

## 7. Periodični nesinusoidalni naponi i struje

7.1 (r) Na spoj (sl. 7.1.a) priključen je napon

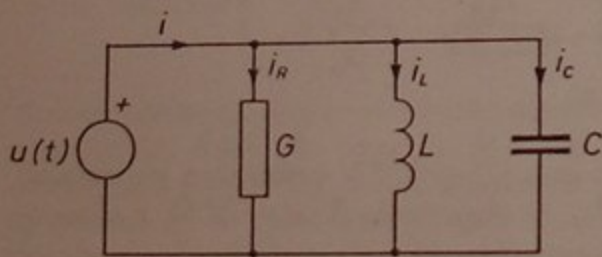
$$u = 100 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + 30 \sin 3\omega t + 10 \sin\left(5\omega t - \frac{3}{4}\pi\right);$$

a vrijednosti su

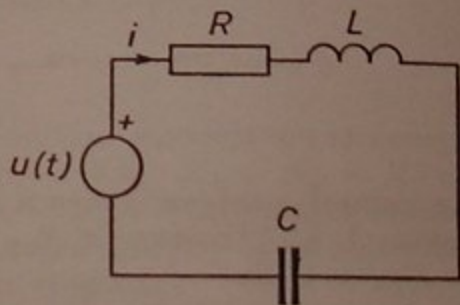
$$\omega = 1000 \text{ s}^{-1}, G = 0,01 \text{ S}, L = 0,1 \text{ H} \text{ i } C = 10 \mu\text{F}.$$

Odredite:

1.  $i_R(t)$ ,  $i_L(t)$ ,  $i_C(t)$ ; 2. efektivne vrijednosti napona i struja; 3. Nacrtajte dijagrame vremenske ovisnosti napona i struja.



Sl. 7.1.a



Sl. 7.2.

7.2. Zadan je spoj (sl. 7.2) kojemu je  $u = 100 + 211 \sin \omega t + 141 \sin 3\omega t$ ; uz  $\omega = 10^4 \text{ s}^{-1}$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 0,1 \text{ mH}$  i  $C = 11,1 \mu\text{F}$ .

Treba naći: 1.  $i(t)$ ,  $u_R(t)$ ,  $u_L(t)$  i  $u_C(t)$ ; 2.  $I$ ,  $U$ ,  $U_R$ ,  $U_L$  i  $U_C$ .

7.3. U spoju na sl. 7.2. veličine su  $i = 10 \sin\left(314 t + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \sin\left(942 t - \frac{\pi}{6}\right) + 0,5 \sin\left(1570 t + \frac{\pi}{3}\right)$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 31,8 \text{ mH}$  i  $C = 318 \mu\text{F}$ .

Valja: 1. dobiti jednadžbe za trenutne vrijednosti napona na pojedinim dijelovima mreže; 2. nacrtati dijagrame vremenske ovisnosti struje i napona.

- 7.4. U spoju na sl. 7.4. veličine su  $i = 30 + 10 \sin(4000t + 30^\circ)$ ,  $G = 0,3 \text{ S}$  i  $C = 100 \mu\text{F}$ .

Odredite jednadžbe trenutnih vrijednosti napona i struja.

- 7.5 (r) Napon i struja na ulazu dvopola iznose

$$u = 100 + 50 \sin \omega t - 20 \sin \left( 3\omega t + \frac{\pi}{6} \right) + 10 \sin \left( 5\omega t - \frac{\pi}{3} \right) \text{ i}$$

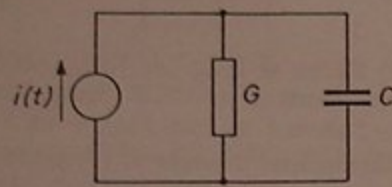
$$i = 2 + 10 \sin \left( 3\omega t - \frac{\pi}{3} \right) + 4 \sin 5\omega t.$$

Izračunajte efektivne vrijednosti struje i napona te snagu dvopola.

- 7.6. U neki strujni krug uključena su tri ampermetra:

1. ampermetar sa zakretnim svitkom i permanentnim magnetom; 2. induksijski ampermetar; 3. ampermetar s vrućom žicom.

Prvi pokazuje da je  $I_1 = 6 \text{ A}$ , a drugi  $I_2 = 8 \text{ A}$ . Koliko iznosi pokazivanje trećeg ampermetra.\*

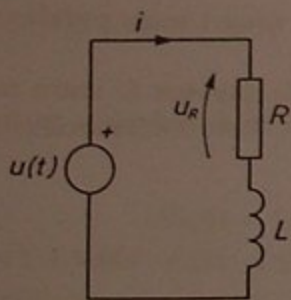


Sl. 7.4.

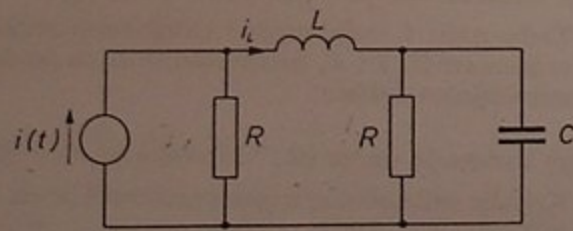
- 7.7. Zadan je spoj (sl. 7.7) kojemu je  $R = 3 \Omega$  i  $L = 2 \text{ mH}$ . Napon na radnom otporu je

$$u_R = 6 + 18 \sin \omega t + 10 \sin \left( 2\omega t - \frac{\pi}{6} \right), \text{ uz } \omega = 10^3 \text{ s}^{-1}.$$

Odredite jednadžbu napona  $u(t)$  priključenoga na mrežu.



Sl. 7.7.



Sl. 7.8.

\*Smatramo da su instrumenti idealni, tj. njihovo uključivanje u krug ne mijenja strujne i naponske prilike. Budući da se upotrebljavaju instrumenti različitih mjernih sistema, treba imati na umu da: a) instrumenti sa zakretnim svitkom i permanentnim magnetom pokazuju srednju vrijednost mjerene veličine; b) instrumenti s mekim željezom, elektroindukcijski i s vrućom žicom mjere efektivne vrijednosti; c) induksijski instrumenti mjere efektivne vrijednosti izmjeničnih veličina; d) vatmetri mjere srednju snagu. Taj naputak vrijedi i za ostale zadatke.

- 7.8. Zadan je spoj (sl. 7.8) kojemu je

$$i = 10 + 30 \sqrt{2} \sin \omega t + 15 \sqrt{2} \sin 2\omega t,$$

$$R = 1 \Omega, X_{C1} = \frac{1}{\omega C} = 1 \Omega \text{ i } X_{L1} = \omega L = 0,5 \Omega.$$

Izračunajte struju  $i_L(t)$  i njezinu efektivnu vrijednost.

- 7.9. Na krug (sl. 7.1) priključen je napon  $u = 40 \sin(\omega t - 23^\circ) + 100 \sin 2\omega t + 40 \sin(3\omega t - 7^\circ)$ , uz  $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$ ,  $G = 0,03 \text{ S}$ ,  $L = 167 \text{ mH}$  i  $C = 200 \mu\text{F}$ .

Valja odrediti:

1. jednadžbu ukupne struje; 2. aktivnu snagu.

- 7.10 (r) Na induktivni svitak kojemu radni otpor možemo zanemariti priključen je sinusoidalni napon  $U_L = 100 \text{ V}$  i pri tome je  $I_L = 10 \text{ A}$ .

Ako tom svitku priključimo napon složenog oblika, koji osim osnovnog harmonika sadrži još i harmonike trećeg reda, tada će za  $U = 100 \text{ V}$  struja biti  $I = 8 \text{ A}$ .

Izračunajte efektivnu vrijednost trećeg harmonika priključenog napona.

- 7.11 (r) Krivulja struje koja teče strujnim krugom (sl. 7.2) dobivena je u obliku oscilograma i rastavljena u harmonijski red gdje su amplitude harmonika izražene u milimetrima:

$$Y_1 = 50 \sin(314t + 23^\circ 30') + 11,2 \sin(942t - 26^\circ 30') + 2,6 \sin(1570t + 74^\circ 20').$$

Efektivna vrijednost struje je  $I = 0,18 \text{ A}$ , a induktivitet svitka je  $L = 318 \text{ mH}$ . Krivulja napona na svitku također je dobivena u obliku oscilograma u nekom mjerilu; ta krivulja je simetrična s obzirom na os apscisa.

Dvanaest jednako udaljenih ordinata  $Y_m$  te krivulje, izmjerenih na dužini poluperiode u milimetrima, uvršteno je u tablicu 7.11.

Tablica 7.11.

Broj ordinate	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Dužina ordinate u mm	0	13	23	21	9	0	9	28	39	39	28	15

1. Odredite mjerilo  $m_i$  i  $m_{uL}$  krivulja struje i napona na svitku.  
2. Napišite harmonijski red struje (amplitude harmonika izrazite u amperima).



7.12. Struja koja teče spojem na sl. 7.2. zadana je u obliku harmonijskog reda

$$i = 0,25 \sin(314t + 23^\circ 30') + 0,056 \sin(942t - 26^\circ 30') + \\ + 0,013 \sin(1570t + 74^\circ 20'); C = 31,8 \mu\text{F}.$$

U nekom razmjeru snimljen je oscilogram napona na krajevima kondenzatora. Krivulja tog napona je simetrična s obzirom na os apscisa. Dvanaest jednako razmaknutih ordinata  $Y_m$  te krivulje, izmjerenih na dužini poluperiode u milimetrima, prikazano je tablicom 7.12.

Tablica 7.12.

Broj ordinate	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Dužina ordinate u mm	0	4	9	13	18	22	25	26	23	19	12	5

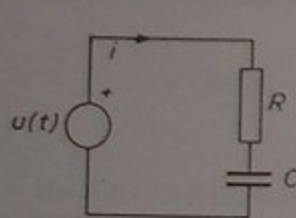
Nacrtajte krivulju napona kondenzatora i odredite mjerilo  $m_u$  te krivulje.

7.13. Na spoj (sl. 7.13) priključen je napon složenog oblika kojemu je  $f_1 = 500 \text{ Hz}$ ,  $R = 8 \Omega$  i  $C = 31,8 \mu\text{F}$ . Efektivna vrijednost priključenog napona je  $U = 120 \text{ V}$ , a efektivna vrijednost njegovih harmonijskih komponenata je

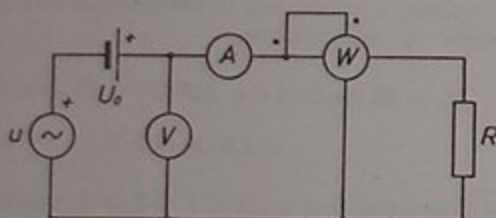
$$U_3 = 0,6 U_1, U_5 = 0,25 U_1 \text{ i } U_7 = 0,132 U_1.$$

Treba izračunati:

1. efektivnu vrijednost struje; 2. snagu koja se troši u mreži.



Sl. 7.13.



Sl. 7.15.

7.14. Napon i struja dvopola su  $u = 10 + 50 \sin(\omega t - 20^\circ) + 20 \sin(3\omega t + 60^\circ) + 6 \sin(5\omega t + 40^\circ) + 8 \sin(7\omega t - 90^\circ)$  i  $i = 6 \sin(\omega t - 80^\circ) + 3 \sin 3\omega t + \sin(5\omega t - 8^\circ) + 2 \sin(\omega t - 90^\circ)$ .

Nadite: 1. amplitudne ekvivalentnih sinusoida napona i struje; 2. fazni pomak ekvivalentnih sinusoida napona i struje.

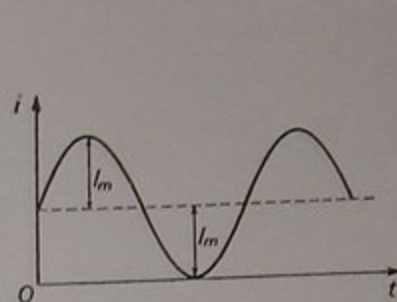
7.15. U spoju (sl. 7.15) veličine su  $U_0 = 220 \text{ V}$ ,  $u = 180 \sin 314t$  i  $R = 10 \Omega$ . Odredite pokazivanja instrumenata s mekim željezom.

7.16 (r) Krivulja periodične struje koja teče nekim strujnim krugom ima oblik prikazan na sl. 7.16. Amplituda struje je  $I_m = 10 \text{ A}$ .

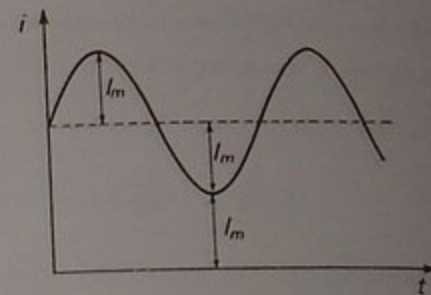
Koliko je pokazivanje ampermetra s mekim željezom uključenoga u krug?

7.17. Krivulja struje prikazana je na sl. 7.17.

Odredite pokazivanje ampermetra s mekim željezom koji mjeri tu struju.



Sl. 7.16.



Sl. 7.17.

7.18 (r) Zadan je krug (sl. 7.13); priključen napon je složenog oblika efektivne vrijednosti  $U = 120 \text{ V}$ . Snaga koju troši mreža je  $P = 175 \text{ W}$ , a struja  $i = 5 \sin \omega t + 3 \sin 3\omega t + \sin 5\omega t$ ;  $\omega = 3140 \text{ s}^{-1}$ .

Izračunajte: 1. otpor  $R$  i kapacitet kondenzatora  $C$ ; 2. kapacitet  $C'$  kondenzatora za vrijednosti  $U$ ,  $I$  i  $P$ , pretpostavljajući da se napon i struja mijenjaju po sinusoidalnom zakonu; 3. relativnu pogrešku  $p_r$  koja se dobiva pri određivanju kapaciteta kondenzatora:

$$p_r = \frac{C' - C}{C} 100 \%$$

7.19 (u) Na spoj (sl. 7.7) priključen je napon

$$u = U_{1m} \sin \omega t + 0,6 U_{1m} \sin 3\omega t + 0,28 U_{1m} \sin 5\omega t, \text{ uz } \omega = 5000 \text{ s}^{-1}.$$

Izmjerene efektivne vrijednosti priključenog napona, struje i snage potrošene u mreži su ove:  $U = 120 \text{ V}$ ,  $I = 20 \text{ A}$  i  $P = 400$ .

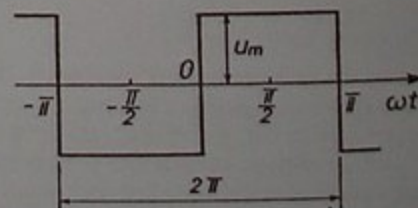
Treba naći: 1. radni otpor i induktivitet svitka; 2. induktivitet  $L'$  svitka za vrijednosti  $U$ ,  $I$  i  $P$ , pretpostavljajući da se napon i struja mijenjaju po sinusoidalnom zakonu.

7.20 (r) Zadana je mreža (sl. 7.13) kojoj je  $R = 10 \Omega$  i  $C = 10 \mu\text{F}$ .

Krivulja priključenog napona prikazana je na sl. 7.20.a;  $U_m = 100 \text{ V}$  i  $f = 1000 \text{ Hz}$ .

1. Odredite jednadžbe trenutnih vrijednosti napona i struje u obliku Fourierova reda do uključivo harmonika sedmog reda.

2. Nacrtajte amplitudne i fazne spektre struje.

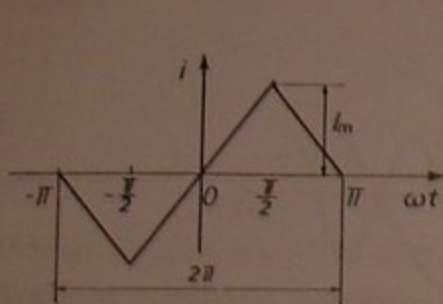


Sl. 7.20.

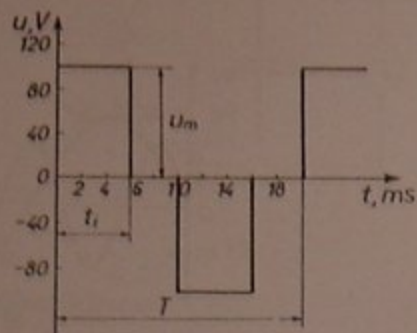


7.21. Struja koja teče nekom mrežom periodički se mijenja s frekvencijom  $f = 250$  Hz po zakonu istokračnog trokuta (sl. 7.21), gdje je  $I_m = 0,1$  A.

Valja izračunati: 1. jednadžbu struje u obliku Fourierova reda do harmonika kojima amplituda ne premašuje 1% od  $I_m$ ; 2. efektivnu vrijednost struje; a) po podacima harmoničkog reda, b) neposredno iz krivulje struje; 3. tjemeni faktor  $\sigma$  i faktor distorzije  $D$ .



Sl. 7.21.



Sl. 7.22.

7.22. Napon se periodički mijenja s frekvencijom  $f = 50$  Hz (sl. 7.22), gdje je

$$U_m = 100 \text{ V}.$$

Odredite: 1. srednju i efektivnu vrijednost napona; 2. faktor oblika i tjemeni faktor.\*

\*Kod izmjeničnih veličina može se govoriti o aritmetičkoj i elektrolitičkoj srednjoj vrijednosti. Aritmetička srednja vrijednost odnosi se na tzv. punovalno ispravljenе izmjenične veličine. To je zapravo srednja vrijednost apsolutnih iznosa

$$Y_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T |y| dt,$$

a elektrolitička srednja vrijednost je

$$Y'_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T y dt.$$

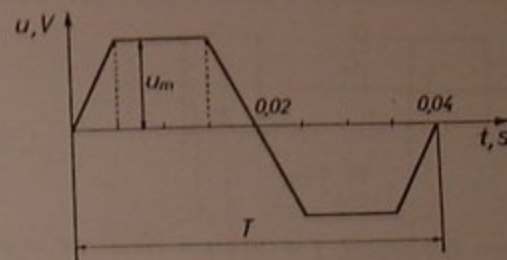
Jasno je da izmjenične veličine koje ne sadrže istosmjernu komponentu imaju elektrolitičku srednju vrijednost jednaku nuli (npr. sinusoida). U ovome, a i u ostalim zadacima, ako nije posebno istaknuto, pojam srednja vrijednost odnosi se na aritmetičku srednju vrijednost. Tjemeni faktor je:

$$\sigma = \frac{Y_m}{Y}, \text{ faktor oblika } \xi = \frac{Y}{Y_{sr}}, \text{ a faktor distorzije:}$$

$$D = \frac{\sqrt{Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + \dots}}{Y_1} = \frac{\text{efektivna vrijednost viših harmonika}}{\text{efektivna vrijednost osnovnog člana}}$$

7.23. Napon se periodički mijenja po trapezoidalnom zakonu, a iznosi  $U_m = 24$  V (sl. 7.23).

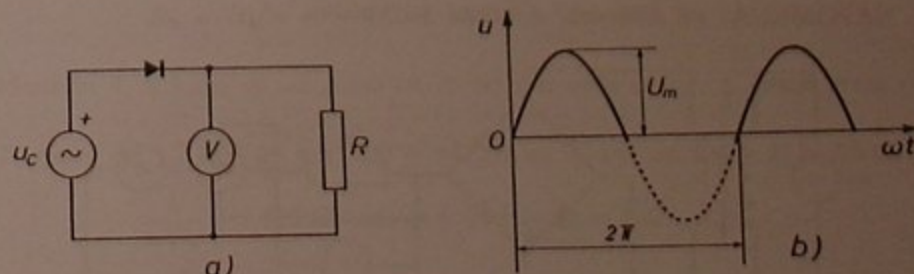
Nadite: 1. srednju i efektivnu vrijednost napona; 2. faktor oblika i tjemeni faktor.



Sl. 7.23.

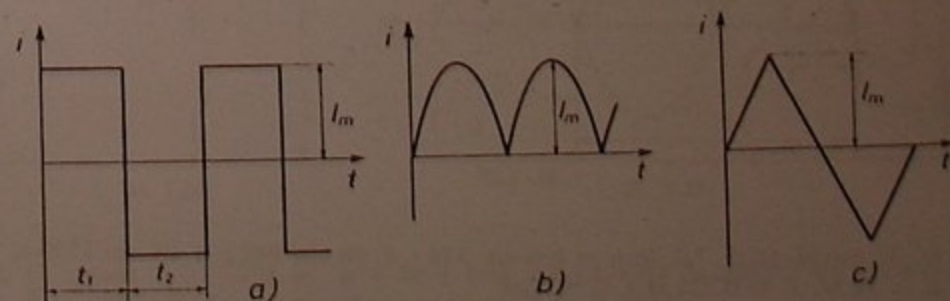
7.24 (u) Poluvalnim ispravljačem na sl. 7.24.a ispravljeni napon (sl. 7.24.b) mjeri se voltmetrom s mekim željezom koji pokazuje  $U = 90$  V.

Odredite: 1. maksimalnu vrijednost  $U_m$  ispravljenog napona; 2. efektivnu vrijednost  $U_c$  sinusoidalnog napona izvora.



Sl. 7.24.

7.25. Valja naći efektivne vrijednosti struja kojima su valni oblici prikazani na sl. 7.25. 2. Ako je srednja snaga na otporniku  $R = 25 \Omega$   $P = 400$  W, odredite maksimalni iznos struje kroz otpornik ako je struja: a) sinusoidalna; b) ima valni oblik prema (sl. 7.25.c).

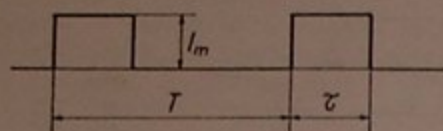


Sl. 7.25.



**7.26.** Struja u mreži ima oblik odvojenih impulsa koji se periodički ponavljaju (sl. 7.26). Trajanje svakog impulsa struje iznosi  $\tau = 100 \mu\text{s}$ . Period ponavljanja impulsa iznosi  $T = 0,02 \text{ s}$ . Struja u impulsu je  $I_m = 100 \text{ A}$ .

Valja izračunati srednju i efektivnu vrijednost struje u mreži.

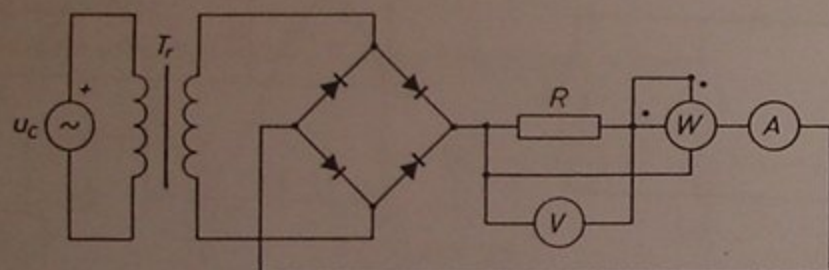


Sl. 7.26.

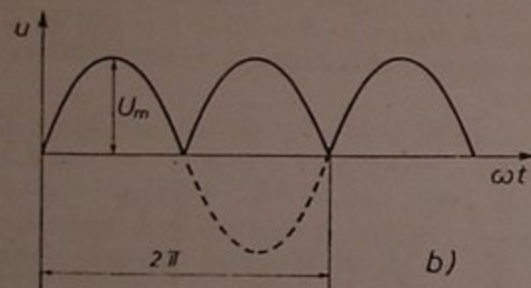
**7.27 (u)** Sinusoidalni napon frekvencije  $f = 50 \text{ Hz}$  i efektivne vrijednosti  $U_c = 127 \text{ V}$  napaja prijamnik s  $R = 12 \Omega$  (sl. 7.27) preko punovalnog ispravljača. Transformator  $T_r$  ispravljača ima koeficijent transformacije  $n = 1$ .

1. Odredite pokazivanje instrumenata koji rade na elektrodinamskom principu, 2. Rastavite krivulju ispravljenog napona (sl. 7.27. b) u Fourierov red do uključivo šestog harmonika. Odredite: 3. jednadžbu struje u obliku Fourierova reda do uključivo šestog harmonika; 4. efektivne vrijednosti napona i struje otpornika po njihovim analitičkim izrazima.

NAPOMENA: svi elementi u krugu su idealni.



a)



b)

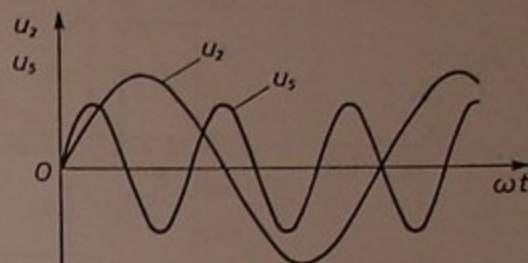
Sl. 7.27.

**7.28. (r)** U mreži na sl. 7.2. je  $u = 120 \sin 314 t + 40 \sin 942 t + 24 \sin 1570 t$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 0,225 \text{ H}$  i  $C = 5 \mu\text{F}$ .

Ustanovite: 1. broj harmonika za koji se mreža nalazi u naponskoj rezonanciji; 2. srednju vrijednost snage pojedinih harmonika i snagu koja se troši u mreži.

**7.29.** Napon koji je priključen na krug (sl. 7.2) sastoji se od harmonika prvoga, drugog, trećeg i petog reda. Mreža je u naponskoj rezonanciji za harmonik trećeg reda.

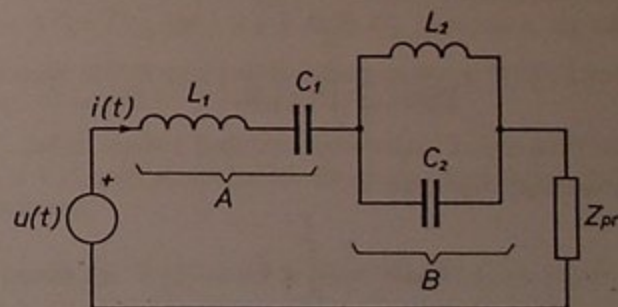
Dijagrami trenutnih vrijednosti harmonika drugog i petog reda priključenog napona ( $u_2$  i  $u_5$ ) prikazani su na sl. 7.29. Nacrtajte (kvalitativno) položaj struje drugog i petog reda s obzirom na prikaz harmonika napona na sl. 7.29.



Sl. 7.29.

**7.30 (r)** S prijamnikom je serijski spojen električni filter (sl. 7.30.a);  $L_1 = L_2 = 1 \text{ mH}$ .

1. Prikažite (kvalitativno) frekventijske karakteristike otpora dijelova A i B te ukupnog filtra.
2. Odredite  $C_1$  i  $C_2$  pri kojima filter neće propuštati u prijamnik peti harmonik struje i neće predstavljati otpor trećem harmoniku ako je frekvencija osnovnog harmonika  $f = 1 \text{ kHz}$ .



Sl. 7.30.

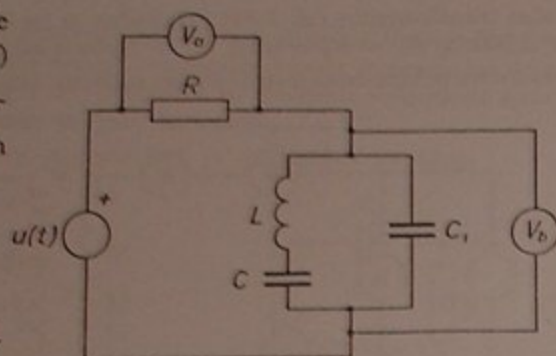
**7.31.** Na dvopol je priključen napon koji se sastoji od prvog i trećeg harmonika. Sastavite i uključite u krug dvopola filter takvih karakteristika da struja u krugu ne sadrži harmonike: 1. prvog reda; 2. trećeg reda.

**7.32.** Na dvopol je priključen napon koji se sastoji od istosmjerne komponente i jednog harmonika. Sastavite i uključite filter u krug dvopola tako da struja kroz dvopol ne teče.

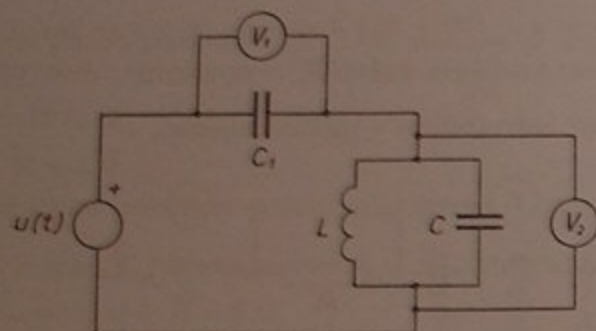


- 7.33 (r) U krugu (sl. 7.33) je  $u = 150 + 50\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ)$  i  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ . Odredite pokazivanje voltmetra s mekim željezom.

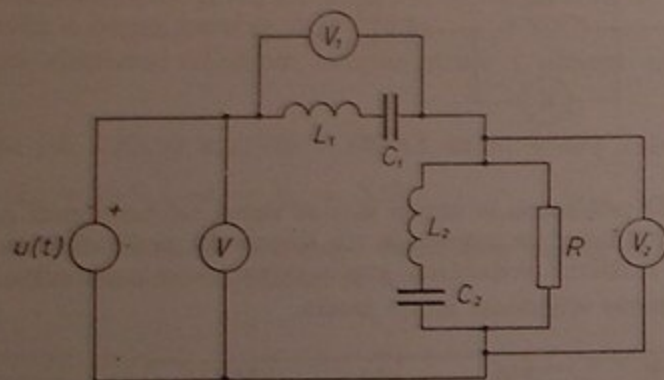
Sl. 7.33.



- 7.34. U krugu (sl. 7.34) je  $u = 100 + 50\sqrt{2} \sin \omega t$  i  $\frac{1}{\omega L} = \omega C$ . Kolika su pokazivanja voltmetara s mekim željezom.



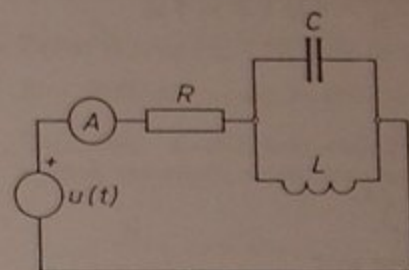
Sl. 7.34.



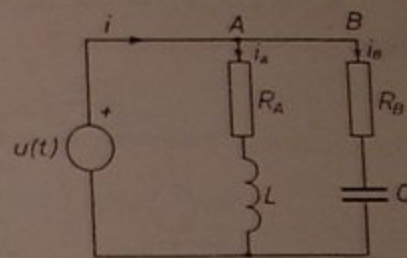
Sl. 7.35.

- 7.35. Zadan je spoj (sl. 7.35) kojemu je  $u = 100\sqrt{2} \sin \omega t + 50\sqrt{2} \sin 3\omega t$ ,  $\omega L_1 = \frac{1}{\omega C_1}$  i  $3\omega L_2 = \frac{1}{3\omega C_2}$ . Valja ustanoviti pokazivanja voltmetara s mekim željezom.

- 7.36. Zadata je mreža (sl. 7.36) gdje je  $u = 100 + 50\sqrt{2} \sin \omega t$ ,  $R = 20 \Omega$  i  $\frac{1}{\omega L} = \omega C$ . Neka se uoči pokazivanje ampermetra s mekim željezom.



Sl. 7.36.



Sl. 7.37.

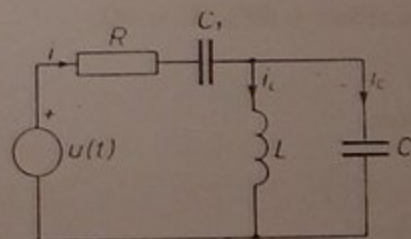
- 7.37 (r) Zadan je spoj (sl. 7.37) u kojemu je  $u = 100 \sin \omega t + 60 \sin 3\omega t + 20 \sin 5\omega t$ ,

$$R_A = R_B = R = 4 \Omega \text{ i } \omega L = \frac{1}{\omega C} = 3 \Omega.$$

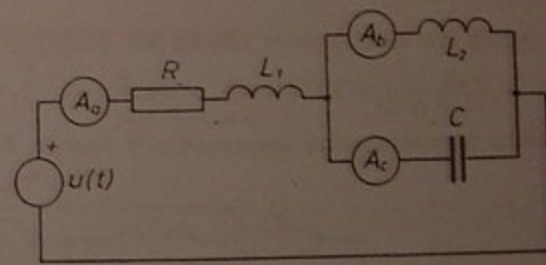
Odredite: 1. u kojoj će od grana (A ili B) biti veća snaga; 2. snage grana.

- 7.38. U spoju (sl. 7.38) je  $u = 100 + 141 \sin \omega t + 141 \sin 3\omega t$ ,  $R = 2,5 \Omega$ ,  $\frac{1}{\omega C_1} = 1,125 \Omega$ ,  $\omega L = 1 \Omega$  i  $\frac{1}{\omega C_2} = 9 \Omega$ .

Treba izračunati: 1. efektivne vrijednosti priključenog napona, struja u svim granama i napona na pojedinim dijelovima (elementima) mreže; 2. jednadžbu ukupne struje.



Sl. 7.38.



Sl. 7.39.

- 7.39. U spoju (sl. 7.39) je  $u = 50 + 60\sqrt{2} \sin 1000 t + 200\sqrt{2} \sin 3000 t$ ,  $L_1 = 2,5 \text{ mH}$ ,  $L_2 = 20 \text{ mH}$ ,  $C = 50 \mu\text{F}$  i  $R = 50 \Omega$ . Neka se ustanove pokazivanja ampermetara s mekim željezom.

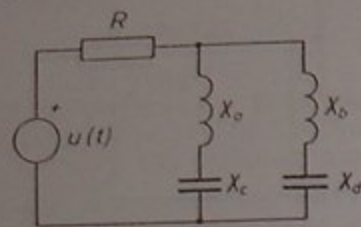
7.40. U spoju (sl. 7.40) je

$$u = 10\sqrt{2} \sin \omega t + 5\sqrt{2} \sin \left(2\omega t + \frac{\pi}{6}\right) + 11\sqrt{2} \sin 4\omega t.$$

Otpori pojedinih elemenata mreže za frekvenciju prvog harmonika imaju, ove vrijednosti:

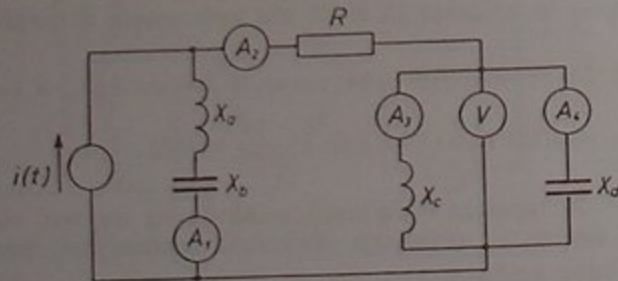
$$X_{a1} = 1 \Omega, X_{c1} = 1 \Omega, X_{b1} = 2 \Omega, X_{d1} = 8 \Omega \text{ i } R = 5 \Omega.$$

Odredite radnu snagu mreže.



Sl. 7.40.

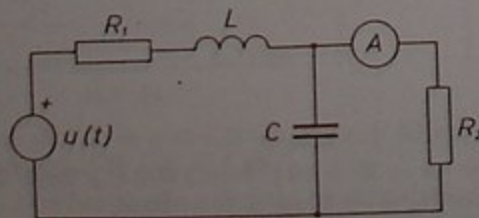
7.41. U mreži (sl. 7.41) je  $i = 10 + 4\sqrt{2} \sin 100t + 6\sqrt{2} \sin 300t$ . Otpori pojedinih elemenata za frekvenciju prvog harmonika su  $X_{a1} = 6 \Omega$ ,  $X_{b1} = 6 \Omega$ ,  $X_{c1} = 1 \Omega$ ,  $X_{d1} = 90 \Omega$  i  $R = 10 \Omega$ . Valja odrediti: 1. pokazivanja instrumenata s mekim željezom; 2. snagu mreže.



Sl. 7.41.

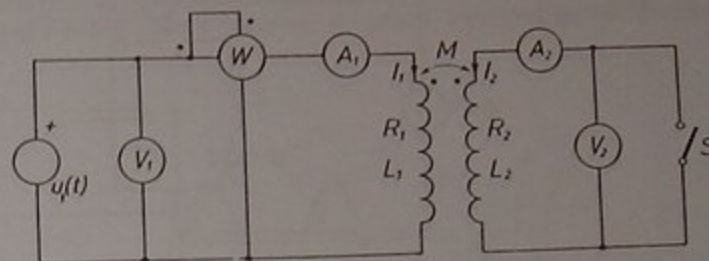
7.42. U mreži (sl. 7.42) je  $u = 100 \sin(\omega t + 30^\circ) + 50 \sin(3\omega t + 60^\circ)$ ,  $R_1 = 6 \Omega$ ,  $\omega L = 8 \Omega$ ,  $\frac{1}{\omega C} = 10 \Omega$  i  $R_2 = 10 \Omega$ .

Koliko je pokazivanje ampermetra s mekim željezom.



Sl. 7.42.

7.43. Zračni transformator (sl. 7.43) priključen je na izvor napona  $u_1 = 60 + 113 \sin 2000t$ ,  $R_1 = R_2 = 6 \Omega$ ,  $L_1 = L_2 = 4 \text{ mH}$  i  $M = 1 \text{ mH}$ . Ustanovite pokazivanja instrumenata s mekim željezom pri otvorenoj sklopki S.

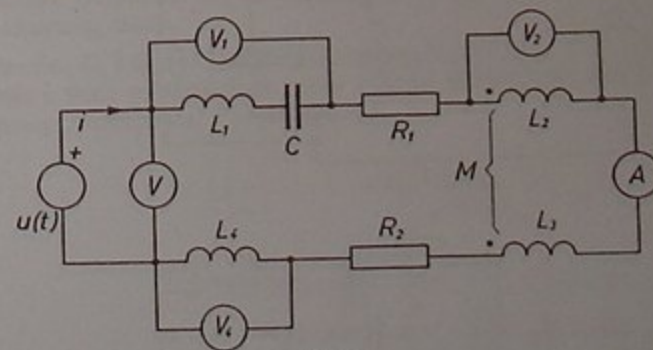


Sl. 7.43.

7.44 (r) Riješite zadatak 7.43. ako je prekidač zatvoren.

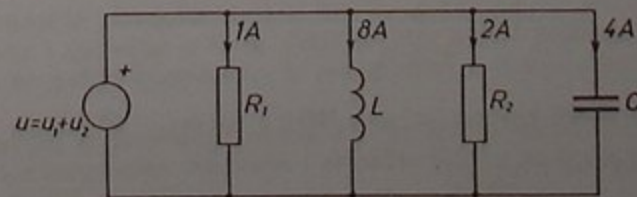
7.45. U mreži (sl. 7.45) je  $u = 100 + 80\sqrt{2} \sin \omega t + 60\sqrt{2} \sin 3\omega t$ ,  $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = M$ ,  $\omega L_1 = \frac{1}{\omega C} = 3 \Omega$  i  $R_1 = R_2 = 2 \Omega$ .

Odredite pokazivanja instrumenata s mekim željezom.



Sl. 7.45.

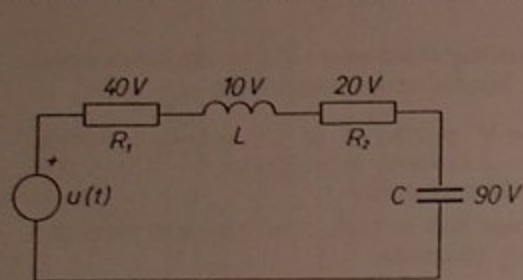
7.46. Na spoj (sl. 7.46) priključen je napon koji se sastoji od harmonika prvog i drugog reda, a pri tome su amplitude tih harmonika međusobno jednake. Sl. 7.46. sadrži efektivne vrijednosti struja samo prvog harmonika. Izračunajte efektivnu vrijednost struje izvora.



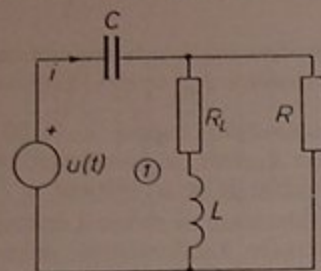
Sl. 7.46.



- 7.47.** U mreži (sl. 7.47) struja je složenog oblika i sastoji se od harmonika prvog i trećeg reda. Amplituda struje trećeg harmonika dvaput je manja od amplitude prvog harmonika. Na sl. 7.47. prikazane su efektivne vrijednosti napona na pojedinim dijelovima samo za prvi harmonik. Odredite efektivnu vrijednost napona koji je priključen na spoj.



Sl. 7.47.



Sl. 7.48.

- 7.48.** Struja koja prolazi granom (1) (sl. 7.48) složenog je oblika, a sastoji se od harmonika prvog i trećeg reda. Efektivne vrijednosti tih harmonika struje su  $I_{L1} = 10 \text{ A}$ ,  $I_{L3} = 5 \text{ A}$ ,  $X_{C1} = \frac{1}{\omega C} = 0,9 \Omega$ ,  $X_{L1} = \omega L = 4 \Omega$ ,  $R_L = 2 \Omega$  i  $R = 2 \Omega$ .

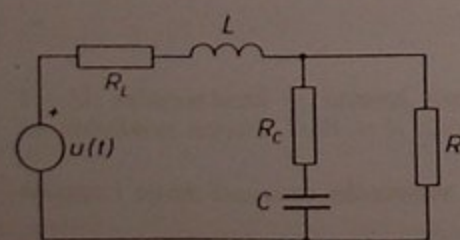
Nadite efektivnu vrijednost priključenog napona.

- 7.49 (r)** Zadan je spoj (sl. 7.49) kojemu je  $R_L = 5,1 \Omega$ ,  $X_L = \omega L = 5 \Omega$ ,  $R_C = 5 \Omega$ ,  $X_{C1} = \frac{1}{\omega C} = 50 \Omega$  i  $R = 5 \Omega$ .

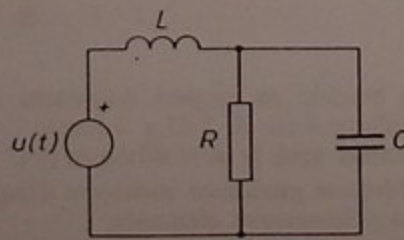
Napon koji je priključen na krug sastoji se od prvog i petog harmonika. Efektivna vrijednost struje prvog harmonika u lijevoj grani je  $I_{C1} = 2 \text{ A}$ , a petog harmonika u desnoj grani je  $I_{R5} = 10 \text{ A}$ . Odredite efektivnu vrijednost ukupne struje i napona priključenoga na mrežu.

- 7.50.** U spoju (sl. 7.50) je  $u = 100 + 100\sqrt{2} \sin \omega t + 40\sqrt{2} \sin 2\omega t$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $\frac{1}{\omega C} = X_{C1} = 10 \Omega$  i  $\omega L = X_{L1} = 5 \Omega$ .

Treba naći: 1. efektivnu vrijednost struje koja prolazi kroz kondenzator; 2. jednadžbu trenutne vrijednosti te struje.



Sl. 7.49.



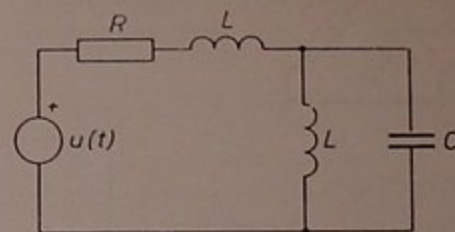
Sl. 7.50.

- 7.51.** Zadana je mreža (sl. 7.51) kojoj je  $u = 100 + 100\sqrt{2} \sin \omega t + 60\sqrt{2} \sin 2\omega t$ ,  $R = 20 \Omega$ ,  $X_{L1} = \omega L = 5 \Omega$  i  $X_{C1} = \frac{1}{\omega C} = 10 \Omega$ .

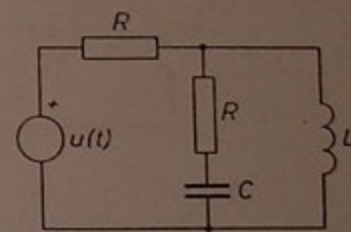
Odredite: 1. efektivnu vrijednost napona na kondenzatoru; 2. jednadžbu trenutnih vrijednosti tog napona.

- 7.52.** Zadan je krug (sl. 7.52) gdje je  $u = 100 + 90\sqrt{2} \sin \omega t + 60\sqrt{2} \sin 2\omega t$ ,  $R = 10 \Omega$ ,  $X_{L1} = \omega L = 10 \Omega$  i  $X_{C1} = \frac{1}{\omega C} = 20 \Omega$ .

Ustanovite: 1. efektivnu vrijednost napona na paralelnom ogranku; 2. jednadžbu trenutnih vrijednosti tog napona.



Sl. 7.51.



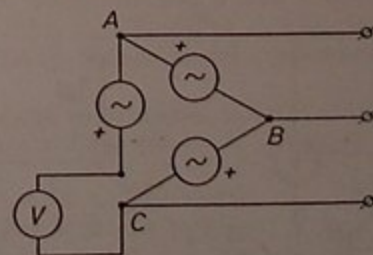
Sl. 7.52.

- 7.53 (r)** Namoti simetričnoga trofaznog generatora spojeni su u zvijezdu. Jednadžba trenutnih vrijednosti faznog napona faze A je

$$U_{A0} = 120 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t.$$

Odredite: 1. jednadžbu trenutnih vrijednosti linijskog napona  $U_{AB}$ ; 2. efektivne vrijednosti faznih i linijskih napona.

- 7.54.** Namoti simetričnog generatora spojeni su u otvoren trokut (sl. 7.54). Jednadžba trenutnih vrijednosti faznog napona faze AB je  $U_{AB} = 120 \sin \omega t + 50 \sin 3\omega t$ . Ustanovite pokazivanje voltmetra.



Sl. 7.54.

- 7.55.** Sustav faznih napona generatora koji je spojen u zvijezdu je simetričan, a oblik krivulja napona je složen i osim osnovnog (prvog) harmonika sadrži harmonike trećeg reda. Fazni napon generatora je  $U_{f1} = 100 \text{ V}$ , a čvorni napon je  $U_{0,0} = 60 \text{ V}$ . Treba odrediti efektivnu vrijednost linijskog napona  $U_l$ .



## 7. Periodični nesinusoidalni naponi (struje)

7.1. 1. Struje u granama, u suglasnosti s principom nezavisnog djelovanja pojedinih harmonika napona (superpozicija), određuju se jednadžbama

$$i_R = i_{R1} + i_{R3} + i_{R5}, \quad i_L = i_{L1} + i_{L3} + i_{L5},$$

$$i_C = i_{C1} + i_{C3} + i_{C5},$$

gdje su  $i_{Rk}$ ,  $i_{Lk}$  i  $i_{Ck}$  ( $k = 1, 3$  i  $5$ ) harmonici struje.

Pri tome je

$$i_{Rk} = I_{Rkm} \sin(k\omega t + \alpha_{uk}), \quad i_{Lk} = I_{Lkm} \sin(k\omega t + \alpha_{uk} - \frac{\pi}{2}),$$

$$i_{Ck} = I_{Ckm} \sin(k\omega t + \alpha_{uk} + \frac{\pi}{2}),$$

$$I_{Rkm} = \frac{U_{km}}{R}, \quad I_{Lkm} = \frac{U_{km}}{X_{Lk}}, \quad I_{Ckm} = \frac{U_{km}}{X_{Ck}}, \quad X_{Lk} = k\omega L,$$

$$X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C}.$$

Za harmonike prvog reda  $k = 1$  bit će

$$X_{L1} = \omega L = 1000 \cdot 0,1 = 100 \, \Omega, \quad X_{C1} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 100 \, \Omega.$$

Rezultati računa sredi su u tabl. 7.1.

Tablica 7.1.

$k$	$R \, \Omega$	$X_{Lk} \, \Omega$	$X_{Ck} \, \Omega$	$U_{km} \, V$	$I_{Rkm} \, A$	$I_{Lkm} \, A$	$I_{Ckm} \, A$
1.	100	100	100	100	1	1	1
2.	100	300	33,3	30	0,3	0,1	0,9
3.	100	500	20	10	0,1	0,02	0,5

Jednadžbe trenutnih vrijednosti struja su

$$i_R = \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) + 0,3 \sin 3\omega t + 0,1 \sin(5\omega t - \frac{3}{4}\pi),$$

$$i_L = \sin(\omega t - \frac{\pi}{3}) + 0,1 \sin(3\omega t - \frac{\pi}{2}) + 0,2 \sin(5\omega t - \frac{5}{4}\pi),$$

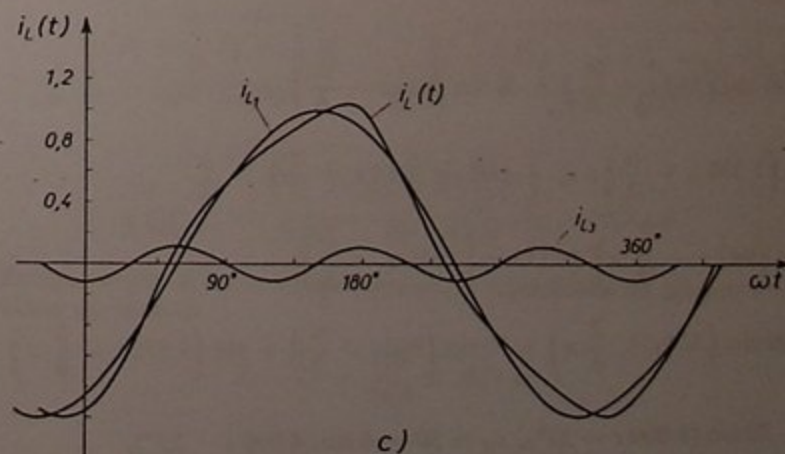
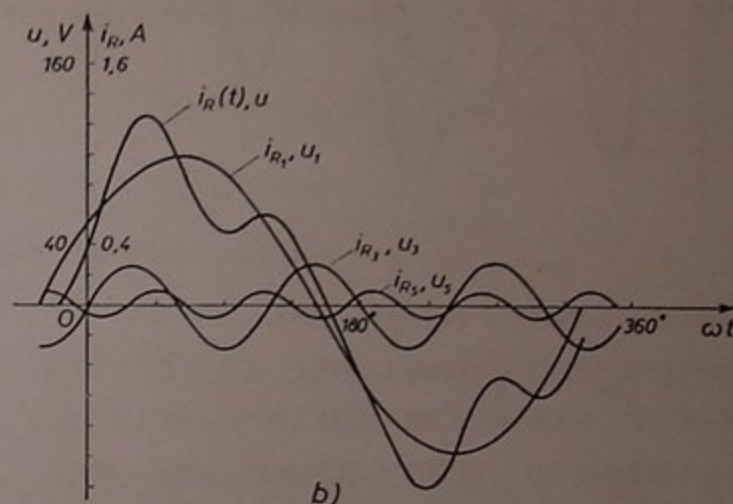
$$i_C = \sin(\omega t + \frac{2}{3}\pi) + 0,9 \sin(3\omega t + \frac{\pi}{2}) + 0,5 \sin(5\omega t - \frac{\pi}{4}).$$

Efektivna vrijednost napona je

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(U_{1m}^2 + U_{3m}^2 + U_{5m}^2)} = 70,7 \, V.$$

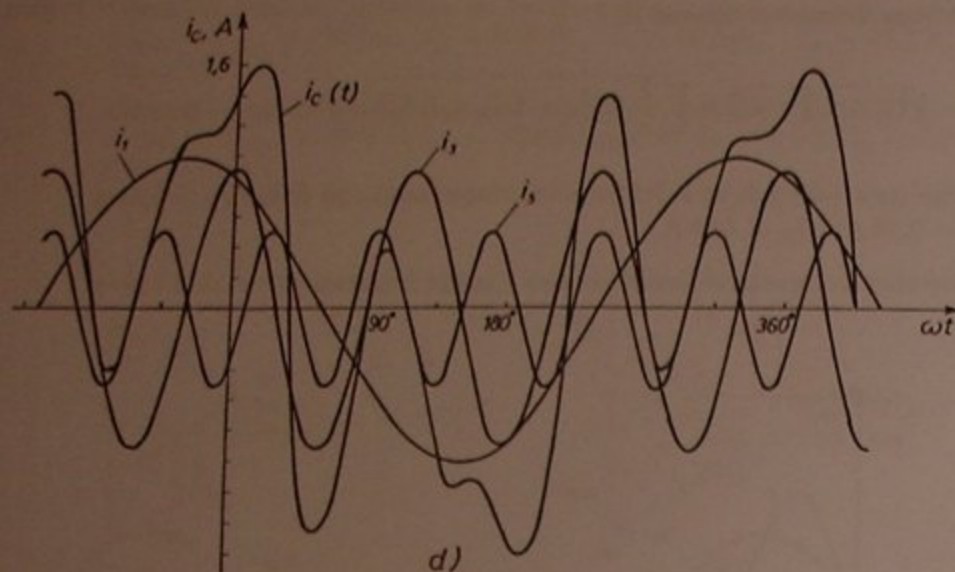
Slično tome određuju se i efektivne vrijednosti struja, pa će biti  $I_R = 0,71 \, A$ ,  $I_L = 0,74 \, A$  i  $I_C = 1,02 \, A$ .

Dijagrami vremenske ovisnosti napona i struja prikazani su na sl. 7.1.b–d.



Sl. 7.1.





d)  
Sl. 7.1.

7.2. 1.  $i = 16,5 \sin(10^4 t + 38^\circ 40') + 14,1 \sin 3 \cdot 10^4 t$ ,

$$u_R = 165 \sin(10^4 t + 38^\circ 40') + 141 \sin 3 \cdot 10^4 t,$$

$$u_L = 16,5 \sin(10^4 t + 128^\circ 40') + 42,3 \sin(3 \cdot 10^4 t + 90^\circ),$$

$$u_C = 100 + 148,5 \sin(10^4 t - 51^\circ 20') + 42,3 \sin(3 \cdot 10^4 t - 90^\circ)$$

2.  $I = 15,3 \text{ A}$ ,  $U = 205 \text{ V}$ ,  $U_R = 153 \text{ V}$ ,

$$U_L = 32,1 \text{ V}, U_C = 142 \text{ V}$$

7.3. 1.  $u_R = 100 \sin\left(314 t + \frac{\pi}{6}\right) + 30 \sin\left(942 t - \frac{\pi}{6}\right) +$

$$+ 5 \sin\left(1570 t + \frac{\pi}{3}\right); u_L = 100 \sin\left(314 t - \frac{\pi}{3}\right) +$$

$$+ 90 \sin\left(942 t - \frac{2}{3}\pi\right) + 25 \sin\left(1570 t - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$u_C = 100 \sin\left(314 t + \frac{2}{3}\pi\right) + 10 \sin\left(942 t + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(1570 t + \frac{5}{6}\pi\right)$$

7.4.  $u = 100 + 20 \sin(4000 t - 23^\circ)$ ,  $i_C = 30 + 6 \sin(4000 t - 23^\circ)$ ,

$$i_C = 8 \sin(4000 t + 67^\circ)$$

7.5. 1. Efektivna vrijednost napona i struje je

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2}(U_{1m}^2 + U_{3m}^2 + U_{5m}^2)} = 107,2 \text{ V},$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}(I_{3m}^2 + I_{5m}^2)} = 7,87 \text{ A}.$$

2. Budući se aktivna snaga određuje samo istoimenim harmonicima napona i struje, to je  $P = U_0 I_0 + U_3 I_3 \cos \varphi_3 + U_5 I_5 \cos \varphi_5$ , gdje je  $\varphi_3 = a_{u_3} - a_{i_3} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$ ,  $\varphi_5 = a_{u_5} - a_{i_5} = -\frac{\pi}{3}$ , pa se dobiva

$$\text{da je } P = 100 \cdot 2 + \frac{20}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 210 \text{ W}.$$

7.6.  $I_3 = 10 \text{ A}$

7.7.  $u = 6 + \sin(1000 t + 33^\circ 40') + 10 \sin(2000 t + 23^\circ)$

7.8.  $i_L = 5 + 28,2 \sin \omega t + 15,8 \sin(2\omega t - 26,5^\circ)$ ,  $I_L = 23,4 \text{ A}$

7.9. 1.  $i = 2 \sin(100 t + 30^\circ) + 3,16 \sin(200 t - 18^\circ 30') + 2 \sin(300 t - 60^\circ)$   
2.  $P = 198 \text{ W}$

7.10. Efektivna vrijednost napona harmonika trećeg reda  $U_3$  određuje se iz jednačbe

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2} = 100 \text{ V}.$$

Jednačba sadrži nepoznanice  $U_1$  i  $U_3$ , pa moramo zbog toga sastaviti još jednu jednačbu s istim nepoznanicama.

Zna se da je

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{\left(\frac{U_1}{X_{L1}}\right)^2 + \left(\frac{U_3}{3X_{L1}}\right)^2} = 8 \text{ A},$$

gdje je  $G_{L1} = \frac{U_{L1}}{I_L} = 10 \Omega$ .

Rješavajući zajednički te jednačbe dobivamo da je  $U_3 = 63,6 \text{ V}$ .

7.11. 1. Mjerilo  $m_i$  krivulje struje može se odrediti iz jednačbe

$$I = \sqrt{\frac{I_{1m}^2 + I_{3m}^2 + I_{5m}^2}{2}} = \sqrt{\frac{(m_i A_{1m})^2 + (m_i A_{3m})^2 + (m_i A_{5m})^2}{2}} = \frac{m_i}{\sqrt{2}} \sqrt{A_{1m}^2 + A_{3m}^2 + A_{5m}^2},$$



gdje su  $A_{km}$  amplituda harmonika struje, izražene u milimetrima, uz  $k = 1, 3$  i  $5$ , pa izlazi da je

$$m_1 = \frac{I\sqrt{2}}{\sqrt{A_{1m}^2 + A_{3m}^2 + A_{5m}^2}} = \frac{0,18 \cdot 1,41}{\sqrt{50^2 + 11,2^2 + 2,6^2}} = 0,005 \frac{\text{A}}{\text{mm}}$$

Mjerilo  $m_{uL}$  krivulje napona na krajevima svitka može se odrediti na ovaj način:

$$U_L = \sqrt{\frac{U_{L1m}^2 + U_{L3m}^2 + U_{L5m}^2}{2}} = \sqrt{\frac{(\omega L I_{1m})^2 + (3 \omega L I_{3m})^2 + (5 \omega L I_{5m})^2}{2}} = \frac{\omega L}{\sqrt{2}} \sqrt{I_{1m}^2 + 9 I_{3m}^2 + 25 I_{5m}^2} = \frac{\omega L m_1}{\sqrt{2}} \sqrt{A_{1m}^2 + 9 A_{3m}^2 + 25 A_{5m}^2} \quad (1)$$

Napon  $U_L$  se može također izraziti pomoću ordinata krivulje tog napona:

$$U_L = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U_L^2(t) dt} = m_{uL} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T Y^2(t) dt} \approx m_{uL} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n Y_m^2} \quad (2)$$

Izjednačujući (1) i (2) dobivamo izraz

$$m_{uL} \approx \frac{\frac{\omega L m_1}{\sqrt{2}} \sqrt{A_{1m}^2 + 9 A_{3m}^2 + 25 A_{5m}^2}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n Y_m^2}} = 1 \text{ V/mm}$$

Tu je  $\sum_{m=1}^n Y_m^2 = 0^2 + 13^2 + 23^2 + 21^2 + 9^2 + 0^2 + 9^2 + 28^2 + 39^2 + 39^2 + 28^2 + 15^2 = 6130$ .

2. Harmonički red struje kojoj je amplituda izražena u amperima ima oblik

$$i = 0,25 \sin(314 t + 23^\circ 30') + 0,056 \sin(942 t - 26^\circ 30') + 0,013 \sin(1570 t + 74^\circ 20')$$

7.12. Pogledajte rješenje zadatka 7.11;  $m_u = 1 \text{ V/mm}$

7.13. 1.  $I = 11 \text{ A}$ ; 2.  $P = 968 \text{ W}$

7.14. 1.  $U_{ekv} = 56,5 \text{ V}$ ,  $I_{ekv} = 7,05 \text{ A}$ ;

2.  $\varphi_{ekv} = 60^\circ$

7.15.  $U = 254 \text{ V}$ ,  $I = 25,4 \text{ A}$ ,  $P = 6450 \text{ W}$

7.16. Pokazivanje ampermetra je

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2} = \sqrt{I_m^2 + \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1,23 I_m = 12,3 \text{ A}$$

gdje je  $I_0 = I_m$  istosmjerna komponenta struje, a  $I_1 = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  je efektivna vrijednost harmonika struje prvog reda.

$$7.17. I = \frac{3}{\sqrt{2}} I_m$$

7.18. 1. Otpor  $R$  određuje se po formuli  $R = \frac{P}{I^2}$ , gdje je

$$I^2 = \frac{1}{2} (I_{1m}^2 + I_{3m}^2 + I_{5m}^2) = \frac{1}{2} (5^2 + 3^2 + 1^2) = 17,5, I = 4,18 \text{ A}$$

pa je, dakle,  $R = \frac{175}{17,5} = 10 \Omega$ .

Kapacitet kondenzatora određuje se iz ovih odnosa:

budući da je

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2}, U_k = I_k Z_k = I_k \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{k \omega C}\right)^2}, \text{ uz } k = 1,$$

3 i 5, bit će

$$U^2 = I_1^2 \left[ R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 \right] + I_3^2 \left[ R^2 + \left(\frac{1}{3 \omega C}\right)^2 \right] + I_5^2 \left[ R^2 + \left(\frac{1}{5 \omega C}\right)^2 \right],$$

pa je

$$C = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{I_1^2 + \frac{1}{9} I_3^2 + \frac{1}{25} I_5^2}{U^2 - R^2 I^2}} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\frac{1}{2} (I_{1m}^2 + \frac{1}{9} I_{3m}^2 + \frac{1}{25} I_{5m}^2)}{U^2 - R^2 I^2}} = \frac{1}{3140} \sqrt{\frac{\frac{1}{2} (5^2 + \frac{1}{9} 3^2 + \frac{1}{25} 1^2)}{120^2 - 10^2 \cdot 17,5}} = 10,2 \mu\text{F}$$

Pretpostavimo li da se struja mijenja po sinusoidalnom zakonu s frekvencijom  $\omega$ , tada je

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{120}{4,18} = 28,7 \Omega,$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = Z \sin \varphi = Z \sqrt{1 - \cos^2 \varphi},$$



a zatim je

$$C' = \frac{1}{\omega Z \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}} = 11,8 \mu\text{F},$$

pa će biti

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{175}{120 \cdot 4,18} = 0,35.$$

3. Relativna pogreška koja je dobivena takvim računskim postupkom iznosi

$$p_r = \frac{C' - C}{C} 100\% = \frac{11,8 - 10,2}{10,2} 100 = 15,7\%.$$

7.19. Pogledajte rješenje zadatka 7.18.

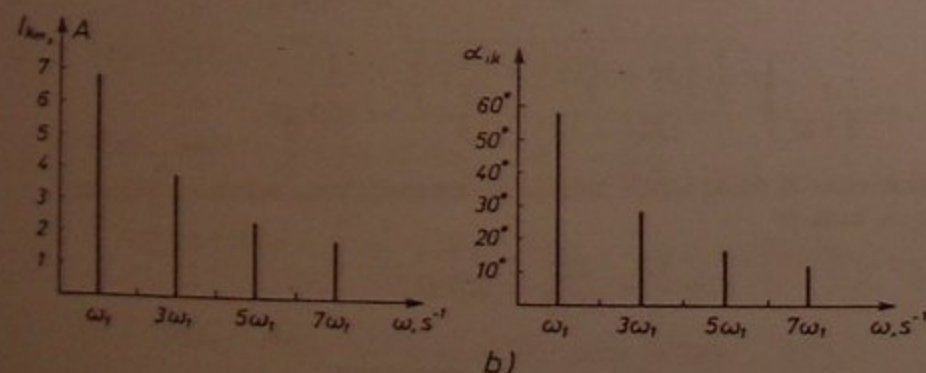
1.  $R = 1 \Omega$ ,  $L = 1,02 \text{ mH}$ ; 2.  $L' = 1,18 \text{ mH}$

7.20. 1. Zadana je funkcija  $u = f(\omega t)$  (sl. 7.20.a) simetrična u odnosu prema ishodištu, dakle je  $f(\omega t) = -f(-\omega t)$ , i u odnosu prema osi apscisa, pa je  $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$ , i zbog toga Fourierov red ne sadrži kosinusoidalne i parne harmonike, tj. imat će oblik  $u = b_1 \sin \omega t + b_3 \sin 3\omega t + b_5 \sin 5\omega t + \dots$ , gdje se koeficijenti  $b_k$  ( $k = 1, 3, 5, \dots$ ) izračunavaju po formuli

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\omega t) \sin k\omega t d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(\omega t) \sin k\omega t d(\omega t).$$

Budući da je  $u = U_m$  pri  $0 \leq \omega t \leq \pi$ , bit će

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U_m \sin k\omega t d(\omega t) = \frac{2U_m}{\pi} \left( -\frac{\cos k\omega t}{k} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2U_m}{k\pi} (-\cos k\pi + 1).$$



Sl. 7.20.

Dakle je,  $b_k = 0$  za  $k = 0, 2, 4, 6 \dots$  i  $b_k = \frac{4U_m}{k\pi}$  za  $k = 1, 3, 5 \dots$

Na taj način dobivamo

$$u = 4 \frac{U_m}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t \right) = 127 \sin \omega t + 42,5 \sin 3\omega t + 25,5 \sin 5\omega t + 18,2 \sin 7\omega t.$$

Jednadžba trenutnih vrijednosti struje je

$$i = I_{1m} \sin(\omega t - \varphi_1) + I_{3m} \sin(3\omega t - \varphi_3) + I_{5m} \sin(5\omega t - \varphi_5) + I_{7m} \sin(7\omega t - \varphi_7),$$

gdje je  $I_{km} = \frac{U_{km}}{Z_k} = \frac{U_m}{Z_k} \sqrt{R^2 + X_k^2}$ ,  $\tan \varphi_k = \frac{X_k}{R}$ , uz  $k = 1, 3, 5$  i  $7$ .

Budući da je  $X_k = X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C}$ ,  $\frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{6180 \cdot 10} = 16,2 \Omega$ ,

bit će

$$Z_1 = \sqrt{10^2 + 16,2^2} = 19 \Omega, \quad \tan \varphi_1 = -\frac{16,2}{10} = -1,62, \\ \varphi_1 = -58^\circ 20'.$$

Slično tome izlazi da je

$$Z_3 = 11,7 \Omega, \quad \varphi_3 = -28^\circ 20';$$

$$Z_5 = 10,5 \Omega, \quad \varphi_5 = -17^\circ 40';$$

$$Z_7 = 10,3 \Omega, \quad \varphi_7 = -13^\circ;$$

$$I_{1m} = \frac{127}{19} = 6,7 \text{ A}, \quad I_{3m} = \frac{42,5}{11,7} = 3,65 \text{ A},$$

$$I_{5m} = \frac{25,5}{10,5} = 2,42 \text{ A}, \quad I_{7m} = \frac{18,2}{10,3} = 1,77 \text{ A}.$$

Dobiva se

$$i = 6,7 \sin(\omega t + 58^\circ 20') + 3,65 \sin(3\omega t + 28^\circ 20') + 2,42 \sin(5\omega t + 17^\circ 40') + 1,77 \sin(7\omega t + 13^\circ).$$

2. Amplitudni i fazni spektar struje prikazan je na sl. 7.20.b.

7.21. 1.  $i = 81 \cdot 10^{-3} \sin \omega t - 9 \cdot 10^{-3} \sin 3\omega t + 3,2 \cdot 10^{-3} \sin 5\omega t - 1,7 \cdot 10^{-3} \sin 7\omega t + 10^{-3} \sin 9\omega t$ ;

2.a)  $I = 58 \text{ mA}$ , 2. b)  $I = I_m / \sqrt{2} = 57,8 \text{ mA}$ ;

3.  $\sigma = \sqrt{3}$ ,  $D = 0,12$



7.22. 1.  $U_{sr} = 60 \text{ V}$ ,  $U = 77,5 \text{ V}$ ;

2.  $\sigma = 1,29$ ,  $\xi = 1,29$

7.23. 1.  $U_{sr} = 18 \text{ V}$ ,  $U = 19,6 \text{ V}$ ;

2.  $\xi = 1,09$ ,  $\sigma = 1,23$

7.24. Treba uzeti da je otpor diode u propusnom smjeru jednak nuli, a da je u nepropusnome jednak beskonačnom.

1.  $U_m = 180 \text{ V}$ ; 2.  $U_c = 127 \text{ V}$

7.25. a)  $I = I_m$ , b)  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ , c)  $I = \frac{I_m}{\sqrt{3}}$ ; 2. a)  $5,66 \text{ A}$ , b)  $6,93 \text{ A}$

7.26.  $I_{sr} = 0,5 \text{ A}$ ,  $I = 7,07 \text{ A}$

7.27. Otpor diode (ispravljača) u propusnom smjeru uzmite da je jednak nuli, a u nepropusnome beskonačan.

1.  $U = 126 \text{ V}$ ,  $I = 10,6 \text{ A}$ ,  $P = 1350 \text{ W}$ ;

2.  $u = 114,5 + 76,5 \sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + 15,3 \sin\left(4\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + 6,6 \sin\left(6\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ ;

3.  $i = 9,6 + 6,47 \sin\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + 1,28 \sin\left(4\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + 0,55 \sin\left(6\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ ;  $\omega = 2\pi f = 314 \text{ s}^{-1}$ ;

4.  $U = 127 \text{ V}$ ,  $I = 10,6 \text{ A}$

7.28. 1. Broj harmonika, za koji se mreža nalazi u stanju rezonancije određuje se iz uvjeta rezonancije napona za harmonik reda  $k$ :

$$k\omega L = \frac{1}{k\omega C}$$

Odatle je  $k = \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} = \frac{1}{314 \sqrt{0,225 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}} = 3$ .

2. Srednja vrijednost snage pojedinih harmonika i snaga mreže određuje se prema formulama

$$P_k = RI_k^2, P = \sum_k P_k = R(I_1^2 + I_3^2 + I_5^2) = RI^2.$$

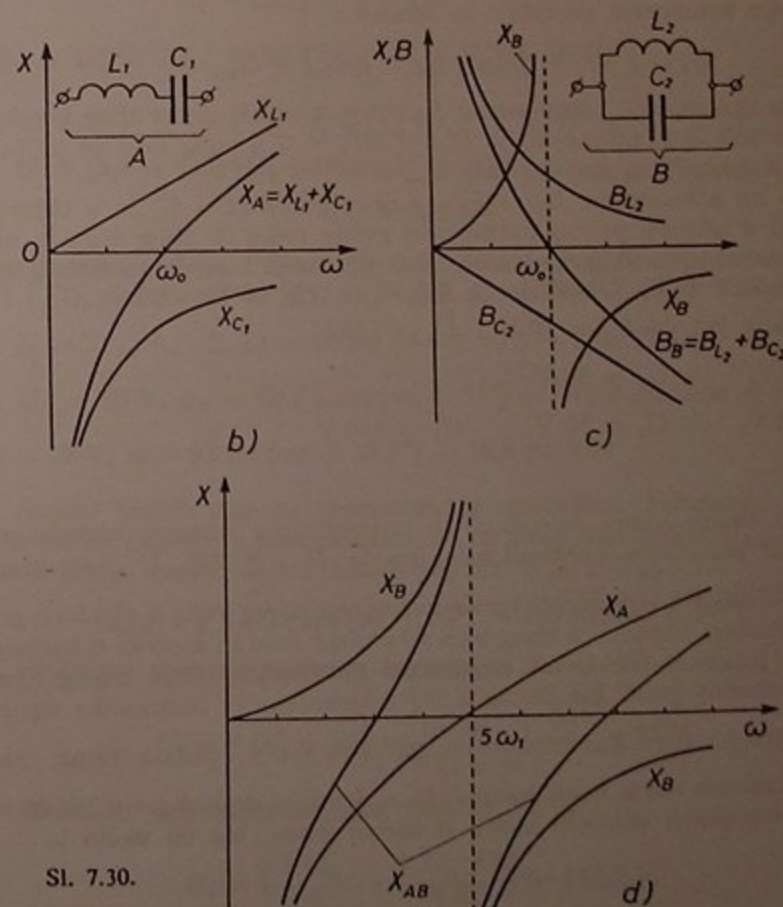
Rezultati računanja svrstani su u tabl. 7.28.

Tablica 7.28.

$k$	$R$	$X_{Lk} = k\omega L$	$X_{Ck} = \frac{1}{k\omega C}$	$X_k = X_{Lk} - X_{Ck}$	$Z_k = \sqrt{R^2 + X_k^2}$	$U_{km}$	$U_k = \frac{U_{km}}{\sqrt{2}}$	$I_k = \frac{U_k}{Z_k}$	$P_k$	$P = \sum_k P_k$
1	10	71	639	-568	568	120	85	0,15	0,22	
3	10	212	212	0	10	40	28,3	2,83	80,0	80,3
5	10	355	128	+227	227	24	17	0,075	0,06	

7.29. Struja drugog harmonika prethodi naponu drugog harmonika, a struja petog harmonika zaostaje za naponom petog harmonika.

7.30. 1. Frekvencijske karakteristike otpora dijelova A i B te filtra u cjelini prikazane su (kvalitativno) na sl. 7.30.b – d.



Sl. 7.30.



2. Filtar neće propuštati peti harmonik struje ako njegov otpor za taj harmonik bude beskonačan.

Znači da paralelni dio filtra (sl. 7.30.a) mora biti ugođen na rezonanciju za harmonik petog reda (strujna rezonancija), tj.  $5\omega C_2 = \frac{1}{5\omega L_2}$ ,

pa je

$$C_2 = \frac{1}{25\omega^2 L_2} = 1 \mu F.$$

Filtar neće pružati otpor harmoniku trećeg reda ako otpor za taj harmonik bude jednak nuli.

Zbog toga čitav filter mora biti prilagođen rezonantnoj frekvenciji za harmonike trećeg reda (naponska rezonancija), dakle je

$$X_{L_1} = 3\omega L_1 - \frac{1}{3\omega C_1} + \frac{3\omega L_2 \left( -\frac{1}{3\omega C_2} \right)}{3\omega L_2 - \frac{1}{3\omega C_2}} = 0.$$

Odakle je  $C_1 = 1,1 \mu F$ .

### 7.33. Pokazivanja voltmetara određuje se izrazima

$$U_a = \sqrt{U_{a0}^2 + U_{a1}^2}, \quad U_b = \sqrt{U_{b0}^2 + U_{b1}^2}.$$

Budući da istosmjerne komponente  $I_0$  struje u mreži nema zbog kondenzatora u paralelnim granama, to je  $U_{a0} = RI_0 = 0$ , i zbog toga će na osnovi drugoga Kirchhoffova zakona biti  $U_{b0} = U_0 = 150 \text{ V}$ .

Prelazimo na određivanje  $U_{a1}$  i  $U_{b1}$ . Lijeva grana ( $L$  i  $C$ ) je u naponskoj rezonanciji u odnosu prema harmoniku prvog reda, i zbog toga je njezin otpor za prvi harmonik jednak nuli. To znači da je i otpor paralelnog dijela također jednak nuli. Izlazi da je  $U_{b1} = 0$ ,  $U_{a1} = U = 50 \text{ V}$ .

Na taj način bit će  $U_a = 50 \text{ V}$  i  $U_b = 150 \text{ V}$ .

7.34.  $U_1 = 100 \text{ V}, \quad U_2 = 50 \text{ V}$

7.35.  $U = 111,5 \text{ V}, \quad U_1 = 50 \text{ V}, \quad U_2 = 110 \text{ V}$

7.36.  $I = 5 \text{ A}$

7.37. 1. Ukupna radna snaga određuje se aritmetičkom sumom radnih snaga izazvanih pojedinim harmonicima, pa je  $P = \sum_k RI_k^2$ . U razmatranom

slučaju efektivne vrijednosti struja harmonika prvog reda u obadvije grane su međusobno jednaki, a zbog toga su i snage koje su izazvali ti harmonici također jednake. Efektivne vrijednosti harmonika struje trećeg i petog reda u desnoj grani bit će veće od odgovarajućih harmonika struje u lijevoj grani jer je  $k\omega L > \frac{1}{k\omega C}$  za  $k = 3$  i  $5$ . Slično tome, radne snage izazvane višim harmonicima ( $k = 3$  i  $5$ ) u desnoj grani bit će veće od odgovarajućih aktivnih snaga u lijevoj grani. Na taj način je

$$P_A < P_B.$$

2. Za određivanje snaga koje se troše u pojedinim granama mreže neophodno je odrediti struje tih grana.

U tabli. 7.37. su rezultati proračuna.

Tablica 7.37.

$k$	$R_A = R_0$ [Ω]	$X_{L_A} = k\omega L$ [Ω]	$X_{C_A} = \frac{1}{k\omega C}$ [Ω]	$Z_A = \sqrt{R_A^2 + X_{L_A}^2}$ [Ω]	$Z_B = \sqrt{R_B^2 + X_{C_B}^2}$ [Ω]	$U_k = \frac{U_{k0}}{\sqrt{2}}$ [V]	$I_{A_k} = \frac{U_k}{Z_A}$ [A]	$I_{B_k} = \frac{U_k}{Z_B}$ [A]	$P_{A_k} = I_{A_k}^2 R_A$ [W]	$P_{B_k} = I_{B_k}^2 R_B$ [W]
1	4	3	3	5	5	71	14,2	14,2	807	807
3	4	9	1	9,85	4,12	42,6	4,3	10,3	74	425
5	4	15	0,6	15,5	4,05	14,2	0,9	3,5	3,2	49
							suma		884,2	1 281

7.38. 1.  $U = 173 \text{ V}, \quad I = 40 \text{ A}, \quad U_R = 100 \text{ V},$

$$U_{C_1} = 110 \text{ V}, \quad U_{C_2} = 110 \text{ V}, \quad I_C = 56 \text{ A},$$

$$I_C = 33,7 \text{ A}; \quad 2. \quad i = 40 \sqrt{2} \sin \omega t$$

7.39.  $I_A = 4,12 \text{ A}, \quad I_B = 3,24 \text{ A}, \quad I_C = 5,4 \text{ A}$

7.40.  $P = 45 \text{ W}$

7.41. 1.  $U = 96 \text{ V}, \quad I_1 = 7,07 \text{ A}, \quad I_2 = 10 \text{ A},$

$$I_3 = 33,5 \text{ A}, \quad I_4 = 32 \text{ A}; \quad 2. \quad P = 1 \text{ kW}.$$

7.42.  $I_A = 4,45 \text{ A}$

7.43.  $U_1 = 100 \text{ V}, \quad U_2 = 16 \text{ V}, \quad I_1 = 12,8 \text{ A}, \quad I_2 = 0, \quad P = 984 \text{ W}$

7.44. Efektivne vrijednosti struja  $I_1$  i  $I_2$  (pokazivanja ampermetara) određuju se iz izraza

$$I_1 = \sqrt{I_{10}^2 + I_{11}^2}, \quad I_2 = \sqrt{I_{20}^2 + I_{21}^2},$$

gdje su  $I_{10}$  i  $I_{20}$  istosmjerne komponente a  $I_{11}$  i  $I_{21}$  efektivne vrijednosti harmonika prvog reda struja  $I_1$  i  $I_2$ .

Istosmjerna komponenta struje u sekundaru ne postoji ( $I_{20} = 0$ ), a istosmjerna komponenta struje u primaru je

$$I_{10} = \frac{U_{10}}{R_1} = \frac{60}{6} = 10 \text{ A}.$$



Efektivne vrijednosti harmonika struje prvog reda određuju se iz sustava jednačbi sastavljenih za obje konture:

$$(R_1 + j\omega L_1)I_{11} + j\omega M I_{21} + \dot{U}_{11} = 0$$

$$j\omega M I_{11} + (R_2 + j\omega L_2)I_{21} = 0.$$

Riješimo li te jednačbe po  $I_{11}$  i  $I_{21}$ , dobivamo da je

$$I_{11} = \frac{(R_2 + j\omega L_2)\dot{U}_{11}}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + (\omega M)^2},$$

$$I_{21} = \frac{-j\omega M \dot{U}_{11}}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + (\omega M)^2},$$

gdje je  $\omega L_1 = \omega L_2 = 2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 8 \Omega$ ,

$$\omega M = 2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 2 \Omega.$$

Uzevši  $\dot{U}_{11} = U_{11} = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}} = 80 \text{ V}$  bit će

$$I_{11} = \frac{(6 + j8) 80}{(6 + j8)(6 + j8) + 2^2} = 5,1 - j6,27 \text{ A}, \quad I_{11} = \sqrt{5,1^2 + 6,27^2} = 8,1 \text{ A},$$

$$I_{21} = \frac{-j2 \cdot 80}{(6 + j8)(6 + j8) + 2^2} = -1,57 + j0,39 \text{ A},$$

$$I_{21} = \sqrt{1,57^2 + 0,39^2} = 1,6 \text{ A}.$$

Zatim izračunavamo struje

$$I_1 = \sqrt{10^2 + 8,1^2} = 12,8 \text{ A}, \quad I_2 = \sqrt{0^2 + 1,6^2} = 1,6 \text{ A}.$$

Pokazivanje voltmetra  $V_1$  je

$$U_1 = \sqrt{U_{10}^2 + U_{11}^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100 \text{ V}.$$

Voltmetar  $V_2$  pokazuje nulu jer je  $U_2 = 0$  (kratko spojeni transformator).  
Pokazivanje vatmetra je

$$P = U_{10} I_{10} + \operatorname{Re} \{ \dot{U}_{11} I_{11}^* \} =$$

$$= 60 \cdot 10 + \operatorname{Re} \{ 80 (5,1 + j, 6, 27) \} = 600 + 408 = 1008 \text{ W}.$$

$$7.45. U_1 = 141 \text{ V}, \quad I = 16,4 \text{ A}, \quad U_{L1} = 27,4 \text{ V},$$

$$U_{L2} = 0, \quad U_{L4} = 57 \text{ V}$$

$$7.46. I = 7,07 \text{ A}$$

$$7.47. U = 104 \text{ V}$$

$$7.48. U = 74,3 \text{ V}$$

7.49. Efektivne vrijednosti struje u nerazgranatom dijelu mreže i napon priključen na mrežu određuju se iz izraza

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_5^2} \quad (1)$$

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_5^2} \quad (2)$$

Računat ćemo za svaki harmonik ( $k = 1$  i  $k = 5$ ) pojedinačno dakle  $I_1 = I_{C1} + I_{R1}$ , uzevši da je  $I_{C1} = I_{C1} = 2 \text{ A}$ .

$$\text{Tada je } I_{R1} = \frac{\dot{U}'_1}{R} = \frac{10 - j100}{5} = 2 - j20,$$

gdje je  $\dot{U}'_1 = (R_C - jX_{C1}) I_{C1} = (5 - j50) 2 = 10 - j100$ ,  
a odatle  $I_1 = 4 - j20$ ,  $I_1 = 20,4 \text{ A}$ ,

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + (R_L + jX_{L1}) I_1 = 130,4 - j181,9, \quad U_1 = 224 \text{ V}.$$

Slično tome bit će  $I_5 = I_{C5} + I_{R5}$ , uzevši da je  $I_{R5} = I_{R5} = 10$ .

$$\text{Tada je } I_{C5} = \frac{\dot{U}'_5}{R_C - jX_{C5}} = \frac{50}{5 - j10} = 2 + j4,$$

$$\text{gdje je } \dot{U}'_5 = R I_{R5} = 50 \text{ i } X_{C5} = \frac{1}{5} X_{C1} = 10 \Omega,$$

$$\text{pa će biti } I_5 = 12 + j4, \quad I_5 = 12,7 \text{ A}, \quad \dot{U}_5 = \dot{U}'_5 + (R_L + jX_{L5}) I_5 =$$

$$= 50 + (5,1 + j25) (12 + j4) = 11 + j320,4.$$

$$U_5 \approx 320,4 \text{ V}.$$

Zamijenivši nađene vrijednosti harmonika struje i napona u formulama (1) i (2), dobivamo da je  $I = 24 \text{ A}$  i  $U = 390 \text{ V}$ .

$$7.50. 1. I_C = 15,2 \text{ A}; \quad 2. i_C = 20 \sin(\omega t + 45^\circ) + 8 \sin(2\omega t - 45^\circ)$$

$$7.51. 1. U_C = 50 \text{ V}, \quad u_C = 40 \sqrt{2} \sin(\omega t + 53^\circ) + 30 \sqrt{2} \sin(2\omega t - 90^\circ)$$

$$7.52. U = 78 \text{ V}, \quad u = 95 \sin(\omega t + 26,5^\circ) + 56,6 \sin 2\omega t$$

7.53. 1. Sustav faznih napona generatora je simetričan. Harmonici trećeg reda u linijskim naponima nisu prisutni, pa će zbog toga napon  $U_{AB}$  biti određen samo prvim harmonicima faznih napona  $U_{AO}$  i  $U_{BO}$ .

$$u_{AB} = \sqrt{3} 120 \sin(\omega t + 30^\circ) = 208 \sin(\omega t + 30^\circ).$$

2. Efektivna vrijednost faznog napona je

$$U_f = \sqrt{U_{f1}^2 + U_{f2}^2} = \sqrt{\frac{120^2 + 50^2}{2}} = 92 \text{ V}.$$

Efektivna vrijednost linijskog napona bit će

$$U_l = \frac{\sqrt{3} U_f}{\sqrt{2}} = \frac{1,73 \cdot 120}{1,41} = 147,2 \text{ V}.$$