{U_T}{R_T + R_v} = \frac{60V}{30\Omega + 30\Omega} = 1A \quad (1.5)$$

$$P_R = I_T^2 \cdot R_v = 1^2 \cdot 30 = 30W \quad (1.6)$$

## 1.10 Zadatak X.1-10

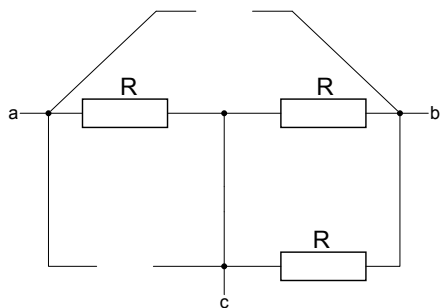
Prikazani spoj elemenata nadomjestiti prema a) Theveninovom b) Nortonovom teoremu sa tocaka a i c kao i izmedju tocaka b i c.



Zadano je:  $U = 1V$   $R = 1\Omega$   $I = 1A$

U ovome slucaju moramo nadomjestati spoj prema oba teorema. To radimo prema standardnom postupku, osim sto ne odspajamo nista, jer se trazi nadomjesni spoj. Pa cemo prvo napraviti Thevenina za oba slucaja, pa nortona za oba slucaja:

a) 1. Thevenin izmedju tocaka a i c

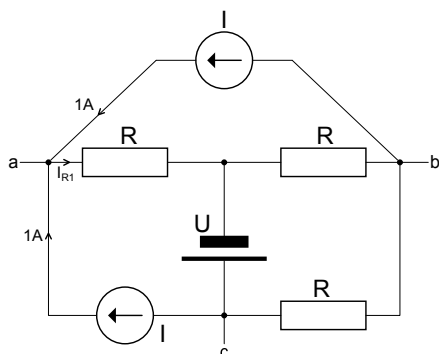


Vidimo da je Theveninov otpor (otpor izmedju a i c) jednak samo jednom otporu  $R$ , jer su dva desna kratko spojena.

$$R_{T1} = R = 1\Omega \quad (1.1)$$

Sada moramo vratiti izvore i racunati napon izmedju a i c, a to radimo tako da krenemo od a do c i zbrajamo sve napone putem. Struju kroz lijevi  $R$  mozemo jednostavno izracunati ako zapisemo

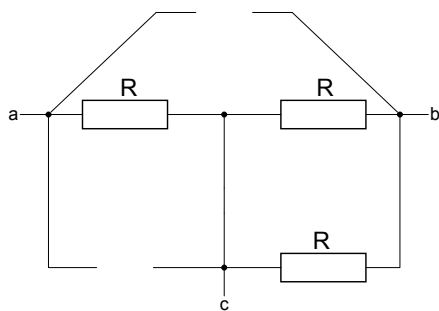
jdbu cvora a:



$$I_{R1} = 1A + 1A = 2A \quad (1.2)$$

$$U_{ac} = U_{T1} = -U + I_{R1} \cdot R = 1V \quad (1.3)$$

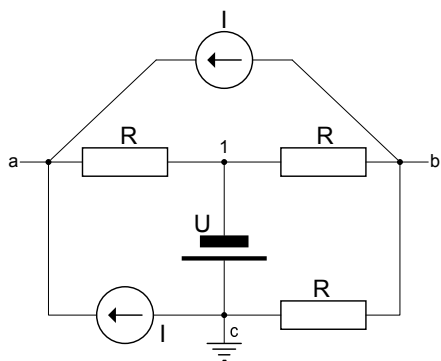
a) 2. Thevenin izmedju tocaka b i c



Sada vidimo da je Theveninov otpor jednak paraleli desnih R-ova. Lijevi kraj lijevog otpora nije nigdje spojen, tako da njega ne racunamo, pa imamo

$$R_{T2} = R \parallel R = 0.5\Omega \quad (1.4)$$

Napon je malo teze naci nego u prvom slucaju, pa cemo zato uzemljiti jedan cvor, npr. c i onda pomocu metode potencijala cvorova cemo traziti potencijal cvora b. Potencijal cvora 1 znamo, jer izmedju zemlje i njega je spojen samo naponski izvor i on iznosi -1V.



$$\varphi_b \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) - \varphi_1 \cdot \frac{1}{R} = -I \longrightarrow \varphi_b = -1V \quad (1.5)$$

$$U_{bc} = \varphi_b - \varphi_c = -1V \longrightarrow U_{T2} = |U_{bc}| = 1V \quad (1.6)$$

Sada nortonove nadomjesne parametre mozemo proracunati iz Theveninovih, da ne radimo sad cijeli postupak ponovno, ali ako netko ima izricitu zelju, samo neka radi.

b) 1. Norton izmedju a i c:

$$I_{N1} = \frac{U_{T1}}{R_{T1}} = 1A \quad (1.7)$$

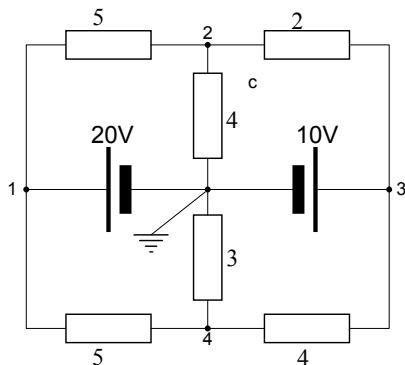
b) 1. Norton izmedju a i c:

$$I_{N2} = \frac{U_{T2}}{R_{T2}} = 2A \quad (1.8)$$

Rjesenja se ovdje malo razlikuju od njihovih, ali ja nisam uspio ni superpozicijom dobit drugacije (trenutno je 2:34am), pa mislim da je točno.

## 1.11 Zadatak X.1-11

Odredite potencijale cvorova 1, 2, 3 i 4, a zatim izracunajte napone na svim otpornicima vanjske konture i provjerite rezultat preko KZN.



Ovdje odmah znamo potencijale dva cvora, jer su izmedju nultog potencijala i njih spojeni samo naponski izvori, a to su  $\varphi_1 = +20V$  i  $\varphi_3 = +10V$ . Potencijale ostalih cvorova cemo izracunati pomocu metode potencijala cvorova.

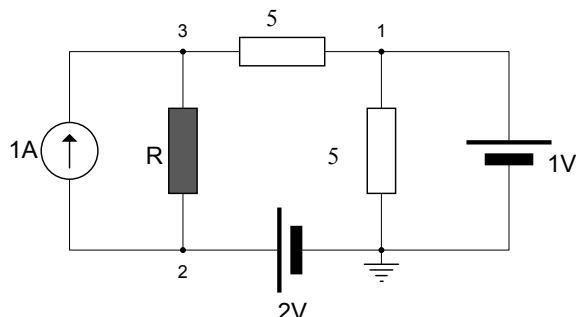
$$\varphi_2 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) - \varphi_1 \cdot \frac{1}{5} - \varphi_3 \cdot \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \varphi_2 = \frac{20 \cdot 9}{19} = 9.473V \quad (1.1)$$

$$\varphi_4 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \varphi_1 \cdot \frac{1}{5} - \varphi_3 \cdot \frac{1}{4} = 0 \rightarrow \varphi_4 = \frac{6.5 \cdot 60}{47} = 8.297V \quad (1.2)$$

Napone na otpornicima vanjske konture nema smisla racunati, to je samo razlika potencijala izmedju dvije tocke izmedju kojih se nalazi taj otpornik. To ostavljam vama.

## 1.12 Zadatak X.1-12

Izračunajte struju kroz oznaceni otpornik  $R = 1\Omega$ . Kolika je ta struja ako strujni izvor promjeni smjer struje.



Za početak smo uzemljili jedan cvor kako bismo mogli koristiti metodu napona cvorova. Na ovaj način automatski znamo potencijale dva cvora, jer je između nultog potencijala i njih spojen samo naponski izvor. To su cvorovi 1 i 2:  $\varphi_1 = +1V$  i  $\varphi_2 = +2V$ . Sada pišemo metodu potencijala cvorova za cvor tri, pa ćemo napon na označenom otporu izračunati kao razliku potencijala između 2 i 3.

$$\varphi_3\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{1}\right) - \varphi_1 \cdot \frac{1}{1} - \varphi_2 \cdot \frac{1}{R} = 1 \longrightarrow \varphi_3 = 2V \quad (1.1)$$

$$U_{23} = U_R = \varphi_2 - \varphi_3 = 0V \quad (1.2)$$

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{0}{1} = 0A \quad (1.3)$$

Ako strujni izvor promjeni smjer onda sve ostaje isto, osim što u jdbi potencijala cvorova mjenjamo predznak s desne strane jdbi:

$$\varphi_3\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{1}\right) - \varphi_1 \cdot \frac{1}{1} - \varphi_2 \cdot \frac{1}{R} = -1 \longrightarrow \varphi_3 = 1V \quad (1.4)$$

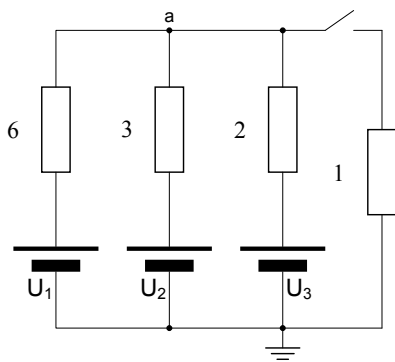
$$U_{23} = U_R = \varphi_2 - \varphi_3 = 1V \quad (1.5)$$

$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{1}{1} = 1A \quad (1.6)$$



### 1.13 Zadatak X.1-13

Izacunajte potencijal tocke a prije i poslije zatvaranja sklopke.



Zadano je:  $U_1 = U_2 = U_3 = 10V$

Ovdje cemo samo 2 puta upotrijebiti metodu potencijala cvorova, tj. Millmanovu metodu, jer imamo 2 cvora. Jednom za slucaj otvorene sklopke, drugi put za slucaj zatvorene sklopke.

a) Otvorena sklopka

$$U_{a0} = \frac{\frac{U_1}{6} + \frac{U_2}{3} + \frac{U_3}{2}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 10V \quad (1.1)$$

$$U_{a0} = \varphi_a - \varphi_0 \longrightarrow \varphi_a = 10V \quad (1.2)$$

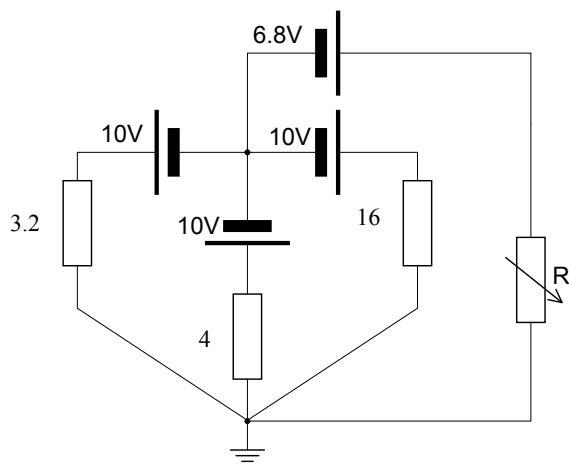
b) Zatvorena sklopka

$$U_{a0} = \frac{\frac{U_1}{6} + \frac{U_2}{3} + \frac{U_3}{2}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1}} = \frac{60}{12} = 5V \quad (1.3)$$

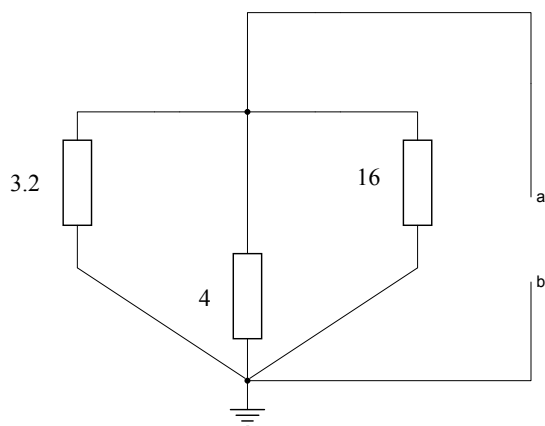
$$U_{a0} = \varphi_a - \varphi_0 \longrightarrow \varphi_a = 5V \quad (1.4)$$

## 1.14 Zadatak X.1-14

Izračunajte otpor  $R$  uz koji će snaga na njemu biti najveća moguća. Kolika je ta snaga?



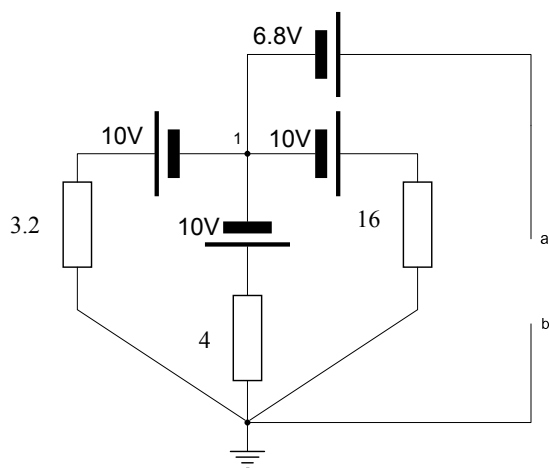
Prvo ćemo računati Theveninov otpor, sve izvore ugasimo i maknemo traženi otpor.



Vidimo da su ova tri otpora spojena paralelno, pa je ukupni otpor jednak:

$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{R_T} = \frac{1}{3.2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \rightarrow R_T = 1.6\Omega \quad (1.1)$$

Sada vratimo izvore i računamo napon između  $a$  i  $b$ . Najlakši način za to napraviti je izračunati potencijal točke 1 preko Millmana, te onda odrediti napon  $U_{ab}$  tako da krenemo od 0, zbrajamo sve napone i moramo doći do potencijala  $\varphi_1$

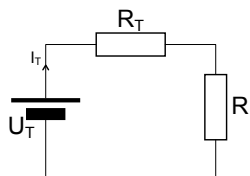


$$\varphi_1 = \frac{\frac{-U_1}{3.2} + \frac{-U_2}{4} + \frac{-U_3}{16}}{\frac{1}{3.2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = -10V \quad (1.2)$$

Sada krecemo od 0 i zbrajamo sve napone:

$$U_{ab} - 6.8V = \varphi_1 \rightarrow |U_{ab}| = U_T = 3.2V \quad (1.3)$$

Sada napravimo Theveninovu nadomjesnu shemu i izracunamo snagu. Nas promjenjivi otpor  $R$  mora bit jednak  $R_T$  da bi snaga bila maksimalna:

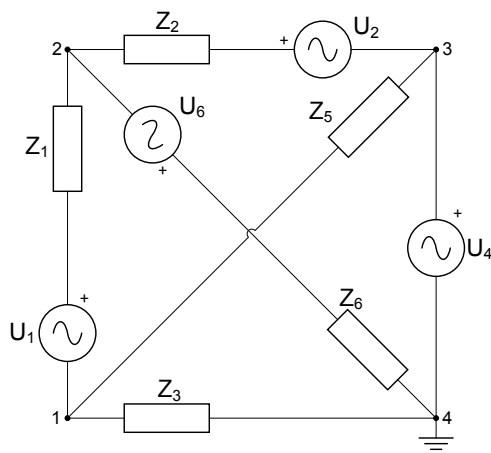


$$I_T = \frac{U_T}{R_T + R} = \frac{3.2}{3.2} = 1A \quad (1.4)$$

$$P_R = I_T^2 \cdot R = 1.6W \quad (1.5)$$

## 2.15 Zadatak XI.1-1

U mrezi na slici izracunajte potencijale cvorova, a zatim struju kroz granu sa  $Z_1$



Zadano je:  $U_1 = 4V$   $U_2 = j8V$   $U_4 = 4 - j4V$   $U_6 = -j4V$   $Z_1 = 1 + j\Omega$   $Z_2 = -j2\Omega$   $Z_3 = 1\Omega$   $Z_5 = j\Omega$   $Z_6 = j2\Omega$

Ovdje idemo preko metode napona cvorova, koja vrijedi jednako kao i u istosmjernim krugovima, samo je racun u kompleksnom podrucju. Ovdje odmah znamo potencijal cvora 3, jer je izmedju zemlje i njega spojen samo naponski izvor. Njegov potencijal je upravo jednak tom naponu, odnosno  $\varphi_3 = 4 - j4V$

Sada pisemo potencijale ostala 2 cvora.

$$\varphi_1\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_5} + \frac{1}{Z_3}\right) - \varphi_2 \cdot \frac{1}{Z_1} - \varphi_3 \cdot \frac{1}{Z_5} = \frac{-U_1}{Z_1} \quad (2.1)$$

$$\varphi_2\left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_6}\right) - \varphi_1 \cdot \frac{1}{Z_1} - \varphi_3 \cdot \frac{1}{Z_2} = \frac{U_1}{Z_1} + \frac{U_2}{Z_2} - \frac{U_6}{Z_6} \quad (2.2)$$

Sada je to samo puno matematike i kompleksnog racuna i dobiva se:

1. jdba:

$$3\varphi_1 - \varphi_2 - \frac{\varphi_3 \cdot (1 + j)}{j} = -4 \quad (2.3)$$

2. jdba:

$$\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{\varphi_3 \cdot (1+j)}{2j} = 2 - 2j \quad (2.4)$$

Sada kada se to rjesi dobije se:

$$\varphi_1 = -1 - 3jV \quad \varphi_2 = 1 - jV \quad (2.5)$$

Sada nas jos trazi struju kroz granu gdje se nalazi  $Z_1$ . To cemo naci tako da cemo naci napon  $U_{21}$ , pa cemo onda pozbrajati sve napone od 1 do 2, i izjednaciti s tim naponom.

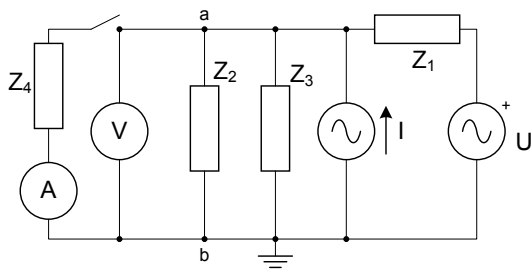
$$U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1 = 1 - j + 1 + 3j = 2 + 2jV \quad (2.6)$$

Struju uzimamo u proizvoljnom smjeru, jer nam nije nacrtana na slici, pa cemo uzeti odozgo prema dolje.

$$+U_1 + I_1 \cdot Z_1 = U_{21} \longrightarrow I_1 = \frac{U_{21} - U_1}{Z_1} = \frac{2 + 2j - 4}{1 + j} = 2jA \quad (2.7)$$

## 2.16 Zadatak XI.1-2

U mrezi prikazanoj na slici, uz otvorenu sklopku voltmetar pokazuje  $U_V = 10V$ . Odredite struju kroz ampermetar i pokazivanje voltmetra nakon zatvaranja sklopke.



Zadano je:  $Z_1 = 2 + j2\Omega$   $Z_2 = 2 - j2\Omega$   $Z_3 = 2\Omega$   $Z_4 = 1 + j2\Omega$

Ovdje cemo koristiti Millmana, jer imamo samo dva cvora. Voltmetar ovdje mjeri upravo Millmanov napon, odnosno napon  $U_{ab}$ . Prvo cemo morati izraziti nepoznanice iz slucaja kada je sklopka otvorena, pa cemo to iskoristiti kada zatvorimo sklopku.

Raspisujemo Millmana za otvorenu sklopku:

$$U_{ab} = \frac{\frac{U}{Z_1} + I}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}} \quad (2.1)$$

U zadatku pise da kada je sklopka otvorena, voltmetar pokazuje 10V, odnosno  $U_{ab} = 10V$ . Sada moramo izraziti ovaj brojnik.

$$\frac{U}{Z_1} + I = \left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) \cdot U_{ab} \quad (2.2)$$

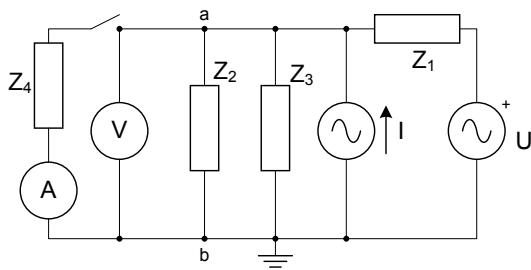
Sada pisemo jdbu za zatvorenu sklopku:

$$U_{ab} = \frac{\left( \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right) \cdot U_{ab}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4}} = 7.905V \quad (2.3)$$

$$I_A = \frac{U_{ab}}{Z_4} = 3.53A \quad (2.4)$$

## 2.17 Zadatak XI.1-3

Izračunajte struju kroz otpor  $R = 4\Omega'$ . Koristite postupke a) napone cvorova b) superpoziciju i c) Theveninov teorem.



Rjesit cemo pomocu a) i c), jer b) nije gradivo ovog ciklusa. Prvo cemo metodom napona cvorova, gdje treba rijesiti 2 jdbbe s 2 nepoznanice.

$$\varphi_1\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{R}\right) - \varphi_2\frac{1}{R} = \frac{50\angle 0^\circ V}{5\Omega} \quad (2.1)$$

$$\varphi_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{-j2} + \frac{1}{R}\right) - \varphi_1\frac{1}{R} = \frac{50\angle 90^\circ V}{5\Omega} \quad (2.2)$$

Sada se to malo uredi i dobije se:

$$\varphi_1 \cdot \frac{10 + j9}{j20} - \varphi_2 \frac{1}{4} = 10 \quad (2.3)$$

$$\varphi_2 \cdot \frac{-2 + j3}{j4} - \varphi_1 \frac{1}{4} = j25 \quad (2.4)$$

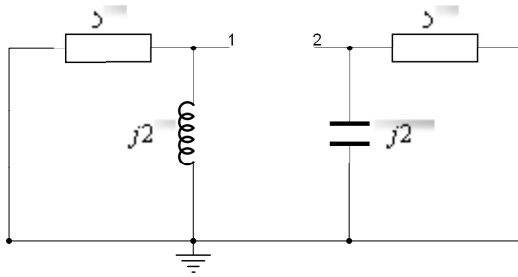
Sada to treba rijesiti, preporucam koristenje kalkulatora koji barata s kompleksim brojevima ili npr. korištenje wolframalphe (moze i Mathematica). Ja sam koristio Wolframalphu jer je trenutno 3:21am, pojma nemam gdje mi je kalkulator. Pa alpha kaze:

$$\varphi_1 = \frac{400}{53} + i\frac{1250}{53}V \quad \varphi_2 = \frac{1100}{53} + i\frac{1450}{53}V \quad (2.5)$$

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{-700 - j200}{53}V = 13.73V \quad (2.6)$$

$$I_R = \frac{U_{12}}{R} = \frac{13.73}{4} = 3.43A \quad (2.7)$$

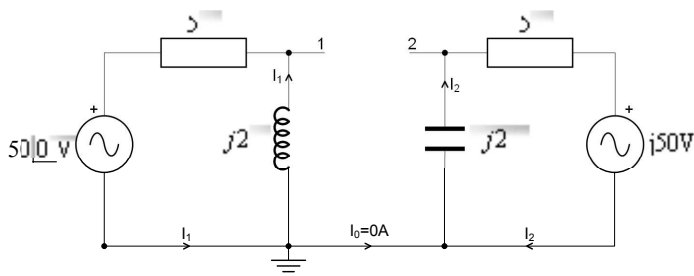
Drugi način rješavanja jest korištenje Theveninove metode. Prvo tražimo Theveninov otpor, a to radimo tako da ugasimo izvore i maknemo otpor na kojem tražimo napon.



Sada gledajući iz točaka 1 i 2, vidimo da su otpor i zavojnica s lijeve strane paralelno spojeni i to je serijski spojeno s paralelnim spojem otpora i kondenzatora s desne strane.

$$R_T = \frac{10j}{5 + 2j} + \frac{-4j}{2 - j2} = \frac{49 + 21j}{29} \Omega = 1.83\Omega \quad (2.8)$$

Sada treba naći Theveninov napon  $U_{12} = U_T$ . To radimo tako da vratimo izvore i gledamo razliku potencijala između točaka 1 i 2. U ovakvim krugovima rekli smo da kroz donju granu ne teče struja, jer struja teče samo u zatvorenim krugovima, a takav ne možemo stvoriti kroz donju granu. Napisati ćemo KZN za obje konture, prvo lijevu, pa desnu.



$$+I_1 \cdot j2 + I_1 \cdot 5 - 50 = 0 \rightarrow I_1 = \frac{50}{5 + j2} \quad (2.9)$$

$$+I_2 \cdot -j2 + I_2 \cdot 2 - j50 = 0 \rightarrow I_2 = \frac{j50}{2 - j2} \quad (2.10)$$

Kada smo izračunali struje, sada trebamo izračunati potencijale točaka 1 i 2. To radimo tako da krenemo od 0 potencijala i zbrajamo sve napone do točke 1, odnosno 2.

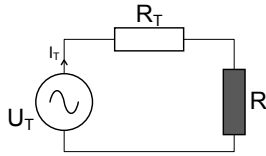
$$\varphi_1 = I_1 \cdot j2 \quad (2.11)$$



$$\varphi_2 = I_2 \cdot -j2 \quad (2.12)$$

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{-525 - j225}{29} = 19.696 \quad (2.13)$$

Sada radimo nadomjesnu Theveninovu shemu za ovaj krug, te racunamo Theveninovu struju, koja je zapravo jednaka struji kroz R:

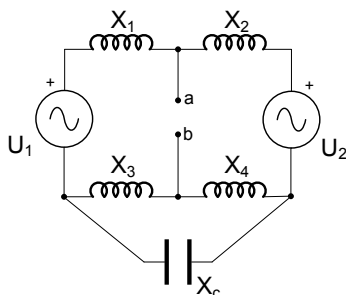


$$I_T = \frac{U_T}{R_T + R} = \frac{19.696}{1.83 + 4} = 3.38A \quad (2.14)$$

To su ta 2 nacina rjesavanja. Rjesenja su razlicita zbog pogresaka zaokruzivanja hrpe modula kompleksnih brojeva.

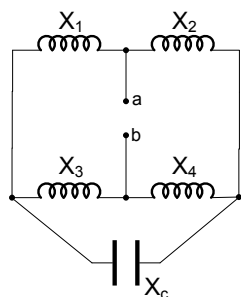
## 2.18 Zadatak XI.1-4

Mrežu prema slici nadomjestite prema Nortonovom teoremu s tocaka a i b. Kolika struja bi tekla kroz otpornik  $R = 20\Omega$  koji priključimo između tih tocaka.

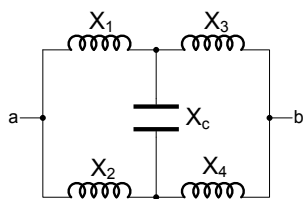


Zadano je:  $X_1 = X_4 = 20$   $X_3 = 40$   $X_2 = 10$   $X_C = 30\Omega$   $U_1 = 10\angle 0^\circ V$   $U_2 = 10\angle 90^\circ V$

Prvo moramo naći Nortonov otpor za ovaj spoj. To ćemo napraviti tako da ugasimo sve izvore i tražimo otpor između a i b:



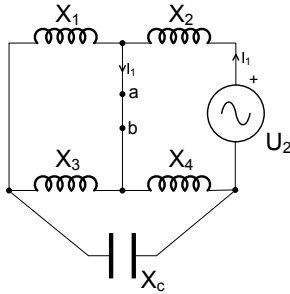
Sada treba prepoznati ovaj spoj, a to je u biti ovo:



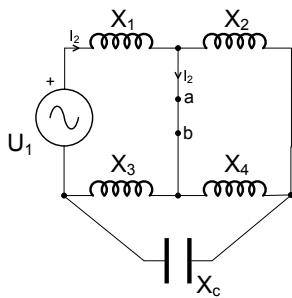
Sada vidimo da je to u biti Wheatstoneov most. Sva sreća pa je most u ravnoteži, jer inače se ne bi dobro proveli s računanjem. To možemo vidjeti tako da su umnošci dijagonalnih otpora jednaki  $j20 \cdot j20 = j40 \cdot j10$ , tako da možemo zanemariti ovaj kondenzator i računati ukupni otpor kao da ga nema.

$$Z_{ab} = Z_N = (X_1 + X_3) \parallel (X_2 + X_4) = j20\Omega \quad (2.1)$$

Sada treba naci Theveninov napon, a to cemo preko superpozicije koja je izuzetno lagana ovdje. Treba samo primjetiti da kada odspojimo jedan izvor i kada ostavimo tocke a i b spojene, uvijek je ta strana gdje smo odspojili kratko spojena, kao i kondenzator. To se najlakse vidi na shemama.



$$I_1 = \frac{U_1}{X_1 + X_3} = \frac{10}{j60} = \frac{-j}{6} A \quad (2.2)$$

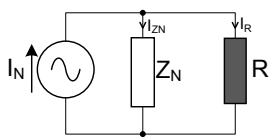


$$I_2 = \frac{U_2}{X_2 + X_4} = \frac{j10}{j30} = \frac{1}{3} A \quad (2.3)$$

Sada vidimo da te struje teku u istom smjeru, pa se one zbrajaju:

$$I_N = I_1 + I_2 = \frac{2-j}{6} = 0.372 \angle -26.57^\circ \quad (2.4)$$

Sada crtamo Nortonovu nadomjesnu shemu, gdje nam je  $R = 20\Omega$

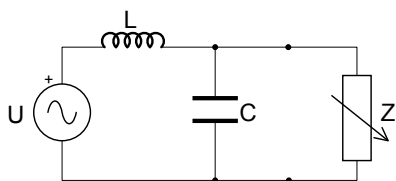


Pa iz onog izvoda, tj. formule za racun struje kroz granu paralele mozemo izracunat  $I_R$

$$I_R = I_N \cdot \frac{Z_N}{Z_N + R} = \frac{3 + j}{12} A = 0.2635 A \quad (2.5)$$

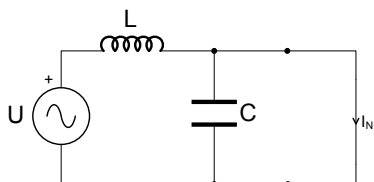
## 2.19 Zadatak XI.1-5

Izračunajte iznose kapaciteta kondenzatora i induktiviteta zavojnice (zanemarivog omskog otpora) koje treba uključiti u spoj prema slici, pa da struja kroz impedanciju  $Z$  bude neovisna o njenom iznosu i jednaka  $0.1\text{A}$ . Napon izvora je  $U=120\text{V}$   $f=50\text{Hz}$ . Da li su dozvoljene vrijednosti impedancije nula odnosno beskonacno.



Ovakvi zadaci se rješavaju na ovaj način: Prvo računamo Nortonovu struju, tako da iskopčamo  $Z$  i kratko spojimo, te nju izjednacimo s  $0.1$ . Kada smo to napravili, onda moramo postići da Nortonov otpor bude beskonacno, a to će se dogoditi u paralelnoj rezonanciji. Dakle, kada odspojimo  $Z$ , onda u ovako jednostavnom slučaju mora vrijediti da je  $X_L = X_C$ . Na taj način smo postigli da će sva Nortonova struja teći upravo kroz  $Z$ . Odmah možemo vidjeti da  $Z$  ne smije biti beskonacno, inače krug prelazi u serijsku rezonanciju, odnosno nadomjesni krug ima beskonacni otpor, pa nemože teći struja kroz  $Z$ .

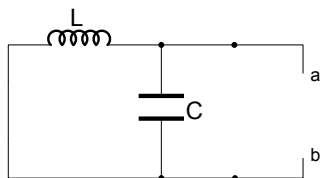
Prvo što radimo, je kratko spajamo  $Z$  i računamo  $I_N$ . Vidimo da je  $X_C$  kratko spojen, tako da je ukupni otpor jednak samo  $X_L$ .



$$I_N = \frac{U}{X_L} \longrightarrow X_L = \frac{120}{0.1} = 1200\Omega \quad (2.1)$$

$$\omega \cdot L = X_L \longrightarrow L = \frac{1200}{314} = 3.821\text{H} \quad (2.2)$$

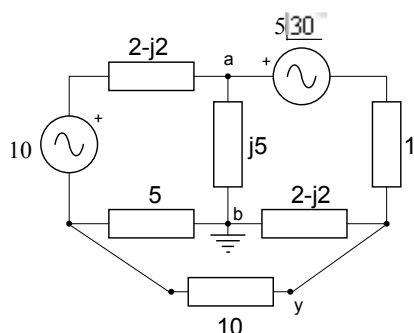
Sada tražimo Nortonov otpor i on mora biti jednak beskonacno, a kao što vidimo on se sastoji od paralelno spojene zavojnice i kondenzatora. Da bi bio beskonacno taj krug mora biti u paralelnoj rezonanciji, a to je ovdje uvijek  $X_C = X_L$



$$\frac{1}{\omega C} = 1200 \longrightarrow C = \frac{1}{1200 \cdot 314} = 2.65 \mu F \quad (2.3)$$

## 2.20 Zadatak XI.1-6

Izračunajte napon između tocaka označenih s x i y.



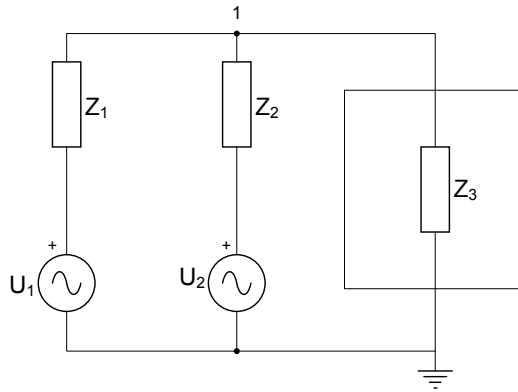
Ili sam ja slijep i nevidim lakši način ili ovaj zadatak nije normalan. Neuravnotežen Wheatstoneov most s kompleksnim impedancijama u 3. ciklusu?!? Pa ko je bio toliko kreativan. Morat ćete mi oprostiti što ja ovo neću riješavati, samo ću objasniti princip.

Poanta zadatka je vrlo jednostavna, prvo nadjete Theveninov otpor. Njega racunate tako da odspojite ovaj otpor od  $10\Omega$  i zatim ovu gornju zvijezdu ( $2-j2$ ),  $j5$  i  $1$  pretvarate u trokut i na taj način uspijete izračunati Theveninov otpor. Zatim nekako treba izračunati Theveninov napon. Za to preporučam korištenje Millmana da biste dobili napon  $U_{ab}$  i onda samo krenete od točke b do točke a zbrajajući sve napone, pa pa iz toga izracunate struje, te pojedinačne napone na svim elementima. Zatim  $U_{xy}$  racunate kao razliku potencijala tocaka x i y, te nakon toga radite Theveninovu nadomjesnu shemu, gdje napon izracunate tako da prvo izracunate struju i zatim izracunate napon na traženom otporu kao umnozak te struje i otpora.

Ovo sve uključuje jako puno kompleksnog računa i nema teoretske šanse da nešto ovako dodje na ispit (ne vjerujem ni da su u zbircu stavili), eventualno može doc da je most u ravnoteži, što znatno olakšava rješavanje, a takav primjer smo imali gore.

## 2.21 Zadatak XI.1-7

Na trosilo  $Z_3$  spojena su paralelno dva izvora. Izracunajte struju trosila.



Zadano je:  $Z_1 = 1 + j$   $Z_2 = 1 - j$   $Z_3 = 1 + 2j\Omega$   $U_1 = 10 + j0V$   $U_2 = 5 - j8.66V$

Ovo je vrlo jednostavan zadatak. Prvo Millmanom izracunamo napon i zatim taj napon podijelimo s traženim otporom da dobijemo struju kroz njega:

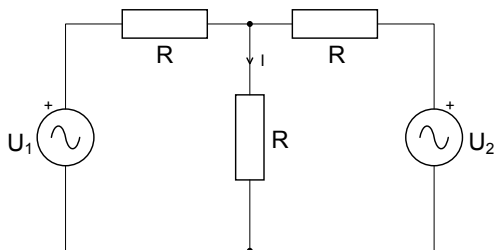
$$U_{10} = \frac{\frac{10+0j}{1+j} + \frac{5-j8.66}{1-j}}{\frac{1}{1+j} + \frac{1}{1-j} + \frac{1}{1+2j}} = 10.58 - j2.17 \quad (2.1)$$

$$I_{Z3} = \frac{U_{10}}{Z_3} = \frac{10.58 - j2.17}{1 + 2j} = 2.982 - j3.799 = 4.829A \quad (2.2)$$



## 2.22 Zadatak XI.1-8

U spoju prema slici uz  $U_1=U_2$  struja  $I=1A$ . Kolika je struja  $I$  ako napon  $U_1$  smanjimo na polovicu pocetne vrijednosti?



Prvo cemo uvesti neke oznake  $I_2$  ce nam biti struja nakon smanjenja napona, i jos cemo napisati da je  $U_1 = U_2 = U_i$

Prvo pisemo Millmana prije nego smanjimo napon

$$U_a = \frac{\frac{U_1}{R} + \frac{U_2}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{\frac{U_1+U_2}{R}}{\frac{3}{R}} = \frac{2U_i}{3} \quad (2.1)$$

Sada tu jdbu podijelimo s  $R$  i s lijeve strane dobijamo  $\frac{U_a}{R} = 1$ :

$$1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{U_i}{R} \longrightarrow \frac{U_i}{R} = \frac{3}{2} \quad (2.2)$$

Sada pisemo nakon sto spustimo napon na pola vrijednosti

$$U_b = \frac{\frac{U_1}{R} + \frac{U_2}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{\frac{U_1+U_2}{R}}{\frac{3}{R}} = \frac{1.5U_i}{3} = \frac{U_i}{2} \quad (2.3)$$

Sada i ovu jdbu podijelimo s  $R$  i s lijeve strane dobijemo  $\frac{U_b}{R} = I_2$

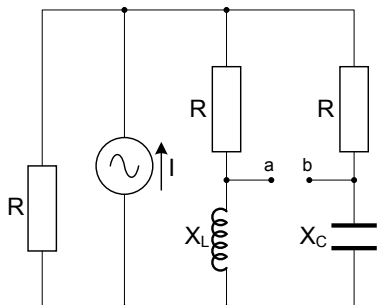
$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_i}{R} \quad (2.4)$$

Sada uvrstimo  $\frac{U_i}{R}$  iz gornje jdbbe gdje smo to izrazili

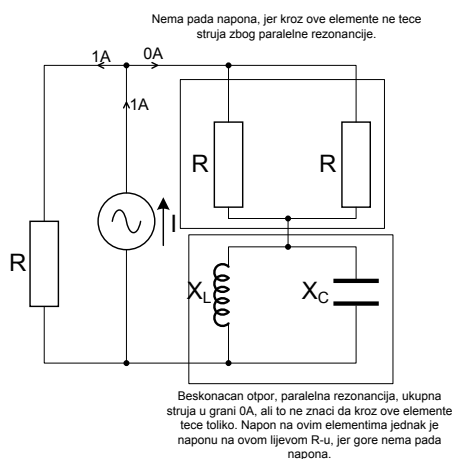
$$I_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} = 0.75A \quad (2.5)$$

## 2.23 Zadatak XI.1-9

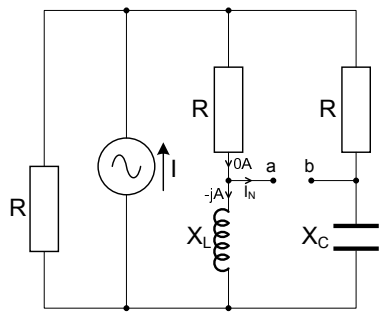
U spoju prema slici je  $R = X_L = X_C$ .  $I = 1A$ . Kolika je Nortonova struja sa stezaljki a i b.



Ovo je malo komplicirano za objasniti. Dakle, stvar je u tome da kada a i b stezaljke kratko spojimo kako bismo izračunali Nortonovu struju shema prelazi u ovo:



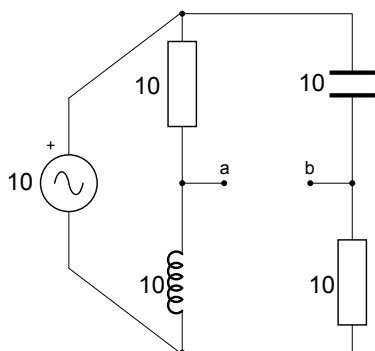
Sada uz ova objašnjenja na slici možemo vidjeti da je  $U_L = U_C = U_R$ , a kako kroz  $U_R$  teče struja od 1A, a napon je na svima isti možemo izračunati da je struja kroz kondenzator  $I_C = j1A$  i struja kroz  $I_L = -j1A$ , tj. da struja na kondenzatoru prethodi naponu za 90 stupnjeva, a struja na zavojnici zaostaje. Sada možemo napisati jdbu cvora a.



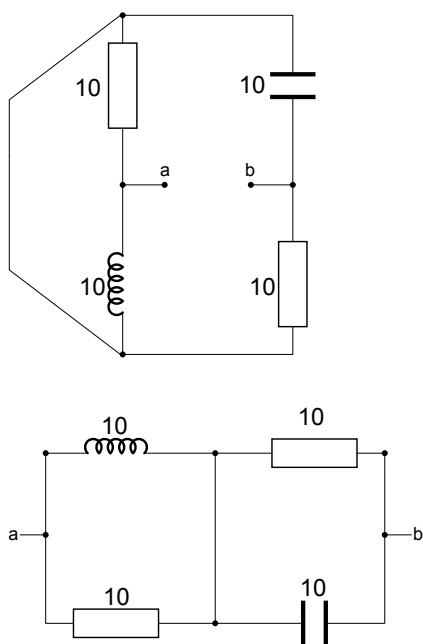
$$0 + j = I_N \longrightarrow I_N = jA = 1A \quad (2.1)$$

## 2.24 Zadatak XI.1-10

Koliki su Theveninov napon i impedancija izmedju tocaka a i b na slici?



U prvom slucaju treba izracunati Theveninovu impedanciju, za to moramo ugasiti izvor i prepoznati spoj:



Ovdje sada vidimo da imamo dvije paralele u seriji. Prva paralela je zavojnica i otpor, to u seriji s paralelom kondenzatora i otpora:

$$Z_{ab} = Z_T = \frac{10 \cdot j10}{10 + j10} + \frac{10 \cdot -j10}{10 - j10} = j100 \cdot \frac{10 - j10 - 10 - j10}{10^2 + 10^2} = j100 \cdot \frac{-j20}{200} = 10\Omega \quad (2.1)$$

Sada treba vratiti izvore i izracunati Theveninov napon, medjutim prvo mozemo provjeriti da je most u ravnotezi, pa je napon jednak 0V.

$$10 \cdot 10 = -j10 \cdot j10 \quad (2.2)$$

Vidimo da most je u ravnotezi, pa je Theveninov napon  $U_T = 0V$

Sada kada otpornik i kondenzator zamjene mjesta, impedancija se nije promijenila, sto vidimo iz sheme, pa cemo samo izracunati napon. Iako se ovo u 2. ciklusu radi preko topografskih dijagrama, ovdje cemo to izracunati cisto racunski. Krenut cemo od tocke b do tocke a i zbrajati sve napone.

$$I_2 \cdot 10 - I_1 \cdot 10 = U_{ab} \quad (2.3)$$

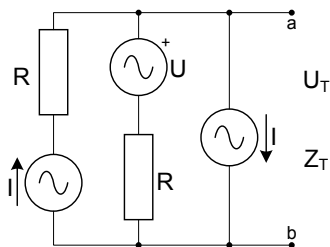
$$I_1 = \frac{U}{10 + j10} = \frac{1}{1 + j} \quad (2.4)$$

$$I_2 = \frac{U}{10 - j10} = \frac{1}{1 - j} \quad (2.5)$$

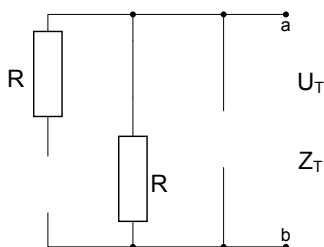
$$U_{ab} = \frac{1}{1 + j} \cdot 10 - \frac{1}{1 - j} \cdot 10 = 10 \cdot \left( \frac{1}{1 + j} + \frac{1}{1 - j} \right) = 10 \cdot \frac{1 - j + 1 + j}{1^2 + 1^2} = 10V \quad (2.6)$$

## 2.25 Zadatak XI.1-11

Odredite elemente nadomjesnog Theveninovog izvora za mrežu na slici ako je  $R = 1\Omega$ ,  $I = 1A$ ,  $U = 1V$



Opet moramo ugasiti izvore i izracunati impedanciju, vidimo da samo u grani gdje je naponski izvor ostaje spojen otpor, jer strujne izvore odspajamo pa je:



$$R_{ab} = R_T = R = 1\Omega \quad (2.1)$$

Theveninov napon cemo racunati preko Millmanove formule. Treba samo primjetiti da je vodljivost grane sa strujnim izvorom jednaka 0, tako da takve grane ne uzimamo kada zbrajamo vodljivosti.

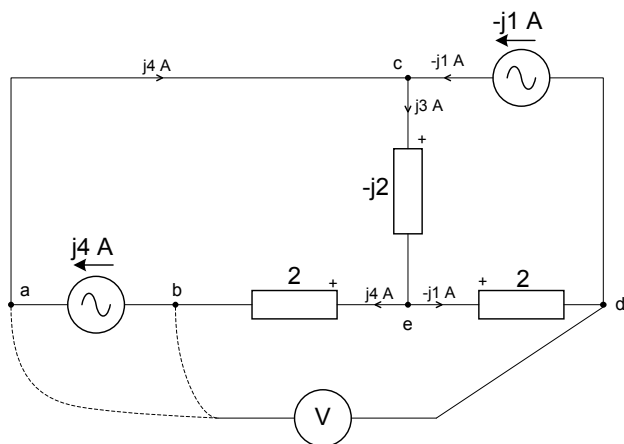
$$U_{ab} = \frac{\frac{U}{R} + I - I}{\frac{1}{R}} = \frac{1A}{1\Omega} = 1V \quad (2.2)$$

U slucaju da desni strujni izvor promjeni svoj smjer, samo nam se mjenja predznak u jdbi:

$$U_{ab} = \frac{\frac{U}{R} + I + I}{\frac{1}{R}} = \frac{3A}{1\Omega} = 3V \quad (2.3)$$

## 2.26 Zadatak XI.1-12

Koliki napon mjeri voltmetar (efektivna vrijednost) u spoju prema slici ako je spojen na točku a odnosno na točku b.



Na sliku smo ucrtali sve struje koje znamo, od koje su 2 zadane, a jedna se vrlo lako izracuna iz jdbe bilo koja od dva. Sada mozemo jednostavno krenut od tocke d to tocke b i zbrajati sve napone, to ce biti napon koji mjeri voltmetar u prvom slucaju:

$$U_{bd} = U_V = -j1 \cdot 2 - j4 \cdot 2 = -j10V = 10V \quad (2.1)$$

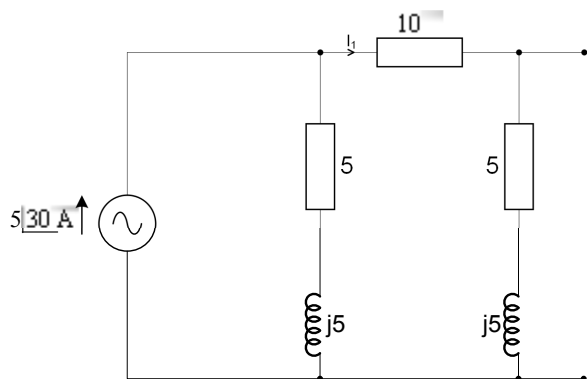
Za drugi slucaj cemo ici malo drugacijim putem, jer neznamo napon strujnog izvora, pa cemo krenut iz tocke d do tocke e, pa iz tocke e kroz c do tocke a

$$U_{ad} = U_V = -j1 \cdot 2 + j3 \cdot -j2 = -j2 + 6 = \sqrt{((-2)^2 + 6^2)} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}V \quad (2.2)$$

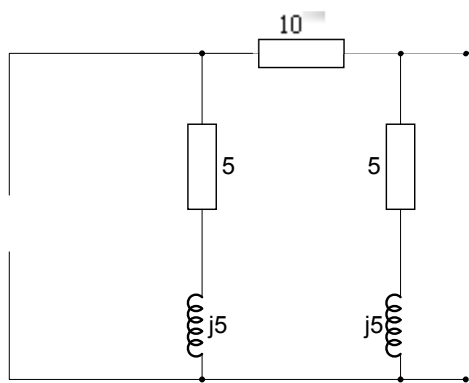


## 2.27 Zadatak XI.1-13

Odredite parametre Theveninovog nadomjesnog izvora sa stezaljki a i b:



Sada prvo treba izracunati Theveninovu impedanciju, to radimo tako da ogasimo izvore i racunamo impedanciju izmedju tocaka a i b.



$$Z_T = Z_{ab} = (15 + j5) \parallel (5 + j5) = \frac{5 + 10j}{2 + j} = 4 + 3j\Omega \quad (2.1)$$

Sada cemo izracunati struju kroz  $I_1$  da bismo pomocu nje dobili napon na ovih  $5+j5$  koji su spojeni izmedju a i b.

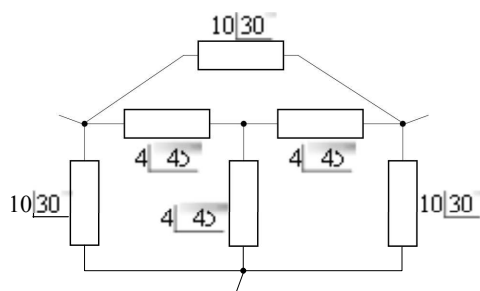
$$I_1 = I \cdot \frac{5 + j5}{20 + j10} = 5\angle 30^\circ \cdot 0.316\angle 18.39^\circ = 1.58\angle 48.39^\circ \quad (2.2)$$

$$U_{ab} = U_T = I_1 \cdot (5 + j5) = 1.58\angle 48.39^\circ \cdot 5\sqrt{2}\angle 45^\circ = 11.17\angle 93.39^\circ \quad (2.3)$$

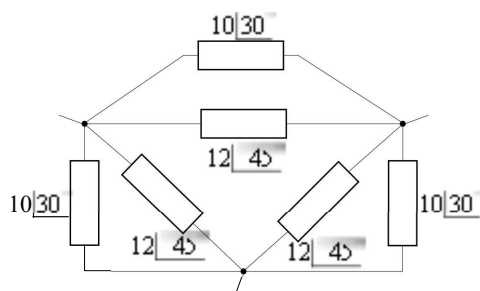
## 2.28 Zadatak XI.1-14

Zamijenite prikazane spjeve impedancija na slici a) i b) sa spojem impedancija u zvijezdu (Y spoj)

a)



Jos jedan glup racunski zadatak. Ovdje treba prvo unutrasnju zvijezdu zamjeniti trokutom, zatim vidjeti da su impedancije spojene paralelno i onda opet vratiti u zvijezdu. Kada je zvijezda simetricna, onda prilikom prelaska u trokut mozemo samo pomnoziti iznose s 3, pa dobivamo da su nam sve impedancije u trokutu jednaki  $Z_a = Z_b = Z_c = 12\angle -45^\circ \Omega$



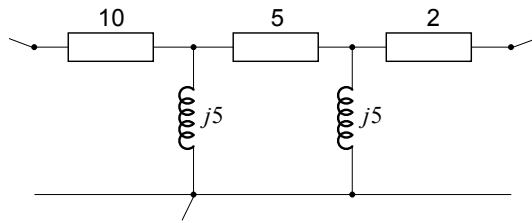
Sada treba izracunati paralelu ovih otpora:

$$Z_p = \frac{10\angle 30^\circ \cdot 12\angle -45^\circ}{10\angle 30^\circ + 12\angle -45^\circ} = 6.852\angle -3.42^\circ \quad (2.1)$$

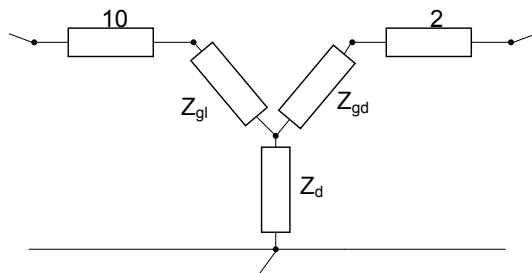
Jos nam ostaje dobiveni otpor podijeliti s 3, jer pretvaramo simetricni trokut jos jedanput u simetricnu zvijezdu, kako je i zadano u zadatku

$$Z_y = 2.284\angle -3.42^\circ \quad (2.2)$$

b)



Ovdje moramo ovaj nesimetričan trokut sastavljen od otpora  $j5$ ,  $5$  i  $j5$  pretvoriti u zvijezdu, pa lijevi kraj ostaje spojen serijski sa ovih  $10\Omega$ , a desni kraj s  $2\Omega$



Oznake:  $R_{gl}$  - gore lijevo  $R_{gd}$  - gore desno  $R_d$  - dolje

$$R_{gl} = \frac{j5 \cdot 5}{5 + j5 + j5} = \frac{j25}{5 + j10} = \frac{j5}{1 + j2} = 2 + j \quad (2.3)$$

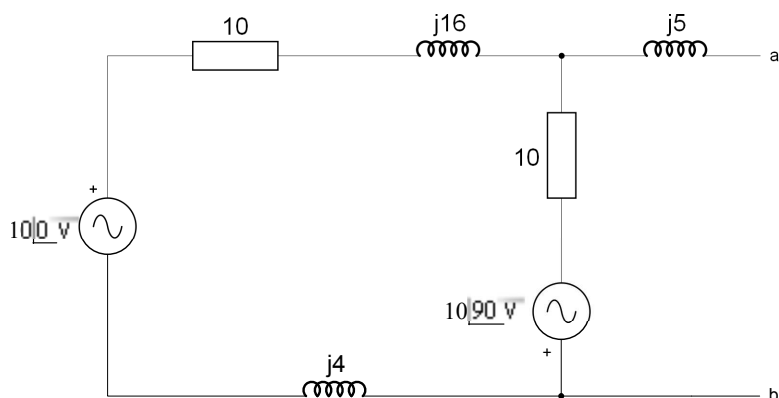
$$R_{gd} = \frac{j5 \cdot 5}{5 + j5 + j5} = \frac{j25}{5 + j10} = \frac{j5}{1 + j2} = 2 + j \quad (2.4)$$

$$R_d = \frac{j5 \cdot j5}{5 + j5 + j5} = \frac{-25}{5 + j10} = \frac{-5}{1 + j2} = -1 + 2j \quad (2.5)$$

Sada nam samo još ostaje zbrojiti ove otpore koji su serijski  $R_1 = R_{gl} + 10 = 12 + j\Omega$   $R_2 = R_{gd} + 2 = 4 + j\Omega$   $R_3 = R_d = -1 + 2j\Omega$

## 2.29 Zadatak XI.1-15

Odredite parametre nadomjesnog spoja sa stezaljki a i b po Theveninu, a zatim po Nortonu.



Pocet cu sanjat ovakve zadatke. Mislim da bi ovo vec trebalo rutinski ic. Kratko spojimo naponske izvore i racunamo Theveninovu, odnosno Nortonovu impedanciju.

$$Z_T = Z_N = (10 + j20) \parallel (10) + j5 = \frac{60}{8} + j\frac{20}{8} + j5 = \frac{60 + j60}{8} = 10.6\angle 45^\circ \quad (2.1)$$

Sada jos samo Theveninov napon, koji cemo dobiti tako da izracunamo struju u krugu i onda krenemo od tocke b do a, zbrajajuci sve napone po putu. Ovaj j5 desno gore mozemo zanemariti jer znamo da kroz njega ne tece struja

$$U_{uk} = 10\angle 0^\circ + 10\angle 90^\circ = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ V \quad (2.2)$$

$$Z_{uk} = 20 + j20 = 20\sqrt{2}\angle 45^\circ \Omega \quad (2.3)$$

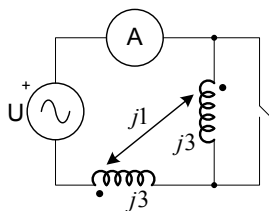
$$I_{uk} = \frac{U_{uk}}{Z_{uk}} = 0.5\angle 0^\circ A \quad (2.4)$$

$$U_{ab} = U_T = -10\angle 90^\circ + 0.5\angle 0^\circ \cdot 10 = 5 - 10j = 11.18\angle -63.43^\circ V \quad (2.5)$$

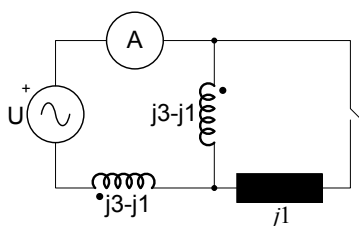
$$I_N = \frac{U_T}{R_T} = \frac{11.18\angle -63.43^\circ}{10.6\angle 45^\circ} = 1.054\angle 45^\circ A \quad (2.6)$$

## 2.30 Zadatak XI.1-16

Odredite odnos pokazivanja ampermetra uz otvorenu i zatvorenu sklopku.  $I_{ot}/I_{zat}=?$



Kada imate ovakav zadatak gdje su medjuinduktiviteti spojeni u istu tocku onda postoji nacin na koji se taj medjuinduktivitet izvuce ispred cvora gdje su oni spojeni. Jos se taj medjuinduktivitet treba dodati i na ove zavojnice. Postupak je takav da ako obje tockice gledaju prema cvoru ili od cvora, onda je vrijednost medjuinduktivitea koju izvucete ispred cvora pozitivna, a trebate ju oduzet od impedancije zavojnica. U suprotnom je vrijednost koju izvucete negativna, a vrijednost dodajete na impedanciju zavojnica. Vidimo konkretno na ovom primjeru kako to izgleda:

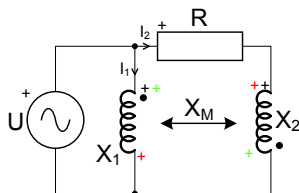


Sada gledamo odnose struja kada je sklopka otvorena i kada je zatvorena

$$\frac{I_{ot}}{I_{zat}} = \frac{\frac{U}{j2+j2}}{\frac{U}{j2 \parallel j1+j2}} = \frac{\frac{8}{3}j}{4j} = \frac{2}{3} \quad (2.1)$$

## 2.31 Zadatak XI.1-17

Izračunajte snagu na otporniku  $R = 25\Omega$  u spoju prema slici.



$$\text{Zadano } X_1 = X_2 = 25\Omega \quad X_M = 20\Omega \quad U = 25V$$

Ovo je drugi tip zadatka s medjuinduktiviteto. Rješava se preko Kirchhoffovih jdbi. U ovom slučaju ćemo kroz ove dvije konture ići u smjeru prema desno i zbrajati ćemo sve napone u krugu. Stvar je u tome da ovdje zbog medjuinduktiviteta i struja kroz drugu granu inducira napon na zavojnici u prvoj grani. Gledamo tako da struja u drugoj grani stvara plus na suprotnoj strani od tockice, pa ćemo i u prvoj grani plus napisati na suprotnoj strani od tockice, pa kada ćemo prolaziti prema desno kroz prvu granu zbrajati ćemo taj inducirani napon, jer idemo s minusa na plus. Njegova vrijednost biti će struja druge grane pomnožena s vrijednosti struje kroz drugu granu. Sve vrijedi i za prvu granu. Crvenom bojom označavati ćemo sve što se događa zbog struje  $I_2$ , a zelenom sve što se događa zbog struje  $I_1$ , a vezano je za medjuinduktivitet.

1. Kontura:

$$+U - I_1 \cdot X_1 + I_2 \cdot X_M = 0 \quad (2.1)$$

2. Kontura:

$$-I_2 \cdot R - I_2 \cdot X_2 + I_1 \cdot X_M + I_1 \cdot X_1 - I_2 \cdot X_M = 0 \quad (2.2)$$

Sada ćemo probati opisati ovu drugu jdbu riječima: Krenemo od gornjeg cvora i s plusa na minus napon pada za  $I_2 \cdot R$ , zatim dolazimo do zavojnice gdje napon pada za  $I_2 \cdot X_2$ , ali na toj zavojnici se zbog medjuinduktiviteta inducira još jedan napon. Sada gledamo drugu granu gdje je struja  $I_1$  stvorila plus kod tockice, taj plus prepisujemo i ovdje kod tockice (zeleni). Ako gledamo taj plus onda tu s minusa na plus napon raste za  $I_1 \cdot X_M$ . Tako isto i na drugoj zavojnici. Dolazimo i s minusa na plus napon raste za  $I_1 \cdot X_1$ , ali postoji još napon medjuinduktiviteta. Ako pogledamo desnu granu, struja  $I_2$  je plus stvorila na suprotnoj strani od tockice, pa ga tako prepisemo i kod ove zavojnice (crveni) i imamo da napon onda pada za  $I_2 \cdot X_M$ . Dosli smo u istu točku i to izjednačimo s 0. Sada to rješavate kao 2 jdbe s 2 nepoznanice

$$5 - j5I_1 + j4I_2 = 0 \quad (2.3)$$

$$-I_2(5 - j9) + j9I_1 = 0 \quad (2.4)$$

$$I_2 = 1.69A \quad (2.5)$$

$$P_R = I_2^2 \cdot R = 71.4W \quad (2.6)$$

### 3.32 Zadatak XII.1-1

Trofazno simetrično trosilo spojeno u zvijezdu vetverovodno je priključeno na trofazni izvor linijskog napona 12V. Impedancija pojedine faze je  $Z = 100\angle 0^\circ \Omega$ . Izračunajte a) fazni napon b) faznu struju c) linijsku struju d) struju nul vodica e) ukupnu radnu snagu.

Ok, ovdje za početak imamo simetrično trosilo u zvijezda spoju, što bi značilo da nam je struja nul vodica  $I_0 = 0A$ , bas zbog simetričnosti trosila. Neznamo kako je spojena izvorska strana, ali nam pise da je linijski napon 12V, onda iz poznate nam relacije izračunamo fazni napon i faznu struju. U spoju trosila u zvijezdu vrijedi isto tako da je linijska struja jednaka faznoj.

$$U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = 6.94V \quad (3.1)$$

$$I_f = I_l = \frac{U_f}{Z} = \frac{6.94}{100} = 69.4mA \quad (3.2)$$

Kako je trosilo simetrično, snage mozemo računati kao

$$P_{uk} = 3U_f I_l \cdot \cos\varphi = 1.44W \quad (3.3)$$



### 3.33 Zadatak XII.1-2

Nesimetrično trosilo u zvijezda spoju četverovodno je priključeno na trofazni simetričan izvor. U pojedinim fazama otpori su 100, 200 i 300  $\Omega$ . Fazni napon je 220V. Izračunajte napon između zvjezdista izvora (0) i zvjezdista trosila (0') ako se prekine nul vodič.

Ovdje se radi samo o korištenju Millmanove formule:

$$U_{00'} = \frac{\frac{220/0^\circ}{100} + \frac{220/240^\circ}{200} + \frac{220/120^\circ}{300}}{\frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300}} \quad (3.1)$$

Sad malo mrljavite s kompleksnim brojevima i rjesite to ili ako imate digitron s kompleksnima onda je to gotovo u par sekundi.

Dobiva se da je

$$U_{00'} = 70 - j17.32 \longrightarrow |U_{00'}| = 72.12V \quad (3.2)$$

### 3.34 Zadatak XII.1-3

U normalnom rezimu rada (kada nije prekinut nul vodič) svaka impedancija (otpor) iz prethodnog zadatka dobiva fazni napon od 220V. Izračunajte napone u fazama trosila nakon prekida nul vodica.

Ocito je da po Kirchoffovim zakonima kada krenemo od zvjezdista trosila vrijedi da je:

$$U_f - U_z = U_{00'} \quad (3.1)$$

Sada samo trebamo to raspisati za svaku od faza (R,S,T), ali najprije cemo fazne napone tih faza napisati u obliku pogodnom za zbrajanje (algebarskom):  $U_R = 220/\underline{0^\circ} = 220 \cdot \cos(0) + j220 \cdot \sin(0) = 220V$ ,  $U_S = 220/\underline{240^\circ} = -110 - 190j$ ,  $U_T = 220/\underline{120^\circ} = -110 + 190j$

Sada cemo samo to uvrstiti u gornju formulu  $U_z = U_f - U_{00'}$

$$U_1 = 220 - 70 + j17.3 = 150 + j17.3 \longrightarrow |U_1| = 151V \quad (3.2)$$

$$U_2 = -110 - j190 - 70 + j17.3 = -180 - j172.7 \longrightarrow |U_2| = 249.5V \quad (3.3)$$

$$U_3 = -110 + j190 - 70 + j17.3 = -180 + j207.3 \longrightarrow |U_3| = 274.5V \quad (3.4)$$

### 3.35 Zadatak XII.1-4

Tri impedancije spojene su u trokut imedju tocaka 1, 2 i 3, te prikljucene na trofazni izvor linijskog napona  $U_l = 120V$ . Ako su impedancije  $Z_{12} = Z_{31} = 6 + j8$  i  $Z_{23} = 10\Omega$  odredite iznose struja kroz pojedine impedancije  $I_{12}, I_{23}$  i  $I_{31}$ . Ėini li ovaj spoj simetricno trofazno trosilo?

Ovdje imamo spojene otpore u trokut, sto nam automatski kaze (naucili smo to, jel tako?) da su spojeni na linijski napon. Dakle, sve sto ovdje treba napraviti je podijeliti linijski napon s otporom pojedine grane trofaznog trosila.

$$I_{12} = \frac{120}{|Z_{12}|} = \frac{120}{10} = 12A \quad (3.1)$$

$$I_{23} = \frac{120}{|Z_{23}|} = \frac{120}{10} = 12A \quad (3.2)$$

$$I_{31} = \frac{120}{|Z_{31}|} = \frac{120}{10} = 12A \quad (3.3)$$

Trosilo nije simetricno, jer impedancije nisu iste, iako im apsolutne vrijednosti jesu.

Sada samo trebamo to raspisati za svaku od faza (R,S,T), ali najprije cemo fazne napone tih faza napisati u obliku pogodnom za zbrajanje (algebarskom):  $U_R = 220\angle 0^\circ = 220 \cdot \cos(0) + j220 \cdot \sin(0) = 220V$ ,  $U_S = 220\angle 240^\circ = -110 - 190j$ ,  $U_T = 220\angle 120^\circ = -110 + 190j$

Sada cemo samo to uvrstiti u gornju formulu  $U_z = U_f - U_{00'}$

$$U_1 = 220 - 70 + j17.3 = 150 + j17.3 \longrightarrow |U_1| = 151V \quad (3.4)$$

$$U_2 = -110 - j190 - 70 + j17.3 = -180 - j172.7 \longrightarrow |U_2| = 249.5V \quad (3.5)$$

$$U_3 = -110 + j190 - 70 + j17.3 = -180 + j207.3 \longrightarrow |U_3| = 274.5V \quad (3.6)$$

### 3.36 Zadatak XII.1-5

Impedancije  $Z_{12} = 20/\underline{60^\circ}\Omega$ ,  $Z_{31} = 20/\underline{60^\circ}\Omega$ ,  $Z_{23} = 10/\underline{0^\circ}\Omega$  spojene u trokut priključene su na trofazni izvor. Uz zadan linijski napon  $U_{12} = 190/\underline{0^\circ}V$  odredite linijske struje  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  (efektivne vrijednosti).

Prvo ćemo izračunati fazne napone, tako da ćemo podijeliti napon s otporom, a zatim ćemo izračunati i linijske struje zbrajanjem faznih struja. 'Izvod' formula za linijske struje možete naći u predavanjima.

$$I_{12} = U_{12}/Z_{12} = \frac{190/\underline{0^\circ}}{20/\underline{60^\circ}} = 9.5/\underline{-60^\circ} = 4.75 - j8.227 \quad (3.1)$$

$$I_{23} = U_{23}/Z_{23} = \frac{190/\underline{240^\circ}}{10/\underline{0^\circ}} = 19/\underline{240^\circ} = -9.5 - j16.45 \quad (3.2)$$

$$I_{31} = U_{31}/Z_{31} = \frac{190/\underline{120^\circ}}{20/\underline{60^\circ}} = 9.5/\underline{60^\circ} = 4.75 + j8.227 \quad (3.3)$$

Sada računamo linijske struje:

$$I_1 = I_{12} - I_{31} = 4.75 - j8.227 - (4.75 + j8.227) = -j16.5 = 16.5A \quad (3.4)$$

$$I_2 = I_{23} - I_{12} = -9.5 - j16.45 - (4.75 - j8.227) = -j16.5 = -14.25 - j8.227 = 16.45A \quad (3.5)$$

$$I_3 = I_{31} - I_{23} = 4.75 + j8.227 - (-9.5 - j16.45) = 14.25 + 24.667 = 28.5A \quad (3.6)$$

Kao što se primijetili, ovo i nije baš po rjesenjima, ali neznam ja kako su oni ovo dobili, jer ne vidim gresku u svome postpuku.

### 3.37 Zadatak XII.1-6

Tri impedancije spojene u zvijezdu četverovodno su priključene na trofaznu mrežu. Odredite impedanciju  $Z_3$  ako je  $Z_1 = j150\Omega$  i  $Z_2 = -j150\Omega$ , a ampermetar u nulvodicu pokazuje nulu. Zadatak riješite pomoću vektorskog dijagrama.

Ja ću to riješiti bez dijagrama, jer je dijagram nacrtan u zbirci i objašnjeno je kako se dolazi do rješenja na taj način. Ako ne volite crtati dijagrame, onda je ovo rješenje za vas.

$$I_A = I_1 + I_2 + I_3 = 0A \quad (3.1)$$

$$\frac{U/0^\circ}{Z_1} + \frac{U/240^\circ}{Z_2} + \frac{U/120^\circ}{Z_3} = 0A \quad (3.2)$$

Sada možemo jdbu podijeliti s  $U$ .

$$\frac{1/0^\circ}{Z_1} + \frac{1/240^\circ}{Z_2} + \frac{1/120^\circ}{Z_3} = 0A \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{j150} + \frac{-0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{-j150} = -\frac{-0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{Z_3} \quad (3.4)$$

E sada ovo riješite pomoću nekog lijepog kalkulatora koji radi s kompleksnim brojevima (ili pomoću wolframa-a) i dobijete da je

$$Z_3 = 86.6\Omega \quad (3.5)$$

### 3.38 Zadatak XII.1-7

Impedancije  $Z_1 = 20/30^\circ$ ,  $Z_2 = 40/0^\circ$  i  $Z_3 = 60/-90^\circ$  četverovodno su priključene na trofaznu mrežu faznog napona 230V. Odredite struju nul vodica:

Ovdje samo trebamo naći struje u pojedinim granama, te ih nakon toga zbrojiti da bismo dobili struju nul vodica  $I_0$ .

$$I_1 = \frac{230/0^\circ}{Z_1} = \frac{230/0^\circ}{20/30^\circ} = 11.5/-30^\circ = 9.96 - j5.75A \quad (3.1)$$

$$I_2 = \frac{230/240^\circ}{Z_2} = \frac{230/240^\circ}{40/0^\circ} = 5.75/240^\circ = -2.875 - j4.98A \quad (3.2)$$

$$I_3 = \frac{230/120^\circ}{Z_3} = \frac{230/120^\circ}{60/-90^\circ} = 3.83/210^\circ = -3.32 - j1.92A \quad (3.3)$$

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 = 9.96 - j5.75 - 2.875 - j4.98 - 3.32 - j1.92 = 3.765 - j12.65 \quad (3.4)$$

$$|I_0| = 13.2A \quad (3.5)$$

### 3.39 Zadatak XII.1-8

Trofazno simetrično trosilo u zvijezda spoju priključeno je na trofazni simetričan izvor linijskog napona  $U_l = 380V$ . Odredite pokazivanje vatmetra koji ima + i - pokazivanje ako mu je prema slici naponska stezaljka spojena: a) na točku 1; b) na točku 2. Izračunajte jalovu i prividnu snagu trosila.

Dakle, prvo počinjemo s time što mjeri vatmetar. Mjeri umnožak napona na naponskim stezaljkama, struje na strujnim i kosinusa kuta između to dvoje, pa idemo naći šta je to ovdje.

a)

Prvo ćemo izračunati napon  $U_{RS}$

$$U_{RT} = \varphi_R - \varphi_T = U_{\underline{0^\circ}} - U_{\underline{120^\circ}} = 220 + 110 - j190 = 380_{\underline{-30^\circ}} \quad (3.1)$$

Sada struju kroz strujne stezaljke:

$$I_f = \frac{U_{\underline{240^\circ}}}{Z_{\underline{30^\circ}}} = 43.87_{\underline{210^\circ}} \quad (3.2)$$

Sada vidimo da je razlika u kutovima  $120^\circ$  pa računamo snagu

$$P_1 = U_{RS} \cdot I_f \cdot \cos(120^\circ) = -8.33kW \quad (3.3)$$

b) Sada računamo napon  $U_{ST}$

$$U_{ST} = \varphi_S - \varphi_T = U_{\underline{240^\circ}} - U_{\underline{120^\circ}} = -110 + 100 - j190 - j190 = 380_{\underline{-90^\circ}} \quad (3.4)$$

Struja se nije mijenjala i opet vidimo da je razlika u kutovima  $60^\circ$  pa računamo snagu.

$$P_2 = U_{ST} \cdot I_f \cdot \cos(60^\circ) = 8.33kW \quad (3.5)$$

Ukupna radna snaga je 3 puta veća, jer je trosilo simetrično

$$P_{uk} = 3 \cdot P = 25kW \quad (3.6)$$

$$tg(30^\circ) = \frac{Q}{P} \longrightarrow Q = 14.43kVar \quad (3.7)$$



### 3.40 Zadatak XII.1-9

Trofazno simetrično trosilo, radne snage  $P$  i faktora snage  $\cos\varphi$  (ind) priključeno je na trofazni izvor frekvencije  $f$ . Odredite kapacitet kondenzatora  $C$  u spoju prema slici, tako da se faktor snage izvora poveća na  $\cos\varphi'$  (ind). Dakle, prvo pocijemo s time što mjeri vatmetar. Mjeri umnožak napona na naponskim stezaljkama, struje na strujnim i kosinusa kuta između to dvoje, pa idemo naci šta je to ovdje.

Zadano:  $U_l = 380V$ ,  $f = 50Hz$ ,  $P = 3.5kW$ ,  $\cos\varphi = 0.6$ ,  $\cos\varphi' = 0.8$

U predavanjima imate objašnjeno kako se kompenzira jalova snaga u trofaznom krugu, ali u biti je vrlo slično kompenzaciji snage u jednofaznim krugovima. Dakle, prvo ćemo izračunati jalovu snagu spoja kada je  $\cos\varphi = 0.6$ , zatim kada je  $\cos\varphi = 0.8$ , zatim ćemo izračunati razliku te dvije snage. Zatim znamo da se ta razlika mora razvijati na kondenzatoru, a kako je na njemu fazni napon, možemo jednostavno naci njegovu impedanciju, a samim time i kapacitet.

$$\cos\varphi = 0.6 \longrightarrow \varphi = 53.13^\circ \quad (3.1)$$

$$\cos\varphi' = 0.8 \longrightarrow \varphi' = 36.86^\circ \quad (3.2)$$

Sada računamo jalovu snagu u prvom i drugom slučaju, ali prvo ćemo podijeliti snagu s 3, da bismo dobili snagu samo na jednom 'otporu' unutar troisla:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Q_1}{\frac{P}{3}} \longrightarrow Q_1 = 1555Var \quad (3.3)$$

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{Q_2}{\frac{P}{3}} \longrightarrow Q_2 = 875Var \quad (3.4)$$

$$Q = Q_1 - Q_2 = 680Var \quad (3.5)$$

$$Q_{uk} = \frac{U_f^2}{X_c} \longrightarrow X_c = \frac{U_f^2}{Q_{uk}} = 70.78\Omega \quad (3.6)$$

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \longrightarrow C = 44.9\mu F \quad (3.7)$$

### 3.41 Zadatak XII.1-10

Kondenzator kapaciteta  $C$  priključuje se prvo između stezaljki R i S, a zatim između stezaljki R i 0 trofaznog simetričnog generatora ( $f=50\text{Hz}$ ). Ako je u drugom slučaju iznos struje kroz kondenzator manja za  $\Delta I$  nego u prvom izračunajte linijski napon mreže.

Zadano:  $C = 150\mu\text{F}$ ,  $\Delta I = 7.59\text{A}$

Znači stvar je u tome da je između R i S spojen na linijski napon, a između R i 0 na fazni napon. Mi znamo relaciju da je:  $U_l = U_f \cdot \sqrt{3}$

Pa ćemo napisati 2 jednačbe

$$I_1 = \frac{U_l}{X_C} \quad (3.1)$$

$$I_2 = \frac{U_f}{X_C} \quad (3.2)$$

$$I_1 = I_2 + \Delta I \quad (3.3)$$

Sada u formulu (3) uvrstimo (1) i (2) i dobijemo da je:

$$\frac{U_l}{X_C} = \frac{U_f}{X_C} + \Delta I \quad (3.4)$$

Ako sada fazni napon zapisemo preko linijskog

$$\frac{U_l}{X_C} = \frac{\frac{U_l}{\sqrt{3}}}{X_C} + \Delta I \quad (3.5)$$

To je sad jdba s jednom nepoznanicom, samo trebamo izračunati  $X_C$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 21.23\Omega \quad (3.6)$$

Sada to uvrstimo gore i riješimo, dobijemo

$$U_l = 381V \tag{3.7}$$

### 3.42 Zadatak XII.1-11

Na trofazni simetrican generator (R,S,T) linijskog napona  $U_l$  spojeno je trosilo sastavljeno od tri otpornika u zvijezda spoju bez nul vodica. Otpornici u fazama R i S su jednakog iznosa R, dok otpornik u fazi T ima otpor R/4. Ako je ukupna snaga trosila P izracunajte otpor R.

Zadano:  $U_l = 380V$ ;  $P = 2000W$

Prvo trebamo izracunati napon  $U_{00'}$ :

$$U_{00'} = \frac{\frac{220/0^\circ}{R} + \frac{220/240^\circ}{R} + \frac{4 \cdot 220/120^\circ}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = -55 + j95.26V \quad (3.1)$$

Sada treba izracunati napone na otporima:

$$U_1 = U_f - U_{00'} = 275 + 95.25j = 291V \quad (3.2)$$

$$U_2 = U_f - U_{00'} = -55 - 285.26j = 290.5V \quad (3.3)$$

$$U_3 = U_f - U_{00'} = -55 - 94.74j = 109.5V \quad (3.4)$$

Sada samo racunamo ukupnu snagu, pa iz nje izracunamo R:

$$P_{uk} = \frac{U_1^2}{R} + \frac{U_2^2}{R} + \frac{U_3^2}{\frac{R}{4}} \longrightarrow R = 108.6\Omega \quad (3.5)$$

### 3.43 Zadatak XII.1-12

Na trofazni izvor (A,B,C) priključeno je trosilo u zvijezda spoju s nul-vodicem. U fazama B i C nalaze se jednaki radni otpornici (R) dok je u fazi A cisti kapacitivni otpor. Poznat je iznos linijskih struja  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$ . Uz prekinu nul-vodic poznata je radna snaga trosila P. Odredite otpor R.

Zadano je:  $I_A = 1A$ ,  $I_B = I_C = 2A$ ,  $P = 690W$

$$I_a = \frac{U_f}{x_c} = 1 \quad (3.1)$$

$$I_b = I_c = \frac{U_f}{R} = 2 \quad (3.2)$$

što daje

$$x_c = 2 \cdot R \quad (3.3)$$

kad se prekine nul-vod imamo:

$$U_{0'0} = \frac{\frac{U_f}{-jx_c} + \frac{U_f \mid -120^\circ}{R} + \frac{U_f \mid -240^\circ}{R}}{\frac{1}{-jx_c} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} \quad (3.4)$$

$$U_{0'0} = \frac{\frac{U_f}{-j2R} + \frac{U_f \mid -120^\circ}{R} + \frac{U_f \mid -240^\circ}{R}}{\frac{1}{-j2R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} \quad (3.5)$$

$$U_{0'0} = \frac{\frac{U_f}{-j2} + U_f \mid -120^\circ + U_f \mid -240^\circ}{\frac{1}{-j2} + 1 + 1} \quad (3.6)$$

$$U_{0'0} = U_f \cdot \frac{\frac{1}{-j2} + 1 \mid -120^\circ + 1 \mid -240^\circ}{\frac{1}{-j2} + 1 + 1} \quad (3.7)$$

$$U_{0'0} = U_f \cdot (-0,412 + j0,353) \quad (3.8)$$

naponi na otpornicima su:

$$U_{Rb} = U_f \cdot \frac{|\underline{-120^\circ} - U_{0'0}|}{|\underline{-120^\circ} + 0,412 - j0,353|} \quad (3.9)$$

$$U_{Rb} = U_f \cdot \frac{1,222}{|\underline{-94,13^\circ}|} \quad (3.10)$$

$$U_{Rc} = U_f \cdot \frac{|\underline{-240^\circ} - U_{0'0}|}{|\underline{-240^\circ} + 0,412 - j0,353|} \quad (3.11)$$

$$U_{Rc} = U_f \cdot \frac{0,52}{|\underline{99,73^\circ}|} \quad (3.12)$$

i na kraju, ukupna je snaga:

$$P = \frac{U_{Rb}^2}{R} + \frac{U_{Rc}^2}{R} \quad (3.13)$$

$$P = \frac{(U_f \cdot 1,222)^2}{R} + \frac{(U_f \cdot 0,52)^2}{R} \quad (3.14)$$

$$690 = \frac{U_f^2}{R} \cdot 1,754 \quad (3.15)$$

$$690 = U_f \cdot 2 \cdot 1,754 \quad (3.16)$$

$$U_f = 196,7 \text{ V} \quad (3.17)$$

$$R = \frac{U_f^2 \cdot 1,754}{P} = 98,35 \text{ } \Omega \quad (3.18)$$

### 3.44 Zadatak XII.1-13

Tri impedancije spojene u zvijedzu, priključene su na trofaznu četverovodnu mrežu. Impedancija u fazi R je čisto kapacitivna, dok su impedancije u fazama S i T čisto omske. Ako ampermetri u linijskim vodovima pokazuju  $I_R = I_S = I_T = 5A$ , odredite njihova pokazivanja kada dodje do prekida nulvodica.

Prvo što možemo zaključiti jest da je  $R = X_C$ , jer su sve struje jednake. Sljedeće možemo izraziti te struje, s time da znamo kuteve, jer tamo gdje je otpor struja mora biti u fazi s naponom, a gdje je kondenzator, mora prethoditi za  $90^\circ$ .

$$I_R = \frac{U_f \angle 0^\circ}{-jX_C} = 5 \angle 90^\circ A \quad (3.1)$$

$$I_S = \frac{U_f \angle 240^\circ}{R} = 5 \angle 240^\circ A \quad (3.2)$$

$$I_T = \frac{U_f \angle 0^\circ}{R} = 5 \angle 120^\circ A \quad (3.3)$$

Sad računamo napon  $U_{00'}$ :

$$U_{00'} = \frac{\frac{U_R \angle 0^\circ}{-jR} + \frac{U_S \angle 240^\circ}{R} + \frac{U_T \angle 120^\circ}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{-jR}} \quad (3.4)$$

Sada zamijenimo  $U_R$ ,  $U_S$  i  $U_T$ , prema jdbama 1,2 i 3 i riješimo tu jdbu. Malo je dugačka pa ću ja samo napisati rješenje:

$$U_{00'} = (-1 + 3j) \cdot R \quad (3.5)$$

Računamo struje prema formuli:

$$I_f = \frac{U_f - U_{00'}}{R} \quad (3.6)$$



$$I_1 = \frac{-jR \cdot j5 - (-1 + 3j)}{-jR} = 3 + 6jA = 6.7A \quad (3.7)$$

$$I_2 = \frac{R \cdot 5/\underline{240^\circ} - (-1 + 3j)}{R} = -1.5 - j7.33A = 7.5A \quad (3.8)$$

$$I_3 = \frac{R \cdot 5/\underline{120^\circ} - (-1 + 3j)}{R} = -1.5 + 1.33j = 2A \quad (3.9)$$

### 3.45 Zadatak XII.1-14

Tri grijaca snage  $P$ ,  $2P$  i  $3P$  ( $\cos\varphi = 1$ ) u zvijezda spoju priključena su četverovodno na trofazni simetričan izvor linijskog napona  $U_l = 380V$ . Odredite struju kroz nul vodič ako je snaga  $P = 380W$ .

Trebamo izračunati struje kroz svaku fazu, ako znamo da na svakom otporu vlada fazni napon i da je struja kroz tu granu u fazi s tim naponom

$$P_1 = U_R \cdot I_R \cdot \cos\varphi \longrightarrow I_R = \sqrt{3/0^\circ} A \quad (3.1)$$

$$P_2 = U_S \cdot I_S \cdot \cos\varphi \longrightarrow I_S = 2 \cdot \sqrt{3/240^\circ} A \quad (3.2)$$

$$P_3 = U_T \cdot I_T \cdot \cos\varphi \longrightarrow I_T = 3 \cdot \sqrt{3/120^\circ} A \quad (3.3)$$

$$I_0 = I_R + I_S + I_T = -2.6 + 1.5j A = 3A \quad (3.4)$$

### 3.46 Zadatak XII.1-15

Trofazno trosilo u spoju zvijezde s nul vodicem sastavljeno je od otpornika (u fazi R), kondenzatora (u fazi S) i zavojnice (u fazi T), priključeno je na trofazni izvor. Snaga trosila je  $P = 20W$ . Odredite radnu snagu trosila ako se prekine nul vodice uz  $R = X_C = X_L$

$$P_1 = \frac{U_f^2}{R} = 20W \quad (3.1)$$

Sada racunamo  $U_{00'}$ :

$$U_{00'} = \frac{\frac{U_f/\underline{0^\circ}}{R} + \frac{U_f/\underline{240^\circ}}{-jR} + \frac{U_f/\underline{120^\circ}}{jR}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{-jR} + \frac{1}{jR}} = U_f \cdot (1 - \sqrt{3})V \quad (3.2)$$

I sada cemo izracunati snagu preko napona na otporniku, koji je jednak razlici faznog napona i  $U_{00'}$ .

$$P_2 = \frac{(U_f - U_{00'})^2}{R} = \frac{(U_f - U_f \cdot (1 - \sqrt{3}))^2}{R} = \frac{3U_f^2}{R} = 3 \cdot 20W = 60W \quad (3.3)$$

### 3.47 Zadatak XII.1-16

Odredite Theveninov napon u trofaznoj mrezi s tocaka T i 0' odnosno S i 0'. Fazni napon izvora je 220V, a pocetni fazni kut napona  $U_R$  je nula. U kojem je slucaju Theveninov napon veci? Da li se i Theveninova impedancija mijenja u ova dva slucaja.

Odmah zakljucujemo da se Theveninova impedancija ne mijenja (ako netko to ne kuzi, ponovno prouciti prva 2 tjedna :D) i jednaka je:

$$Z_T = -j100 \parallel 100 = 50 - j50 \quad (3.1)$$

Theveninov napon cemo naci tako da prvo nadjemo razliku potencijala izmedju R i S (u drugom slucaju R i T), te zatim izracunamo potencijal tocke (0'):

a)

$$U_{RS} = \varphi_R - \varphi_S = 220 - (-110 - j190) = 330 + j190 \quad (3.2)$$

$$I_1 = \frac{U_{RS}}{100 - j100} = 0.7 + 2.6j \quad (3.3)$$

$$\varphi_{0'} = 220 - (0.7 + 2.6j) \cdot (-j100) = -40 + 70j \quad (3.4)$$

$$U_T = \varphi_T - \varphi_{0'} = -110 + j190 + 40 - 70j = -70 + j120 = 138.92V \quad (3.5)$$

b)

$$U_{RT} = \varphi_R - \varphi_S = 220 - (-110 + j190) = 330 - j190 \quad (3.6)$$

$$I_2 = \frac{U_{RT}}{100 - j100} = 2.6 + 0.7j \quad (3.7)$$

$$\varphi_{0'} = 220 - (2.6 + 0.7j) \cdot (-j100) = 150 + 260j \quad (3.8)$$

$$U_T = \varphi_S - \varphi_{0'} = -110 - j190 - 150 - 260j = -260 - 450j = 519V \quad (3.9)$$

### 3.48 Zahvale, zamolbe i ostalo

Tkogod je procitao ovo i misli da je korisno, treba biti zahvalan ne meni, vec nekim drugim ljudima. Da nema njih, ovo nikad ne bi nastalo - u to vas uvjeravam.

1. Luka aka Tywin - covjek koji je mene prosle (i ove) godine ucio osnove. Bez tog znanja nekako sumnjam da bi ovaj .pdf ikada nastao :)

2. Svima koji su mi govorili da nisam normalan i da bi se trebo prihvatit ucenja svojih predmeta koje padam :)

3. Osobi, koje da nema, ne bih ima volje, razloga i cega sve ne, a vjerojatno se ne bih ni sjetio ovo raditi.

4. Mikeu Oldfieldu sto je napisao Shadow on the Wall - najcesce slusanu pjesmu prilikom izrade ovog cuda.

Ako nadjete neku gresku, slobodno javite da je mogu ispraviti. Ako nekome treba LaTeX source, isto neka javi, ali je koma jer sam prvi put pisao nesto ovakvo. Za grafiku isto tako. Koristite ovo kako god hocete - dijelite, uploadajte, prepravljajte.

Uzivajte.