

Postupci rješavanja el. mreža (mreže istosmjerne struje)

(obradio prof.dr.sc. Armin Pavić)

Značajke strukture električnih mreža

- ♦ **Topologija:** opisuje konfiguraciju, tj. položaj i način povezanosti elemenata električne mreže
- ♦ Osnovni pojmovi iz topologije el. mreža:
 - **Grana:** dio mreže kroz koji teče ista struja.
 - **Čvor:** mjesto (točka) gdje se sastaju tri ili više grana
 - **Petlja:** zatvoreni put po granama mreže
 - **Zatvoreni put** = put po granama mreže koji kreće iz jednog čvora te (ne prolazeći niti jedan čvor mreže više od jednom) završava u polaznom čvoru
 - **Skup nezavisnih petlji:** skup petlji koje se *međusobno razlikuju za barem jednu granu*
 - prikažemo li mrežu u jednoj ravnini, nezavisne petlje se ocrtavaju kao okna (konture) u tako plošno nacrtanoj mreži. Stoga se *nezavisne petlje* još nazivaju i **konture**.

Opis mreže jednadžbama Kirchhoffovih zakona

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Električna mreža koja ima:
 - g grana,
 - \check{c} čvorova i
 - n nezavisnih petlji,može se opisati sustavom od $g=n+\check{c}-1$ nezavisnih jednadžbi, od kojih je
 - n jednadžbi Kirchhoffovog zakona za napone (KZN) i
 - $\check{c}-1$ jednadžbi Kirchhoffovog zakona za struje (KZS).
- Vrijednosti otpora te značajke izvora mreže su parametri ovog sustava jednadžbi, rješavanjem kojega se dobivaju nepoznate struje svih grana (elemenata) električne mreže.

3

Metoda potencijala (napona) čvorova

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Ako se (u n jednadžbi KZN) struje grana iskažu pomoću napona grana (izraženih kao razlike potencijala čvorova) te se uvrste u jednadžbe KZS, dobiva se sustav od $\check{c}-1$ jednadžbi u kojem su nepoznanice potencijali $\check{c}-1$ čvorova (za jedan (referentni) čvor pretpostavi se da je $\varphi=0$).
- ♦ Dobiveni sustav jednadžbi opisuje zadanu mrežu jednako dobro kao i izvorni sustav Kirchhoffovih jednadžbi, ali je jednostavniji za rješavanje, jer ima manji broj (samo $\check{c}-1$ umjesto g) jednadžbi.
- ♦ Iz izračunatih napona grana (kao razlika potencijala čvorova) mogu se potom izračunati struje svih grana, a ovaj postupak rješavanja električnih mreža naziva se *metoda potencijala (ili napona) čvorova*.

4

Postupak primjene metode potencijala čvorova

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



1. Jedan čvor odabere se za referentan (s potencijalom $\varphi=0$).
2. Za svaki od ostalih **č-1** čvorova napiše se jednačžba oblika:

$$\varphi_i \sum G_i - \varphi_j \sum G_{ij} - \varphi_k \sum G_{ik} - \dots - \varphi_n \sum G_{in} = \sum_{\text{alg}} I_{ks}$$

gdje je: φ_i - potencijal čvora za koji se piše jednačžba;

$\varphi_j, \varphi_k, \dots, \varphi_n$ - potencijali (susjednih) čvorova koji s i-tim čvorom imaju (barem jednu) zajedničku granu;

G_i - vodljivosti svih grana koje dolaze u i-ti čvor;

G_{ij} - vodljivost (zajedničke) grane između i-tog i j-tog čvora;

I_{ks} - struje kratkog spoja svih (aktivnih) grana koje dolaze u i-ti čvor.

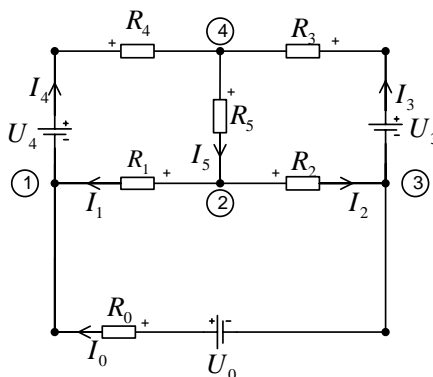
Aktivne grane su one s izvorima. Struja kratkog spoja grane dobiva predznak "+" ako bi tekla u čvor, a predznak "-" ako bi tekla iz čvora.

3. Riješi se sustav jednačžbi te se odrede potencijali čvorova. Iz razlika potencijala (naponi grana) mogu se potom izračunati struje svih grana mreže.

5

Postavljanje jednačžbi potencijala čvorova

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Sl. 10.1

Za mrežu sa sl. 10.1, uz izbor četvrtoga čvora kao referentnog ($\varphi_4 = 0$), jednačžbe potencijala čvorova su:

6

Postavljanje jednačbi potencijala čvorova (2)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$+\varphi_1 \cdot (G_0 + G_1 + G_4) - \varphi_2 \cdot G_1 - \varphi_3 \cdot G_0 = +U_0 \cdot G_0 - U_4 \cdot G_4 \quad (\text{čvor 1})$$

$$-\varphi_1 \cdot G_1 + \varphi_2 \cdot (G_1 + G_2 + G_5) - \varphi_3 \cdot G_2 = 0 \quad (\text{čvor 2})$$

$$-\varphi_1 \cdot G_0 - \varphi_2 \cdot G_2 + \varphi_3 \cdot (G_0 + G_2 + G_3) = -U_0 \cdot G_0 - U_3 \cdot G_3 \quad (\text{čvor 3})$$

Gdje je: $G_i = 1/R_i, i = 0, 1, \dots, 5$

vodljivost odgovarajuće grane.

7

Svojstva jednačbi potencijala čvorova

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Napišu li se jednačbe potencijala čvorova za mrežu sa sl. 10.1 u matričnom obliku, dobiva se:

$$\begin{bmatrix} (G_0 + G_1 + G_4) & -G_1 & -G_0 \\ -G_1 & (G_1 + G_2 + G_5) & -G_2 \\ -G_0 & -G_2 & (G_0 + G_2 + G_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 G_0 - U_4 G_4 \\ 0 \\ -U_0 G_0 - U_3 G_3 \end{bmatrix}$$

Matrica vodljivosti \underline{G} je **dijagonalno simetrična matrica**, te njezina simetričnost služi za provjeru je li sustav jednačbi korektno napisan za neku mrežu. Jasno je da se ovdje radi samo o **formalnoj provjeri**, jer suštinska mora voditi računa o svim elementima mreže.

8

Zadatak 1. (izvod jednadžbi potencijala čvorova)

Pretvorite naponske modele realnih izvora u odgovarajućim granama mreže sa sl. 10.1 u strujne modele izvora, izrazite struje u svim pasivnim granama mreže kao omjer razlike potencijala između čvorova grane i otpora grane, napišite za novodobivenu mrežu jednadžbe KZS za čvorove 1, 2 i 3, uredite dobivene jednadžbe tako da grupirate koeficijente uz nepoznanice φ_1 , φ_2 i φ_3 , sve poznanice prebacite na desnu stranu, te pogledajte što ste dobili.

Zadatak 2.

Napišite jednadžbe potencijala čvorova za mrežu sa sl. 10.1 uzimajući za referentni čvor (čvor s potencijalom 0):

1. čvor 1;
2. čvor 2;
3. čvor 3.

Riješite dobivene sustave jednadžbi, uz pomoć dobivenih rješenja izračunajte struje I_0, \dots, I_5 , te na koncu usporedite izraze za struje koje ste putem tri neovisna postupka dobili.

Zadatak 3.

Zamijenite jedan od naponskih izvora (U_0 , U_3 ili U_4) u mreži sa sl. 10.1 sa strujnim izvorom (I_0 , I_3 , ili I_4).

- ♦ Kako sada glase jednačbe potencijala čvorova?
- ♦ Što vam je izazivalo poteškoće u njihovom pisanju?
- ♦ Je li matrica vodljivosti i dalje simetrična?

Zadatak 4.

Neka je $R_0=0$ i neka su svi ostali aktivni i pasivni elementi iz mreže sa sl. 10.1 parametri različiti od nule. Napišite sada jednačbe potencijala čvorova uzimajući:

1. čvor 4 za referentni čvor;
2. čvor 1 za referentni čvor.

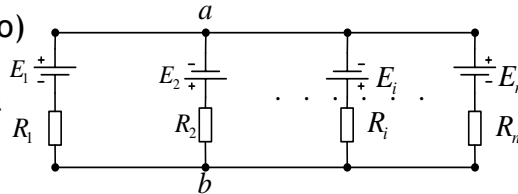
S kojim ste se poteškoćama sada susreli?

Millmanov teorem

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Mrežu s dva čvora (desno) opisali bi samo jednom jednačbom potencijala čvorova. Uz $\varphi_b=0$, je



$$\varphi_a \sum_{alg} G = \sum_{alg} I_{ks} \quad \text{gdje su } G \text{ vodljivosti grana, a } I_{ks} \text{ su struje kratkog spoja aktivnih grana.}$$

- Kako je $\varphi_b=0$, $\varphi_a = U_{ab}$, pa se napon U_{ab} može izračunati kao

$$U_{ab} = \frac{\sum_{alg} I_{ks}}{\sum G}$$

- Ovaj izraz poznat je kao *Millmanov teorem*.

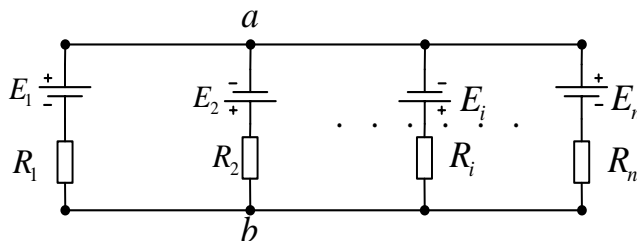
13

Millmanov teorem - dokaz (1)*

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Tvrđnja: U el. krugovima s dva čvora, **a** i **b**, napon **U_{ab}** određuje se tako da se algebarski zbroj struja svih strujnih izvora u čvoru **a** podijeli sa zbrojem vodljivosti svih grana između **a** i **b**.



Sl. 10.2

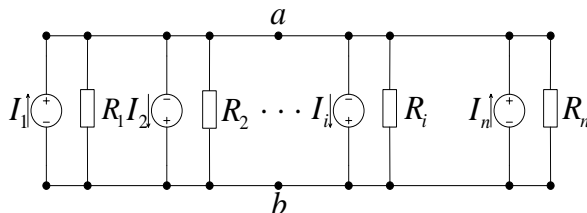
14

Millmanov teorem - dokaz (2)*

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Dokaz: Izravna posljedica metode potencijala čvorova kada je $\check{c} = 2$, ili pretvorbom naponskih u strujne izvore (sl. 10.2 vs. sl. 10.3).



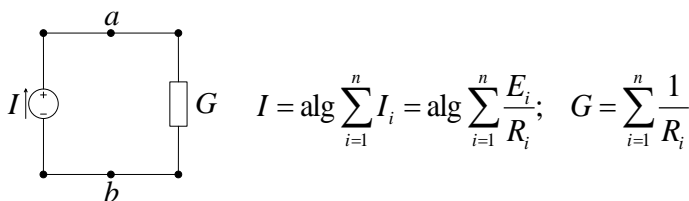
Sl. 10.3

$$I_i = \frac{E_i}{R_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

15

Millmanov teorem - dokaz (3)*

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Sl. 10.4

$$I = \text{alg} \sum_{i=1}^n I_i = \text{alg} \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{R_i}; \quad G = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

$$U_{ab} = \frac{I}{G} = \frac{\text{alg} \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}, \quad \text{što je i trebalo dokazati.}$$

16

Postupci za analizu (izračun) cjelokupne mreže

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Kao što je u metodi potencijala čvorova, uvrštavanjem jednađžbi KZN u jednađžbe KZS, smanjen broj jednađžbi potreban za rješavanje mreže, slično bi, uvrštavanjem jednađžbi KZS u jednađžbe KZN, umjesto g jednađžbi dobili sustav od samo n jednađžbi u kojem su nepoznanice struje grana koje pripadaju samo jednoj od n nezavisnih petlji (kontura) mreže. Postupak rješavanja mreže tim sustavom jednađžbi naziva se *metoda konturnih struja*.
- ♦ Metodu konturnih struja nećemo ovdje bliže proučavati, a spominjemo je stoga jer se ona, kao i metoda izravne primjene Kirchhoffovih zakona te metoda potencijala čvorova, kao i Millmanov teorem, rabi za izračun struja svih grana, tj. za analizu stanja cjelokupne el. mreže.
- ❖ Vrijedi li to i za metodu superpozicije?

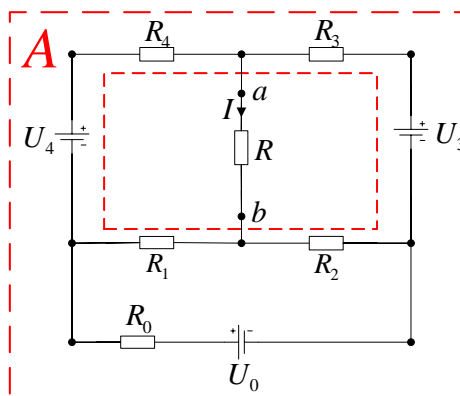
17

El. mreža s gledišta jednog elementa

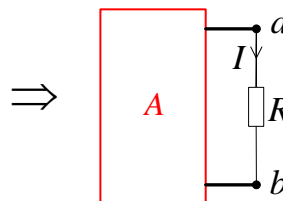
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Zanima li nas *stanje samo jednog elementa el. mreže*, (npr. otpor R između točaka a i b u mreži na slici), ostatak mreže možemo razmatrati kao “crnu kutiju”, na slici označenu sa A .



A - aktivna linearna mreža



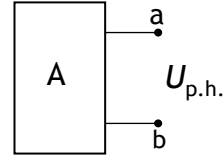
18

Aktivna linearna mreža (s 2 točke) \equiv realni izvor

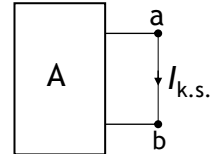
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Odspojimo li otpor R , između točaka a i b je neki napon $U_{ab(p.h.)} = \text{napon praznog hoda}$



- ♦ Zamijenimo li otpor R kratkim spojem, kroz kratki spoj između točaka a i b teče struja $I_{ab(k.s.)} = \text{struja kratkog spoja}$



- ♦ Aktivna linearna mreža A, gledana s dviju točaka (a i b), ponaša se kao realni izvor!
- ♦ Omjer napona praznog hoda i struje kratkog spoja je **unutarnji otpor mreže** R_{ab}

$$R_{ab} = \frac{U_{p.h.}}{I_{k.s.}}$$

19

Theveninov teorem

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Gledana s dviju priključnih točaka nekog elementa, aktivna linearna mreža može se nadomjestiti **naponskim modelom realnog izvora** (Thevenenov izvor) s parametrima E_T i R_T .
- ♦ Elektromotorna sila Thevenenovog nadomjesnog izvora (E_T -Thevenenov napon) jednaka je **naponu praznog hoda** između tih dviju točaka.
- ♦ Unutarnji otpor Thevenenovog nadomjesnog izvora (R_T -Thevenenov otpor) jednak je **ukupnom otporu mreže** između tih dviju točaka.

20

Postupak primjene Theveninovog teorema



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ Označe se priključne točke (npr. a i b) elementa mreže za koji hoćemo odrediti struju (ili napon) te se taj element odspoji iz mreže (prazni hod između točaka a i b).
- ♦ Odredi se napon praznog hoda $U_{ab(p.h.)}$ (ostatka mreže) čime je određen Thevenenov napon: $U_T = U_{ab(p.h.)}$.
- ♦ Odredi se ukupni otpor ostatka mreže između točaka a i b $R_{ab(p.h.)}$ tako da se umrtve (ugase) svi izvori, čime je određen Thevenenov otpor $R_T = R_{ab(p.h.)}$.
- ♦ Ostatak mreže prikaže se Thevenenovim izvorom, na koji se spoji prethodno iz mreže odspojeni element te se odredi njegova struja ili napon.

21

Theveninov teorem - dokaz (1)*



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ Tvrdnja:

Struja kroz bilo koju granu $a-b$ el. kruga (mreže), gdje se između točaka a i b nalazi otpor R , određuje se tako da se preostali dio kruga zamijeni ekvivalentnim naponskim izvorom.

Elektromotorna sila ekvivalentnog izvora (E_T) jednaka je naponu koji vlada na krajevima grane $a-b$ kada je ona otvorena.

Unutarnji otpor ekvivalentnog izvora (R_T) jednak je ukupnom otporu pasivnoga kruga promatranog s otvorenih krajeva a i b . Pasivni krug nastaje od el. kruga (mreže) gašenjem izvora.

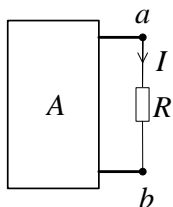
22

Theveninov teorem - dokaz (2)*

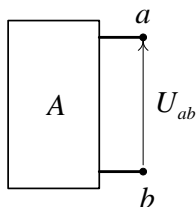
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



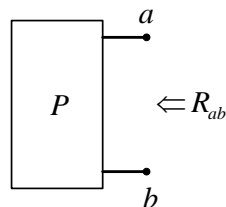
Dokaz:



Sl. 10.6a



Sl. 10.6b



Sl. 10.6c

Na sl. 10.6a i sl. 10.6b **A** je aktivni krug. Sl. 10.6c predstavlja pasivni krug **P**, dobiven gašenjem izvora u **A**.

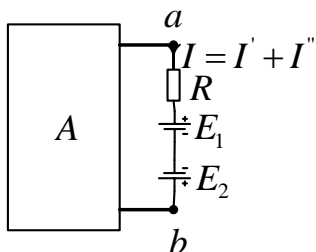
23

Theveninov teorem - dokaz (3)*

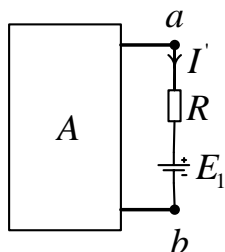
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



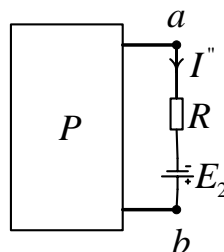
Uzmimo dva naponska izvora E_1 i E_2 , $E_1 = E_2 = U_{ab}$, i spojimo ih u granu $a-b$ kako to pokazuje sl. 10.2a.



Sl. 10.7a



Sl. 10.7b



Sl. 10.7c

Primijenimo načelo superpozicije na način da ugasimo E_2 i ostavimo E_1 i sve izvore u aktivnom krugu **A**. Tada kroz R teče struja I' koja je, jer je $E_1 = U_{ab}$, jednaka 0 (sl. 10.7b).

24

Theveninov teorem - dokaz (4)*

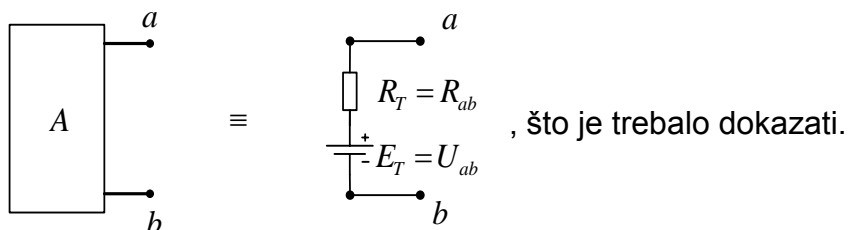
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



U drugom koraku superpozicije (sl. 10.7c) ugasimo sve izvore u A i E_1 , a ostavimo aktivnim samo E_2 . Sada kroz granu a-b teče struja I'' . Kako je $I = I' + I''$, $I' = 0$, slijedi da je

$$I = I'' = \frac{E_2}{R + R_{ab}}$$

Iz svega slijedi da je



25

Nortonov teorem

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Gledana s dviju priključnih točaka nekog elementa, aktivna linearna mreža može se nadomjestiti *strujnim modelom realnog izvora* (Nortonov izvor) s parametrima I_N i R_N .
- ♦ Struja Nortonovog nadomjesnog izvora (I_N - Nortonova struja) jednaka je *struji kratkog spoja* između tih točaka.
- ♦ Unutarnji otpor Nortonovog nadomjesnog izvora (R_N - Nortonov otpor) jednak je *ukupnom otporu mreže* između tih dviju točaka.

26

Postupak primjene Nortonovog teorema

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Označe se priključne točke (npr. a i b) elementa mreže za koji hoćemo odrediti struju (ili napon) te se taj element odspoji, a njegove priključne točke (a i b) se kratko spoje.
- ♦ Odredi se struja tog kratkog spoja $I_{ab(k.s.)}$ čime je određena Nortonova struja: $I_N = I_{ab(k.s.)}$.
- ♦ Odspoji se kratki spoj te se odredi ukupni otpor ostatka mreže između točaka a i b $R_{ab(p.h.)}$, tako da se umrtve svi izvori, čime je određen Nortonov otpor $R_N = R_{ab(p.h.)} (=R_T!)$.
- ♦ Ostatak mreže prikaže se Nortonovim izvorom, na koji se spoji prethodno iz mreže odspojeni element te se odredi njegova struja ili napon.

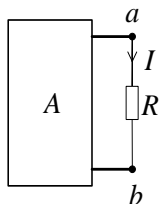
27

Nortonov teorem - dokaz (1)*

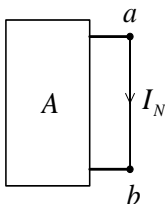
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



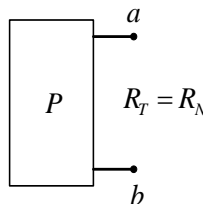
- ♦ Tvrdnja: Struja kroz bilo koju granu **a-b** el. kruga (mreže), gdje se između točaka **a** i **b** nalazi otpor **R**, određuje se tako da se preostali dio kruga zamijeni ekvivalentnim strujnim izvorom. Struja ekvivalentnog strujnog izvora (I_N) jednaka je struji kroz granu **a-b** kada se ona kratko spoji. Unutarnji otpor ekvivalentnog strujnog izvora (R_N) određuje se na isti način kao i u Theveninovom teoremu (iz čega slijedi da je $R_N = R_T$).



Sl. 10.8a



Sl. 10.8b



Sl. 10.8c

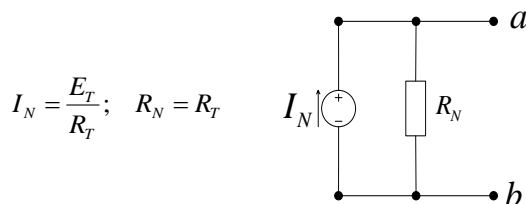
28

Nortonov teorem - dokaz (2)*

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Dokaz: Izravno slijedi iz Theveninova teorema i pretvorbe realnog naponskog u realni strujni izvor.

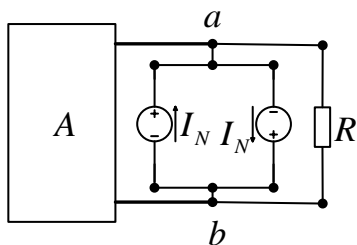


Alternativa je primjena načela superpozicije putem dodavanja dva strujna izvora istog iznosa struja a suprotnog smjera (iznos je I_N) paralelno grani a-b (sl. 10.9).

29

Nortonov teorem - dokaz (3)*

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Sl. 10.9

U istosmjernim el. krugovima Theneninov i Nortonov teorem su ekvivalentne tvrdnje s različitim nadomjesnim parametrima za aktivnu linearnu mrežu A.

U krugovima izmjenične struje ne postoji u svim slučajevima ekvivalencija ova dva teorema. Naime, postoje izmjenični el. krugovi u kojima se može primijeniti samo jedan od ova dva teorema i to opravdava zašto se formuliraju odvojeno.

30