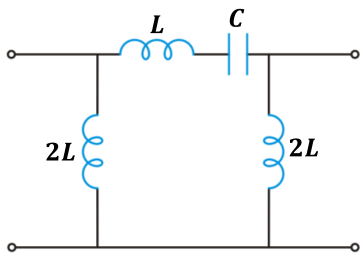
Druga parcijalna provjera znanja iz predmeta Električni krugovi II
Grupa A

Zadatak 1.



1.1. (1 bod) Za filter na slici odredite granične kružne učestanosti, te na osnovu toga odredite grupu filtera kojoj on pripada. Poznato je: $L = 100\ (mH), C = 0{,}1\ (\mu F)$.

Rješenje:

Dati filter je oblika π simetričnog četveropola za koji je: $\mathcal{Z}_1 = j\dfrac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}, \quad \mathcal{Z}_2 = j\omega L$

Sistem nejednačina za određivanje propusnog opsega je: $-1 \leq \dfrac{\omega^2 LC - 1}{4\omega^2 LC} \leq 0$

Rješenje ovog sistema je: $\sqrt{\dfrac{1}{5LC}} \leq \omega \leq \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$

Filter pripada grupi filtra propusnika opsega učestanosti čije su granične kružne učestanosti:

$\omega_{c1} = 4472\ (rad/s), \quad \omega_{c2} = 10000\ (rad/s)$

1.2. (1 bod) Na otpornik otpornosti $R = 72\ (\Omega)$ doveden je složenoperiodični napon:

$$u_R(t) = U_0 + 2U_0 \cdot sin(\omega t) + 3U_0 \cdot sin(2\omega t) + 4U_0 \cdot sin(3\omega t)\ \ (V).$$

Ako je $U_0 = 12\ (V)$, odredite aktivnu snagu koja se troši na otporniku.

Rješenje:

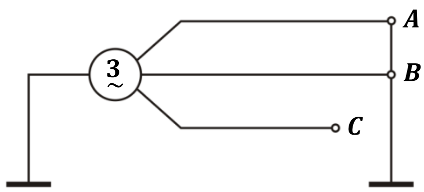
$$P = \sum_{n=1}^{4} U^{(n)} I^{(n)} = \sum_{n=1}^{4} U^{(n)} \frac{U^{(n)}}{R} = \frac{1}{R}\sum_{n=1}^{4}\left(U^{(n)}\right)^2 = \frac{1}{R}\left[(U_0)^2 + \left(\frac{2U_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3U_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4U_0}{\sqrt{2}}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{31}{2}\frac{(U_0)^2}{R} = 31\ (W)$$

1.3. **(1 bod)** U trofaznoj mreži sa slike istovremeno je došlo do kratkog spoja faza A i B sa zemljom. Direktna, inverzna i nulta simetrična impedansa zadovoljavaju relaciju: $\mathcal{Z}_d = 2\mathcal{Z}_i = \mathcal{Z}_0/2$. Fazor faznog napona $\underline{U}_g$, kao i direktna impedansa $\mathcal{Z}_d$, su poznate veličine. Simetrične komponente struja $\underline{I}_0$, $\underline{I}_d$, $\underline{I}_i$, takođe su poznate veličine i date su relacijom:

$$\underline{I}_0 = -\frac{a}{5}\underline{I}_d = \frac{a^2}{4}\underline{I}_i = -\frac{a}{7}\frac{\underline{U}_g}{\mathcal{Z}_d}.$$

Odredite efektivnu vrijednost napona faze C.



Rješenje:

Iz sistema jednačina koje odgovaraju simetričnom dijelu:

$$\underline{U}_0 + \mathcal{Z}_0\underline{I}_0 = 0, \quad \underline{U}_d + \mathcal{Z}_d\underline{I}_d = \underline{U}_g, \quad \underline{U}_i + \mathcal{Z}_i\underline{I}_i = 0$$

mogu se odrediti simetrične komponente napona kao:

$$\underline{U}_0 = -\mathcal{Z}_0\underline{I}_0 = \frac{2}{7}a\underline{U}_g$$

$$\underline{U}_d = \underline{U}_g - \mathcal{Z}_d\underline{I}_d = \frac{2}{7}\underline{U}_g$$

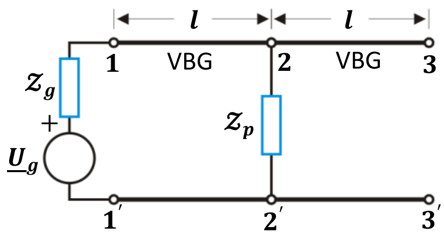
$$\underline{U}_i = -\mathcal{Z}_i\underline{I}_i = \frac{2}{7}a^2\underline{U}_g$$

tako da se fazor napona faze C može odrediti prema relaciji:

$$\underline{U}_C = \underline{U}_0 + a\,\underline{U}_d + a^2\underline{U}_i = \frac{6a}{7}\underline{U}_g$$

čija je efektivna vrijednost: $U_C = \frac{6}{7}U_g$

1.4. **(2 boda)** Dva voda bez gubitaka, istih podužnih parametara $L^{'} = 10\,(mH/km)$ i $C^{'} = 10\,(nF/km)$ i dužine $l = \lambda/6$, vezani su na izvor prostoperiodičnog napona kao na slici. Odredite impedansu potrošača $\mathcal{Z}_P$ tako da na vodu koji je vezan direktno na izvor ne bude refleksije (usklađen režim rada voda).



Rješenje:

Ulazna impedansa otvorenog VBG-a je: $\mathcal{Z}_2^{'} = -j\dfrac{\mathcal{Z}_c}{tan(\beta l)} = -j\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathcal{Z}_c$

gdje je: $\beta l = \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\dfrac{\lambda}{6} = \dfrac{\pi}{3}$

Ekvivalentna impedansa na izlaznom pristupu $2 - 2^{'}$ VBG-a dobija se kao paralelna veza impedansi $\mathcal{Z}_2^{'}$ i $\mathcal{Z}_p$:

$$\mathcal{Z}_2 = \frac{\mathcal{Z}_2^{'}\mathcal{Z}_p}{\mathcal{Z}_2^{'}+\mathcal{Z}_p}$$

Da bi VBG koji je direktno vezan na izvor bio u usklađenom radnom režimu potrebno je ispuniti uslov:

$$\mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}_C$$

Odavde slijedi: $\dfrac{\mathcal{Z}_2^{'}\mathcal{Z}_p}{\mathcal{Z}_2^{'}+\mathcal{Z}_p} = \mathcal{Z}_C$

Impedansa potrošača pri usklađenom režimu rada voda je: $\mathcal{Z}_p = \dfrac{1 + j\sqrt{3}}{4}\mathcal{Z}_C = 250 + j433\;(\Omega)$

pri čemu je: $\mathcal{Z}_C = \sqrt{\dfrac{L^{'}}{C^{'}}} = 1000\;(\Omega)$

Zadatak 2.

2. **(10 bodova)** Kolo dato na slici priključeno je na složenoperiodični generator napona:

$$u(t) = 10 \cdot sin(\omega t) + 9 \cdot sin(3\omega t) \ (V).$$

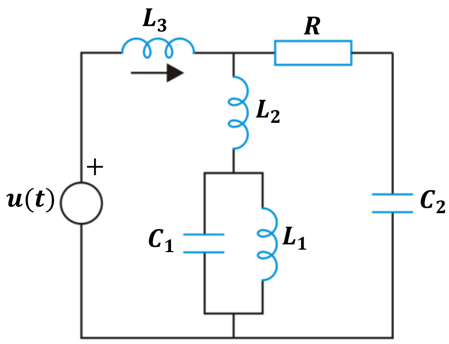
Poznate su reaktanse elemenata za osnovni harmonik:

$\omega L_1 = 24\ (\Omega), \omega L_2 = 3\ (\Omega), \omega L_3 = 3\ (\Omega),$

$\frac{1}{\omega C_1} = 24\ (\Omega), \frac{1}{\omega C_2} = 3\ (\Omega),$

dok je otpornost naznačenog otpornika $R = 5\ (\Omega)$.

Odredite vremenski izraz za struju na ulazu u kolo, te sve snage na ulazu u kolo.



Rješenje:

Za prvi harmonik je: $\omega L_1 = \frac{1}{\omega C_1} = 24\ (\Omega)$

Paralelna grana (L_1, C_1) se ponaša kao dio kola koji je u antirezonanciji, zbog čega je dio kola (L_1, L_2, C_1) u prekidu za struju osnovnog harmonika. Fazor ulazne impedanse u tom slučaju je određen kao:

$$\mathcal{Z}^{(1)} = R + j\left(\omega L_3 - \frac{1}{\omega C_2}\right) = 5\ (\Omega)$$

Fazor ulazne struje je: $\underline{I}^{(1)} = \frac{\underline{U}^{(1)}}{\mathcal{Z}^{(1)}} = \sqrt{2}\ (A)$

Za treći harmonik fazor impedanse serijsko-paralelne grane (L_1, L_2, C_1) određen je kao:

$$\mathcal{Z}_{sp}^{(3)} = j3\omega L_2 + \frac{(j3\omega L_1)\left(-j\,\frac{1}{3\omega C_1}\right)}{j\left(3\omega L_1 - \frac{1}{3\omega C_1}\right)} = 0\ (\Omega)$$

što znači da se ova grana ponaša kao dio kola koji je u rezonanciji, odnosno koji je u kratkom spoju. U tom slučaju fazor ulazne struje određen je kao:

$$\underline{I}^{(3)} = \frac{\underline{U}^{(3)}}{\mathcal{Z}^{(3)}} = \frac{\underline{U}^{(3)}}{j3\omega L_3} = -j\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\angle 90^{\circ}\ (A)$$

Vremenska funkcija struje na ulazu u kolo određena je kao superpozicija struja za osnovni, odnosno za treći harmonik:

$$i(t) = 2 \cdot sin(\omega t) + sin(3\omega t - 90^{\circ})\ \ (A)$$

Snage na ulazu u kolo određene su vrijednostima:

$$P = \sum_n U^{(n)} I^{(n)} cos\varphi^{(n)} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot cos0^{\circ} + \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot cos90^{\circ} = 10\ (W)$$

$$Q = \sum_n U^{(n)} I^{(n)} sin\varphi^{(n)} = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot sin0^{\circ} + \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot sin90^{\circ} = 4{,}5\ (VAr)$$

$$S = U_{ef} I_{ef} = \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{9}{\sqrt{2}}\right)^2}\ \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 15{,}04\ (VA)$$

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = 10{,}2\ (VAd)$$

Zadatak 3.

3.1. **(1 bod)** Odredite parametre filterske ćelije visokih učestanosti K-tipa čija je granična učestanost $f_C = 2800\ (Hz)$, a karakteristična impedansa za beskonačno veliku učestanost je $R = 600\ (\Omega)$. Propusni opseg je dat izrazom:

$$\frac{1}{2\sqrt{L_2 C_1}} \le \omega < \infty.$$

$a)\ L_2 = 0{,}28\ (H),\ C_1 = 30\ (nF)$ $\quad b)\ L_2 = 2\ (mH),\ C_1 = 5{,}2\ (nF)$ $\quad \boxed{c)\ L_2 = 17\ (mH),\ C_1 = 47{,}4\ (nF)}$ $\quad d)\ L_2 = 21{,}1\ (mH),\ C_1 = 121\ (\mu F)$

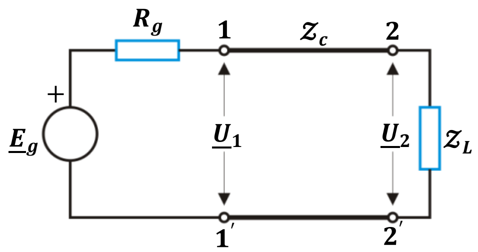
Rješenje:

Granična kružna učestanost je: $\omega_c = 2\pi f_c = \dfrac{1}{2\sqrt{L_2 C_1}}$

Za karakterističnu impedansu pri beskonačno velikoj učestanosti vrijedi: $\mathcal{Z}_1 \mathcal{Z}_2 = \dfrac{L_2}{C_1} = R^2$

Iz poslijednje dvije relacije dobijamo: $L_2 = 17\ (mH), \quad C_1 = 47{,}4\ (nF)$

3.2. **(1 bod)** Vod bez gubitaka dat na slici zatvoren je potrošačem poznate impedanse $\mathcal{Z}_L = 576 + j168\ (\Omega)$. Ako se vod priključi na izvor napona efektivne vrijednosti $E_g = 20{,}6\ (V)$, učestanosti $f = 800\ (Hz)$ i unutrašnje impedanse $\mathcal{Z}_g = R_g = 800 (\Omega)$, aktivna snaga koja se predaje na ulazu voda je maksimalno moguća. Potrebno je odrediti efektivnu vrijednost napona na mjestu prijemnika.



$\boxed{a)\ U_2 = 9{,}1\ (V)}$ $\quad b)\ U_2 = 10{,}3\ (V)$ $\quad c)\ U_2 = 8{,}5\ (V)$ $\quad d)\ U_2 = -12{,}2\ (V)$

Rješenje:

Ukupna aktivna snaga koju generator predaje vodu određena je relacijom:

$$P_1 = R_g I_1^2 = R_g \left(\frac{E_g}{\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z}_1} \right)^2 = R_g \left(\frac{E_g}{\mathcal{Z}_g + \mathcal{Z}_g^*} \right)^2 = \frac{E_g^2}{4R_g}$$

Pošto se analizira vod bez gubitaka, to je aktivna snaga na početku voda jednaka snazi na kraju voda $P_1 = P_2$. Snaga na kraju voda može se odrediti kao:

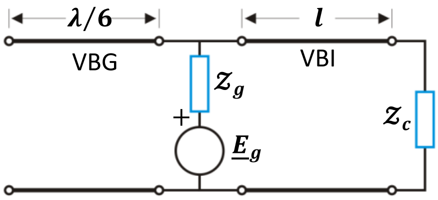
$$P_2 = Re\{\underline{U}_2 \underline{I}_2^*\} = \frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} U_2^2$$

Iz poslijednje dvije relacije moguće je odrediti efektivnu vrijednost traženog napona: $U_2 = 9{,}1\ (V)$

3.3. (1 bod) Za vod bez izobličenja poznati su podužni parametri:

$R' = 0{,}04\ (\Omega/km), G' = 1\ (\mu S/km), L' = 1\ (mH/km)$.

Ulazna impedansa otvorenog voda je $\mathcal{Z}_{u1} = -j200\ (\Omega)$. Odredite unutrašnju impedansu generatora čija je efektivna vrijednost elektromotorne sile $E_g = 150\ (V)$, ako se zna da se paralelnim vezivanjem otvorenog voda bez gubitaka postiže da aktivna snaga na ulazu paralelne veze bude maksimalna.



$\boxed{a)\ \mathcal{Z}_g = 100 + j100\ (\Omega)}$ $b)\ \mathcal{Z}_g = 100 - j100\ (\Omega)$ $c)\ \mathcal{Z}_g = 200 + j200\ (\Omega)$ $d)\ \mathcal{Z}_g = 200 - j200\ (\Omega)$

Rješenje:

Impedansa potrošača koga napaja generator se dobija kao paralelna veza ulazne impedanse voda bez izobličenja:

$$\mathcal{Z}_u = \mathcal{Z}_C = \sqrt{\frac{R'}{G'}} = 200\ (\Omega)$$

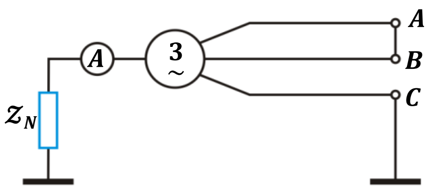
i ulazne impedanse otvorenog voda bez gubitaka date u zadatku.

Prema tome je: $$\mathcal{Z}_1 = \frac{\mathcal{Z}_u \mathcal{Z}_{u1}}{\mathcal{Z}_u + \mathcal{Z}_{u1}} = 100 - j100\ (\Omega)$$

Iz uslova predaje najveće aktivne snage izračunavamo: $\mathcal{Z}_g = \mathcal{Z}_1^* = 100 + j100\ (\Omega)$

3.4. (2 boda) U trofaznoj mreži je došlo do složenog kratkog spoja prikazanog na slici. Odredite pokazivanje naznačenog ampermetra. Poznato je: $\mathcal{Z}_d = \mathcal{Z}_i = j1\ (\Omega)$, $\mathcal{Z}_0 = j2\ (\Omega), \mathcal{Z}_N = 1\ (\Omega), E = 200\ (V)$. Za datu trofaznu mrežu važi relacija:

$$\underline{U}_d = \frac{\mathcal{Z}_i(\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_N)\underline{E}}{4\mathcal{Z}_d\mathcal{Z}_i + (\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_N)(\mathcal{Z}_d + \mathcal{Z}_i)}.$$



$a)\ I_{AMP} = 152\ (A)$ $b)\ I_{AMP} = 181\ (A)$ $c)\ I_{AMP} = 40\ (A)$ $\boxed{d)\ I_{AMP} = 120\ (A)}$

Rješenje:

Jednačine simetričnog dijela su:

$$\underline{U}_0 + (\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_N)\underline{I}_0 = 0 \quad (1)$$

$$\underline{U}_d + \mathcal{Z}_d\underline{I}_d = \underline{E} \quad (2)$$

$$\underline{U}_i + \mathcal{Z}_i\underline{I}_i = 0 \quad (3)$$

Jednačine nesimetričnog dijela su:

$$\underline{U}_A = \underline{U}_B \quad (4)$$

$$\underline{I}_A = -\underline{I}_B \quad (5)$$

$$\underline{U}_C = 0 \quad (6)$$

Iz relacije (4) je: $\underline{U}_i = a^2\underline{U}_d$ (7)

Na osnovu relacija (6) i (7) je: $\underline{U}_0 = -2a\underline{U}_d$ (8)

Na osnovu izraza datog u zadatku, te izraza (1) i (8), dobijamo:

$$\underline{I}_{AMP} = 3\underline{I}_0 = \frac{6a\underline{U}_d}{\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_N} = \frac{6a\mathcal{Z}_i\underline{E}}{4\mathcal{Z}_d\mathcal{Z}_i + (\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_N)(\mathcal{Z}_d + \mathcal{Z}_i)}$$

Pokazivanje ampermetra je: $I_{AMP} = \dfrac{6 \cdot 1 \cdot 200}{|-8 + j6|} = 120\ (A)$