

6. predavanje iz OE

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



SINUSOIDNO PROMJENJIVE VELIČINE I NAČELA RJEŠAVANJA KRUGOVA IZMJENIČNE STRUJE U KOMPLEKSNOM PODRUČJU

(pripremio prof.dr.sc. Armin Pavić)

1

6. predavanje iz OE

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



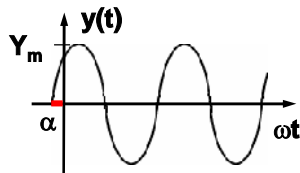
Sadržaj:

- Opći oblik i osnovne značajke sinusne funkcije - sinusoide
- Predstavljanje sinusnih funkcija vektorima
- Pojam i oblici prikaza kompleksnih brojeva
- Prikaz rotirajućeg vektora u kompleksnoj ravnini, pojmovi rotirajućeg i mirnog vektora te fazora struje i napona
- Impedancija i admitancija
- Jednadžbe Kirchhoffovih zakona u kompleksnom području
- Postupak rješavanja el. krugova u kompleksnom području

2

Opći oblik i osnovne značajke sinusne funkcije - sinusoide

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Opći izraz za vremenski promjenjivu sinusnu funkciju (sinusoidu) na slici lijevo jest:

$$y(t) = Y_m \sin(\omega t + \alpha)$$

- Osnovni elementi sinusne funkcije:
 - kut*, ili *argument*, $(\omega t + \alpha)$, koji se raste u vremenu sa stalnom *kutnom brzinom* ω , od početne vrijednosti α (*početni kut* - u trenutku $t=0$);
 - tjemena vrijednost*, ili *amplituda*, Y_m
- Periodičnost sinusne funkcije: $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi)$ ($k \in \mathbb{N}$)
 - Vrijednosti sinusne funkcije se ponavljaju nakon svakog povećanja kuta za 2π . To se dogodi tijekom vremena od jedne *periode* T , pa je stoga (stalna) brzina promjene kuta u vremenu $\omega = 2\pi/T$ ($[\omega] = \text{rad/s}$), gdje je broj perioda u jednoj sekundi $f = 1/T$ *frekvencija* sinusoide ($[f] = 1/\text{s} = \text{Hz}$)

3

Još neka važna svojstva sinusne funkcije

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- $\sin(\pi/2) = 1$, $\sin(3\pi/2) = -1$, $\sin(0 + k\pi) = 0$ ($k \in \mathbb{N}$);
- $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha)$, tj. $\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \pi/2)$;
- $\sin(\alpha - \pi/2) = -\cos(\alpha)$, tj. $\sin(\alpha) = -\cos(\alpha + \pi/2)$;
- Zbroj sinusnih funkcija (jednakih frekvencija) *jest sinusna funkcija* (iste frekvencije);
- Razlika dviju sinusnih funkcija (jednakih frekvencija) *jest sinusna funkcija* (iste frekvencije);
- Derivacija sinusne funkcije *jest sinusna funkcija*:

$$\frac{d}{d\alpha} \sin(\alpha) = \cos(\alpha) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$
- Integral sinusne funkcije *jest sinusna funkcija*:

$$\int \sin(\alpha) d\alpha = -\cos(\alpha) = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

4

Predstavljanje sinusnih funkcija vektorima

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



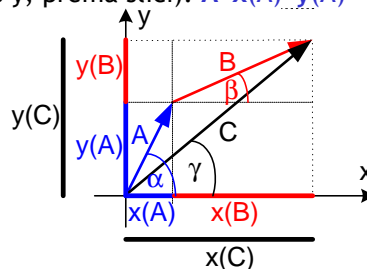
- U pravokutnom (XY) koordinatnom sustavu, bilo koji vektor **A** može se prikazati kao zbroj svojih komponentata u smjerovima x i y (projekcije vektora na apscisnu os x i na ordinatnu os y, prema slici): $A = x(A) + y(A)$

Komponente vektora **A** mogu se izraziti ovako: $x(A) = A \cos \alpha$ i $y(A) = A \sin \alpha$

Jednako se mogu izraziti i komponente vektora **B**: $x(B) = B \cos \beta$ i $y(B) = B \sin \beta$

Zbroj vektora **A** i **B** daje vektor **C** s komponentama $x(C) = C \cos \gamma$ i $y(C) = C \sin \gamma$

Pritom vrijedi: $y(C) = y(A) + y(B)$, tj.



$$A \sin \alpha + B \sin \beta = C \sin \gamma$$

Zbrajanje sinusnih funkcija, umjesto složenim trigonometrijskim formulama, može se ovako obaviti jednostavnim zbrajanjem vektora!

- ❖ Pokažite da isto vrijedi i za oduzimanje sinusnih funkcija!

5

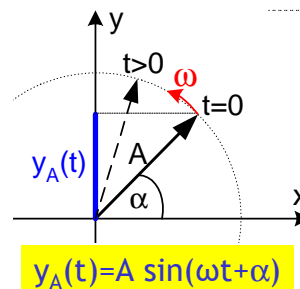
Sveza sinusoide i rotirajućeg vektora

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Ako kut vektora **A** prema apscisnoj osi x, od neke početne vrijednosti α raste u vremenu sa stalnom kutnom brzinom ω , taj se kut može se izraziti vremenskom funkcijom ($\omega t + \alpha$)

- Vektor **A** tu rotira stalnom brzinom u smjeru suprotnom okretanju kazaljki sata, a njegova komponentata y_A u smjeru osi y (projekcija vektora na os y) mijenja se u vremenu po funkciji



$$y_A(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$$

- Ovakav **rotirajući vektor** svojom komponentom y predstavlja opći oblik vremenski promjenjive sinusne funkcije - sinusoide. Stalna brzina kruženja vektora ω , naziva se još i **kružna frekvencija** ($\omega = 2\pi f$).

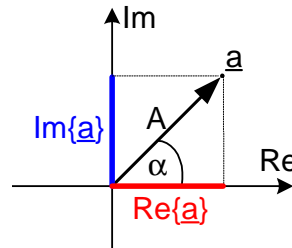
6

Matematička osnova: Pojam i način prikaza kompleksnih brojeva

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ◆ Kompleksni broj \underline{a} može se općenito predstaviti kao zbroj jednog realnog i jednog imaginarnog broja: $\underline{a}=b+jc$
gdje je $b=\text{Re}\{\underline{a}\}$, $c=\text{Im}\{\underline{a}\}$, a $j=\sqrt{-1}$ (imaginarna jedinica)
- ◆ Kompleksni broj \underline{a} predstavlja jednu točku u *kompleksnoj ravnini* desno
- ◆ Osim svojim koordinatama na Re i Im osi (Re i Im dio kompleksnog broja), točka u kompl. ravnini određena je i duljinom svoje spojnice s ishodištem A i kutem α koji ona čini s realnom osi (*modul i kut kompl. broja*)



$$\underline{a}=\text{Re}\{\underline{a}\}+j\text{Im}\{\underline{a}\}=A\cos\alpha+jA\sin\alpha=Ae^{j\alpha}=A\angle\alpha$$

Sveza ovih parametara je: $A=\sqrt{\text{Re}(\underline{a})^2+\text{Im}(\underline{a})^2}$ $\alpha=\arctan\frac{\text{Im}(\underline{a})}{\text{Re}(\underline{a})}$

7

Matematička osnova: Računanje s kompleksnim brojevima

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ◆ **Zbrajanje i oduzimanje kompleksnih brojeva** (algebarski oblik)
 - Realni (odnosno imaginarni) dio zbroja (ili razlike) jednak je zbroju (ili razlici) realnih (odnosno imaginarnih) dijelova dvaju brojeva.
- ◆ **Množenje kompleksnih brojeva** (eksponencijalni, ili polarni oblik)
 - Modul umnoška jednak je umnošku modula dvaju brojeva;
 - Kut umnoška jednak je zbroju kutova dvaju brojeva.
- ◆ **Dijeljenje kompleksnih brojeva** (eksponencijalni, ili polarni oblik)
 - Modul kvocijenta jednak je kvocijentu modula dvaju brojeva;
 - Kut kvocijenta jednak je razlici kutova dvaju brojeva.
- ◆ **Deriviranje kompleksnog broja** (po α) = **množenje broja s j**
 - Množenje s j = povećanje kuta (rotacija oko ishodišta) za $+\pi/2$
- ◆ **Integriranje kompleksnog broja** (po α) = **dijeljenje broja s j**
 - Dijeljenje s j = promjena kuta (rotacija oko ishodišta) za $-\pi/2$

8

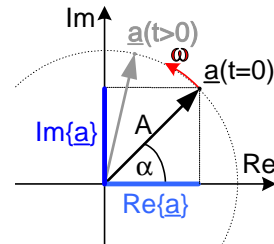
Rotirajući vektor u kompleksnoj ravnini

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Svaka točka (kompleksni broj \underline{a}) u kompleksnoj ravnini može se predstaviti vektorom s hvatištem u ishodištu. Duljina vektora A jednaka je modulu, a kut vektora α jednak je kutu kompleksnog broja \underline{a} u točki na vrhu vektora.
- ♦ Raste li kut s vremenom od početne vrijednosti α stalnom kutnom brzinom ω , tada vektor rotira u smjeru suprotnom od kazaljke sata (+ smjer) sa stalnom kružnom frekvencijom ω . Taj rotirajući vektor određuje kompleksni broj \underline{a} , tako da je

$$\underline{a} = A \cos(\omega t + \alpha) + j A \sin(\omega t + \alpha) = A e^{j(\omega t + \alpha)}$$



- ♦ Imaginarni dio kompleksnog broja \underline{a} , koji predstavlja rotirajući vektor, mijenja se u vremenu kao opća sinusna funkcija - sinusoida:
- $$\text{Im}\{\underline{a}\} = A \sin(\omega t + \alpha)$$
- ♦ Sinusoidno promjenjivi naponi i struje mogu se predstaviti kompleksnim brojem (vektorom u k. ravnini), što pojednostavljuje računanja s njima!

9

Predstavljanje sinusoidnih napona i struja u kompleksnom području

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ U kompleksnoj ravnini **rotirajući vektor**

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \alpha_u)} = U_m e^{j\alpha_u} \cdot e^{j\omega t}$$

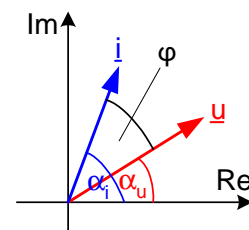
predstavlja napon $u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha_u)$: $u(t) = \text{Im}\{\underline{u}\}$

gdje dio kompleksnog broja $U_m e^{j\alpha_u} = \underline{U}_m$ određuje početni položaj (u $t=0$) vektora (\underline{U}_m = **mirni vektor**), dok dio $e^{j\omega t}$ određuje rotaciju vektora \underline{u} .

- ♦ Slično, struju $i(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha_i)$ predstavlja vektor

$$\underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \alpha_i)} = I_m e^{j\alpha_i} \cdot e^{j\omega t}$$

gdje je $I_m e^{j\alpha_i} = \underline{I}_m$ mirni vektor (maksimalne vrijednosti) struje.



$$\varphi = \alpha_u - \alpha_i$$

fazni pomak

- ♦ Amplitudni i fazni odnos veličina (određen mirnim vektorima) **ne mijenja se pri rotaciji vektora** (iste kružne frekvencije), pa se računanja u kompleksnom području mogu obavljati samo s mirnim vektorima, a dio koji određuje rotaciju ($e^{j\omega t}$) dodaje se mirnom vektoru rezultata prije njegova prebacivanja u vremensko područje.

10

Efektivna vrijednost sinusoidne struje (i napona)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ **Efektivna vrijednost** vremenski promjenjive struje $i(t)$ jednaka je vrijednosti stalne, istosmjerne struje I koja bi na istom otporu R , u jednakom vremenu, stvorila jednaku količinu topline. Isto vrijedi za napon
- ♦ Efektivna vrijednost struje, ili napona, označava se velikim slovom bez indeksa, ili s indeksom "ef", tj., $I=I_{ef}$ ($U=U_{ef}$)
- ♦ Efektivna vrijednost sinusoidne struje (ili napona) je $\sqrt{2}$ puta manja od maksimalne (vršne) vrijednosti, tj.,

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

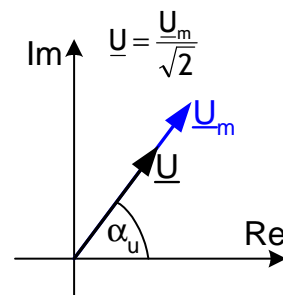
11

Mirni vektori efektivne vrijednosti el. veličina

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ U krugovima izmjenične struje u pravilu rabimo efektivne vrijednosti struja i napona, koje u kompleksnom području predstavljamo mirnim vektorima efektivne vrijednosti
- ♦ **Vektor efektivne vrijednosti** jest mirni vektor, koji ima isti kut (početni položaj u času $t=0$) kao mirni vektor maksimalne vrijednosti, a od njega je manji $\sqrt{2}$ puta.
- ♦ Vektore efektivne vrijednosti označavamo velikim slovom struje ili napona, npr. $\underline{U}=Ue^{j\alpha_u}=U\angle\alpha_u$ ili $\underline{I}=Ie^{j\alpha_i}=I\angle\alpha_i$.
- ♦ Smjer mirnih vektora u kompleksnoj ravnini ne određuje njihov prostorni smjer, nego kut (fazni pomak), pa se vektore struje i napona stoga još naziva i **fazori**. Da bi ih razlikovali od ostalih kompleksnih brojeva, označava ih se i s **točkom iznad slova**.



12

Primjeri

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



1. Odredite kompleksne izraze za: a) rotirajući vektor; b) mirni vektor maksimalne vrijednosti; i c) mirni vektor efektivne vrijednosti napona zadanog kao: $u(t)=311\cos(314t)$ V
 2. Izrazite fazor struje zadane kao $i(t)=14,14\sin(314t + 30^\circ)$ A u: a) eksponencijalnom; b) polarnom; i c) pravokutnom (algebarskom) obliku kompleksnog broja.
 3. Kolika je veličina ove struje u trenutku $t=0$?
 4. Koliki je fazni pomak između struje i napona iz gornjih primjera? Koja od ovih veličina prethodi, a koja zaostaje u fazi?
- ❖ Što bi dobili dijeljenjem fazora napona s fazorom struje iz gornjih primjera?

13

Rješenja primjera

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



1. a) $\underline{u} = 311 e^{j(314t+\pi/2)}$ V;
b) $\underline{U}_m = 311 e^{j\pi/2}$ V;
c) $\underline{U} = 220 e^{j\pi/2}$ V.
 2. Izrazite fazor struje zadane kao $i(t)=14,14\sin(314t + 30^\circ)$ A u:
a) $\underline{I} = 10 e^{j 30^\circ}$ A;
b) $\underline{I} = 10 e^{j30^\circ}$ A;
c) $\underline{I} = 8,66 + j 5$ A .
 3. $i(t=0)=14,14\sin(30^\circ)$ A = 7,07 A .
 4. 60° ; napon prethodi u fazi.
- ❖ Dobili bi kompleksni broj.

14

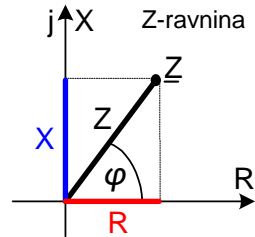
Pojam i značajke impedancije

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Omjer kompleksnih izraza napona i struje nekog elementa daje kompleksni broj koji predstavlja značajku toga elementa koju nazivamo **impedancija** i označavamo sa \underline{Z}

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \frac{U \angle \alpha_u}{I \angle \alpha_i} = \frac{U}{I} \angle (\alpha_u - \alpha_i) = Z \angle \varphi$$



- $\underline{Z} = U/I$ jest iznos impedancije, ili prividni otpor ($[Z] = \Omega$), a $\varphi = \alpha_u - \alpha_i$ je kut impedancije koji pokazuje fazni pomak napona prema struji.
- Impedancija se prikazuje u posebnoj kompleksnoj (Z) ravnini s imaginarnim dijelom X i realnim dijelom impedancije R

$$\underline{Z} = Z \angle \varphi = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi = R + jX$$

15

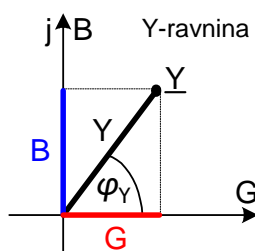
Pojam i značajke admitancije

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Recipročna vrijednost impedancije, ili omjer kompleksnih izraza struje i napona nekog elementa daje kompleksni broj koji predstavlja značajku toga elementa što ju nazivamo **admitancija** i označavamo s \underline{Y}

$$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U} = \frac{I \angle \alpha_i}{U \angle \alpha_u} = \frac{I}{U} \angle (\alpha_i - \alpha_u) = Y \angle \varphi_Y$$



- $\underline{Y} = I/U = 1/Z$ je iznos admitancije, ili prividna vodljivost ($[Y] = S$)
 $\varphi_Y = \alpha_i - \alpha_u = -\varphi$ je kut admitancije koji pokazuje fazni pomak struje prema naponu.
- Admitancija se prikazuje u posebnoj kompleksnoj (Y) ravnini s imaginarnim dijelom B i realnim dijelom admitancije G

$$\underline{Y} = Y \angle \varphi_Y = Y \cos \varphi_Y + j Y \sin \varphi_Y = G + jB$$

16

Primjer: Impedancije osnovnih elemenata

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ❖ **Otpor R:** $i(t) = I_m \sin(\omega t)$ $u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I_m \sin(\omega t) = U_m \sin(\omega t)$
Fazori: $\underline{I} = I \angle 0$; $\underline{U} = U \angle 0 = R \cdot I \angle 0$;
Impedancija: $\underline{Z}_R = \frac{U \angle 0}{I \angle 0} = \frac{R \cdot I}{I} \angle 0 = R \angle 0 = R$
- ❖ **Induktivitet L:** $i(t) = I_m \sin(\omega t)$ $u(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \omega L I_m \cos(\omega t) = \omega L I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$
Fazori: $\underline{I} = I \angle 0$; $\underline{U} = U \angle 90^\circ = \omega L \cdot I \angle 90^\circ$;
Impedancija: $\underline{Z}_L = \frac{U \angle 90^\circ}{I \angle 0} = \frac{\omega L \cdot I}{I} \angle 90^\circ = \omega L \angle 90^\circ = j\omega L = jX_L$
- ❖ **Kapacitet C:** $u(t) = U_m \sin(\omega t)$ $i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t) = \omega C U_m \sin(\omega t + 90^\circ)$
Fazori: $\underline{U} = U \angle 0$; $\underline{I} = I \angle 90^\circ = \omega C \cdot U \angle 90^\circ$;
Impedancija: $\underline{Z}_C = \frac{U \angle 0}{I \angle 90^\circ} = \frac{U}{\omega C \cdot U} \angle -90^\circ = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ = -j \frac{1}{\omega C} = -jX_C$

17

Kirchhoffovi zakoni u kompleksnom području

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Pri rješavanju krugova izmjenične struje u kompleksnom području, Kirchhoffovi zakoni vrijede za fazore struja i napona, kako slijedi:

- ♦ Kirchhoffov zakon za struje: $\sum_{\text{alg}} \underline{I} = 0$ ili $\sum \underline{I}_{\text{ul}} = \sum \underline{I}_{\text{iz}}$

Algebarski zbroj fazora struja svih grana spojenih u neki čvor jednak je nuli (algebarski znači da se fazorima ulaznih struja daje jedan predznak (+), a fazorima izlaznih struja drugi (-). Ili: U čvoru je jednak zbroj fazora ulaznih i izlaznih struja.

- ♦ Kirchhoffov zakon za napone: $\sum_{\text{alg}} \underline{U} = 0$ ili $\sum \underline{U}_{\text{akt}} = \sum \underline{U}_{\text{pas}}$

Algebarski zbroj fazora svih napona u nekoj petlji el. kruga jednak je nuli (fazori napona koji u smjeru obilaska petlje rastu imaju predznak +, a fazori napona koji padaju imaju -). Ili: U petlji je jednak zbroj fazora aktivnih i pasivnih napona.

18

Primjer: Kirchhoffovi zakoni u kompleksnom području



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Kirchhoffov zakon za napone (KZN)

petlje 1, 2 i 3 :

$$1 \quad \underline{U}_1 - \underline{I}_1 R_1 + \underline{I}_5 (-j/\omega C_1) + \underline{I}_4 (j\omega L_1) = 0$$

$$2 \quad \underline{U}_2 - \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_6 (-j/\omega C_2) - \underline{I}_5 (-j/\omega C_1) = 0$$

$$3 \quad \underline{U}_3 - \underline{I}_4 (j\omega L_1) - \underline{I}_6 (-j/\omega C_2) - \underline{I}_3 (j\omega L_2) = 0$$

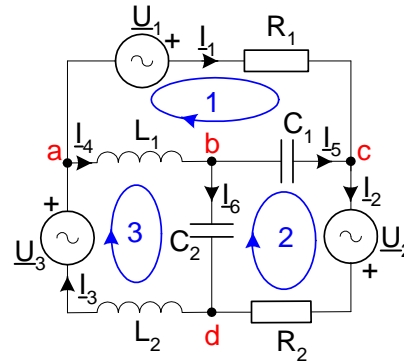
Kirchhoffov zakon za struje (KZS)

čvorovi a, b i c :

$$a \quad \underline{I}_3 - \underline{I}_1 - \underline{I}_4 = 0$$

$$b \quad \underline{I}_4 - \underline{I}_5 - \underline{I}_6 = 0$$

$$c \quad \underline{I}_1 + \underline{I}_5 - \underline{I}_2 = 0$$



- ❖ Kako bi dopunili jednadžbe KZN za petlje 1 i 3 da su induktiviteti L_1 i L_2 povezani međuinduktiviteta M (s točkicama na lijevim stranama oba induktiviteta)?

19

Postupak rješavanja krugova izmjenične struje u kompleksnom području



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

1. **Preslikavanje** prikaza zadanih struja i napona *iz vremenskog u kompleksno područje*, na slijedeći način:
 - A. Zadane struje i naponi izraze se kao sinusne funkcije te se odrede njihove efektivne vrijednosti (maksimalne vrijednosti se podijele s $\sqrt{2}$).
 - B. Izraze se fazori pojedinih zadanih veličina, tako da je iznos fazora jednak efektivnoj vrijednosti, a kut fazora početnom kutu veličine.
2. Izražavanje impedancija pojedinih pasivnih elemenata kruga
3. Postavljanje jednadžbi i računanje nepoznatih struja i napona u kompleksnom području.
4. **Preslikavanje** kompleksnih prikaza izračunatih struja i napona *u vremensko područje*, na slijedeći način:
 - A. Množenjem fazora s faktorom $\sqrt{2}$, pa zatim s $e^{j\omega t}$ odrede se rotirajući vektori izračunatih struja i napona.
 - B. Izraze se *vremenske funkcije* traženih veličina, kao *imaginarni dijelovi* njihovih izračunatih rotirajućih vektora.

20