

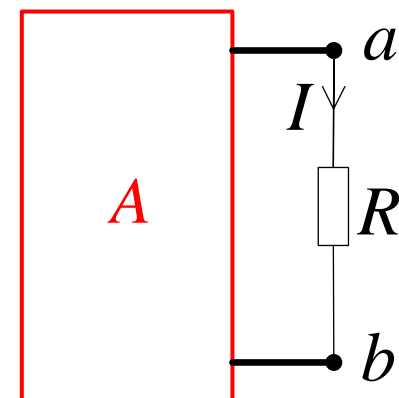
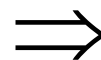
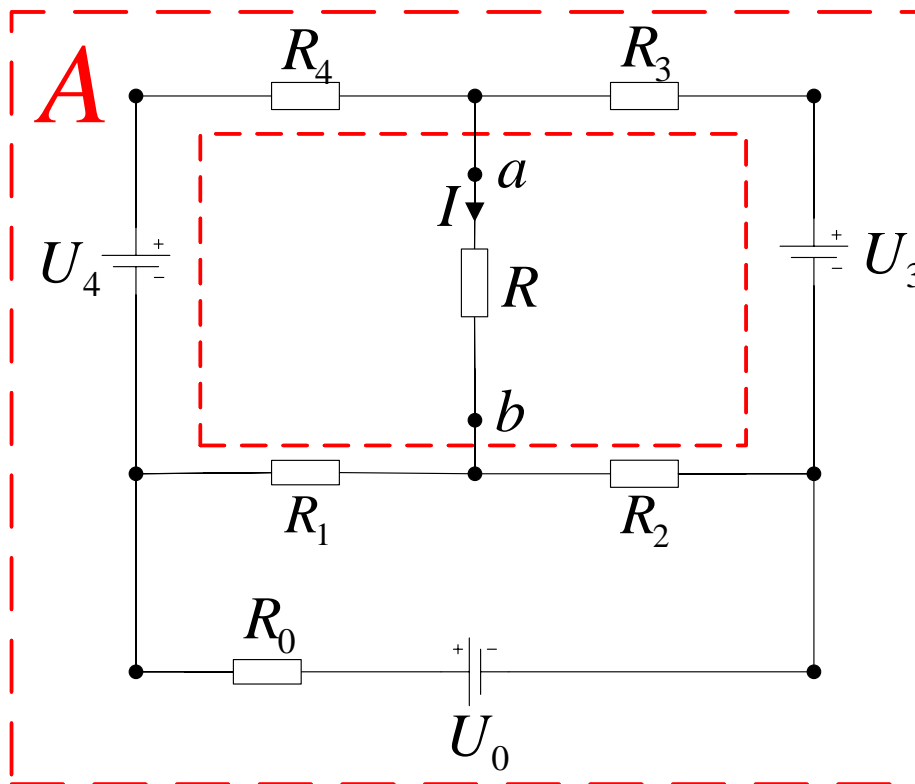
# Postupci rješavanja električnih mreža

X. tjedan predavanja

---

## 1. dio: krugovi istosmjerne struje

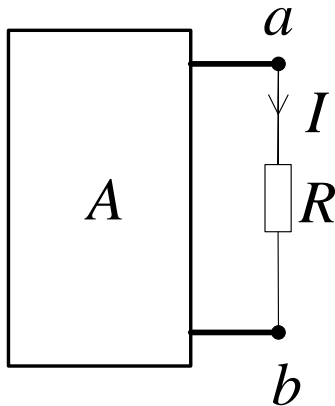
# Aktivna linearna mreža



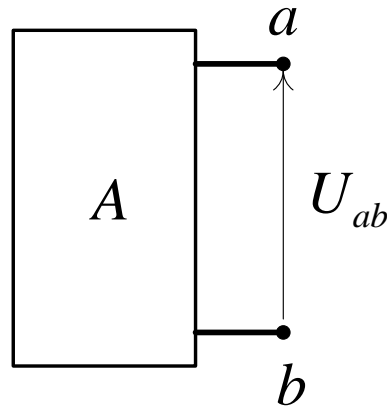
- ♦ Tvrdnja: Struja kroz bilo koju granu  $a-b$  el. kruga (mreže), gdje se između točaka  $a$  i  $b$  nalazi otpor  $R$ , određuje se tako da se preostali dio kruga zamijeni ekvivalentnim naponskim izvorom. Elektromotorna sila ekvivalentnog izvora ( $E_T$ ) jednaka je naponu koji vlada na krajevima grane  $a-b$  kada je ona otvorena. Unutarnji otpor ekvivalentnog izvora ( $R_T$ ) jednak je ukupnom otporu pasivnoga kruga promatranog s otvorenih krajeva  $a$  i  $b$ . Pasivni krug nastaje od el. kruga (mreže) gašenjem izvora.

# Theveninov teorem (2)

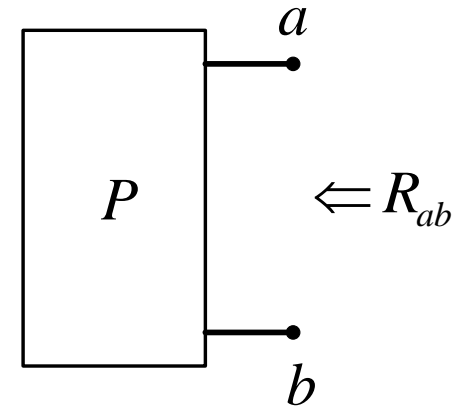
Dokaz:



Sl. 10.1a



Sl. 10.1b

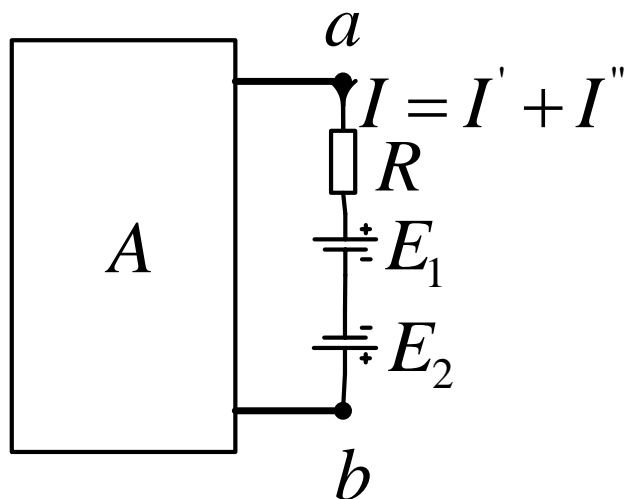


Sl. 10.1c

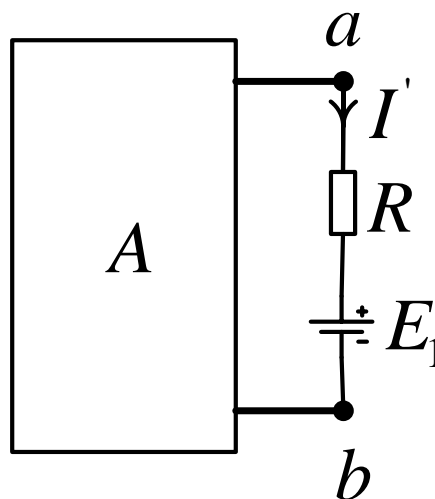
Na sl. 10.1a i sl. 10.1b  $A$  je aktivni krug. Sl. 10.1c predstavlja pasivni krug  $P$ , dobiven gašenjem izvora u  $A$ .

# Theveninov teorem (3)

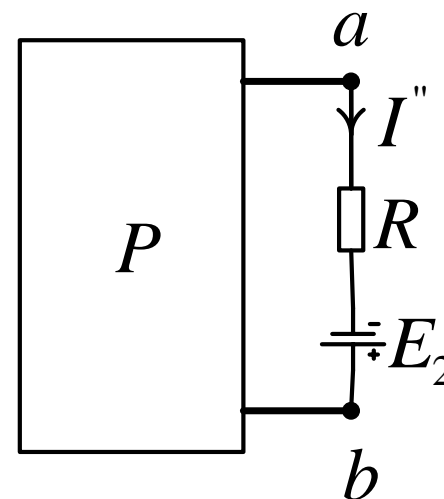
Uzmimo dva naponska izvora  $E_1$  i  $E_2$ ,  $E_1 = E_2 = U_{ab}$ , i spojimo ih u granu  $a-b$  kako to pokazuje sl. 10.2a.



Sl. 10.2a



Sl. 10.2b



Sl. 10.2c

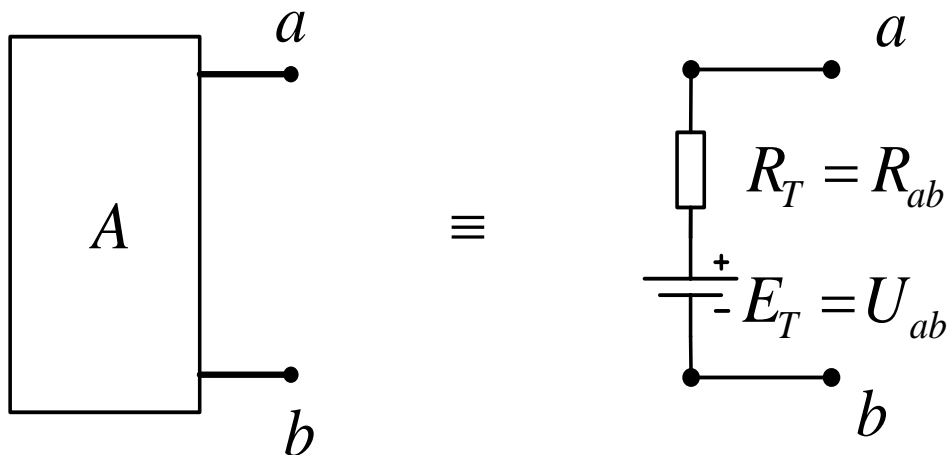
Primijenimo načelo superpozicije na način da ugasimo  $E_2$  i ostavimo  $E_1$  i sve izvore u aktivnom krugu  $A$ . Tada kroz  $R$  teče struja  $I'$  koja je, jer je  $E_1 = U_{ab}$ , jednaka 0 (sl. 10.2b).

# Theveninov teorem (4)

U drugom koraku superpozicije (sl. 10.2c) ugasimo sve izvore u  $A$  i  $E_1$ , a ostavimo aktivnim samo  $E_2$ . Sada kroz granu a-b teče struja  $I''$ . Kako je  $I = I' + I''$ ,  $I' = 0$ , slijedi da je

$$I = I'' = \frac{E_2}{R + R_{ab}}$$

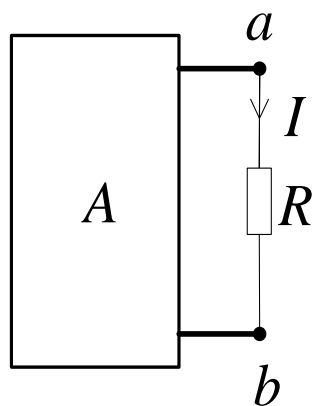
Iz svega slijedi da je



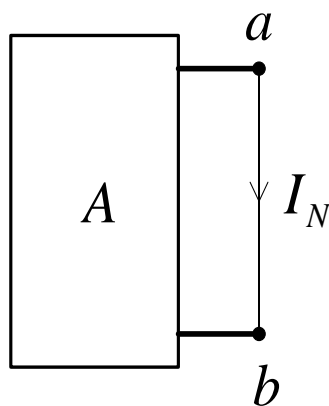
, što je trebalo dokazati.

# Nortonov teorem

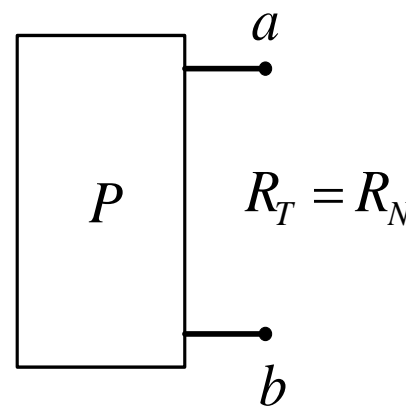
- ♦ Tvrdnja: Struja kroz bilo koju granu  **$a-b$**  el. kruga (mreže), gdje se između točaka  **$a$**  i  **$b$**  nalazi otpor  **$R$** , određuje se tako da se preostali dio kruga zamijeni ekvivalentnim strujnim izvorom. Struja ekvivalentnog strujnog izvora ( **$I_N$** ) jednaka je struji kroz granu  **$a-b$**  kada se ona kratko spoji. Unutarnji otpor ekvivalentnog strujnog izvora ( **$R_N$** ) određuje se na isti način kao i u Theveninovom teoremu (iz čega slijedi da je  **$R_N = R_T$** ).



Sl. 10.3a



Sl. 10.3b



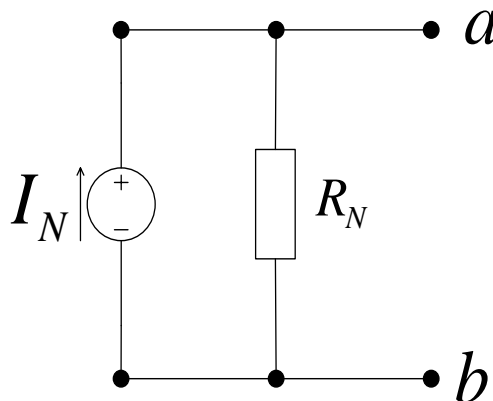
Sl. 10.3c



# Nortonov teorem (2)

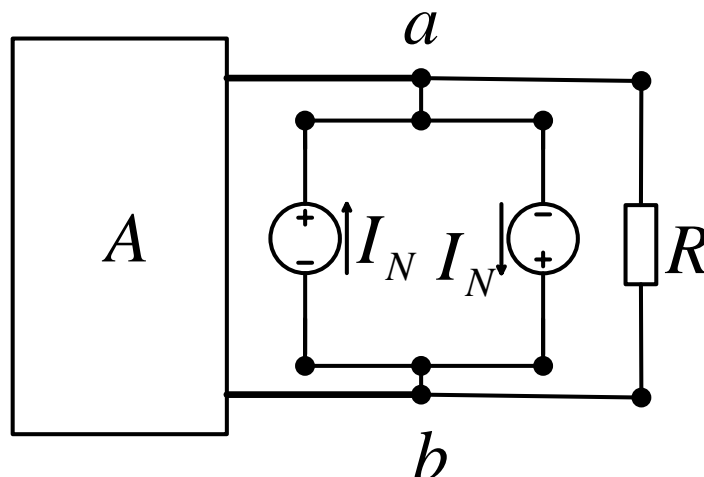
Dokaz: Izravno slijedi iz Theveninova teorema i pretvorbe realnog naponskog u realni strujni izvor.

$$I_N = \frac{E_T}{R_T}; \quad R_N = R_T$$



Alternativa je primjena načela superpozicije putem dodavanja dva strujna izvora istog iznosa struja a suprotnog smjera (iznos je  $I_N$ ) paralelno grani a-b (sl. 10.4).

# Nortonov teorem (3)



Sl. 10.4

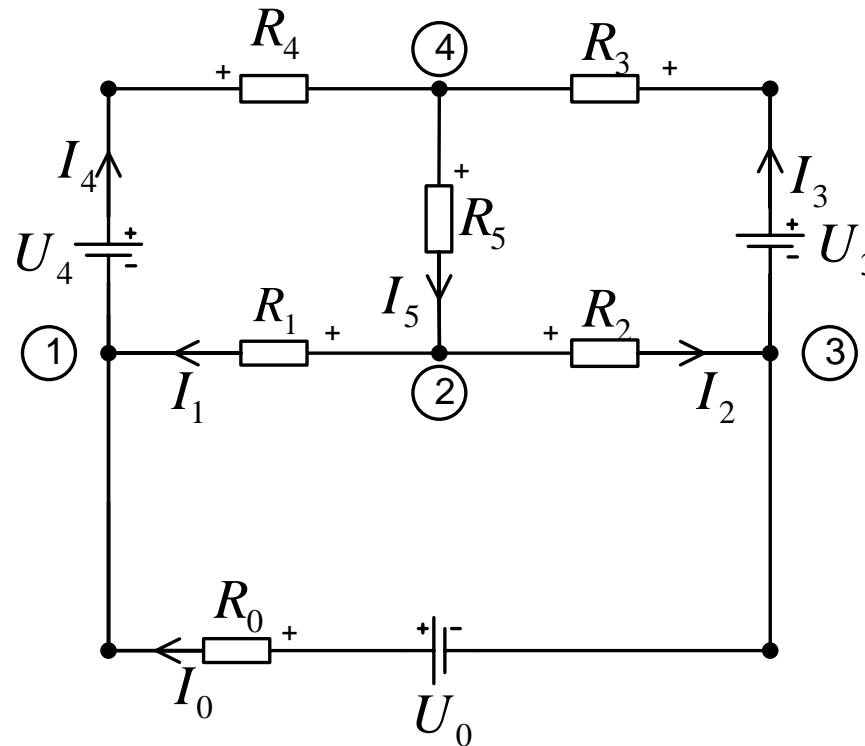
U istosmjernim el. krugovima Theneninov i Nortonov teorem su ekvivalentne tvrdnje s različitim nadomjesnim parametrima za aktivnu linearnu mrežu  $A$ .

U krugovima izmjenične struje ne postoji u svim slučajevima ekvivalencija ova dva teorema. Naime, postoje izmjenični el. krugovi u kojima se može primijeniti samo jedan od ova dva teorema i to opravdava zašto se odvojeno formuliraju.

- ♦ Uvrste li se naponske jednačbe Kirchhoffovih zakona u strujne, uz izbor jednog od čvorova mreže kao referentnog ( $\varphi = 0$ ), ukupni broj jednačbi smanji se s  $g$  (broj grana mreže) jednačbi na  $(\check{c}-1)$  jednačbi, tj. onaj broj jednačbi koliko je u mreži nezavisnih strujnih jednačbi.
- ♦ Dobiveni sustav jednačbi opisuje zadanu mrežu jednako dobro kao i izvorni sustav Kirchhoffovih jednačbi, ali je jednostavniji za rješavanje, jer traži izračunavanje bitno manjeg broja nepoznanica.

- ♦ Ovaj način rješavanja el. mreža naziva se **metodom potencijala čvorova**.
- ♦ Metoda potencijala čvorova primjenjuje se kada **sve nepoznanice jedne mreže** (struje u granama, padove napona na elementima mreže, razlike potencijala između različitih čvorova) treba odrediti, za razliku od Theveninova ili Nortonova teorema, koji se koriste da bi se odgovarajuće nepoznanice odredile za jednu izdvojenu granu.

# Postavljanje jednažbi potencijala čvorova



Sl. 10.5

Za mrežu sa sl. 10.5, uz izbor četvrtoga čvora kao referentnog ( $\varphi_4 = 0$ ), jednažbe potencijala čvorova glase:

# Postavljanje jednažbi potencijala čvorova

$$+\varphi_1 \cdot (G_0 + G_1 + G_4) - \varphi_2 \cdot G_1 - \varphi_3 \cdot G_0 = +U_0 \cdot G_0 - U_4 \cdot G_4 \quad (\text{čvor 1})$$

$$-\varphi_1 \cdot G_1 + \varphi_2 \cdot (G_1 + G_2 + G_5) - \varphi_3 \cdot G_2 = 0 \quad (\text{čvor 2})$$

$$-\varphi_1 \cdot G_0 - \varphi_2 \cdot G_2 + \varphi_3 \cdot (G_0 + G_2 + G_3) = -U_0 \cdot G_0 - U_3 \cdot G_3 \quad (\text{čvor 3})$$

Gdje je:

$$G_i = 1/R_i, i = 0, 1, \dots, 5$$

vodljivost odgovarajuće grane.

Jednažbe za čvor  $i$ ,  $i=1, 2$  ili  $3$ , formiraju se na sljedeći način:

# Postavljanje jednažbi potencijala čvorova (3)

- ◆ Uz potencijal  $i$ -tog čvora (nepoznanica) kao koeficijent dolazi zbroj vodljivosti svih grana incidentnih s tim čvorom, s predznakom  $+$ ;
- ◆ Uz potencijal bilo kojeg  $j$ -tog čvora,  $j \neq i$ , u istoj jednažbi kao koeficijent dolazi vodljivost grane  $ij$ , odnosno zbroj vodljivosti svih grana između  $i$ -tog i  $j$ -tog čvora kada tih grana ima više, s tim da je predznak  $-$ ;
- ◆ Desna strana  $i$ -te jednažbe sadrži alg. zbroj umnožaka napona izvora i vodljivosti grana incidentnih s tim čvorom, gdje se predznak  $+$  javlja uz izvor koji svojim plusom gleda prema čvoru, dok je u suprotnom slučaju predznak  $-$ .

# Svojstva jednažbi potencijala čvorova

Napišu li se jednažbe potencijala čvorova za mrežu sa sl. 10.5 u matričnom obliku, dobiva se:

$$\begin{bmatrix} (G_0 + G_1 + G_4) & -G_1 & -G_0 \\ -G_1 & (G_1 + G_2 + G_5) & -G_2 \\ -G_0 & -G_2 & (G_0 + G_2 + G_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 G_0 - U_4 G_4 \\ 0 \\ -U_0 G_0 - U_3 G_3 \end{bmatrix}$$

Matrica vodljivosti  $G$  je **dijagonalno simetrična matrica**, te njezina simetričnost služi za provjeru je li sustav jednažbi korektno napisan za neku mrežu. Jasno je da se ovdje radi samo o **formalnoj provjeri**, jer suštinska mora voditi računa o svim elementima mreže.



## Zadatak 1.

Pretvorite realne naponske izvore u korespondentnim granama mreže sa sl. 10.5 u realne strujne izvore, izrazite struje u svim pasivnim granama mreže kao omjer razlike potencijala između čvorova grane i otpora grane, napišite za novodobivenu mrežu strujne jednačbe za čvorove 1, 2 i 3, uredite dobivene jednačbe tako da grupirate koeficijente uz nepoznanice  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  i  $\varphi_3$ , sve poznalice prebacite na desnu stranu, te pogledajte što ste dobili.

## Zadatak 2.

Napišite jednadžbe potencijala čvorova za mrežu sa sl. 10.5 uzimajući za referentni čvor (čvor s potencijalom 0):

1. čvor 1;
2. čvor 2;
3. čvor 3.

Riješite dobivene sustave jednadžbi, uz pomoć dobivenih rješenja izračunajte struje  $I_0, \dots, I_5$ , te na koncu usporedite izraze za struje koje ste putem tri neovisna postupka dobili.

## Zadatak 3.

Zamijenite jedan od aktivnih naponskih dvopola ( $U_0$ ,  $U_3$  ili  $U_4$ ) u mreži sa sl. 10.5 s aktivnim strujnim dvopolom ( $I_0$ ,  $I_3$ , odnosno  $I_4$ ).

- ◆ Kako sada glase jednađžbe potencijala čvorova?
- ◆ Što vam je izazivalo poteškoće u njihovom pisanju?
- ◆ Je li matrica vodljivosti i dalje simetrična?

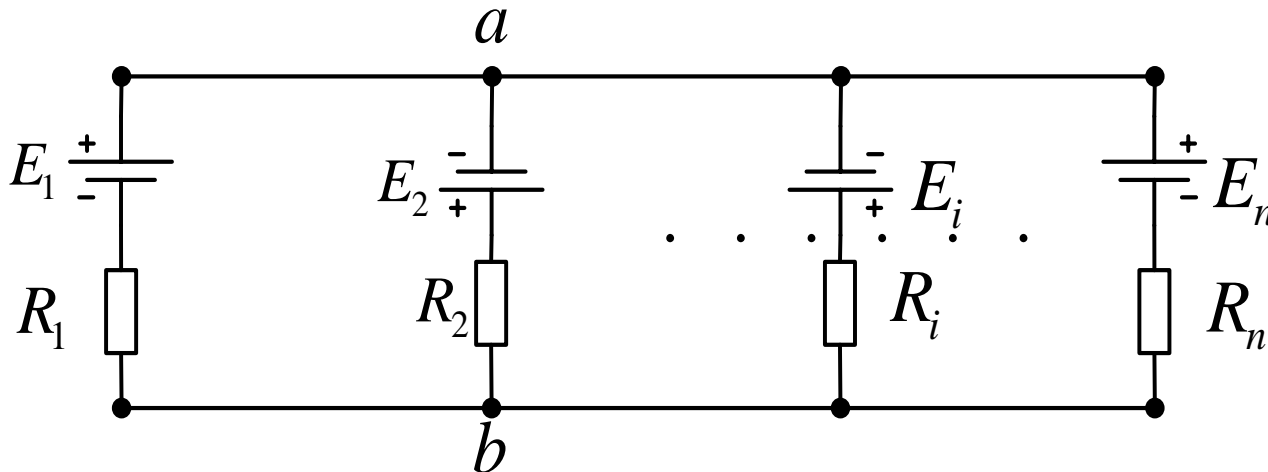
## Zadatak 4.

Neka je  $R_0 = 0$  i neka su svi ostali aktivni i pasivni elementi iz mreže sa sl. 10.5 parametri različiti od nule. Napišite sada jednadžbe potencijala čvorova uzimajući:

1. čvor 4 za referentni čvor;
2. čvor 1 za referentni čvor.

S kojim ste se poteškoćama sada susreli?

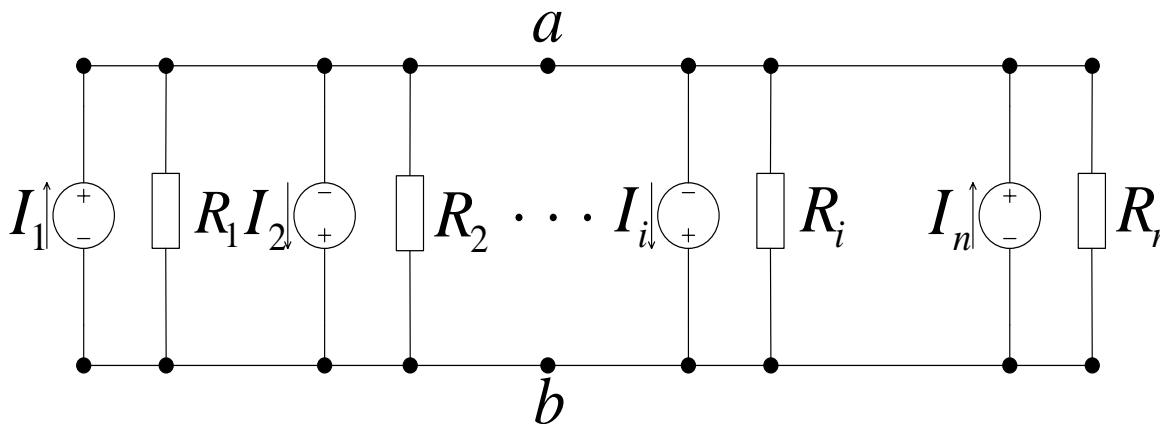
- ♦ Tvrdnja: U el. krugovima s dva čvora,  $a$  i  $b$ , napon  $U_{ab}$  određuje se tako da se algebarski zbroj struja svih strujnih izvora u čvoru  $a$  podijeli sa zbrojem vodljivosti svih grana između  $a$  i  $b$ .



Sl. 10.6

# Millmanov teorem (2)

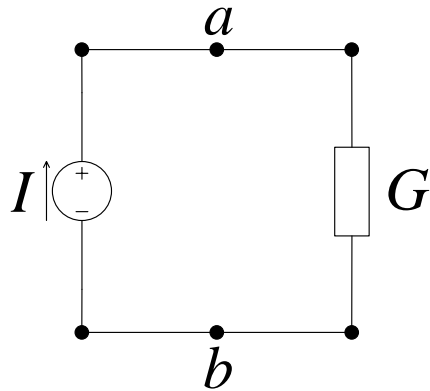
Dokaz: Izravna posljedica metode potencijala čvorova kada je  $\check{c} = 2$ , ili pretvorbom naponskih u strujne izvore (sl. 10.6 vs. sl. 10.7).



Sl. 10.7

$$I_i = \frac{E_i}{R_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

# Millmanov teorem (3)



$$I = \text{alg} \sum_{i=1}^n I_i = \text{alg} \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{R_i}; \quad G = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

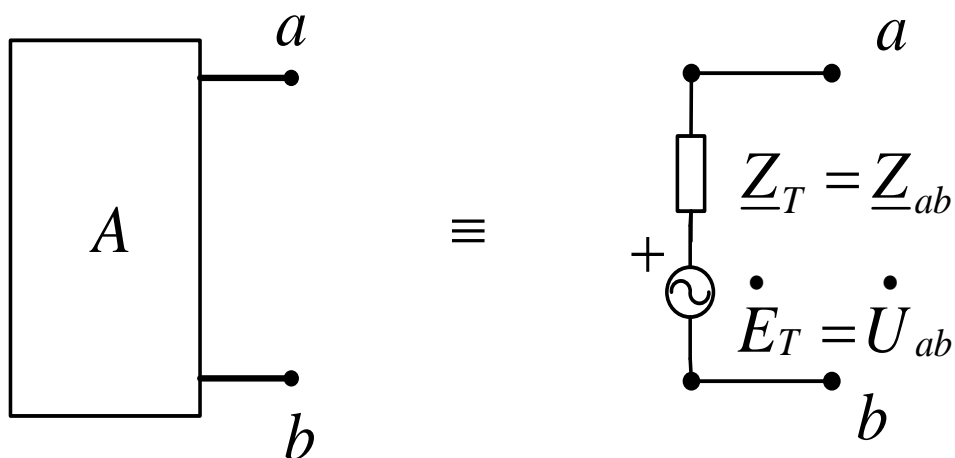
Sl. 10.8

$$U_{ab} = \frac{I}{G} = \frac{\text{alg} \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}, \text{ što je i trebalo dokazati.}$$

## 2. dio: krugovi izmjenične struje

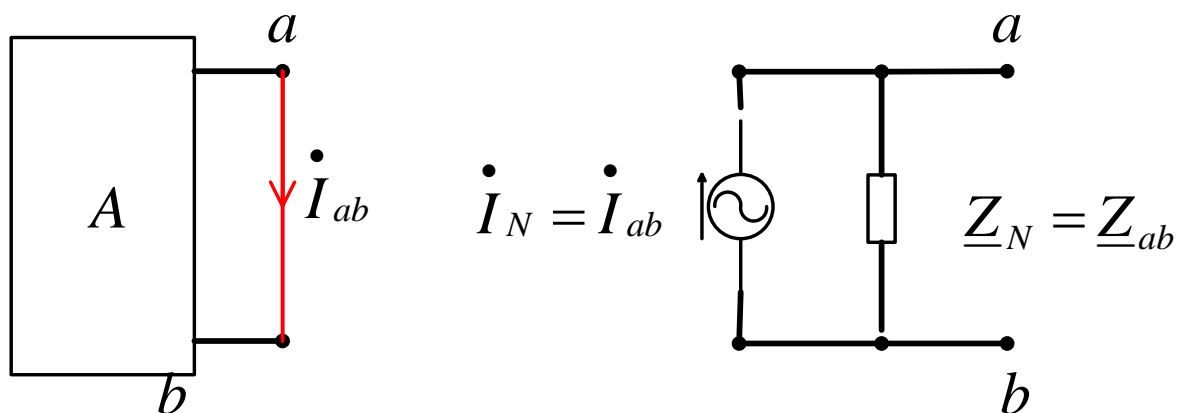


# Theveninov teorem



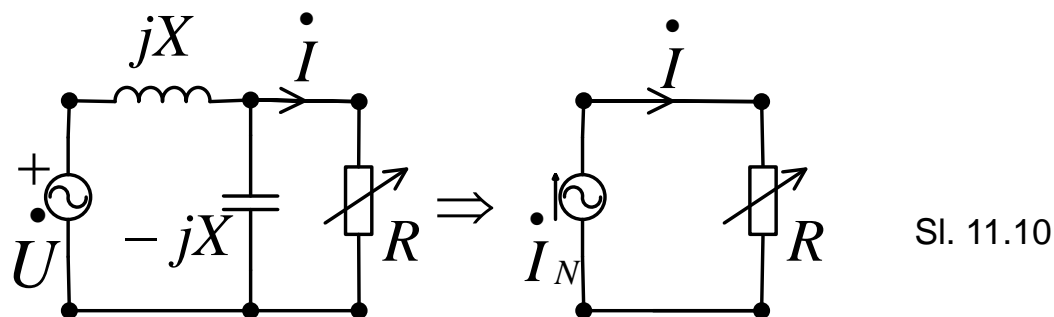
Sl. 11.8

# Nortonov teorem



Sl. 11.9

- ♦ Odredite kako se struja  $\dot{I}$  mijenja s porastom  $R$ !

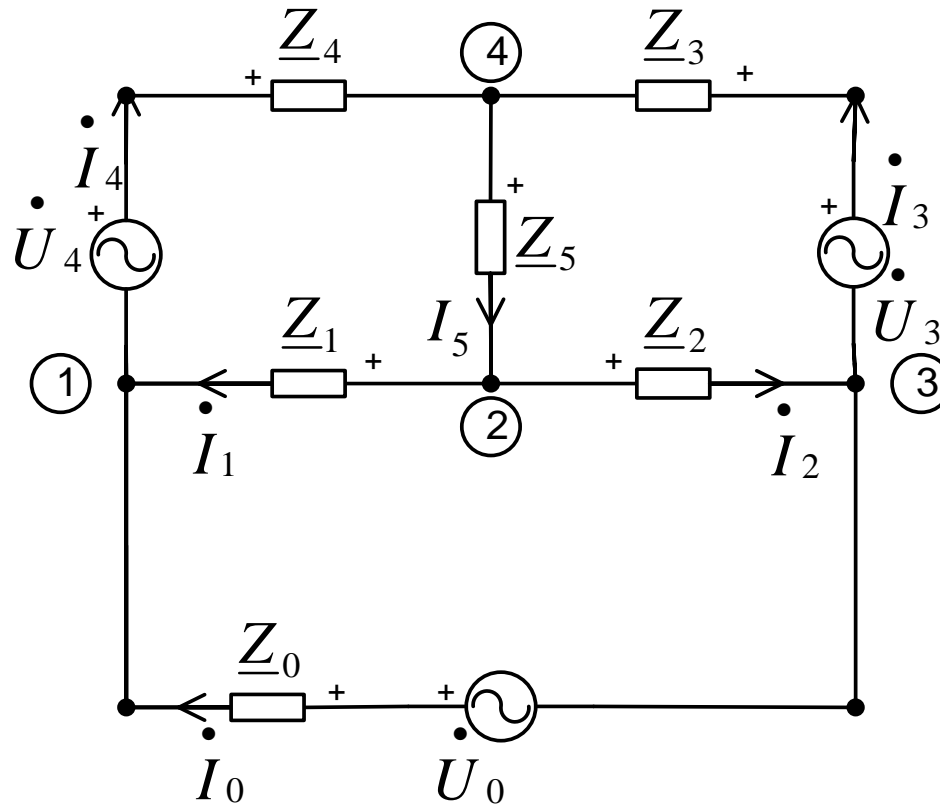


Ovdje je jedino moguće nadomještanje po Nortonu, gdje je nadomjestak aktivne mreže strujni dvopol

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{U}}{jX}.$$

# Metoda potencijala čvorova

Isto kao i u mrežama istosmjerne struje!



# Postavljanje jednažbi potencijala čvorova

- ♦ Za mrežu s prethodnog *slidea*, uz izbor četvrtoga čvora kao referentnog ( $\dot{\varphi}_4 = 0$ ), jednažbe potencijala čvorova glase:

$$+\dot{\varphi}_1 \cdot (\underline{Y}_0 + \underline{Y}_1 + \underline{Y}_4) - \dot{\varphi}_2 \cdot \underline{Y}_1 - \dot{\varphi}_3 \cdot \underline{Y}_0 = +\dot{U}_0 \cdot \underline{Y}_0 - \dot{U}_4 \cdot \underline{Y}_4 \quad (\text{čvor 1})$$

$$-\dot{\varphi}_1 \cdot \underline{Y}_1 + \dot{\varphi}_2 \cdot (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_5) - \dot{\varphi}_3 \cdot \underline{Y}_2 = 0 \quad (\text{čvor 2})$$

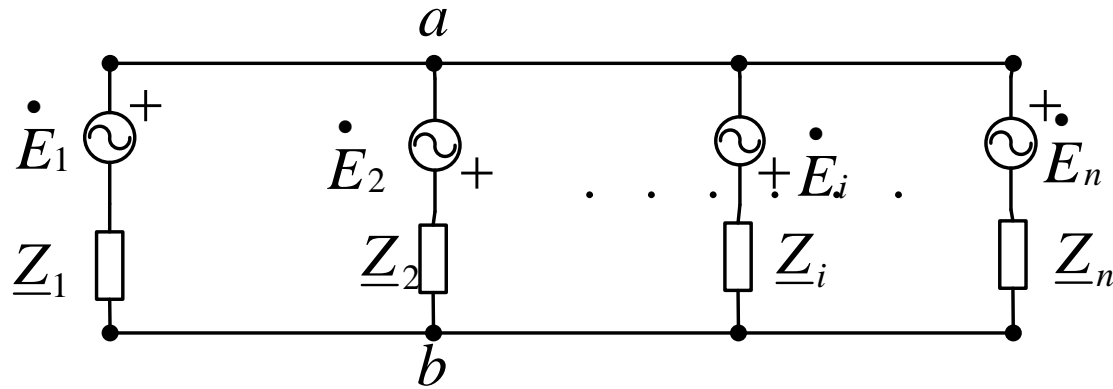
$$-\dot{\varphi}_1 \cdot \underline{Y}_0 - \dot{\varphi}_2 \cdot \underline{Y}_2 + \dot{\varphi}_3 \cdot (\underline{Y}_0 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3) = -\dot{U}_0 \cdot \underline{Y}_0 - \dot{U}_3 \cdot \underline{Y}_3 \quad (\text{čvor 3})$$

Gdje je:

$$\underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i}, \quad i = 0, 1, \dots, 5$$

admitancija odgovarajuće grane.

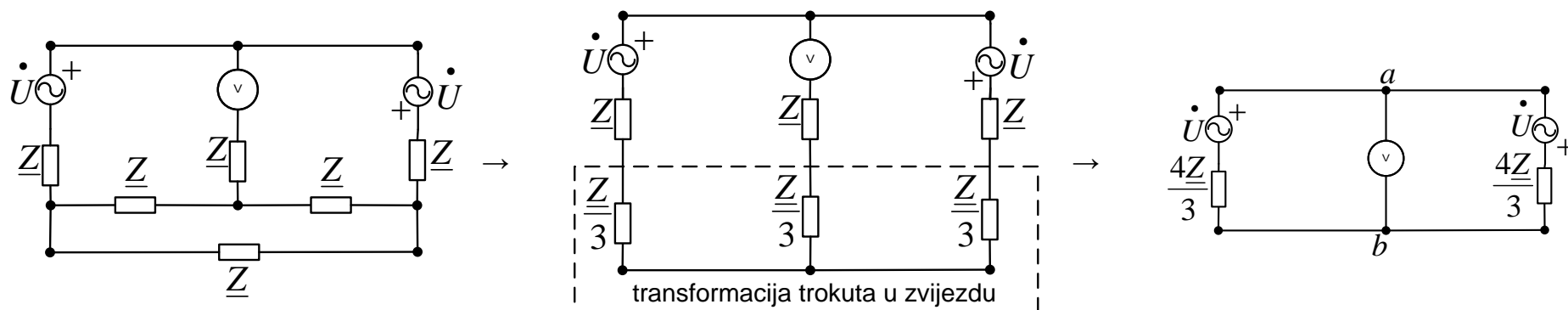
# Millmanov teorem



Sl. 11.11

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\text{alg} \sum_{i=1}^n \frac{\dot{E}_i}{\underline{Z}_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_i}}$$

# Primjer 1 - Odredite napon voltmetra!

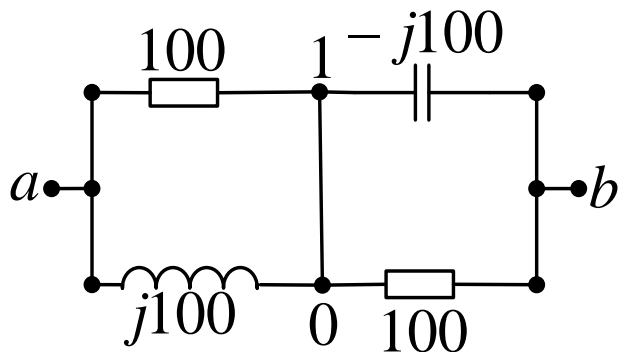
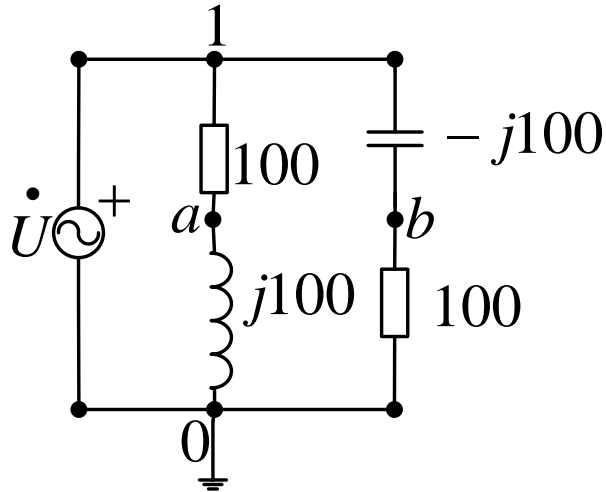


Primjenom Millmanova teorema

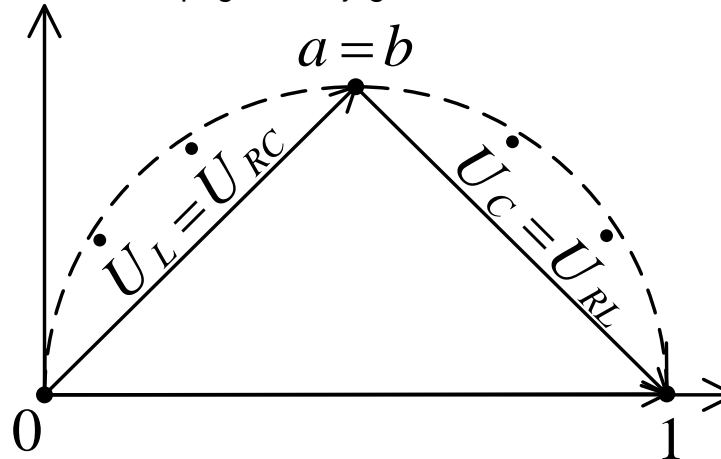
$$\dot{U}_{ab} = \frac{\frac{3\dot{U}}{\frac{4Z}{3}} - \frac{3\dot{U}}{\frac{4Z}{3}}}{\frac{4Z}{3} + \frac{4Z}{3}} = 0$$

$$U_V = \left| \dot{U}_{ab} \right| = 0$$

# Primjer 2 - Odredite $\dot{E}_T = \dot{U}_{ab}$ i $\underline{Z}_T = \underline{Z}_{ab}$



Topografski dijagram:



$$\Rightarrow \dot{U}_{ab} = \dot{E}_T = 0$$

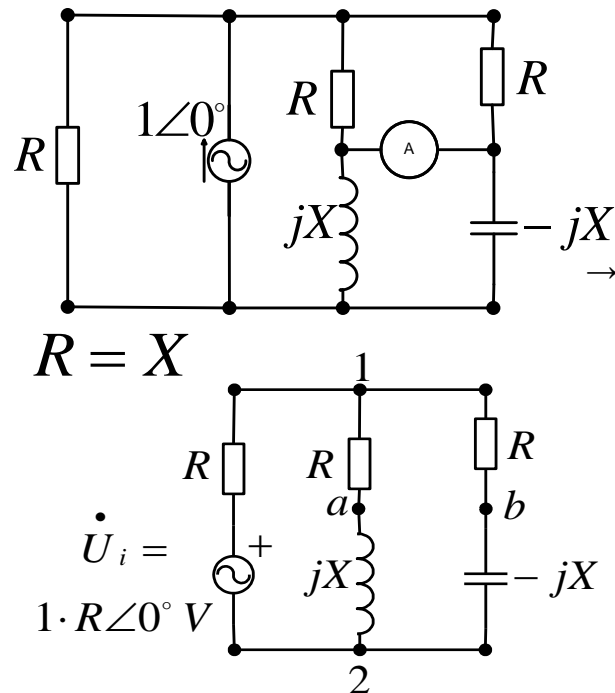
$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_T = (100 \parallel j100) + [100 \parallel (-j100)] = 100 + j \cdot 0$$

$$\underline{Z}_T = 100 \angle 0^\circ$$

Što će se dogoditi ako u jednoj grani omski i reaktivni element zamijene mjesta?



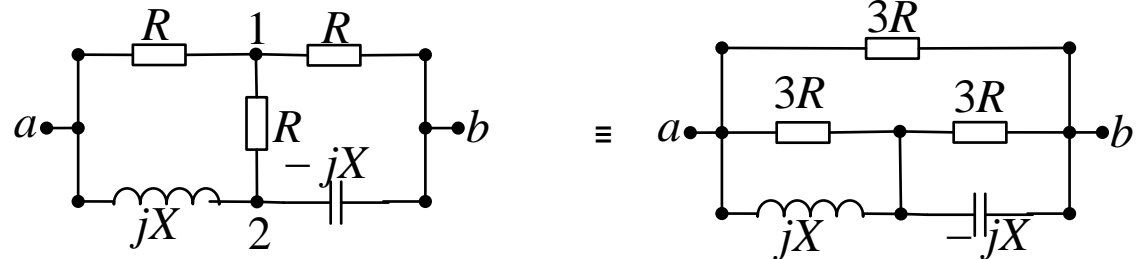
# Primjer 3 - Odredite struju ampermetra!



Određivanjem struje ampermetra svodi se na traženje iznosa Nortonove struje. Primijenimo Theveninov teorem i

$$\dot{I}_N = \frac{\dot{E}_T}{\underline{Z}_T}$$

Iz prethodnog primjera znamo postupak za  $\underline{Z}_{ab}$



$$\underline{Z}_{ab} = 3R \parallel [3R \parallel jX + 3R \parallel (-jX)] = \frac{R}{2} = \underline{Z}_T$$

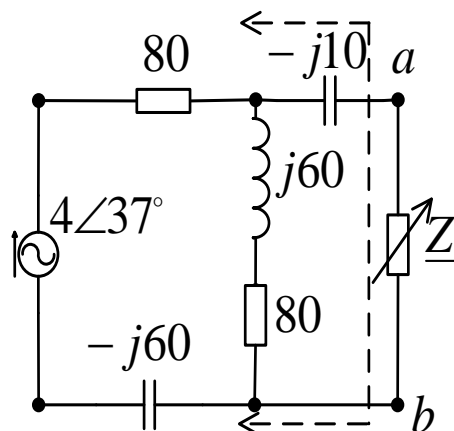
Kako je  $\underline{Z}_{12} = (R + jX) \parallel (R - jX) = R \Rightarrow \dot{U}_{12} = \frac{1}{2} \dot{U}_i = \frac{R}{2} \angle 0^\circ \text{ V}$

Iz prethodnog primjera znamo da je

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{12} \angle 90^\circ = \frac{R}{2} \angle 90^\circ = \dot{E}_T$$

$$\dot{I}_N = \angle 90^\circ = \frac{\dot{E}_T}{\underline{Z}_T} = 1 \angle 90^\circ \text{ A} \Rightarrow I_A = 1 \text{ A}$$

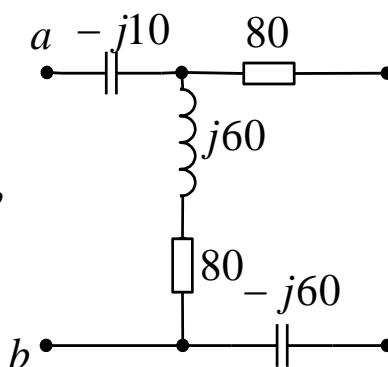
# Primjer 4 - Odredite najveću moguću snagu na $\underline{Z}$



Theveninov teorem i teorem maksimalne korisne snage na promjenjivoj impedanciji.

$$\dot{E}_T = \dot{U}_{ab} = 4\angle 37^\circ \cdot (80 + j60) = 400\angle 74^\circ \text{ V}$$

$$\underline{Z}_T = \underline{Z}_{ab}$$



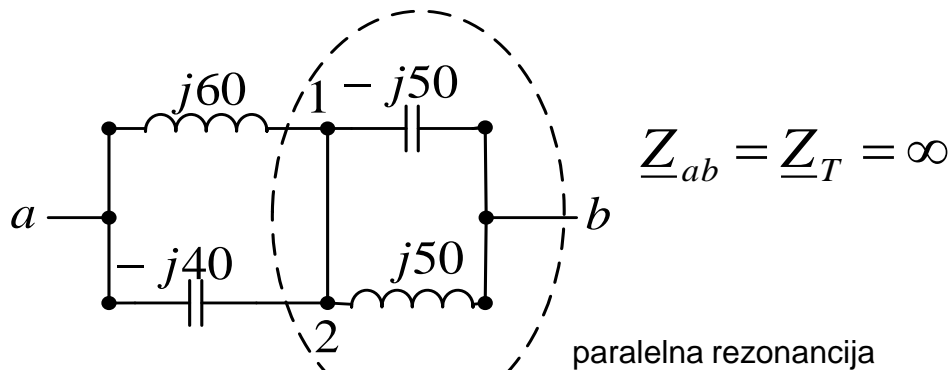
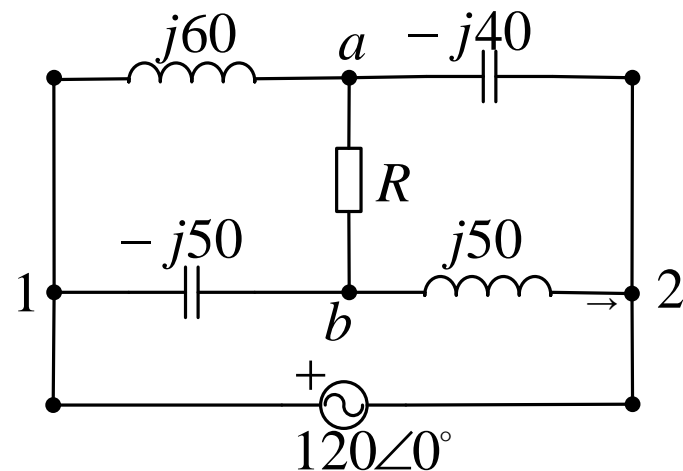
$$\underline{Z}_T = 80 + j50$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_T^* = 80 - j50$$

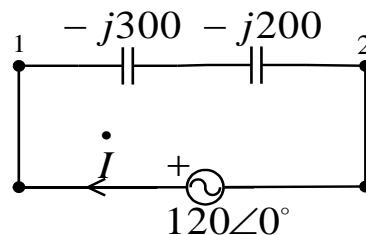
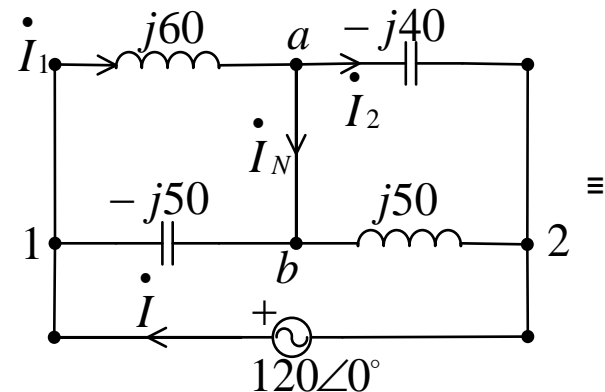
(na njoj se razvija najveća snaga)

$$P_{\max} = \left( \frac{\dot{E}_T}{2 \operatorname{Re}\{\underline{Z}_T\}} \right)^2 \cdot \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} = 500 \text{ W}$$

# Primjer 5 - Odredite snagu na otporu $R=10\ \Omega$ !



Ako je  $\underline{Z}_T = \infty$ , mora se ići na Nortonov teorem!



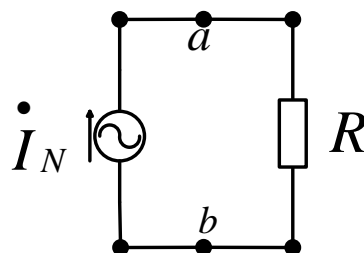
Kapacitivni naponski djelitelj!

$$\dot{I}_1 = \frac{3 \cdot 120}{5} \cdot \frac{1}{j60} = -j \cdot 1,2\text{ A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{2 \cdot 120}{5} \cdot \frac{1}{-j40} = j \cdot 1,2\text{ A}$$

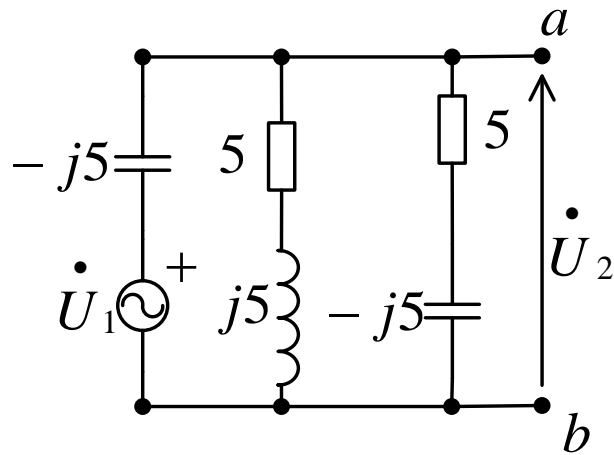
$$\dot{I}_N = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = -j \cdot 2,4\text{ A}$$

$$P = I_N^2 \cdot R = 57,6\text{ W}$$



Nadomjesna shema po Nortonu!

# Primjer 6 - Odredite $\dot{U}_2/\dot{U}_1$ !

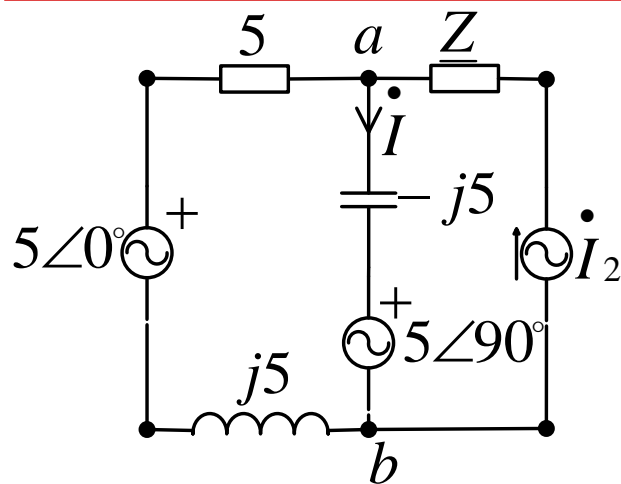


Millmanov teorem!

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_2 = \frac{\frac{\dot{U}_1}{-j5}}{\frac{1}{-j5} + \frac{1}{5+j5} + \frac{1}{5-j5}} = \dot{U}_1 \frac{j}{1+j}$$

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = 0,5 + j0,5$$

# Primjer 7 - Ako je $\dot{I} = 2\angle 0^\circ \text{ A}$ , kolika je $\dot{I}_2$



Millmanov teorem!  $\underline{Z}$ , budući da je u grani sa strujnim izvorom čija se struja traži, ne utječe na rješenje, jer se ni ne pojavljuje u jednažbi!

$$(1) \quad \dot{U}_{ab} = 5\angle 90^\circ + \dot{I} \cdot (-j5) = -j5$$

$$(2) \quad \dot{U}_{ab} = -j5 = \frac{\frac{5\angle 0^\circ}{5+j5} + \frac{5\angle 90^\circ}{-j5} + \dot{I}_2}{\frac{1}{5+j5} + \frac{1}{-j5} \left( + \frac{1}{\infty} \right)}$$

(jednažba po  $\dot{I}_2$ )

Rješavanjem jednažbe (2) dobiva se:

$$\dot{I}_2 = 1\angle 0^\circ \text{ A}$$