

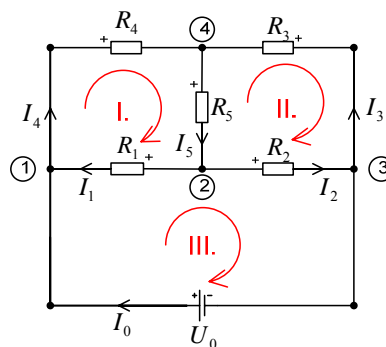
Složeni krugovi istosmjernje struje i načelo superpozicije

IV. tjedan predavanja

1

Mosni spoj (Wheatstoneov most)

- ♦ Spoj pet pasivnih elemenata i jednog aktivnog, kakav je prikazan na sl. 4.1, naziva se **mosni spoj**. Ako su svi pasivni elementi **otpori**, mosni se spoj поближе određuje kao **Wheatstoneov most**.



Sl. 4.1

2

Mosni spoj (Wheatstoneov most) (2)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Jednadžbe Kirchhoffovih zakona:

$$\text{čvor 1: } +I_0 + I_1 - I_4 = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{čvor 2: } -I_1 - I_2 + I_5 = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{čvor 4: } +I_3 + I_4 - I_5 = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{petlja I.: } +R_1 \cdot I_1 + R_4 \cdot I_4 + R_5 \cdot I_5 = 0 \quad (4.4)$$

$$\text{petlja II.: } -R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 - R_5 \cdot I_5 = 0 \quad (4.5)$$

$$\text{petlja III.: } -R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 = U_0 \quad (4.6)$$

3

Mosni spoj (Wheatstoneov most) (3)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Rješavanje ovog sustava jednadžbi po I_5 daje:

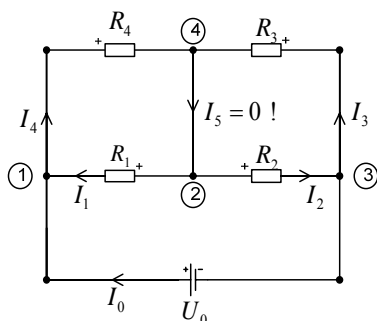
$$I_5 = \frac{R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_4}{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4) \cdot \left(\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} + R_5 \right)} \cdot U_0 \quad (4.7)$$

- ♦ Kada je $R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_4 = 0$, izraz (4.7) jednak je nuli. Struja I_5 ne teče pa se sl. 4.1 može nadomjestiti sa sl. 4.1a ili sl. 4.1b.

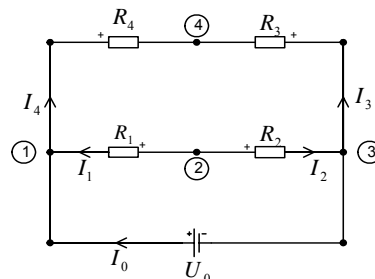
4

Mosni spoj (Wheatstoneov most) (4)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Sl. 4.1a



Sl. 4.1b

Uz $I_5 = 0$ jednadžbe (4.2) i (4.3) reduciraju se na
 $-I_1 - I_2 = 0$, odnosno $I_3 + I_4 = 0$, što je iz sl. 4.1a-b očito.

5

Mosni spoj (Wheatstoneov most) (5)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Relacija

$$R_1 \cdot R_3 - R_2 \cdot R_4 = 0; \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3} \quad (4.8)$$

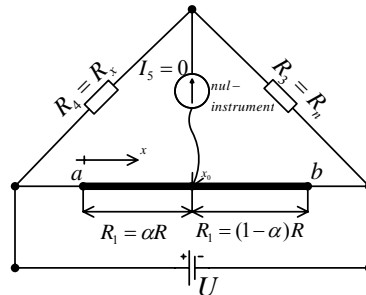
uvjet je ravnoteže mosta. Kada je ona zadovoljena, dopušteno je mosnu granu (grana s R_5) kratko spojiti (sl. 4.1a) ili odspojiti (sl. 4.1b), jer navedeni zahvati ne mijenjaju strujno-naponske prilike u krugu, a mreža se pojednostavljuje na serijsko-paralelni spoj otpornika R_1 , R_2 , R_3 i R_4 .

6

Primjer: Primjena u električkim mjerenjima



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Sl. 4.2

Otpori R_1 i R_2 su dijelovi npr. otporne žice duljine l po kojoj se može pomicati klizač; položaj klizača (udaljenost od točke a) može se precizno očitati. Otpor R_3 je tzv. **normalni otpor**, čija je vrijednost stabilna i točno poznata. Otpor $R_4 = R_x$ je otpor čija se vrijednost mjeri. Ukupna vrijednost otporne žice $R_{ab} = R$ također je poznata.

7

Primjena u električkim mjerenjima (2)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ Mjerenje se provodi tako da se klizač pomiče do točke x_0 kada vrlo precizni nul-instrument ne registrira nikakvu struju u mosnoj grani ($I_5=0$). Tada je:

$$R_1 = \frac{x_0}{l} \cdot R = \alpha R, \quad R_2 = \frac{l - x_0}{l} \cdot R = (1 - \alpha) \cdot R \quad (4.9)$$

Dobiva se:

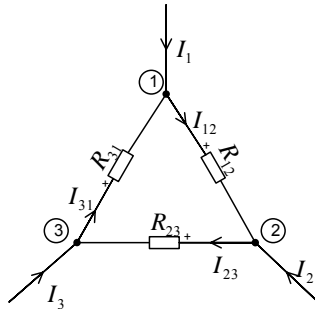
$$R_4 = R_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_3 = \frac{x_0}{l - x_0} \cdot R_3 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot R_n \quad (4.10)$$

Wheatstoneov mjerni most jednostavna je i precizna metoda za određivanje vrijednosti nepoznatih otpora.

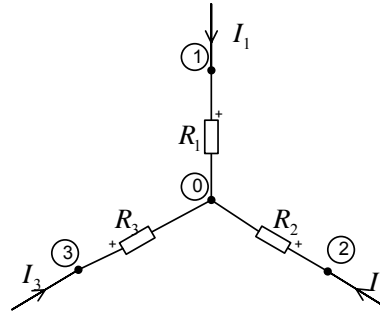
8

Pretvorba trokut-zvijezda

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Sl. 4.3a: Trokut



Sl. 4.3b: Zvijezda

9

Pretvorba trokut-zvijezda (2)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Ekvivalentnost trokuta i zvijezde slijedi iz zadovoljenja sljedećih naponskih jednažbi:

$$U_{12} = I_{12} \cdot R_{12} = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 \quad (4.11a)$$

$$U_{23} = I_{23} \cdot R_{23} = I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 \quad (4.11b)$$

$$U_{31} = I_{31} \cdot R_{31} = I_3 \cdot R_3 - I_1 \cdot R_1 \quad (4.11c)$$

4.11(a-c) sustav je triju jednažbi s tri nepoznanice (R_1 , R_2 , R_3 , odnosno R_{12} , R_{23} , R_{31}) s parametrima (strujama) koje moraju zadovoljavati sljedeće strujne jednažbe:

$$\text{čvor 1:} \quad +I_1 \quad -I_{12} \quad +I_{31} = 0 \quad (4.12a)$$

$$\text{čvor 2:} \quad +I_2 \quad +I_{12} - I_{23} = 0 \quad (4.12b)$$

$$\text{čvor 3:} \quad +I_3 \quad +I_{23} - I_{31} = 0 \quad (4.12c)$$

10

Pretvorba trokut-zvijezda (3)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Iz sustava 4.11(a-c) slijedi:

$$I_{12} \cdot R_{12} + I_{23} \cdot R_{23} + I_{31} \cdot R_{31} = 0 \quad (4.13)$$

Iz sustava 4.12(a-c) slijedi:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (4.14)$$

11

Pretvorba trokuta u zvijezdu

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Poznanice: R_{12} , R_{23} , R_{31}
- ♦ Nepoznanice: R_1 , R_2 , R_3

U jednadžbi 4.12 eliminacijom struja I_{31} i I_{23} , i to zamjenom $I_{31} = I_{12} - I_1$ (4.12a) i $I_{23} = I_{12} + I_1$ (4.12b), dobiva se:

$$I_{12} = \frac{I_1 \cdot R_{31} - I_2 \cdot R_{23}}{R_{\Delta}} \quad (4.15)$$

gdje je:

$$R_{\Delta} = R_{12} + R_{23} + R_{31} \quad (4.16)$$

12

Pretvorba trokuta u zvijezdu (2)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Uvrštavanjem struje I_{12} u jednadžbu 4.11a dobiva se:

$$I_1 \cdot \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_\Delta} - I_2 \cdot \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_\Delta} = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 \quad (4.17a)$$

Analognim postupkom eliminacije i uvrštavanjem u jednadžbe 4.11b i 4.11c dobiva se:

$$I_2 \cdot \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_\Delta} - I_3 \cdot \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_\Delta} = I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_3 \quad (4.17b)$$

$$I_3 \cdot \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_\Delta} - I_1 \cdot \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_\Delta} = I_3 \cdot R_3 - I_1 \cdot R_1 \quad (4.17c)$$

13

Pretvorba trokuta u zvijezdu (3)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Sustav jednadžbi 4.11(a-c) prelazi u jednakosti kad je:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_\Delta}; \quad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_\Delta}; \quad R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_\Delta} \quad (4.18)$$

čije je važno svojstvo:

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} = \frac{R_{12}^2}{R_\Delta} \quad (4.18a)$$

$$\frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} = \frac{R_{23}^2}{R_\Delta} \quad (4.18b)$$

$$\frac{R_3 \cdot R_1}{R_2} = \frac{R_{31}^2}{R_\Delta} \quad (4.18c)$$

- ♦ Relacija 4.18 kazuje kako se s poznatim otporima trokuta dobivaju otpori ekvivalentne zvijezde.

14

Pretvorba zvijezde u trokut

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Poznanice: R_1, R_2, R_3
- ♦ Nepoznanice: R_{12}, R_{23}, R_{31}

U jednadžbi 4.11a eliminiraju se struje I_1 i I_2 zamjenom $I_1 = I_{12} - I_{31}$ i $I_2 = I_{23} - I_{12}$ (4.12a i b), te se dobiva:

$$U_{12} = I_{12} \cdot R_{12} = I_{12} \cdot (R_1 + R_2) - (I_{23} \cdot R_2 + I_{31} \cdot R_1) \quad (4.19)$$

U drugom dijelu dobivenog izraza zamijeni se

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{\Delta}} \text{ i } R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{\Delta}} \quad (\text{vidi 4.18}), \text{ iskoristi}$$

4.13 u obliku $I_{12} \cdot R_{12} = -(I_{23} \cdot R_{23} + I_{31} \cdot R_{31})$, pa se dobiva:

$$I_{23} \cdot R_2 + I_{31} \cdot R_1 = -I_{12} \cdot \frac{R_{12}^2}{R_{\Delta}} = -I_{12} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} \quad (\text{prema 4.18a})$$

15

Pretvorba zvijezde u trokut (2)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Nakon ovoga sređivanjem 4.19 dobiva se:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} \quad (4.19a)$$

Primjenom analognog postupka na U_{23} i U_{31} dobiva se:

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} \quad (4.19b)$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2} \quad (4.19c)$$

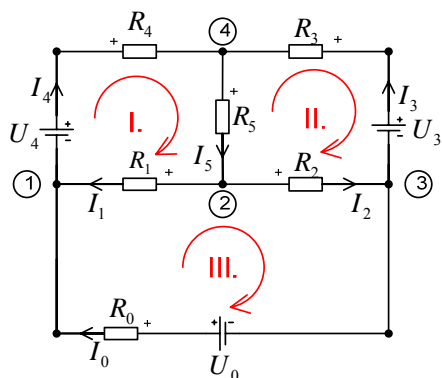
Relacije 4.19(a-c) kazuju kako se s poznatim otporima zvijezde dobivaju otpori ekvivalentnog trokuta.

Pretvorba zvijezde u trokut, i obrnuto, omogućuje da se svaki mosni spoj pretvori u serijsko-paralelnu kombinaciju otpora.

16

Električni krugovi s više izvora

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Sl. 4.4

Iako su u krugu sa sl. 4.4 moguće brojne transformacije zvijezde u trokut (npr. zvijezde $R_1 R_2 R_5$ ili zvijezde $R_3 R_4 R_5$), one ne pomažu u rješavanju strujno-naponskih prilika, jer ne eliminiraju izvore u granama (u navedenim primjerima U_4 i U_3).

17

Električni krugovi s više izvora (2)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Pri rješavanju krugova s više izvora polazište uvijek moraju biti jednačbe Kirchhoffovih zakona:

$$\begin{array}{rcl}
 \left. \begin{array}{l}
 +I_0 \quad +I_1 \quad \quad \quad -I_4 \quad \quad \quad = 0 \\
 \quad \quad -I_1 \quad -I_2 \quad \quad \quad \quad +I_5 \quad = 0 \\
 \quad \quad \quad \quad +I_3 \quad +I_4 \quad -I_5 \quad = 0
 \end{array} \right\} \text{strujne} \\
 \left. \begin{array}{l}
 +R_1 \cdot I_1 \quad \quad \quad +R_4 \cdot I_4 + R_5 \cdot I_5 = U_4 \\
 \quad \quad -R_2 \cdot I_2 - R_3 \cdot I_3 \quad \quad -R_5 \cdot I_5 = -U_3 \\
 +R_0 \cdot I_0 - R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 \quad \quad \quad = U_0
 \end{array} \right\} \text{naponske}
 \end{array}$$

18

Električni krugovi s više izvora (3)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



One se u matričnom obliku pišu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & R_1 & 0 & 0 & R_4 & R_5 \\ 0 & 0 & -R_2 & -R_3 & 0 & -R_5 \\ R_0 & -R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_4 \\ -U_3 \\ U_0 \end{bmatrix} \quad (4.20a)$$

$$\text{ili} \quad \underline{R} \cdot \underline{I} = \underline{U} \quad (4.20b)$$

4.20(a-b) je Ohmov zakon u matričnom obliku. Struje, a time i odgovor na strujno-naponske prilike u krugu, dobivaju se određivanjem matrice \underline{R}^{-1} , inverzne matrice matrici \underline{R} , uz poznate vrijednosti napona izvora (U_0, U_3 i U_4).

19

Električni krugovi s više izvora (4)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$\underline{I} = \underline{R}^{-1} \cdot \underline{U} \quad (4.21)$$

U iole složenijim prilikama (već na primjeru sa sl. 4.4) ovo traži pomoć računala.

20

Metoda superpozicije

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Vektor napona \underline{U} iz 4.20, odnosno 4.21, može se pisati i ovako:

$$\underline{U} = \underline{U}_0 + \underline{U}_3 + \underline{U}_4$$

$$\underline{U}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_0 \end{bmatrix}, \quad \underline{U}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -U_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{U}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uvrsti li se ova notacija u 4.21, dobiva se:

$$\underline{I} = \underline{R}^{-1} \cdot (\underline{U}_0 + \underline{U}_3 + \underline{U}_4) = \underline{R}^{-1} \cdot \underline{U}_0 + \underline{R}^{-1} \cdot \underline{U}_3 + \underline{R}^{-1} \cdot \underline{U}_4 \quad (4.22)$$

Dakle, struja \underline{I} dobiva se kao zbroj struja

$$\underline{I}' = \underline{R}^{-1} \cdot \underline{U}_0; \quad \underline{I}'' = \underline{R}^{-1} \cdot \underline{U}_3; \quad \underline{I}''' = \underline{R}^{-1} \cdot \underline{U}_4 \quad (4.23)$$

21

Metoda superpozicije (2)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Kako je vektor struje \underline{I} vektor bez 0-članova, ono što vrijedi za \underline{I}' vrijedi i za svaki član toga vektora:

$$I_i = I_i' + I_i'' + I_i''', i = 0, \dots, 5$$

gdje su pribrojnici odgovarajući članovi vektora \underline{I}' , \underline{I}'' , \underline{I}''' .

Promotrimo $\underline{I}' = \underline{R}^{-1} \cdot \underline{U}_0$. Ovom rješenju odgovara jednačba $\underline{R} \cdot \underline{I}' = \underline{U}_0$. Navedenoj jednačbi pridružuje se krug sa sl. 4.4 u kojem su izvori U_3 i U_4 ugašeni (sl. 4.5).

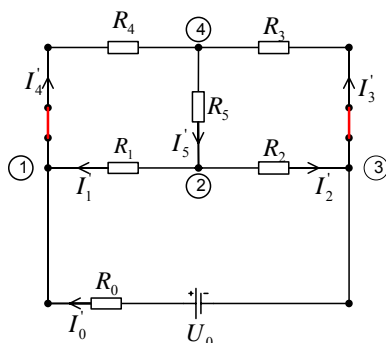
Gašenje naponskoga izvora: kratki spoj na grani izvora.

Gašenje strujnoga izvora: prazni hod u grani izvora.

22

Metoda superpozicije (3)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



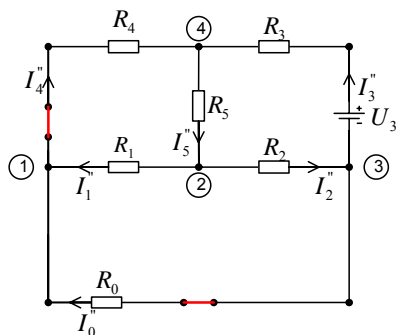
Sl. 4.5

Krug sa sl. 4.5 može se riješiti pretvorbom trokut-zvijezda ili, u slučaju ravnoteže mosta, i jednostavnijim postupkom. Dakle i bez upotrebe matičnog računa dadu se odrediti struje $I'_i, i = 0, \dots, 5$, tj. vektor \underline{I}' .

23

Metoda superpozicije (4)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



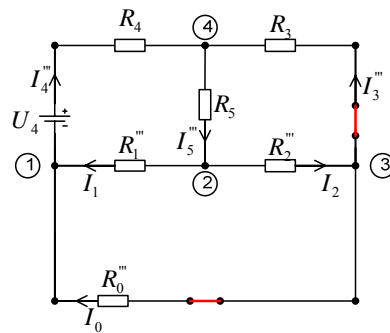
Sl. 4.6

Analogno, promatrajući \underline{I}'' i \underline{I}''' , odnosno krugove koje odgovaraju jednadžbama $\underline{R} \cdot \underline{I}'' = \underline{U}_3$ (sl. 4.6) i $\underline{R} \cdot \underline{I}''' = \underline{U}_4$ (sl. 4.7), dolazimo do parcijalnih rješenja koja ne traže matični račun.

24

Metoda superpozicije (5)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Sl. 4.7

Smjerovi struja na sl. 4.5 do sl. 4.7 nisu proizvoljni.
Oni odgovaraju odabranim smjerovima struja u
izvornom krugu (sl. 4.4).

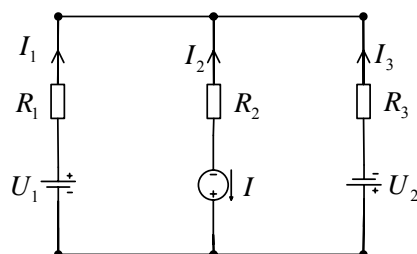
25

Superpozicija: primjer

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Odredi struje I_1 , I_2 i I_3 u mreži prema slici.



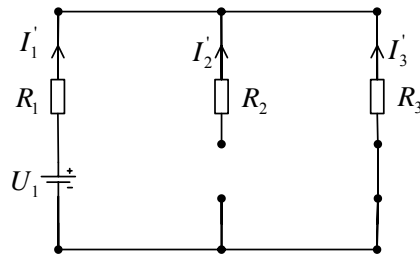
26

Superpozicija: primjer (2)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



a) Prvi korak



$$I'_1 = \frac{U_1}{R_1 + R_3}$$

$$I'_2 = 0$$

$$I'_3 = -\frac{U_1}{R_1 + R_3}$$

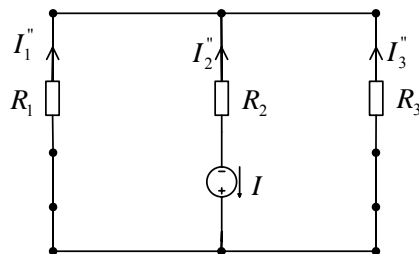
27

Superpozicija: primjer (3)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



b) Drugi korak



$$I''_1 = I \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

$$I''_2 = -I$$

$$I''_3 = I \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

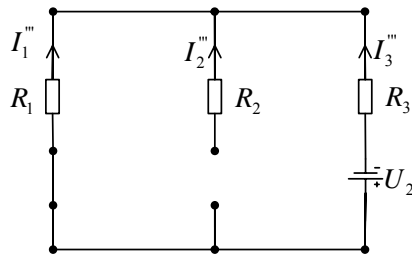
28

Superpozicija: primjer (4)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



c) Treći korak



$$I_1''' = \frac{U_2}{R_1 + R_3}$$

$$I_2''' = 0$$

$$I_3''' = -\frac{U_2}{R_1 + R_3}$$

29

Superpozicija: primjer (5)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



♦ Završetak superpozicije

$$I_1 = I_1' + I_1'' + I_1''' = \frac{U_1 + U_2 + I \cdot R_3}{R_1 + R_3}$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' + I_2''' = -I$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' + I_3''' = \frac{I \cdot R_1 - U_1 - U_2}{R_1 + R_3}$$

30



Metoda superpozicije u električnim krugovima posljedica je načela superpozicije koje vrijedi u svim sustavima koji se dađu opisati linearnim sustavom jednažbi.