Predavanja 4



(uredio prof.dr.sc. Armin Pavić)

SLOŽENI KRUGOVI ISTOSMJERNE STRUJE I POSTUPAK SUPERPOZICIJE

Mosni spoj Spojevi u trokut i zvijezdu El. krugovi s više izvora Metoda superpozicije

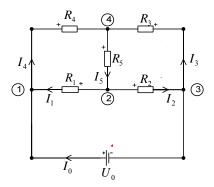
1

Mosni spoj



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

• Paralelni spoj dva djelila napona, premošten petim otporom spojenim između srednjih točaka dvaju djelila (kakav je prikazan na slici) naziva se mosni spoj.



2

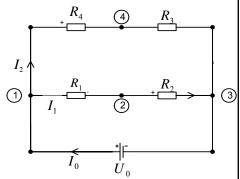
Mosni spoj - ravnoteža mosta



- Posebno zanimljivo je stanje kad oba djelila dijele napon izvora u istom omjeru - most je <u>u ravnoteži</u>.
- Uvjet ravnoteže: $\frac{U_{R1}}{U_{R2}} = \frac{U_{R4}}{U_{R3}}$ $\frac{I_1 R_1}{I_1 R_2} = \frac{I_2 R_4}{I_2 R_3} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}$ ① $\frac{R_1}{I_1}$

$$\frac{I_1R_1}{I_1R_2} = \frac{I_2R_4}{I_2R_3} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}$$

$$R_1R_3 = R_2R_4$$

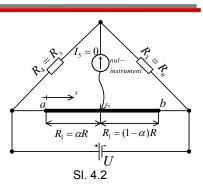


- U ravnoteži: $U_{R1} = U_{R4}$ (i $U_{R2} = U_{R3}$) pa je $\varphi_2 = \varphi_4$ tj. $U_{24} = 0$
- Što se promijeni kad između točaka 2 i 4 spojimo neki otpor R₅?

Primjena mosta: Precizno mjerenje otpora (1)



osnove elektrotehnike



Ovdje su otpori R_1 i R_2 dijelovi otporne žice duljine l po kojoj se može pomicati klizač; položaj klizača (udaljenost od točke $\it a$) može se precizno očitati. Otpor R_3 je referentni otpor, čija je vrijednost stabilna i točno poznata. Otpor R_4 = R_x je otpor čija se vrijednost mjeri. Ukupni otpor otporne žice R_{ab} = R također je poznat.

Primjena mosta: Precizno mjerenje otpora (2)



· Mjerenje se provodi tako da se klizni kontakt pomiče do točke x_0 kada vrlo precizni nul-instrument ne registrira nikakvu struju u mosnoj grani (I_5 =0). Tada je:

$$R_1 = \frac{x_0}{l} \cdot R = \alpha R, \quad R_2 = \frac{l - x_0}{l} \cdot R = (1 - \alpha) \cdot R \qquad (4.9)$$

Dobiva se:

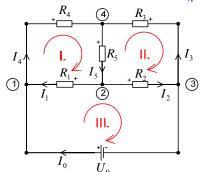
$$R_4 = R_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_3 = \frac{x_0}{l - x_0} \cdot R_3 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot R_n$$
 (4.10)

Mosni spoj (poznat pod nazivom Wheatstoneov most) rabi se za precizno mjerenje nepoznatih otpora.

Mosni spoj - opis jednadžbama KZ (1)



Za odrediti struje u granama mosta koji nije u u ravnoteži, mosni spoj ćemo opisati jednadžbama Kirchhoffovih zakona, a u tu svrhu označeni su čvorovi i konture te pojedine struje (i pretpostavljeni referentni smjerovi struja i obilaska kontura) na slici (postaviti jednadžbe KZ!)



SI. 4.1

Mosni spoj - opis jednadžbama KZ (2)



OSNOVE ELEKTROTEHNII

Jednadžbe Kirchhoffovih zakona:

7

Mosni spoj - opis jednadžbama KZ (3)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

• Rješavanje ovog sustava jednadžbi po I_5 daje:

$$I_{5} = \frac{R_{1} \cdot R_{3} - R_{2} \cdot R_{4}}{\left(R_{1} + R_{2}\right) \cdot \left(R_{3} + R_{4}\right) \cdot \left(\frac{R_{1} \cdot R_{2}}{R_{1} + R_{2}} + \frac{R_{3} \cdot R_{4}}{R_{3} + R_{4}} + R_{5}\right)} \cdot U_{0} \quad (4.7)$$

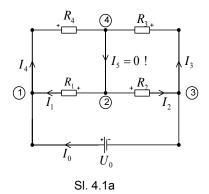
Uvjet ravnoteže mosta:

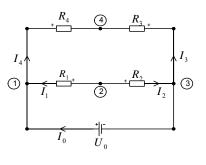
Kada je $R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_4 = 0$, izraz (4.7) jednak je nuli. Struja I_5 ne teče pa se sl. 4.1 može nadomjestiti sa sl. 4.1a ili sl. 4.1b.

Mosni spoj - opis jednadžbama KZ (4)



OSNOVE ELEKTROTEHNI





SI. 4.1b

Uz $I_5=0$ jednadžbe (4.2) i (4.3) reduciraju se na $-I_1-I_2=0$, odnosno $I_3+I_4=0$, što je iz sl. 4.1a-b očito.

a

Mosni spoj - opis jednadžbama KZ (5)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKI

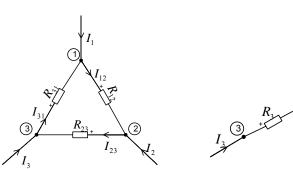
Relacija

$$R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_4 = 0; \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}$$
 (4.8)

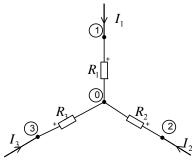
<u>uvjet je ravnoteže mosta</u>. Kada je ona zadovoljena, dopušteno je <u>mosnu granu</u> (grana s R_5) kratko spojiti (sl. 4.1a) ili odspojiti (sl. 4.1b), jer navedeni zahvati ne mijenjaju strujno-naponske prilike u krugu, a mreža se pojednostavljuje na <u>serijsko-paralelni spoj otpornika R_1 , R_2 , R_3 i R_4 .</u>

Spojevi između 3 točke (trokut i zvijezda)





Sl. 4.3a: Trokut



SI. 4.3b: Zvijezda

Gledano iz ostatka el. kruga, ovi spojevi su ekvivalentni ako su između tri točke isti naponi te ako u njih ulaze iste struje. Na temelju toga: pretvorbe trokut-zvijezda!

Ekvivalentnost spojeva trokuta i zvijezde (1)



Ekvivalentnost trokuta i zvijezde slijedi iz zadovoljenja sljedećih naponskih jednadžbi:

$$U_{12} = I_{12} \cdot R_{12} = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 \tag{4.11a}$$

$$U_{23} = I_{23} \cdot R_{23} = I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 \tag{4.11b}$$

$$U_{31} = I_{31} \cdot R_{31} = I_3 \cdot R_3 - I_1 \cdot R_1 \tag{4.11c}$$

4.11(a-c) sustav je triju jednadžbi s tri nepoznanice (R_1 , R_2 , R_3 , odnosno R_{12} , R_{23} , R_{31}) s parametrima (strujama) koje moraju zadovoljavati sljedeće strujne jednadžbe:

čvor 1:
$$+I_1$$
 $-I_{12}$ $+I_{31} = 0$ (4.12a)
čvor 2: $+I_2$ $+I_{12} -I_{23}$ = 0 (4.12b)

$$\text{ evor 2:} \qquad +I_2 \qquad +I_{12}-I_{23} \qquad =0 \qquad (4.12b)$$

čvor 3:
$$+I_3 + I_{23} - I_{31} = 0$$
 (4.12c)

Ekvivalentnost spojeva trokuta i zvijezde (2)



OSNOVE ELEKTROTEHNI

Iz sustava 4.11(a-c) slijedi:

$$I_{12} \cdot R_{12} + I_{23} \cdot R_{23} + I_{31} \cdot R_{31} = 0 (4.13)$$

Iz sustava 4.12(a-c) slijedi:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 (4.14)$$

3

Pretvorba trokuta u zvijezdu



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- Poznanice: R_{12} , R_{23} , R_{31}
- Nepoznanice: R_1 , R_2 , R_3

U jednadžbi 4.12 eliminacijom struja I_{31} i I_{23} , i to zamjenom $I_{31}=I_{12}-I_1$ (4.12a) i $I_{23}=I_{12}+I_1$ (4.12b), dobiva se:

$$I_{12} = \frac{I_1 \cdot R_{31} - I_2 \cdot R_{23}}{R_{\Lambda}} \tag{4.15}$$

gdje je:

$$R_{\Delta} = R_{12} + R_{23} + R_{31} \tag{4.16}$$

Pretvorba trokuta u zvijezdu (2)



Uvrštavanjem struje I_{12} u jednadžbu 4.11a dobiva se:

$$I_{1} \cdot \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{\Lambda}} - I_{2} \cdot \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{\Lambda}} = I_{1} \cdot R_{1} - I_{2} \cdot R_{2}$$
 (4.17a)

Analognim postupkom eliminacije i uvrštavanjem u jednadžbe 4.11b i 4.11c dobiva se:

$$I_2 \cdot \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{\Lambda}} - I_3 \cdot \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{\Lambda}} = I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3$$
 (4.17b)

$$I_3 \cdot \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{\Lambda}} - I_1 \cdot \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{\Lambda}} = I_3 \cdot R_3 - I_1 \cdot R_1$$
 (4.17c)

15

Pretvorba trokuta u zvijezdu (3)



Sustav jednadžbi 4.11(a-c) prelazi u jednakosti kad je:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{\Lambda}}; \quad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{\Lambda}}; \quad R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{\Lambda}}$$
 (4.18)

čije je važno svojstvo:

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} = \frac{R_{12}^2}{R_{\Delta}} \tag{4.18a}$$

$$\frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} = \frac{R_{23}^2}{R_{\Delta}} \tag{4.18b}$$

$$\frac{R_3 \cdot R_1}{R_2} = \frac{R_{31}^2}{R_{\Lambda}} \tag{4.18c}$$

• Relacije 4.18(a-c) pokazuju kako se iz poznatih otpora trokuta dobivaju otpori ekvivalentne zvijezde.

Pretvorba zvijezde u trokut



• Poznanice: R_1 , R_2 , R_3

• Nepoznanice: R_{12} , R_{23} , R_{31}

U jednadžbi 4.11a eliminiraju se struje I_1 i I_2 zamjenom $I_1 = I_{12} - I_{31}$ i $I_2 = I_{23} - I_{12}$ (4.12a i b), te se dobiva:

$$U_{12} = I_{12} \cdot R_{12} = I_{12} \cdot (R_1 + R_2) - (I_{23} \cdot R_2 + I_{31} \cdot R_1)$$
 (4.19)

U drugom dijelu dobivenog izraza zamijeni se

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{\Delta}}$$
 i $R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{\Delta}}$ (vidi 4.18), iskoristi 4.13

u obliku $I_{12} \cdot R_{12} = -(I_{23} \cdot R_{23} + I_{31} \cdot R_{31})$, pa se dobiva:

$$I_{23} \cdot R_2 + I_{31} \cdot R_1 = -I_{12} \cdot \frac{R_{12}^2}{R\Delta} = -I_{12} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$
 (prema 4.18a)

17

Pretvorba zvijezde u trokut (2)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Nakon ovoga sređivanjem 4.19 dobiva se:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} \tag{4.19a}$$

Primjenom analognog postupka na U_{23} i U_{31} dobiva se:

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} \tag{4.19b}$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2} \tag{4.19c}$$

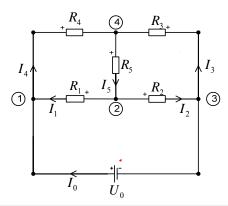
Relacije 4.19(a-c) pokazuju kako se iz poznatih otpora zvijezde dobivaju otpori ekvivalentnog trokuta.

Pretvorbe zvijezde i trokuta omogućuju da se svaki mosni spoj pretvori u serijsko-paralelnu kombinaciju otpora.

Primjer



- a) $R_1 = R_2 = R_5 = 6 \Omega$; $R_3 = R_4 = 2 \Omega$ i $U_0 = 4.8$ V. (1,6A; 0A)
- b) $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 6 \Omega$; $R_3 = 10 \Omega$ i $U_0 = 13,6$ V. (2A; 0,133A)

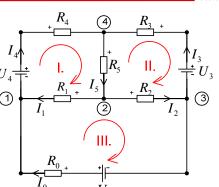


10

Električni krugovi s više izvora



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



SI. 4.4

lako su u krugu sa sl. 4.4 moguće transformacije zvijezde u trokut (npr. zvijezde $R_1R_2R_5$ ili zvijezde $R_3R_4R_5$), one ne pomažu u rješavanju strujno-naponskih prilika, jer ne eliminiraju izvore u granama (u našem primjeru U_4 i U_3).

Primjena Kirchhoffovih zakona (1)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Pri rješavanju krugova s više izvora polazište uvijek mogu biti jednadžbe Kirchhoffovih zakona. Postupak je slijedeći:

- 1. Za sve čvorove osim jednog napišu se jednadžbe KZS (č-1 jednadžbi).
- 2. Odredi se skup n neovisnih petlji (kontura) i za svaku od njih napiše se jednadžba KZN ($n=g-\check{c}+1$).
- 3. Riješi se tako dobiveni sustav od g jednadžbi s g nepoznanica.

Primjer za mrežu sa sl. 4.4:

21

Primjena Kirchhoffovih zakona (2)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Jednadžbe KZ se u matričnom obliku mogu napisati ovako:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & R_{1} & 0 & 0 & R_{4} & R_{5} \\ 0 & 0 & -R_{2} & -R_{3} & 0 & -R_{5} \\ R_{0} & -R_{1} & R_{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{0} \\ I_{1} \\ I_{2} \\ I_{3} \\ I_{4} \\ I_{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{4} \\ -U_{3} \\ U_{0} \end{bmatrix}$$
(4.20a)

ili

$$\underline{R} \cdot \underline{I} = \underline{U} \tag{4.20b}$$

Primjena Kirchhoffovih zakona (3)



Izrazi 4.20(a-b) predstavljaju Ohmov zakon u matričnom obliku.

Struje, a time i odgovor na strujno-naponske prilike u krugu, dobivaju se određivanjem matrice \underline{R}^{-1} , inverzne matrice matrici \underline{R} , uz poznate vrijednosti napona izvora (U_0 , U_3 i U_4).

$$\underline{I} = \underline{R}^{-1} \cdot \underline{U} \tag{4.21}$$

U iole složenijim krugovima (već i na primjeru sa sl. 4.4) pri rješavanju je značajna pomoć računala.

22

Metoda superpozicije



OSNOVE ELEKTROTEHNIK

Načelo superpozicije:

u električnom krugu s više izvora ukupno djelovanje svih izvora (tj. napon ili struja) na bilo kojem elementu kruga predstavlja superpoziciju pojedinačnih djelovanja svakog pojedinog izvora.

Postupak superpozicije:

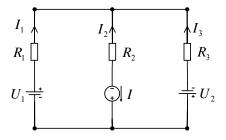
- 1. Odrede se pojedinačna djelovanja svakog izvora (Svi izvori osim jednog se umrtve (ugase) tako da se naponski izvori zamijene kratkim spojem, a strujni prekidom kruga)
- 2. Odredi se ukupno djelovanje kao (algebarski) zbroj pojedinačnih djelovanja svakog pojedinog izvora

Metoda superpozicije: primjer



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Odredi struje I_1 , I_2 i I_3 u mreži prema slici.



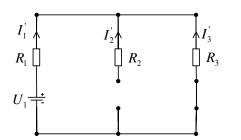
25

Metoda superpozicije: primjer (2)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

1.a. Djeluje samo naponski izvor U_1



$$I_{1}' = \frac{U_{1}}{R_{1} + R_{3}}$$

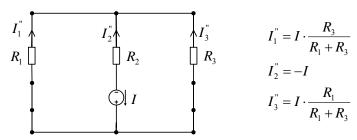
$$I_{2}^{'}=0$$

$$I_{3}' = -\frac{U_{1}}{R_{1} + R_{3}}$$

Metoda superpozicije: primjer (3)



1.b. Djeluje samo strujni izvor I



$$I_1'' = I \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

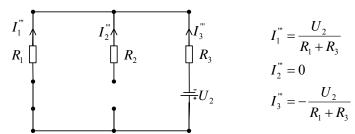
$$I_2^{"}=-I$$

$$I_3'' = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

Metoda superpozicije: primjer (4)



1.c. Djeluje samo naponski izvor U_2



$$I_1^{"'} = \frac{U_2}{R_1 + R_3}$$

$$I_{2}^{""}=0$$

$$I_3^{""} = -\frac{U_2}{R_1 + R_3}$$

Metoda superpozicije: primjer (5)



OSNOVE ELEKTROTEHNIK

2. Završni korak (zbroj pojedinačnih djelovanja)

$$\begin{split} I_1 &= I_1^{'} + I_1^{''} + I_1^{'''} = \frac{U_1 + U_2 + I \cdot R_3}{R_1 + R_3} \\ I_2 &= I_2^{'} + I_2^{''} + I_2^{'''} = -I \\ I_3 &= I_3^{'} + I_3^{''} + I_3^{'''} = \frac{I \cdot R_1 - U_1 - U_2}{R_1 + R_3} \end{split}$$

9

Metoda superpozicije - izvod (1)



E ELEKTROTEHNIKE

Vektor napona \underline{U} iz jednadžbi 4.20 i 4.21 (koje opisuju krug na sl. 4.4) može se pisati i ovako: $\underline{U} = \underline{U}_0 + \underline{U}_3 + \underline{U}_4$,

$$\underline{U_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_0 \end{bmatrix}, \quad \underline{U_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -U_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{U_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uvrsti li se ova notacija u 4.21, dobiva se:

$$\underline{I} = \underline{R}^{-1} \cdot \left(U_0 + U_3 + U_4 \right) = \underline{R}^{-1} \cdot U_0 + \underline{R}^{-1} \cdot U_3 + \underline{R}^{-1} \cdot U_4$$
 (4.22)

Dakle, struja <u>/</u> dobiva se kao zbroj struja

$$\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{\underline{U}}_{0}; \quad \underline{\underline{I}}^{"} = \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{\underline{U}}_{3}; \quad \underline{\underline{I}}^{"} = \underline{\underline{R}}^{-1} \cdot \underline{\underline{U}}_{4}$$
 (4.23)

30

Metoda superpozicije - izvod (2)



SNOVE ELEKTROTEHNIKE

Kako je vektor struje <u>/</u> vektor bez 0-tih članova, ono što vrijedi za <u>/</u> vrijedi i za svaki član toga vektora:

$$I_{i} = I_{i}' + I_{i}'' + I_{i}''', i = 0, ..., 5$$

gdje su pribrojnici odgovarajući članovi vektora <u>I', I"', I"'</u>.

Promotrimo l'= $\underline{R}^{-1} \cdot \underline{U}_0$. Ovom rješenju odgovara jednadžba $\underline{R} \cdot l' = \underline{U}_0$. Navedenoj jednadžbi pridružuje se krug sa sl. 4.4 u kojem su izvori U_3 i U_4 ugašeni (sl. 4.5).

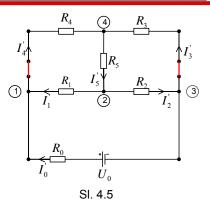
Gašenje naponskoga izvora: kratki spoj na grani izvora. Gašenje strujnoga izvora: prazni hod u grani izvora.

21

Metoda superpozicije - izvod (3)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKI

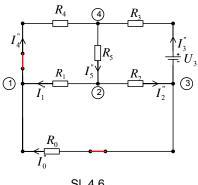


Krug sa sl. 4.5 može se riješiti pretvorbom trokut-zvijezda ili, u slučaju ravnoteže mosta, i jednostavnijim postupkom. Dakle i bez upotrebe matričnog računa dadu se odrediti struje I_i , $i=0,\ldots,5$, tj. vektor $\underline{I'}$.

Metoda superpozicije - izvod (4)



OSNOVE ELEKTROTEHNIK



SI. 4.6

Analogno, promatrajući \underline{I} " i \underline{I} ", odnosno krugove koje odgovaraju jednadžbama $\underline{R} \cdot \underline{I}$ "= \underline{U}_3 (sl. 4.6) i $\underline{R} \cdot \underline{I}$ "= \underline{U}_4 (sl. 4.7), dolazimo do parcijalnih rješenja koja ne traže matrični račun.

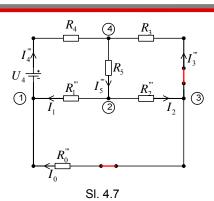
33

Metoda superpozicije - izvod (5)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE





Smjerovi struja na sl. 4.5 do sl. 4.7 nisu proizvoljni. Oni odgovaraju odabranim (referentnim) smjerovima struja u izvornom krugu (sl. 4.4).

34