

Harmonički složeni valni oblici

(uredio prof.dr.sc. Armin Pavić)

Značajke Fourierove (harmoničke) analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Harmonička (Fourierova) analiza obavlja se danas pretežno uz pomoć računala.
- ♦ Sadržaj harmonika pokazuje *stupanj izobličenosti nesinusoidne veličine* (u odnosu na sinusni valni oblik).
- ♦ Harmonička analiza omogućava da se učinci nesinusoidne struje (i napona) u električnom krugu određuju primjenom fazorske metode (na pojedine komponente).
- ♦ Efektivna vrijednost harmonički rastavljene nesinusoidne veličine jednaka je korijenu iz zbroja kvadrata efektivnih vrijednosti svih komponenata:

$$Y_{ef} = \sqrt{Y_{Oef}^2 + Y_{1ef}^2 + Y_{2ef}^2 + \dots + Y_{Nef}^2}$$

Osnovna načela Fourierove analize 1

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Fourierov red

- svaki se periodički valni oblik $y(t)$ može rastaviti na harmoničke komponente (harmonike) u obliku Fourierovog reda:

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

gdje je:

- n – cijeli broj koji označava harmonike ($n = 1, 2, 3, \dots$)
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ kružna frekvencija osnovnog ($n = 1$) harmonika periode T
- $\frac{A_0}{2}$ istosmjerna komponenta – srednja vrijednost $y(t)$
- A_n i B_n Amplitude ili maksimalne vrijednosti (napona ili struje) ili Fourierovi koeficijenti

Navigation icons

3

Osnovna načela Fourierove analize 2

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Efektivne vrijednosti

- A_n i B_n postaju maksimumi struje odnosno napona
- effektivna U_{eff} vrijednost napona $u(t)$ za prvih k komponenti je:

$$U_{eff} = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{1max}^2}{2} + \frac{U_{2max}^2}{2} + \frac{U_{3max}^2}{2} + \dots + \frac{U_{Kmax}^2}{2}}$$
$$U_{eff} = \sqrt{U_0^2 + U_{1eff}^2 + U_{2eff}^2 + U_{3eff}^2 + \dots + U_{keff}^2}$$

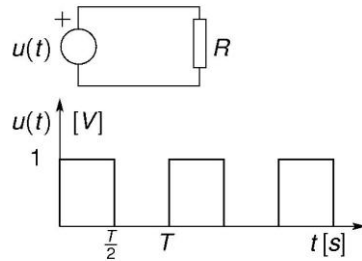
- effektivna I_{eff} vrijednost struje $i(t)$ za prvih k komponenti je:

$$I_{eff} = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{1max}^2}{2} + \frac{I_{2max}^2}{2} + \frac{I_{3max}^2}{2} + \dots + \frac{I_{Kmax}^2}{2}}$$
$$I_{eff} = \sqrt{I_0^2 + I_{1eff}^2 + I_{2eff}^2 + I_{3eff}^2 + \dots + I_{keff}^2}$$

4

Uvodni primjer

Neka je zadan $u(t)$ prema slici. Potrebno je odrediti efektivnu vrijednost i spektar napona $u(t)$ te snagu na otporu $R = 600\Omega$.



- a) bez Fourierove analize—koristeći ranije navedeno
- b) primjenom Fourierovih redova u analizi periodički promijenjivih funkcija

Uvodni primjer—(a)

- od ranije je poznato ($T_i = \frac{T}{2}$):

$$U_{eff} = U_{max} \sqrt{\frac{T_i}{T}} = 0.707V$$

$$P = \frac{U_{eff}^2}{R} = 0.833mW$$

Primjena rezultata Fourierove analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Uvodni primjer–primjenom Fourierove analize

- ... pravokutni napon $u(t)$ prikazujemo u obliku beskonačnog reda kao:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \omega t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{2}{5\pi} \sin 5\omega t + \frac{2}{7\pi} \sin 7\omega t \dots$$

$$u(t) = 0.5 + 0.637 \sin \omega t + 0.212 \sin 3\omega t + 0.127 \sin 5\omega t + 0.091 \sin 7\omega t \dots$$

gdje su:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ kružna frekvencija osnovnog ($n = 1$) harmonika periode T

$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2}$ istosmjerna komponenta – srednja vrijednost napona $u(t)$

Fourierovi koeficijenti:

$$A_n = 0$$

$$B_n = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

Navigation icons

Primjena rezultata Fourierove analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Efektivna vrijednost napona za prvih $k = 20$ harmonika je:

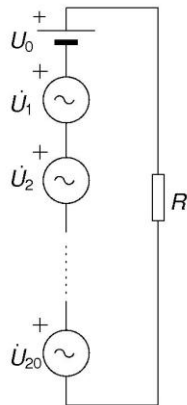
$$U_{eff} = \sqrt{0.5^2 + \frac{1}{2}(0.637^2 + 0.212^2 + 0.127^2 + \dots)} = 0.703518V$$

- Snaga je:

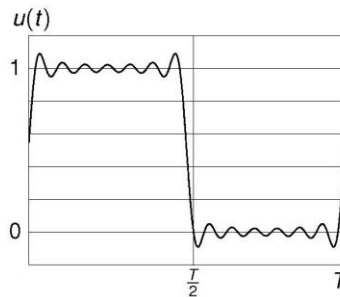
$$P = \frac{U_{eff}^2}{R} = 0.825mW$$

- Rasprava: usporedba rezultata, kako broj harmonika k utječe na točnost ?

Navigation icons

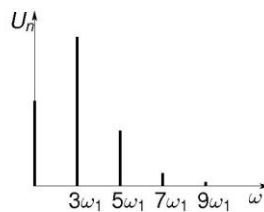


- $u(t)$ predstavljen kao suma istosmjernog i sinusoidnih izvora
- "originalni" pravokutni impuls nadomješten sa prvih 20 harmonika:



Spektar

- o spektar prikazuje doprinose pojedinih frekvencija zadanog valnog oblika $u(t)$



detaljnije simulacije mogu se vidjeti na:

<http://osnove.tel.fer.hr/simupokusi/fourier/nesinusni.htm>

<http://osnove.tel.fer.hr/simupokusi/fourier/primjer-RC.htm>

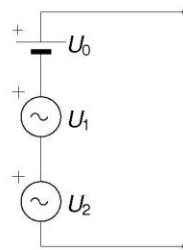
Primjer 1

Nesinusoidalni napon efektivne vrijednosti $U = 200\text{ V}$ može se prikazati u obliku $u(t) = U_0 + U_{m1} \sin \omega t - U_{m3} \sin 3\omega t$. Ako je $U_{m1} = 0.8U_0$, $U_{m3} = 0.5U_0$ izračunajte U_0 !

Rješenje:

$u(t)$ može se prikazati kao serijski spoj tri izvora:

- U_0 za istosmjernu komponentu
- U_1 za kružnu frekvenciju ω
- U_3 za kružnu frekvenciju 3ω



Primjer1 - nastavak

- Efektivnu vrijednost nesinusoidnog napona $u(t)$ računamo kao:

$$U_{eff} = 200 = \sqrt{U_0^2 + U_{1eff}^2 + U_{3eff}^2}$$

- Rješavanjem po U_0 dobija se:

$$U_0 = 166.38\text{ V}$$

Primjena rezultata Fourierove analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

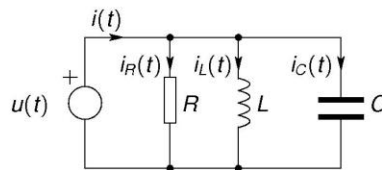


Primjer 2

Za mrežu prema slici odrediti:

- a) efektivnu vrijednost napona izvora $u(t)$
- b) efektivne vrijednosti struja $i_R(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$
- c) $i_R(t)$, $i_L(t)$, $i_C(t)$ u vremenskoj domeni

Zadano: $\omega = 1000 \frac{1}{s}$, $R = 100 \Omega$, $L = 0.1 H$, $C = 10 \mu F$ i
 $u(t) = 100 \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) + 30 \sin(3\omega t) + 10 \sin(5\omega t - \frac{3\pi}{4})$



Navigation icons

13

Primjena rezultata Fourierove analize

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Primjer 2 – nastavak

Rješenje:

a)

$$U_{eff} = \sqrt{U_{1eff}^2 + U_{3eff}^2 + U_{5eff}^2}$$
$$U_{eff} = \sqrt{\left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$U_{eff} = 74.162 V$$

14

Primjer 2 – nastavak

b) za $i_R(t)$ vrijedi:

$$I_{Reff} = \sqrt{I_{R1eff}^2 + I_{R3eff}^2 + I_{R5eff}^2}$$

$$I_{Reff} = \sqrt{\left(\frac{100}{100 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30}{100 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{100 \cdot \sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I_{Reff} = 0.741 A$$

Primjer 2 – nastavak

- za prividni otpor X_L vrijedi $X_L = n \cdot \omega L$ gdje je n broj harmonika
- za $n = 1$ (osnovni harmonik) $\omega L = 100 \Omega$
- $i_L(t)$ je:

$$I_{Leff} = \sqrt{I_{L1eff}^2 + I_{L3eff}^2 + I_{L5eff}^2}$$

$$I_{Leff} = \sqrt{\left(\frac{100}{100 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30}{100 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{100 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I_{Leff} = 0.711 A$$

Primjer 2 – nastavak

- za prividni otpor X_C vrijedi $X_C = \frac{1}{n \cdot \omega C}$ gdje je n broj harmonika
- za $n = 1$ (osnovni harmonik) $\frac{1}{\omega C} = 100\Omega$
- $i_L(t)$ je:

$$I_{Ceff} = \sqrt{I_{C1eff}^2 + I_{C3eff}^2 + I_{C5eff}^2}$$

$$I_{Ceff} = \sqrt{\left(\frac{100}{100 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{30}{100 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{10}{100 \cdot \frac{1}{5} \cdot \sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I_{Ceff} = 1.015A$$

Primjer 2 – nastavak

- $i_R(t), i_L(t), i_C(t)$:

$$i_R(t) = 1 \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{6}) + 0.30 \cdot \sin(3\omega t) + 0.10 \cdot \sin(5\omega t - \frac{3\pi}{4})$$

$$i_L(t) = 1 \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{3}) + 0.10 \cdot \sin(3\omega t - \frac{\pi}{2}) + 0.02 \cdot \sin(5\omega t + \frac{3\pi}{4})$$

$$i_C(t) = 1 \cdot \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3}) + 0.90 \cdot \sin(3\omega t + \frac{\pi}{2}) + 0.50 \cdot \sin(5\omega t - \frac{\pi}{4})$$

- o Za vježbu: nacrtati spektre izračunatih struja i napona !
- o nacrtati vektorske dijagrama za svaku od frekvencija !
- o Rasprava: ovisnost $i_R(t)$, $i_L(t)$ i $i_C(t)$ o frekvenciji
- o Rasprava: postoji li rezonancija ?