

Osnove elektrotehnike

Snaga u krugovima izmjenične struje

Snaga u krugovima izmjenične struje

Sadržaj:

- ◆ Uvod
- ◆ Trenutna snaga
- ◆ Radna, jalova i prividna snaga, faktor snage
- ◆ Trokut snage
- ◆ Računanje snage na elementima R, L i C
- ◆ Računanje ukupne radne, jalove i prividne snage
- ◆ Računanje snage u kompleksnom području
- ◆ Maksimalna snaga na trošilu
- ◆ Mjerenje snage izmjenične struje

- ♦ Izraženo električnim veličinama snaga P u istosmjernim strujnim krugovima jednaka je produktu napona i struje:

$$P = U \cdot I$$

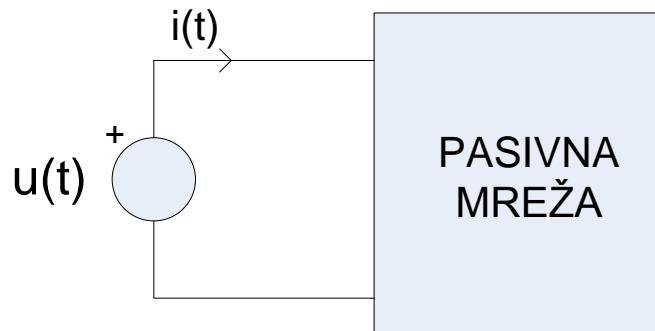
- ♦ U slučaju da su napon i struja vremenski promjenjive funkcije (izmjenični strujni krugovi) tada trenutna snaga iznosi:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

- ♦ Odnos između snage i energije može se izraziti s:

$$p(t) = \frac{dW}{dt}$$

- ◆ Na slici su prikazani referentni smjerovi napona i struje:



- U intervalima kad je $p(t) > 0$ imamo prirast energije u jedinici vremena tj. **energija se prenosi od izvora prema trošilu.**
- ◆ U intervalima kada je $p(t) < 0$ **energija ide u smjeru od trošila prema izvoru.**

- ♦ Ukupna predana energija u intervalu od t_1 do t_2 iznosi:

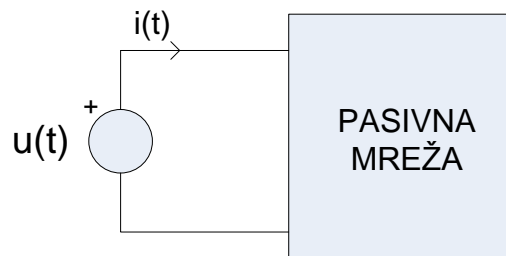
$$W = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt$$

- ♦ Uvodimo i pojam prosječne radne snage P :

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt$$

- ♦ Ukupna energija predana trošilu u tom intervalu može se izračunati na sljedeći način:

$$W = P(t_2 - t_1)$$



Na priključnicama pasivne mreže napon i struju možemo izraziti na sljedeći način

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha_u)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \alpha_i) \quad \text{Gdje je } \varphi = \alpha_u - \alpha_i > 0$$

Za trenutak promatranja zbog jednostavnosti uzimamo da je $\alpha_u = 0$, tada je $\alpha_i = -\varphi$, dakle radi se o induktivnom karakteru impedancije.

Dobivamo:

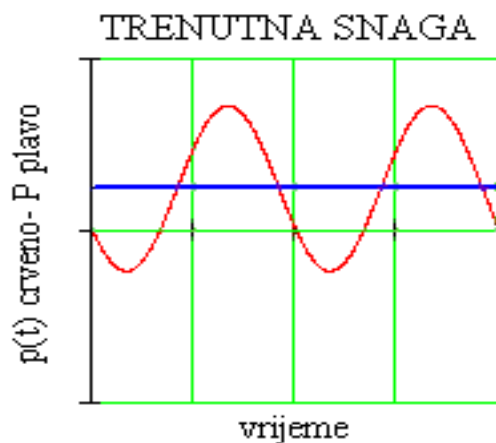
$$u(t) = U_m \sin(\omega t)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

Trenutnu snagu možemo izraziti kao produkt napona i struje

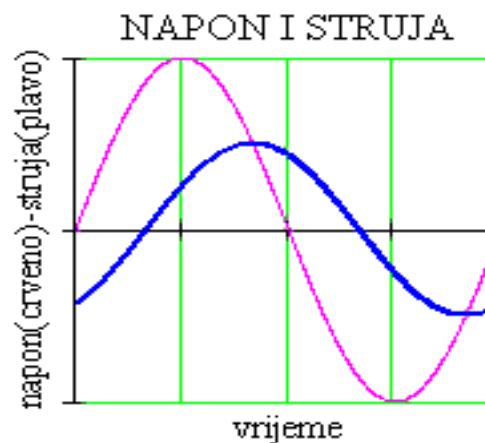
$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = U_m \sin(\omega t) \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) \quad (1)$$

DIJAGRAM SNAGE, NAPONA I STRUJE OVISNO O FAZNOM KUTU TROŠILA



$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

izradio J. Felja



FAZNI KUT: $\varphi = 60$

negativan kut : kapacitivno

pozitivan kut : induktivno

Analizom funkcije $p(t)$ možemo zaključiti sljedeće:

- ♦ $p(t)$ ima duplo veći broj nultočaka u odnosu na funkcije $u(t)$ i $i(t)$.
- ♦ Površina ispod krivulje $p(t)$ predstavlja energiju koju izvor daje (površina iznad apscisne osi, pozitivna) ili prima (površina ispod apscisne osi, negativna)
- ♦ U općem slučaju (kada je $0 \leq \varphi < 90^\circ$) funkcija $p(t)$ ima istosmjernu komponentu (pozitivna površina ispod krivulje $p(t)$ je veća od negativne).

Izraz:

$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = U_m \sin(\omega t) \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi)$$

možemo transformirati koristeći formulu

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = 0,5 (\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta))$$

Dobijemo:

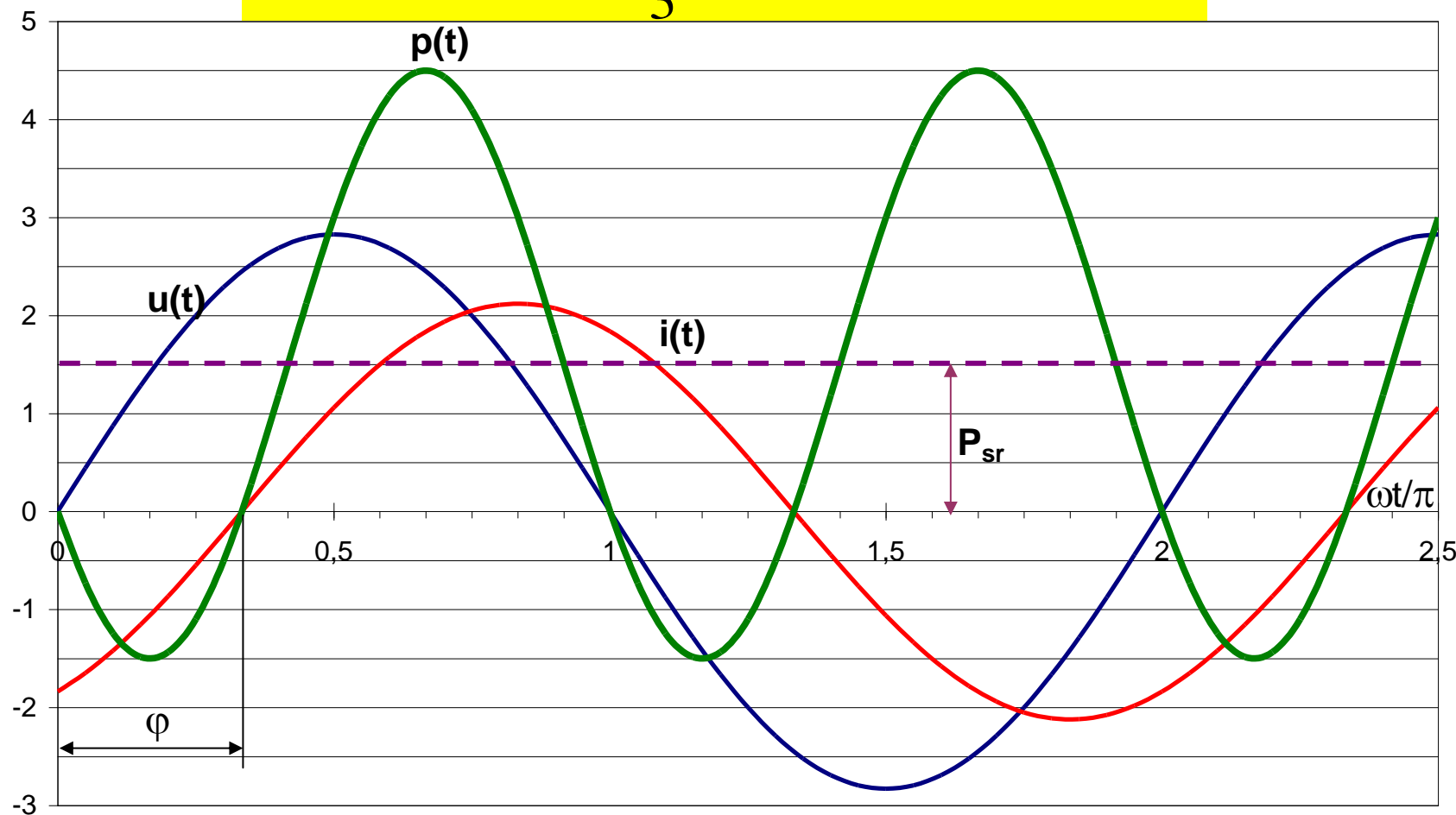
$$p(t) = U \cdot I \cos \varphi - U \cdot I \cos(2\omega t - \varphi) \quad (2)$$

Prvi član u izrazu (2) (ljubičasti) ne ovisi o vremenu i predstavlja srednju vrijednost funkcije $p(t)$ oko koje titra drugi član s dvostrukom frekvencijom (crni) čija je srednja vrijednost jednaka 0 i koji nije prikazan na sljedećoj slici.

Snaga u krugovima izmjenične struje

Valni oblik napona, struje i trenutne snage

$$\dot{U} = 2 \angle 0^\circ ; \underline{Z} = \frac{4}{3} \angle 60^\circ ; \dot{I} = 1,5 \angle -60^\circ$$



$$p(t) = U \cdot I \cos \varphi - U \cdot I \cos(2\omega t - \varphi)$$

Dakle, prvi član predstavlja prosječnu vrijednost snage i nazivamo ga **djelatna, korisna ili radna snaga P** . Uvijek je: $P \leq U \cdot I$

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi \quad (3)$$

- ◆ Djelatna ili radna snaga **P** ovisi o produktu efektivne vrijednosti napona, struje i **$\cos \varphi$** . Fazni kut **φ** određuje impedancija **Z** , dakle međusobni odnos elemenata kruga (**R** , **L** , **C**) i odgovarajuća frekvencija. Dakle, **$\cos \varphi$** poprima vrijednost od **0** do **1**.
- ◆ **$\cos \varphi$** nazivamo **FAKTOR SNAGE**
- ◆ Jedinica za radnu snagu je **W (vat)**.

Faktor snage možemo izračunati na sljedeći način

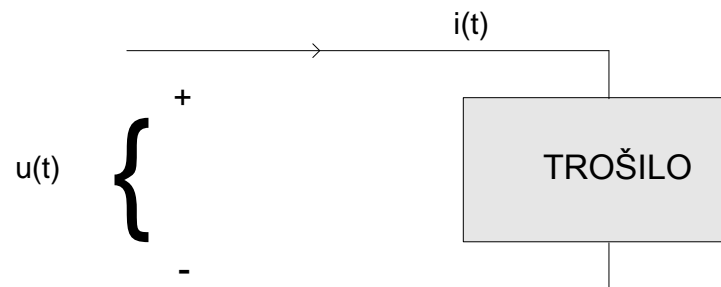
$$\cos \varphi = \frac{P}{U \cdot I}$$

- ♦ Na izvor U priključimo odgovarajuću impedanciju. Ako se u krugu iznos impedancije ne mijenja, a mijenja se njezin kut φ , onda se ne mijenja niti iznos struje, ali se promjenom kuta impedancije mijenja radna snaga.
- ♦ Produkt efektivnih vrijednosti napona i struje samo prividno predočava snagu u krugu, pa se naziva **prividna snaga S** :

$$S = U \cdot I \quad (\text{VA})$$

Mjera za S je VA (voltamper).

Na stezaljkama tri trošila izmjereni su sljedeći naponi i struje u skladu s definiranim referentnim oznakama smjera struje i polariteta napona, $\omega = 1000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$



a) $u(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t)$

$$i(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t)$$

$$u(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t)$$

b) $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$

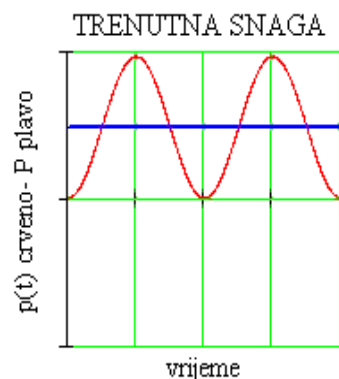
$$u(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t)$$

c) $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

Prikažite analitički i grafički funkciju trenutne snage i izračunajte prosječnu snagu na svakom od trošila te odredite koji su to elementi.

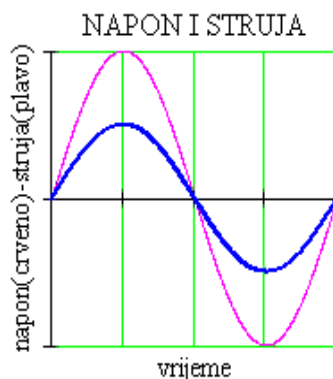
$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = U_m \sin(\omega t) \cdot I_m \sin(\omega t) = U_m \cdot I_m \sin^2(\omega t) = \\ = U \cdot I (1 - \cos(2\omega t)) = 1000(1 - \cos(2000t))$$

DIJAGRAM SNAGE, NAPONA I STRUJE OVISNO O FAZNOM KUTU TROŠILA



$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

izradio J. Felja



FAZNI KUT: $\varphi = 0$

negativan kut : kapacitivno

pozitivan kut : induktivno

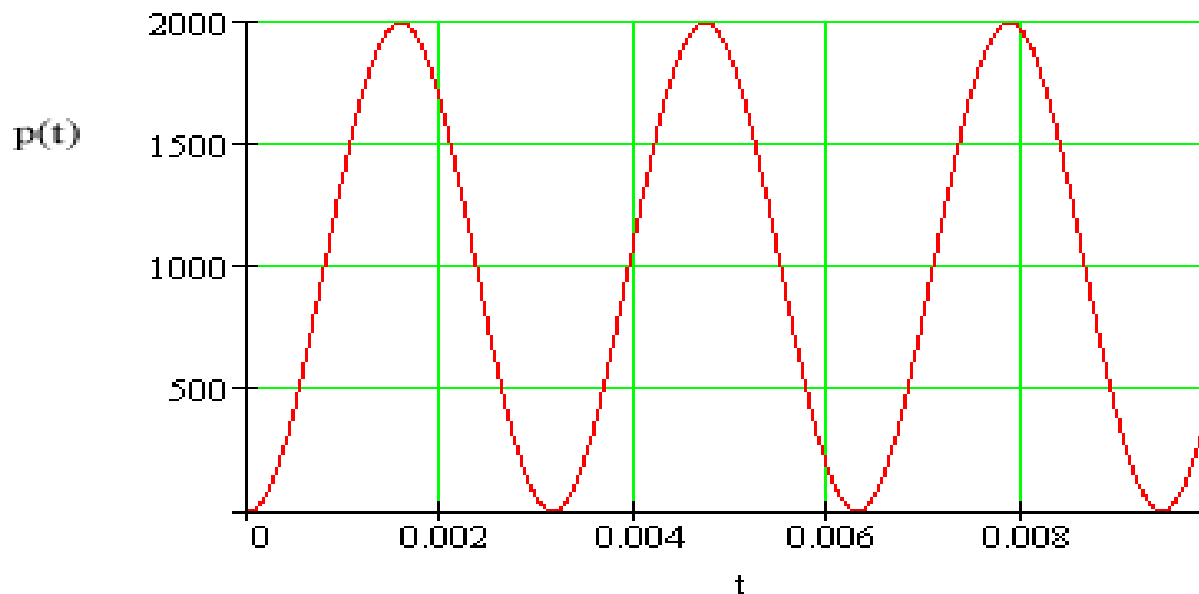
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T 1000 [1 - \cos(2\omega t)] dt$$

$$P = 1000 \text{ W}$$

$$\dot{U} = 100 \angle 0^\circ, \dot{I} = 10 \angle 0^\circ$$

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = 10 \Omega = R$$

Energija se troši na otporu, zato se ova snaga naziva djelatna snaga.



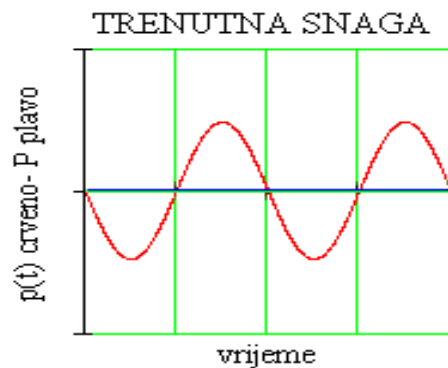
$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = 10 \angle 0^\circ$$

U svakom trenutku je trenutna vrijednost snage pozitivna, dakle tok energije je od izvora prema otporu

$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = U_m \sin(\omega t) \cdot I_m \sin(\omega t - 90^\circ) = -U_m \cdot I_m \sin(\omega t) \cos(\omega t) = -U \cdot I \sin(2\omega t) = -1000 \sin(2000t)$$

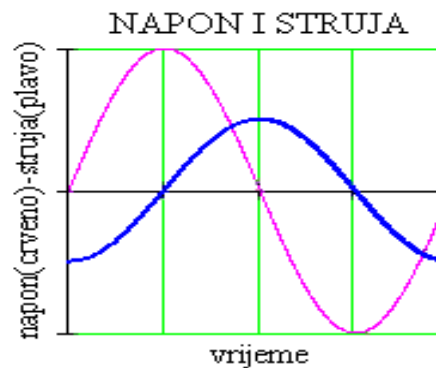
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (-UI) \cdot \sin(2\omega t) dt = 0$$

DIJAGRAM SNAGE, NAPONA I STRUJE OVISNO O FAZNOM KUTU TROŠILA



$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

izradio J. Felja

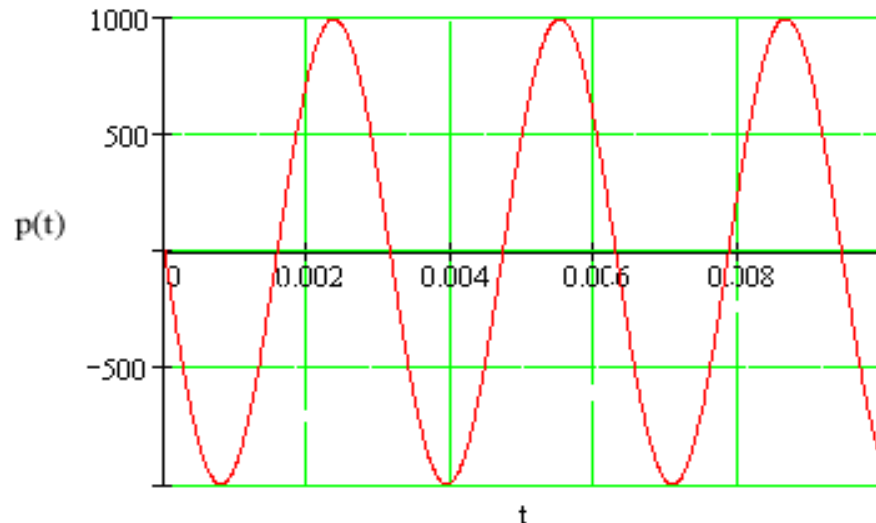


FAZNI KUT: $\varphi = 90$

negativan kut : kapacitivno

pozitivan kut : induktivno

$$\underline{\underline{Z}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \angle 0^\circ}{I \angle -90^\circ} = \frac{100 \angle 0^\circ}{10 \angle -90^\circ} = 10 \angle 90^\circ \Omega = \underline{\underline{X_L}}$$



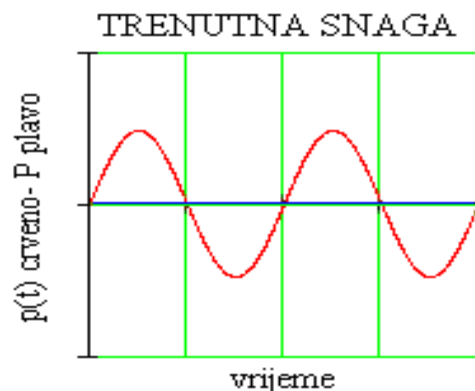
U slučaju b) prosječna snaga jednaka je 0. Energija titra između izvora i idealne zavojnice (opisane induktivitetom).

S obzirom da ova energija ne obavlja nikakav koristan rad, odgovarajuću snagu nazivamo **jalovom snagom** ili **reaktivnom snagom**.

$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = U_m \sin(\omega t) \cdot I_m \sin(\omega t + 90^\circ) = U_m \cdot I_m \sin(\omega t) \cos(\omega t) = U \cdot I \sin(2\omega t) = 1000 \sin(2000t)$$

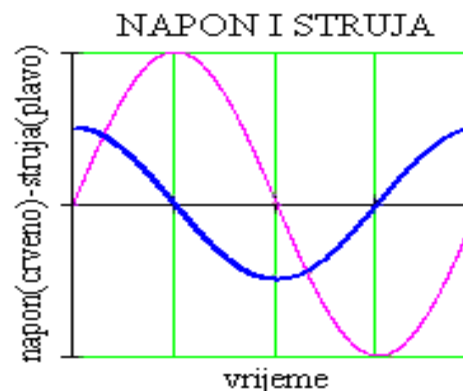
$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (UI) \cdot \sin(2\omega t) dt = 0$$

DIJAGRAM SNAGE, NAPONA I STRUJE OVISNO O FAZNOM KUTU TROŠILA



$$p(t) = u(t) \cdot i(t)$$

izradio J. Felja



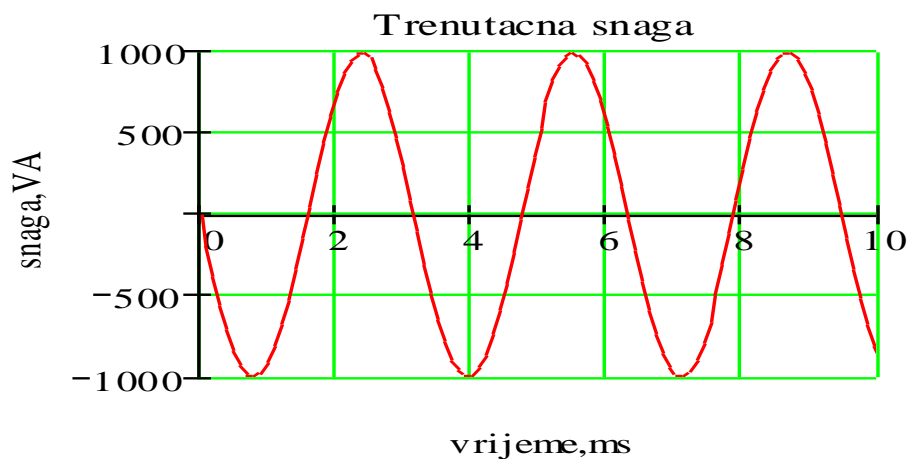
FAZNI KUT: $\varphi = -90$

negativan kut : kapacitivno

pozitivan kut : induktivno

$$\underline{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \angle 0^\circ}{I \angle 90^\circ} = \frac{100 \angle 0^\circ}{10 \angle 90^\circ} = 10 \angle -90^\circ \Omega = \underline{X}_C$$

Kao i u slučaju b), i u slučaju c) prosječna snaga jednaka je 0. Energija titra između izvora i idealnog kondenzatora (opisanog kapacitetom).



U intervalima gdje je $p(t) > 0$ tok energije je od izvora ka kondenzatoru (kapacitetu), dok je u intervalima gdje je $p(t) < 0$ obrnut. Dakle, osim **jalove snage induktivnog karaktera** postoji i **jalova snaga kapacitivnog karaktera**.

KOMENTAR PRIMJERA 1

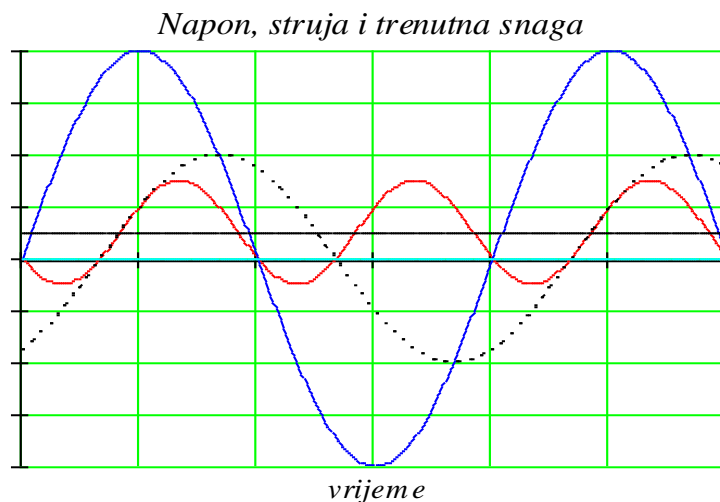
- ◆ U intervalima gdje je $p(t) > 0$ tok energije je od izvora ka trošilu, dok je u intervalima gdje je $p(t) < 0$ obrnut.
- ◆ Funkcija trenutne snage ovisi o karakteru trošila.
- ◆ Na otporu R tok energije je od izvora prema otporu, trenutna snaga je uvijek pozitivna funkcija.
- ◆ Trenutne snage na elementima L i C suprotnog su predznaka, a prosječna vrijednost snage jednaka je 0. Vraćanje energije u izvor iz elemenata L i C obavlja se na račun prethodno akumulirane energije u njima.

KOMENTAR PRIMJERA 1 (nastavak)

- ♦ **Radna snaga** opisuje pojave koje se dešavaju u otporu R (toplinska energija)
- ♦ **Jalova snaga** opisuje pojave koje se dešavaju u reaktivnim elementima i to u L (magnetska energija) i C (električna energija).
- ♦ Opći slučaj je da se impedancija \underline{Z} sastoji od elemenata R , L i C , njihov međusobni odnos određen je faznim kutom φ .
- ♦ Razmotrimo funkciju trenutne snage u općem slučaju.

Snaga u krugovima izmjenične struje

Trenutna snaga, $\varphi = 60^\circ$



Slika prikazuje funkciju trenutne snage za koji je početni fazni kut napona nula, a trošilo je induktivno sa faznim kutem $\varphi=60^\circ$.

Izraz (2): $p(t) = U \cdot I \cos \varphi - U \cdot I \cos(2\omega t - \varphi)$

možemo transformirati koristeći formulu

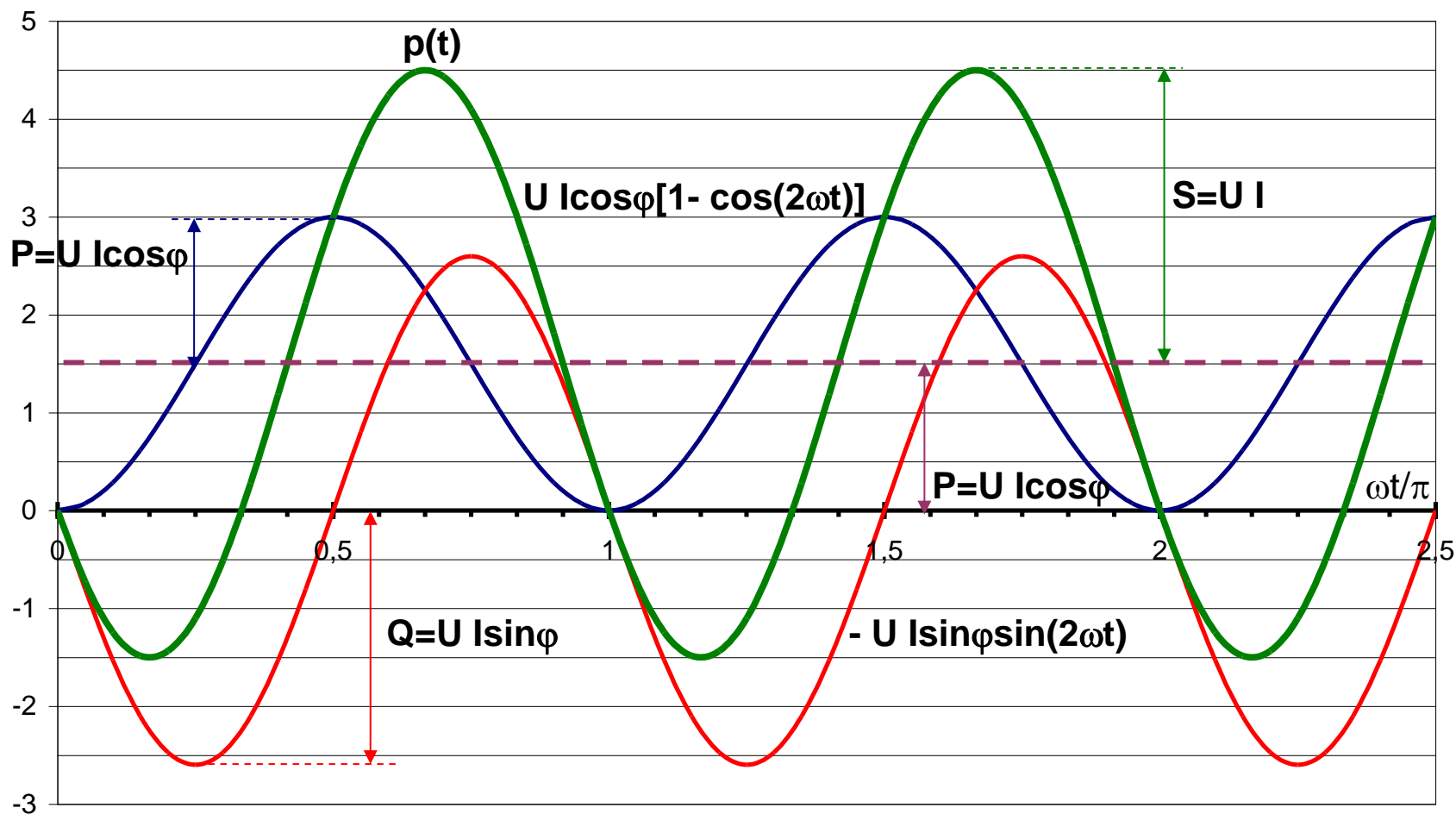
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

Dobijemo:

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot [1 - \cos(2\omega t)] - U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(2\omega t) \quad (4)$$

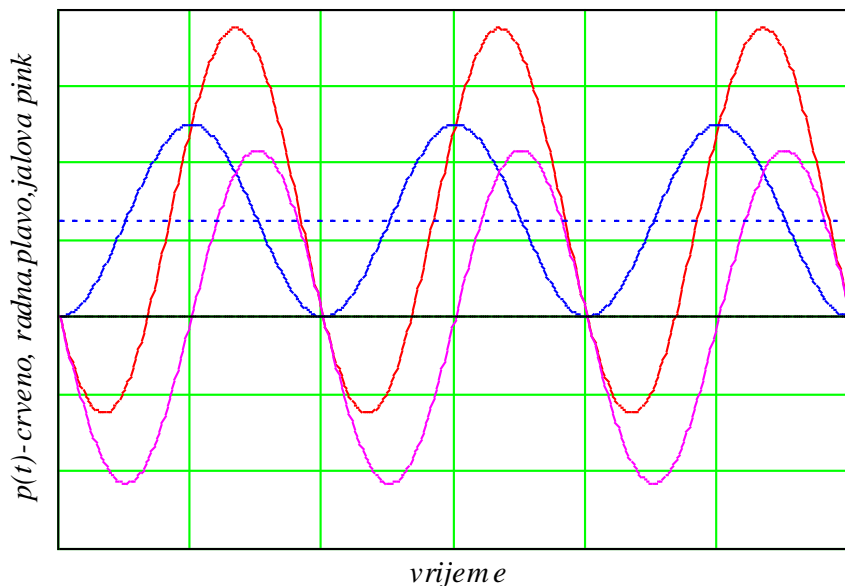
Snaga u krugovima izmjenične struje

Trenutna snaga, $\varphi = 60^\circ$



Snaga u krugovima izmjenične struje

Komponente trenutne snage



Rastavljanjem funkcije trenutne snage $p(t)$ (crveni graf) dobijemo dvije komponente.

Prva komponenta (plavi graf) nema negativne vrijednosti i titra dvostrukom frekvencijom (2ω) oko srednje vrijednosti $UI \cos \phi$. Ona predstavlja trenutnu vrijednost radne snage. Označimo je s $p_r(t)$.

Druga komponenta (pink graf) titra oko apscisne osi s dvostrukom frekvencijom (2ω) i njena srednja vrijednost je nula. Amplituda druge komponente iznosi $UI \sin \phi$. Ova komponenta predstavlja trenutnu jalovu snagu $p_j(t)$.

Snaga u krugovima izmjenične struje

Jalova ili reaktivna snaga



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

$$p_r(t) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot [1 - \cos(2\omega t)] \quad (5)$$

$$p_j(t) = - U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(2\omega t) \quad (6)$$

$$p(t) = p_r(t) + p_j(t)$$

Maksimalna vrijednost trenutne jalove snage $p_j(t)$ (dakle amplituda funkcije) naziva se **JALOVA** ili **REAKTIVNA SNAGA** i označava s Q .

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi \quad (7)$$

Jedinica za mjerenje jalove snage je VAR (voltamper reaktivni).

Snaga u krugovima izmjenične struje

Jalova ili reaktivna snaga



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Za jalovu snagu Q vrijedi:

- ◆ za $\varphi > 0$ (induktivno ponašanje):
 - $Q > 0$ - trošilo jalove snage
 - za $\varphi < 0$ (kapacitivno ponašanje):
 - $Q < 0$ - izvor jalove snage
- ◆ Jalova snaga (energija) koja oscilira između izvora i trošila nepotrebno opterećuje izvore el. energije i prijenosne sustave pa se nastoji minimizirati, odnosno stvoriti na mjestu trošila koja trebaju jalovu snagu
- ◆ Jalova energija potrebna za rad trošila (koja su uglavnom induktivna) priskrbljuje se iz kondenzatora dodanih uz trošilo - **kompensacija jalove energije**

Vrijedi

$$(UI\cos\varphi)^2 + (UI\sin\varphi)^2 = (UI)^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = P^2 + Q^2 = (UI)^2$$

Izraz (2) možemo napisati na sljedeći način:

$$p(t) = U \cdot I \cdot [\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]$$

Dakle, $p(t)$ titra oko srednje vrijednosti s amplitudom UI . Ova amplituda, vidjeli smo prije, naziva se **PRIVIDNA SNAGA S**.

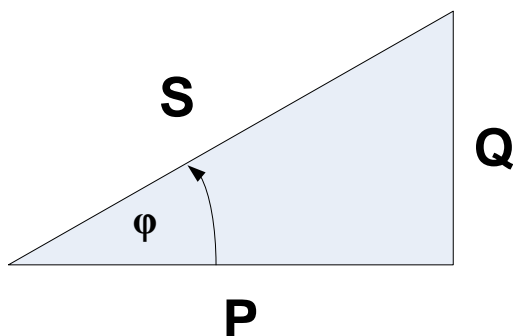
Dakle, odnos između P , Q i S možemo napisati na sljedeći način:

$$P^2 + Q^2 = S^2 \quad (8)$$

Snaga u krugovima izmjenične struje

Trokut snage

Relacija (8) slikovito se može prikazati tzv. **TROKUTOM SNAGE**, gdje predznak kuta φ određuje karakter trošila (mreže).



$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (8A)$$

$$S = UI \quad (9)$$

$$P = S \cos \varphi \quad (10)$$

$$Q = S \sin \varphi \quad (11)$$

Snaga u krugovima izmjenične struje

Radna, jalova i prividna snaga



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

KOMENTAR

- ♦ Za proračunavanje obavljenog rada mjerodavna je djelatna snaga P te samo ona ima pravo značenje snage u smislu njene definicije.
- ♦ Prividnoj snazi S i jalovoj snazi Q pridjeljuje se naziv snaga jer imaju iste dimenzije kao i P (sadrže produkt napona i struje), iako one ne služe izravno za proračun korisne energije. Međutim, svaka od njih ima, kao važan energetske podatak, određeno značenje pri proračunu električkih uređaja.
- ♦ Jalova snaga Q ukazuje na prisutnost energije električnog i magnetskog polja u mreži.

Snaga u krugovima izmjenične struje

Radna, jalova i prividna snaga (2)



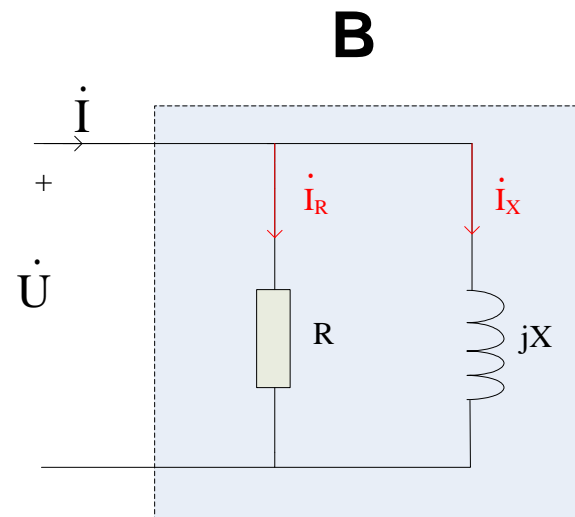
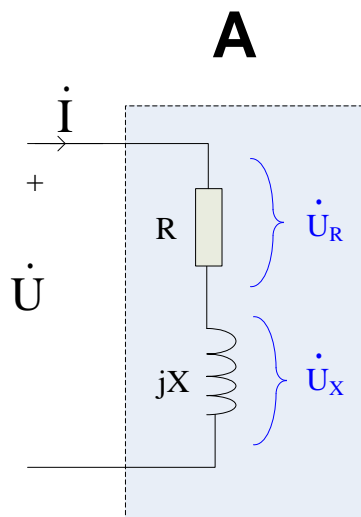
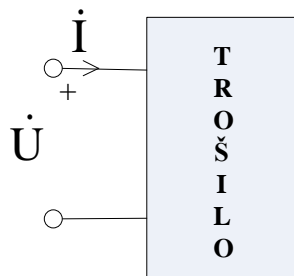
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

KOMENTAR (nastavak)

- ◆ Želimo li da trošilo obavlja koristan rad, izvor mu mora dovoditi djelatnu energiju u skladu s djelatnom snagom P . Istovremeno postojanje jalove snage Q uzrokuje povećanu prividnu snagu S . To znači da će uz konstantan napon U poteći i jača struja I koja će jače opteretiti vodiče.
- ◆ Prividna snaga S je veličina prema kojoj se obavlja proračun i dimenzioniranje električnih uređaja, generatora, transformatora itd. Njihova snaga ovisi o režimu rada, pa se za njih ne daje podatak o radnoj snazi, već se daje podatak o prividnoj snazi S koja je jednaka produktu nazivnog napona U_n i nazivne struje I_n .

Snaga u krugovima izmjenične struje

Računanje snage na elementima R, L i C



$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = (U \cdot \cos\varphi) \cdot I = U \cdot (I \cdot \cos\varphi)$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = (U \cdot \sin\varphi) \cdot I = U \cdot (I \cdot \sin\varphi)$$

$$\dot{U}_R = \dot{I} \cdot R$$

$$\dot{U}_L = \dot{I} \cdot jX$$

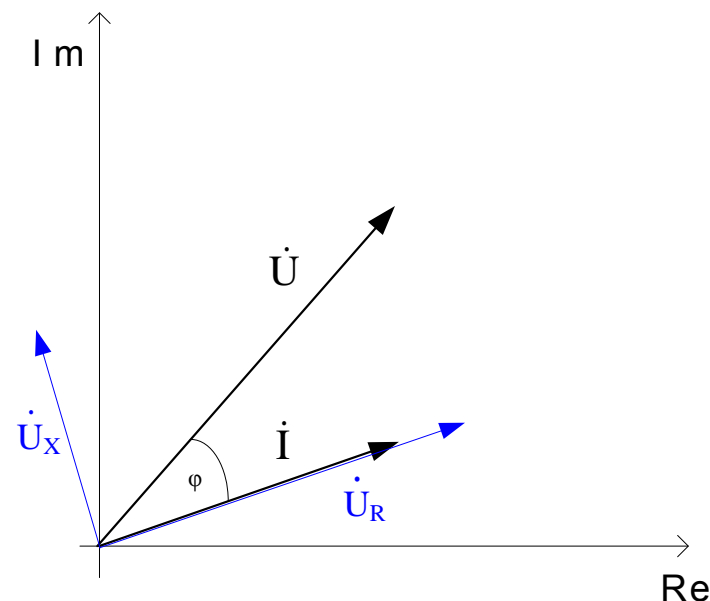
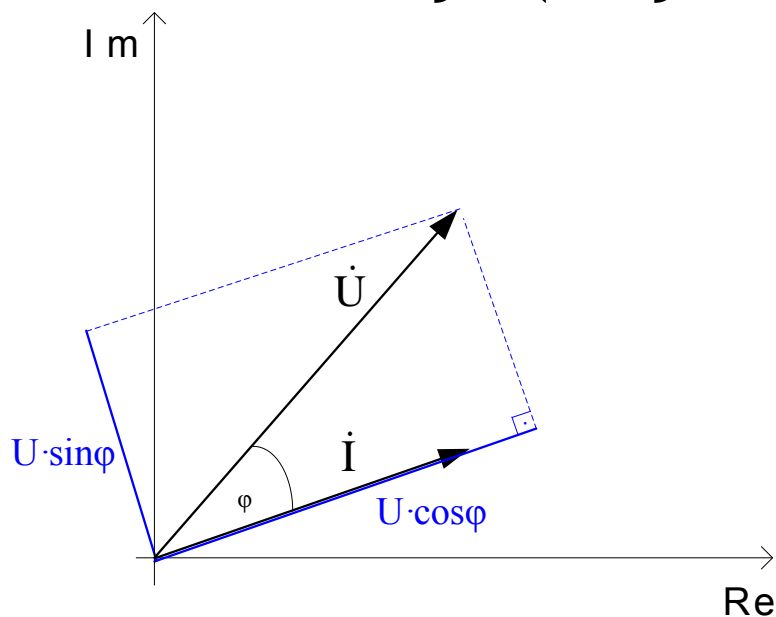
$$\dot{I}_R = \dot{U} / R$$

$$\dot{I}_X = \dot{U} / jX$$

Snaga u krugovima izmjenične struje

Računanje snage na elementima R, L i C (2)

Slučaj A (serija R i X_l)



$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_X \quad U_R = U \cdot \cos \varphi \quad U_X = U \cdot \sin \varphi$$

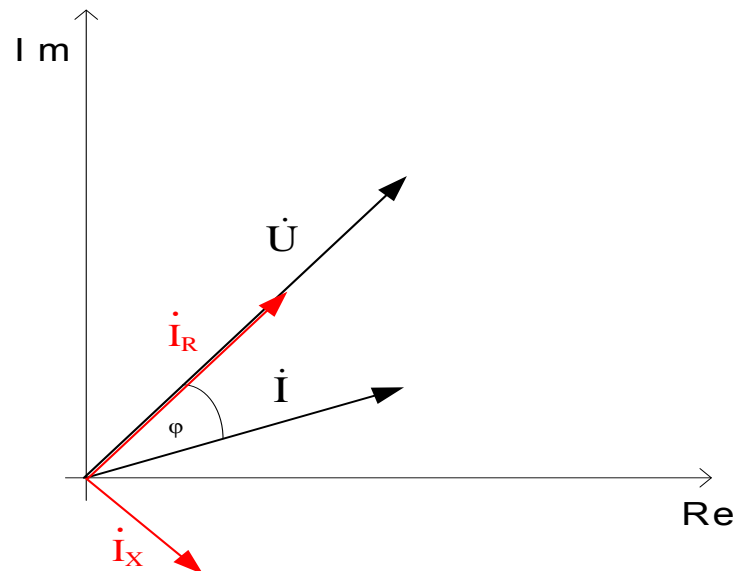
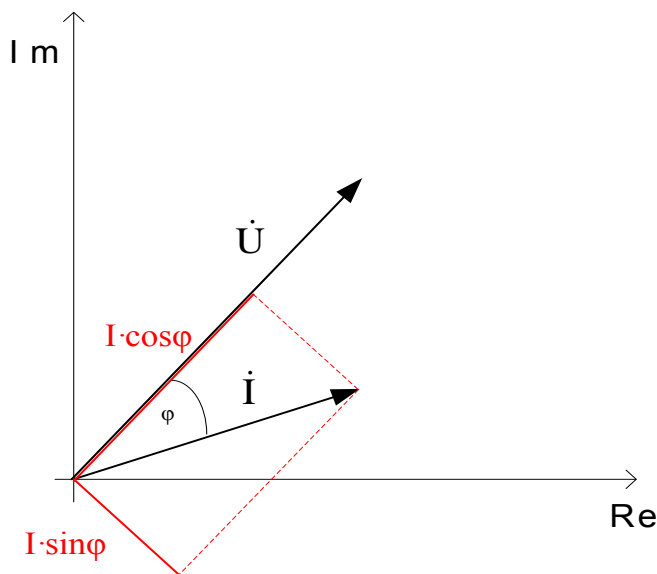
$$P = (U \cdot \cos \varphi) \cdot I = U_R \cdot I = I \cdot R \cdot I = I^2 \cdot R \quad (12)$$

$$Q = (U \cdot \sin \varphi) \cdot I = U_X \cdot I = I \cdot X \cdot I = I^2 \cdot X \quad (13)$$

Snaga u krugovima izmjenične struje

Računanje snage na elementima R, L i C (3)

Slučaj B (paralela R i X_l)



$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_X \quad I_R = I \cdot \cos \varphi \quad I_X = I \cdot \sin \varphi$$

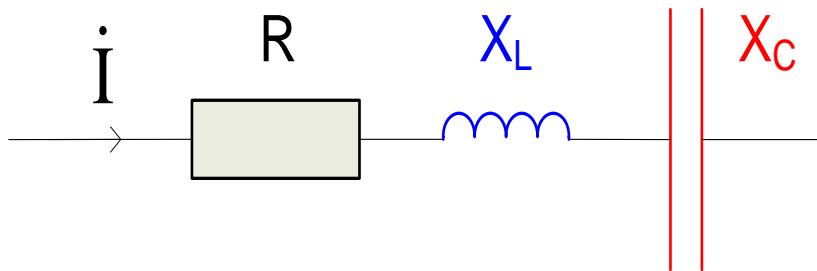
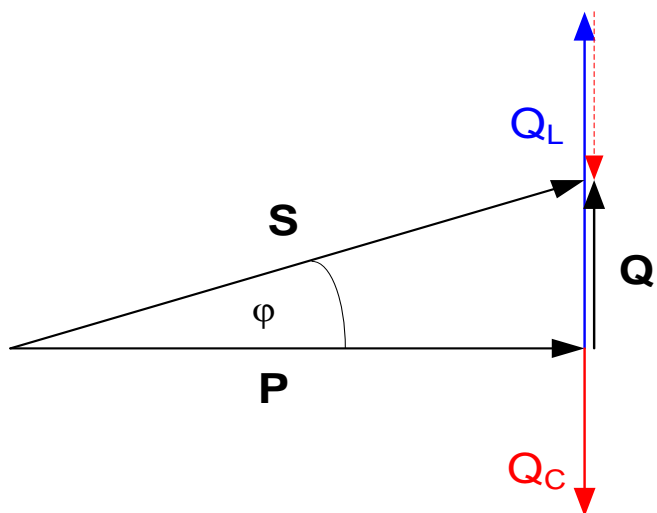
$$P = U \cdot (I \cdot \cos \varphi) = U \cdot I_R = \frac{U^2}{R} = U^2 \cdot G \quad (14)$$

$$Q = U \cdot (I \cdot \sin \varphi) = U \cdot I_X = \frac{U^2}{X} = U^2 \cdot B \quad (15)$$

Snaga u krugovima izmjenične struje

Računanje ukupne radne, jalove i prividne snage

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$P = \sum_{i=1}^n P_i \quad (16) \quad Q = \sum_{i=1}^n Q_i \quad (17)$$

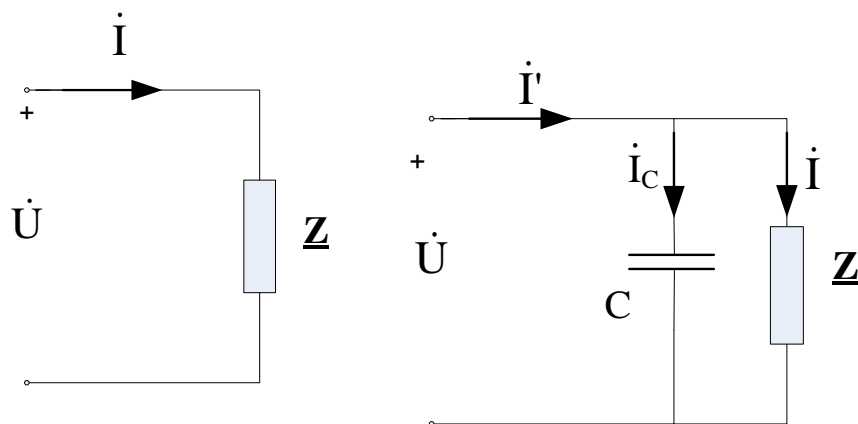
$$S = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n P_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n Q_i\right)^2} \neq \sum_{i=1}^n S_i \quad (18)$$

Q_L - jalova snaga na induktivitetu, pozitivna
 Q_C - jalova snaga na kapacitetu, negativna

Komentar:

- ♦ Može se uočiti da je u mreži s n impedancija radna snaga prisutna na otporima, a jalova na reaktivnim elementima. Ako su nam poznati svi naponi, struje i vrijednosti realnih i imaginarnih dijelova impedancija, iz relacija (12), (13), (14) i (15) mogu se izračunati pojedinačni doprinosi P i Q na svakom elementu pojedine impedancije.
- ♦ U izrazu (17) radi se o algebarskoj sumi jalovih snaga. Jalovoj snazi induktivnog karaktera pridjeljujemo pozitivnu vrijednost, a jalovoj snazi kapacitivnog karaktera negativnu vrijednost.
- ♦ Ukupnu radnu snagu P dobijemo relacijom (16), jalovu snagu Q relacijom (17), te ukupnu prividnu snagu S relacijom (18).
- ♦ Treba uočiti da ukupna prividna snaga nije jednaka sumi prividnih snaga na pojedinim elementima.

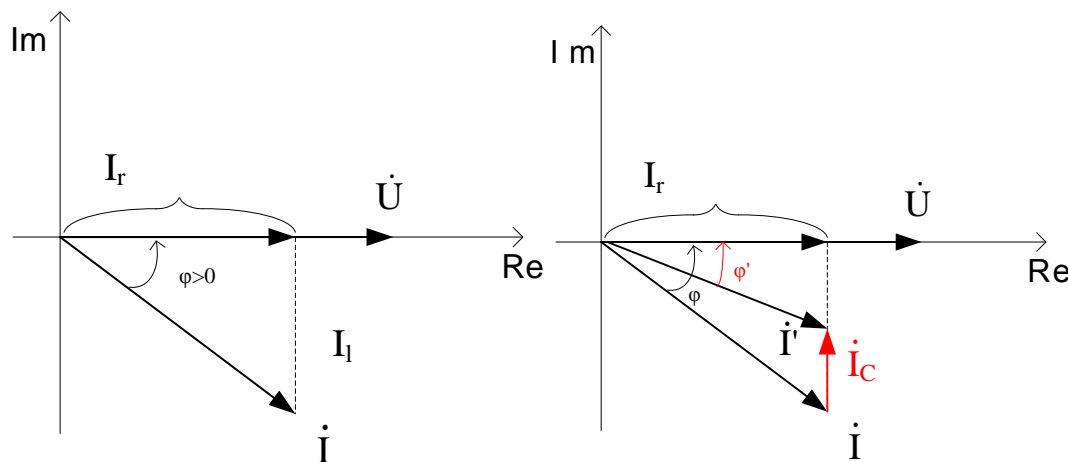
- ◆ Trošila električne energije nisu čisti otpori već su to impedancije, najčešće induktivnog karaktera spojene na napon gradske mreže.
- ◆ Radna snaga P ovisi, osim o produktu efektivnih vrijednosti napona i struje, i o **faktoru snage $\cos\varphi$**
- ◆ Sa stanovišta prijenosa električne energije potrebno je da **$\cos\varphi$** bude što veći (≈ 1)
- ◆ **$\cos\varphi$** se popravlja tako da se impedanciji **Z** (induktivnog karaktera) paralelno priključi kondenzator kapaciteta **C** koji će smanjiti ukupnu jalovu snagu **Q** , pa time povećati iznos **$\cos\varphi$**
- ◆ Radna snaga pri tome ostaje ista



$$P = UI \cos \varphi = UI' \cos \varphi' = UI_r$$

$$I_r = I \cdot \cos \varphi = I' \cdot \cos \varphi'$$

$$I' = \frac{I \cos \varphi}{\cos \varphi'} < I$$



Dimenzioniranje
Kondenzatora (C)

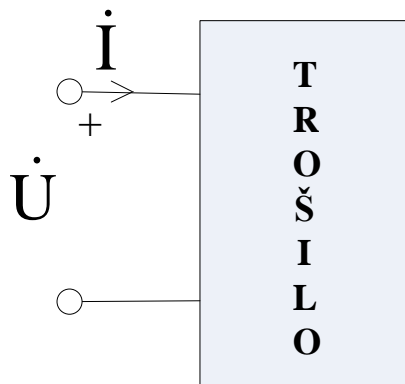
$$I_c = U \cdot \omega C$$

$$C = I_c / \omega U \quad (18)$$

Kondenzator s manjim C je lakše realizirati tako da će u praksi biti $I_c < I_L$ (struja I' će biti i dalje induktivnog karaktera - postoji i rješenje s $I_c > I_L$, struja I' je tada kapacitivnog karaktera).

Snaga u krugovima izmjenične struje

Računanje snage u kompleksnom području



$$\dot{U} = U \angle 0^\circ \quad \dot{I} = I \angle -\varphi$$

$$\dot{I}^* = I \angle \varphi$$

$$\dot{U} \dot{I}^* = U \cdot I \angle (0 + \varphi) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) + j \cdot U \cdot I \cdot \sin(\varphi)$$

$$P = \operatorname{Re} \{ \dot{U} \cdot \dot{I}^* \} \quad (19)$$

$$Q = \operatorname{Im} \{ \dot{U} \cdot \dot{I}^* \} \quad (20)$$

$$S = | \dot{U} \cdot \dot{I}^* | \quad (21)$$

Snaga u krugovima izmjenične struje

Računanje snage u kompleksnom području (2)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

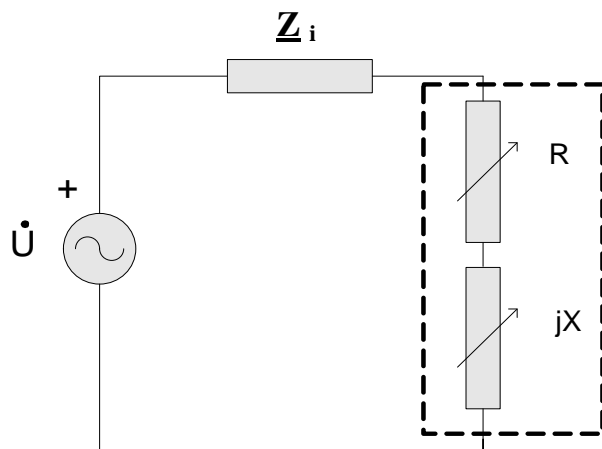


KOMENTAR

- ♦ Radna snaga P jednaka je realnom dijelu produkta fazora napona i konjugirano kompleksne vrijednosti fazora struje.
- ♦ Jalova snaga Q jednaka je imaginarnom dijelu produkta fazora napona i konjugirano kompleksne vrijednosti fazora struje.
- ♦ Prividna snaga S jednaka je modulu kompleksnog broja koji se dobije produktom fazora napona i konjugirano kompleksne vrijednosti fazora struje.

Snaga u krugovima izmjenične struje

Maksimalna snaga na trošilu



$$\underline{Z}_i = R_i + jX_i \quad ; \quad \underline{Z} = R + jX$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_i + \underline{Z}} = \frac{\dot{U}}{(R_i + R) + j(X_i + X)}$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2}}$$

Snaga P na impedanciji Z je funkcija dviju varijabli (R, X) .

$$P = \frac{U^2 \cdot R}{(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2} = P(R, X) \quad (22)$$

Maksimalnu snagu u slučaju da su R i X promjenjivi dobit ćemo ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{\left[(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2 \right] \cdot U^2 - 2 \cdot (R_i + R) \cdot R \cdot U^2}{\left[(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2 \right]^2} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{-2RU^2(X_i + X)}{\left[(R_i + R)^2 + (X_i + X)^2 \right]^2} = 0 \quad (24)$$

- ♦ Iz izraza (24) dobijemo da je $-2R(X_i + X) = 0$
- ♦ samo u slučaju $X = -X_i$ dobijemo realno rješenje (R mora biti veći od nule da bi se na njemu uopće razvila korisna snaga).

- ♦ Uvrstimo $X = -X_i$ (25)
u izraz (23) te dobijemo

$$R = R_i \quad (26)$$

Dakle

$$\underline{Z} = R + jX = R_i - jX_i = \underline{Z}_i^* \quad (27)$$

- ♦ Maksimalna snaga na impedanciji se dobije kad je impedancija trošila jednaka konjugirano kompleksnoj vrijednosti impedancije izvora. U tom slučaju je krug u rezonanciji ($X = -X_i$) i ($R = R_i$).

- ♦ U slučaju da možemo mijenjati samo R , maksimalna snaga razvit će se ako s vrijednošću R zadovoljimo izraz (23). To će biti postignuto u sljedećem slučaju

$$R = \sqrt{(X_i + X)^2 + R_i^2} \quad (28)$$

U slučaju da možemo mijenjati samo X , maksimalna snaga razvit će se ako krug dovedemo u rezonanciju.

Dakle (25)

$$X = -X_i$$

Na stezaljkama nekog trošila izmjereni su sljedeći napon i struja:

$$u(t) = 100\sqrt{2} \sin(1000t) \text{ [V]}$$

$$i(t) = 10\sqrt{2} \sin(1000t - 30^\circ) \text{ [A]}.$$

Vaš je zadatak da:

- a) Prikažite analitički i grafički funkciju trenutne snage, izračunate prosječnu vrijednost snage i komentirate dobivene rezultate.
- b) Odredite radnu, jalovu i prividnu snagu.
- c) Odredite koliku energiju primi trošilo tijekom 1 sata.
- d) Nadomjestite trošilo serijskom i paralelnom kombinacijom otpora R i reaktancije X te izračunate snagu na svakom od tih elemenata.
- e) Pokažite na koji bi način računanjem u kompleksnom području za zadani napon i struju izračunali radnu, jalovu i prividnu snagu.

Zadano:

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t) = 100\sqrt{2} \sin(1000t) \dots \dot{U} = 100 \angle 0^\circ$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) = 10\sqrt{2} \sin(1000t - 30^\circ) \dots \dot{I} = 10 \angle -30^\circ$$

$$\varphi = 30^\circ$$

a)

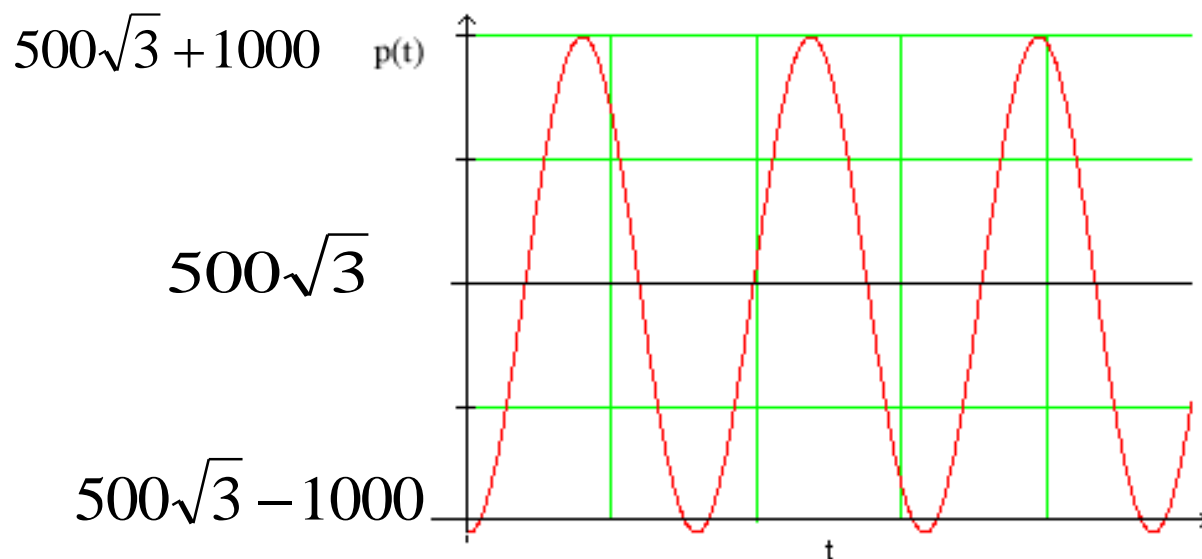
$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m \cdot \sin(\omega t) \cdot I_m \cdot \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) - U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi)$$

$$p(t) = 500\sqrt{3} - 1000 \cdot \cos(2000t - 30^\circ)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \cdot dt - \frac{1}{T} \int_0^T U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi) \cdot dt$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = 500 \sqrt{3} = 866 \text{ W}$$



b)

$$S = U \cdot I = 1000 \text{ VA}$$

$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = S \cdot \cos(\varphi) = 500\sqrt{3} = 866 \text{ W}$$

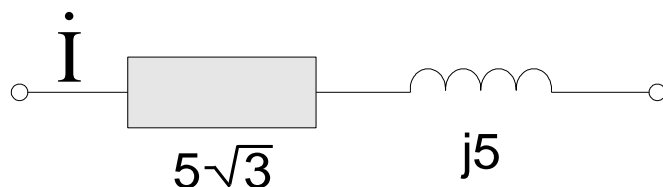
$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = S \cdot \sin(\varphi) = 500 \text{ VAR, induktivnog karaktera.}$$

c)

$$W = P \cdot t = t \cdot U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = 3600 \cdot 500 \sqrt{3} = 3,12 \text{ MWs} = 866 \text{ Wh}$$

d)

$$\underline{Z} = \frac{\underline{\dot{U}}}{\underline{\dot{I}}} = \frac{U \angle 0}{I \angle -\varphi} = Z \angle \varphi = Z \cdot \cos(\varphi) + j \cdot Z \cdot \sin(\varphi) =$$
$$= R_S + j \cdot X_S = 10 \angle 30^\circ = 5 \sqrt{3} + j \cdot 5 \text{ } [\Omega]$$



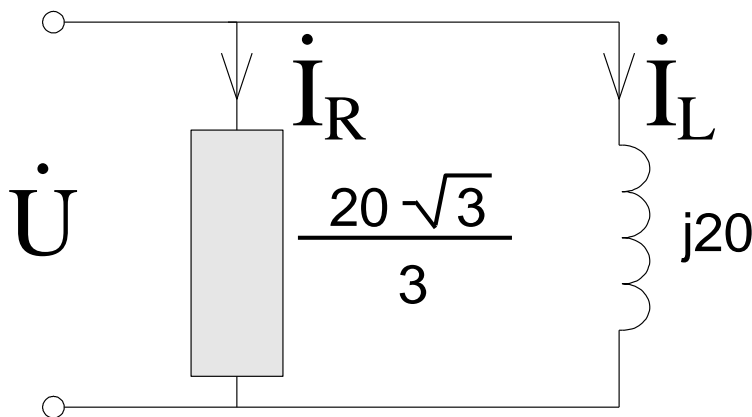
$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = [U \cdot \cos(\varphi)] \cdot I = U_R \cdot I = I^2 \cdot R_S = 100 \cdot 5 \sqrt{3} = 500 \sqrt{3} \text{ W}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = [U \cdot \sin(\varphi)] \cdot I = U_L \cdot I = I^2 \cdot X_S = 100 \cdot 5 = 500 \text{ VAR}$$

$$S = U \cdot I = Z \cdot I^2 = 10 \cdot 100 = 1000 \text{ VA}$$

$$\underline{Y} = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I \angle -\varphi}{U \angle 0} = Y \angle -\varphi = Y \cdot \cos(-\varphi) + j \cdot Y \cdot \sin(-\varphi) =$$
$$= \frac{1}{R_p} - j \cdot \frac{1}{X_p} = 0,05 \cdot \sqrt{3} - j \cdot 0,05 \text{ [S]}$$

$$R_p = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Omega, \quad X_p = 20 \Omega$$



$$P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) = U \cdot [I \cdot \cos(\varphi)] = U \cdot I_R = \frac{U^2}{R_P} = 500 \sqrt{3} \text{ W}$$

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = U \cdot [I \cdot \sin(\varphi)] = U \cdot I_L = \frac{U^2}{X_P} = 500 \text{ VAR}$$

$$S = U \cdot I = U^2 \cdot Y = 1000 \text{ VA}$$

e)

$$\dot{U} \cdot \dot{I}^* = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) + j \cdot U \cdot I \cdot \sin(\varphi) = 500 \sqrt{3} + j \cdot 500$$

$$P = \operatorname{Re} \{ \dot{U} \cdot \dot{I}^* \} = 500 \sqrt{3} \text{ W}$$

$$Q = \operatorname{Im} \{ \dot{U} \cdot \dot{I}^* \} = 500 \text{ VAR}$$

$$S = |\dot{U} \cdot \dot{I}^*| = \sqrt{(500 \sqrt{3})^2 + (500)^2} = 1000 \text{ VA}$$

Na izvor su paralelno priključena tri trošila:

- ◆ 1° 250 VA, $\cos \varphi = 0,5$ (induktivno)
 - ◆ 2° 180 W, $\cos \varphi = 0,8$ (kapacitivno)
 - ◆ 3° 300 VA, 100 VAr (induktivno)
-
- ◆ Odredite ukupnu prividnu, radnu i jalovu snagu, faktor snage te nacrtajte trokut snage (za svako pojedino trošilo i ukupno).

1° $S_1 = 250 \text{ VA}$, $\cos \varphi_1 = 0,5 \text{ (ind)}$

$$P_1 = S_1 \cos \varphi_1 = 125 \text{ W}$$

$$\varphi_1 = 60^\circ$$

$$Q_1 = S_1 \sin \varphi_1 = 216 \text{ VAr (ind)}$$

2° $P_2 = 180 \text{ W}$, $\cos \varphi_2 = 0,8 \text{ (kap)}$

$$S_2 = \frac{P_2}{\cos \varphi_2} = 225 \text{ VA}$$

$$Q_2 = - \sqrt{S_2^2 - P_2^2} = - 135 \text{ VAr}$$

3° $S_3 = 300 \text{ VA}$, $Q_3 = 100 \text{ VAr}$

$$P_3 = \sqrt{S_3^2 - Q_3^2} = 283 \text{ W}$$

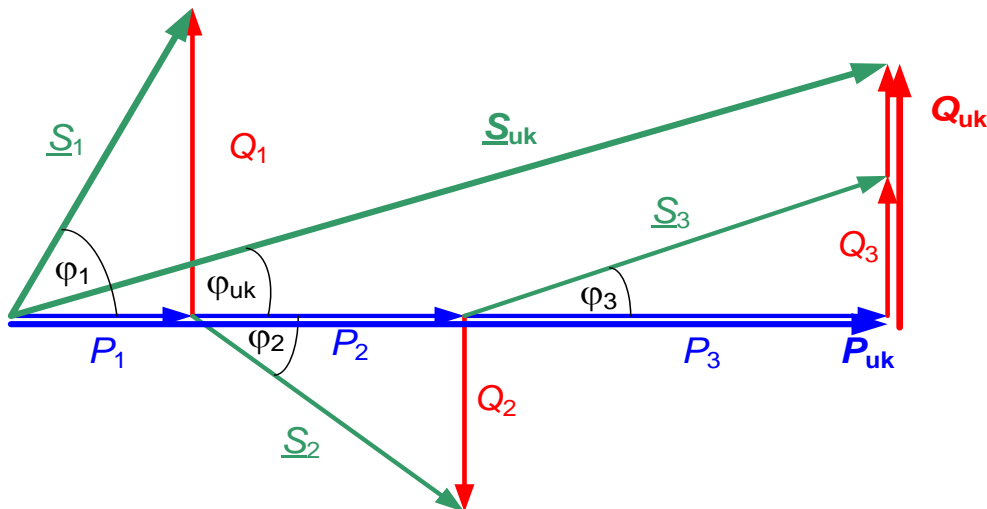
Ukupne snage su:

$$P_{uk} = P_1 + P_2 + P_3 = 125 + 180 + 283 = 588 \text{ W}$$

$$Q_{uk} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 216 - 135 + 100 = 181 \text{ VAr (ind)}$$

$$S_{uk} = \sqrt{P_{uk}^2 + Q_{uk}^2} = 616 \text{ VA}$$

$$\cos \varphi_{uk} = P_{uk} / S_{uk} = 588 / 616 = 0,955$$



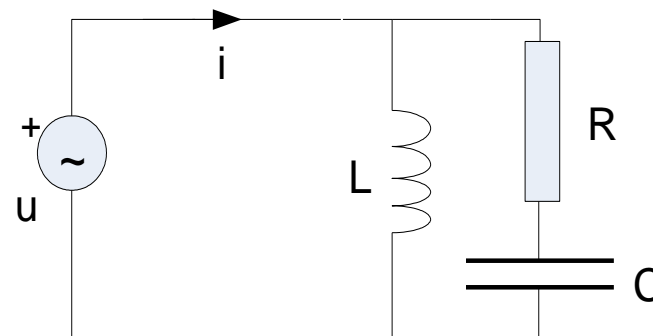
U spoju prema slici zadano je

$$u(t) = 100\sin(500t) ,$$

$$i(t) = 2,5\sin(500t),$$

$$R = 20 \, \Omega.$$

Odredite vrijednosti L i C .



Rješenje:

Snaga koju predaje izvor iznosi

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2,5}{\sqrt{2}} \cos 0 = 125 \, \text{W}$$

Snaga se troši na otporu R

$$P = I_R^2 \cdot R$$

$$I_R = \sqrt{\frac{P}{R}} = 2,5 \, \text{A}$$

Impedancija grane s otporom iznosi

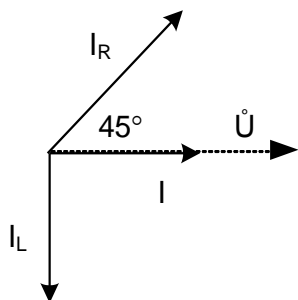
$$Z_R = \frac{U}{I_R} = 20 \sqrt{2} \Omega$$

Dalje slijedi

$$X_C = \sqrt{Z_R^2 - R^2} = 20 \Omega$$

$$C = \frac{1}{\omega X_C} = 100 \mu\text{F}$$

Na vektorskom dijagramu prikazan je odnos struja za ovaj spoj (strujna rezonancija) iz kojeg odredimo struju I_L i induktivitet L .

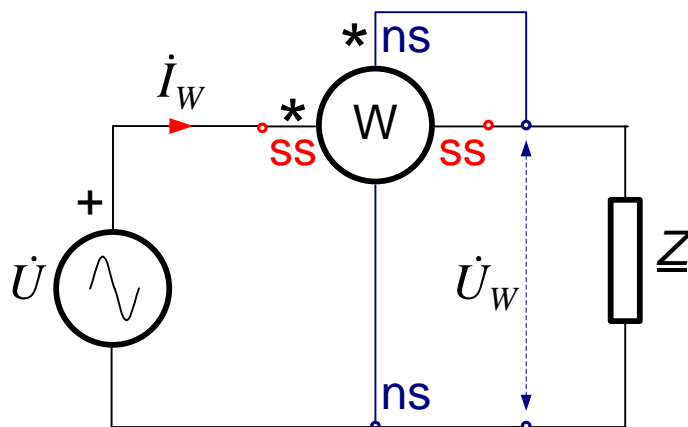


$$I_L = I_R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$X_L = \frac{U}{I_L} = 40 \Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = 0,08 \text{ H}$$

- ♦ Vatmetar u izmjeničnoj mreži mjeri snagu koja je određena s:

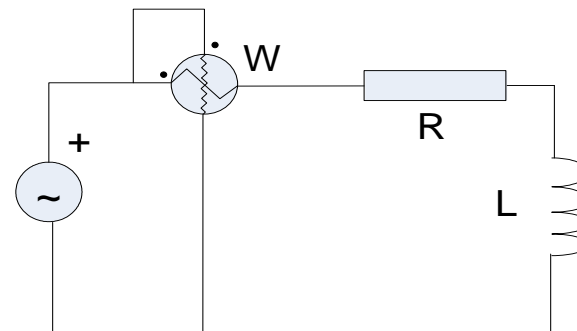


$$P_W = U_W \cdot I_W \cdot \cos \angle \dot{U}_W, \dot{I}_W$$

- * označavaju referentne vrijednosti polariteta napona i smjera struje

- ♦ Pokazivanje vatmetra srazmjerno je iznosu napona na naponskim stezaljkama vatmetra U , struji kroz strujne stezaljke vatmetra I i kosinusu kuta između fazora napona na vatmetru i struje kroz vatmetar

Što se dogodi s pokazivanjem vatmetra u spoju prema slici ako povećavamo frekvenciju naponskog izvora?

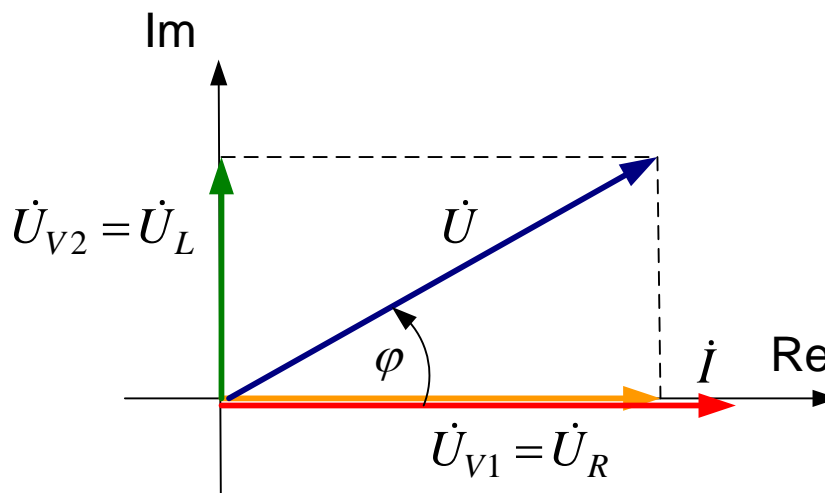
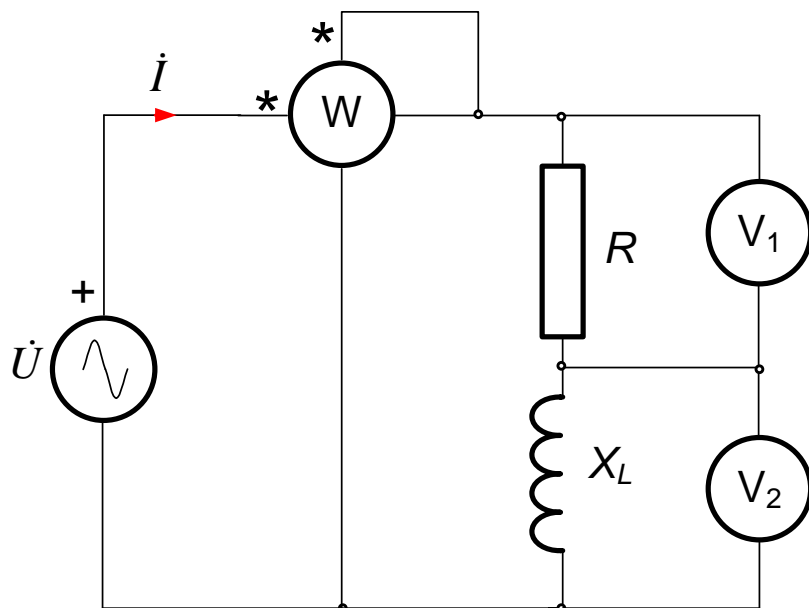


Vatmetar u ovakvom spoju mjeri djelatnu snagu koju daje izvor, a ona se može "potrošiti" samo na otporu, tj.

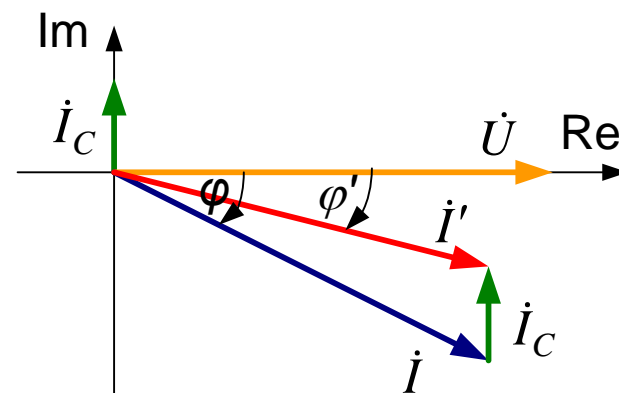
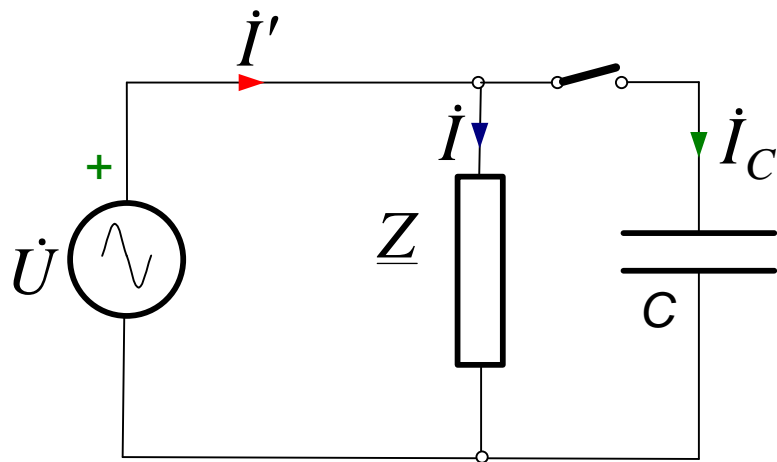
$$P = I^2 \cdot R.$$

Kako s porastom frekvencije raste impedancija te time struja opada, tako pada i djelatna snaga. **Pokazivanje vatmetra se smanjuje.**

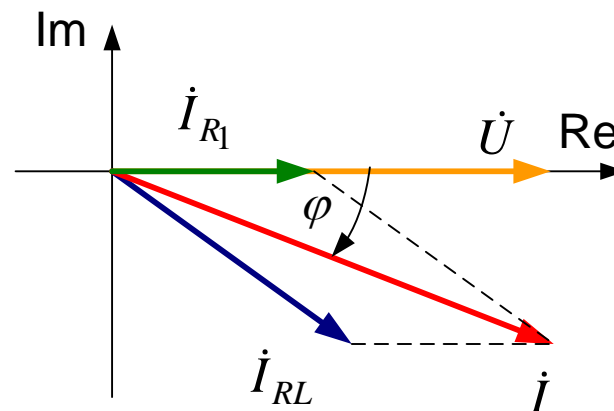
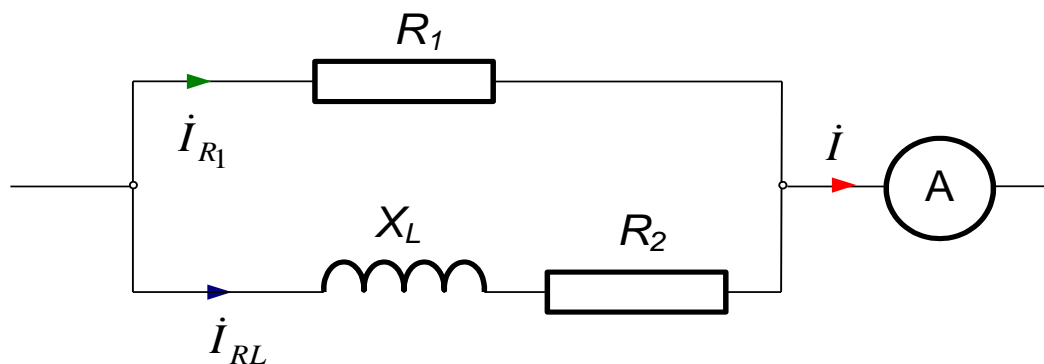
6. Ako instrumenti u krugu pokazuju $U_{V_1}=30$ V, $U_{V_2}=50$ V i $P_W=30$ W, odrediti R , X_L i napon izvora U .



7. Odrediti koliki treba biti kapacitet C kondenzatora kojeg dodajemo paralelno trošilu impedancije $\underline{Z} = 20 \angle 30^\circ \text{ } (\Omega)$ da bi faktor snage trošila povećali na 0,95? Napon izvora iznosi 120 V.



8. Kolika je struja ampermetra u krugu na slici ako je ukupna radna snaga $P_{uk}=1100$ W? Zadano je: $R_1=10\ \Omega$, $R_2=3\ \Omega$, $X_L=4\ \Omega$.



9. Na izvor napona $\dot{U} = 100 \angle 30^\circ$ (V) priključena je impedancija $\underline{Z} = 3 + j4$ (Ω). Odrediti radnu, jalovu i prividnu snagu.
10. Paralelno su spojene dvije impedancije $\underline{Z}_1 = 2 - j5$ i $\underline{Z}_2 = 1 + j$. Snaga na otporniku impedancije \underline{Z}_1 je 20 W. Odrediti ukupnu jalovu snagu.
11. Napon i struja nekog dvopola su:

$$u(t) = 100 \sin(\omega t) \quad ; \quad i(t) = 5 \sin(\omega t - \pi / 3)$$

Odrediti impedanciju dvopola, prividnu, radnu i jalovu snagu.