

# Postupci rješavanja el. mreža (mreže istosmjerne struje)

(obradio prof.dr.sc. Armin Pavić)

## Značajke strukture električnih mreža

- ♦ **Topologija:** opisuje konfiguraciju, tj. položaj i način povezanosti elemenata električne mreže
- ♦ Osnovni pojmovi iz topologije el. mreža:
  - **Grana:** dio mreže kroz koji teče ista struja.
  - **Čvor:** mjesto (točka) gdje se sastaju tri ili više grana
  - **Petlja:** zatvoreni put po granama mreže
    - **Zatvoreni put** = put po granama mreže koji kreće iz jednog čvora te (ne prolazeći niti jedan čvor mreže više od jednom) završava u polaznom čvoru
  - **Skup nezavisnih petlji:** skup petlji koje se *međusobno razlikuju za barem jednu granu*
    - prikažemo li mrežu u jednoj ravnini, nezavisne petlje se ocrtavaju kao okna (konture) u tako plošno nacrtanoj mreži. Stoga se *nezavisne petlje* još nazivaju i **konture**.

## Opis mreže jednađbama Kirchhoffovih zakona

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Električna mreža koja ima:

$g$  grana,

$\check{c}$  čvorova i

$n$  nezavisnih petlji,

može se opisati sustavom od  $g=n+\check{c}-1$  nezavisnih jednađbi, od kojih je

$n$  jednađbi Kirchhoffovog zakona za napone (KZN) i

$\check{c}-1$  jednađbi Kirchhoffovog zakona za struje (KZS).

- Veličine otpora i izvora mreže su parametri ovog sustava jednađbi, rješavanjem kojega se dobivaju nepoznate struje svih grana (elemenata) električne mreže.

3

## Metoda potencijala (napona) čvorova

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Ako se (u  $n$  jednađbi KZN) struje grana iskažu pomoću napona grana (izraženih kao razlike potencijala čvorova) te se uvrste u jednađbe KZS, dobiva se sustav od  $\check{c}-1$  jednađbi u kojem su nepoznanice potencijali  $\check{c}-1$  čvorova (za jedan (referentni) čvor pretpostavi se da je  $\varphi=0$ ).
- ♦ Dobiveni sustav jednađbi opisuje zadanu mrežu jednako dobro kao i izvorni sustav Kirchhoffovih jednađbi, ali je jednostavniji za rješavanje, jer ima manji broj (samo  $\check{c}-1$  umjesto  $g$ ) jednađbi.
- ♦ Iz izračunatih napona grana (kao razlika potencijala čvorova) mogu se potom izračunati struje svih grana, a ovaj postupak rješavanja električnih mreža naziva se *metoda potencijala (ili napona) čvorova*.

4

## Postupak primjene metode potencijala čvorova



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

1. Jedan čvor odabere se za referentan (s potencijalom  $\varphi=0$ ).
2. Za svaki od ostalih  $n-1$  čvorova napiše se jednačba oblika:

$$\varphi_i \sum G_i - \varphi_j \sum G_{ij} - \varphi_k \sum G_{ik} - \dots - \varphi_n \sum G_{in} = \sum_{\text{alg}} I_{ks}$$

gdje je:  $\varphi_i$  - čvor za koji se piše jednačba;

$\varphi_j, \varphi_k, \dots, \varphi_n$  - potencijali (susjednih) čvorova koji s i-tim čvorom imaju (barem jednu) zajedničku granu;

$G_i$  - vodljivosti svih grana koje dolaze u i-ti čvor;

$G_{ij}$  - vodljivost (zajedničke) grane između i-tog i j-tog čvora;

$I_{ks}$  - struje kratkog spoja svih (aktivnih) grana koje dolaze u i-ti čvor.

Aktivne grane su one s izvorima. Struja kratkog spoja grane dobiva predznak "+" ako bi tekla u čvor, a predznak "-" ako bi tekla iz čvora.

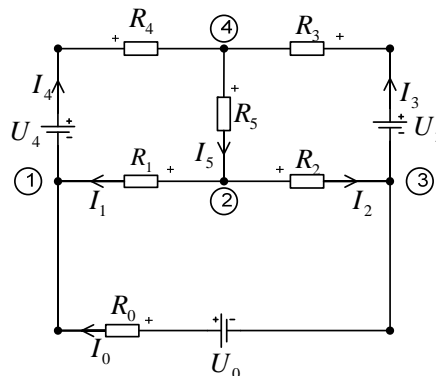
3. Riješi se sustav jednačbi te se odrede potencijali čvorova. Iz razlika potencijala (naponi grana) mogu se potom izračunati struje svih grana mreže.

5

## Postavljanje jednačbi potencijala čvorova



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Sl. 10.1

Za mrežu sa sl. 10.1, uz izbor četvrtoga čvora kao referentnog ( $\varphi_4 = 0$ ), jednačbe potencijala čvorova su:

6

## Postavljanje jednačbi potencijala čvorova (2)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

$$+\varphi_1 \cdot (G_0 + G_1 + G_4) - \varphi_2 \cdot G_1 - \varphi_3 \cdot G_0 = +U_0 \cdot G_0 - U_4 \cdot G_4 \quad (\text{čvor 1})$$

$$-\varphi_1 \cdot G_1 + \varphi_2 \cdot (G_1 + G_2 + G_5) - \varphi_3 \cdot G_2 = 0 \quad (\text{čvor 2})$$

$$-\varphi_1 \cdot G_0 - \varphi_2 \cdot G_2 + \varphi_3 \cdot (G_0 + G_2 + G_3) = -U_0 \cdot G_0 - U_3 \cdot G_3 \quad (\text{čvor 3})$$

Gdje je:  $G_i = 1/R_i, i = 0, 1, \dots, 5$

vodljivost odgovarajuće grane.

7

## Svojstva jednačbi potencijala čvorova



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

Napišu li se jednačbe potencijala čvorova za mrežu sa sl. 10.1 u matričnom obliku, dobiva se:

$$\begin{bmatrix} (G_0 + G_1 + G_4) & -G_1 & -G_0 \\ -G_1 & (G_1 + G_2 + G_5) & -G_2 \\ -G_0 & -G_2 & (G_0 + G_2 + G_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 G_0 - U_4 G_4 \\ 0 \\ -U_0 G_0 - U_3 G_3 \end{bmatrix}$$

Matrica vodljivosti  $\underline{G}$  je **dijagonalno simetrična matrica**, te njezina simetričnost služi za provjeru je li sustav jednačbi korektno napisan za neku mrežu. Jasno je da se ovdje radi samo o **formalnoj provjeri**, jer suštinska mora voditi računa o svim elementima mreže.

8

### Zadatak 1. (izvod jednadžbi potencijala čvorova)

Pretvorite naponske modele realnih izvora u odgovarajućim granama mreže sa sl. 10.1 u strujne modele izvora, izrazite struje u svim pasivnim granama mreže kao omjer razlike potencijala između čvorova grane i otpora grane, napišite za novodobivenu mrežu jednadžbe KZS za čvorove 1, 2 i 3, uredite dobivene jednadžbe tako da grupirate koeficijente uz nepoznanice  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  i  $\varphi_3$ , sve poznanice prebacite na desnu stranu, te pogledajte što ste dobili.

### Zadatak 2.

Napišite jednadžbe potencijala čvorova za mrežu sa sl. 10.1 uzimajući za referentni čvor (čvor s potencijalom 0):

1. čvor 1;
2. čvor 2;
3. čvor 3.

Riješite dobivene sustave jednadžbi, uz pomoć dobivenih rješenja izračunajte struje  $I_0, \dots, I_5$ , te na koncu usporedite izraze za struje koje ste putem tri neovisna postupka dobili.

## Metoda potencijala čvorova - primjeri (3)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

### Zadatak 3.

Zamijenite jedan od naponskih izvora ( $U_0$ ,  $U_3$  ili  $U_4$ ) u mreži sa sl. 10.1 sa strujnim izvorom ( $I_0$ ,  $I_3$ , ili  $I_4$ ).

- ♦ Kako sada glase jednačbe potencijala čvorova?
- ♦ Što vam je izazivalo poteškoće u njihovom pisanju?
- ♦ Je li matrica vodljivosti i dalje simetrična?

11

## Metoda potencijala čvorova - primjeri (4)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

### Zadatak 4.

Neka je  $R_0=0$  i neka su svi ostali aktivni i pasivni elementi iz mreže sa sl. 10.1 parametri različiti od nule. Napišite sada jednačbe potencijala čvorova uzimajući:

1. čvor 4 za referentni čvor;
2. čvor 1 za referentni čvor.

S kojim ste se poteškoćama sada susreli?

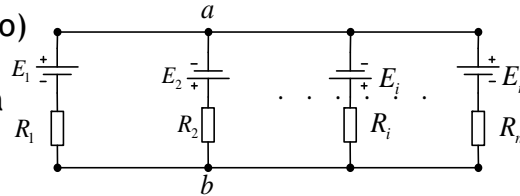
12

# Millmanov teorem

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Mrežu s dva čvora (desno) opisali bi samo jednom jednačbom potencijala čvorova. Uz  $\varphi_b=0$ , je



$$\varphi_a \sum_{\text{alg}} G = \sum_{\text{alg}} I_{ks} \quad \text{gdje su } G \text{ vodljivosti grana, a } I_{ks} \text{ su struje kratkog spoja aktivnih grana.}$$

- Kako je  $\varphi_b=0$ ,  $\varphi_a = U_{ab}$ , pa se napon  $U_{ab}$  može izračunati kao

$$U_{ab} = \frac{\sum_{\text{alg}} I_{ks}}{\sum G}$$

- Ovaj izraz poznat je kao *Millmanov teorem*.

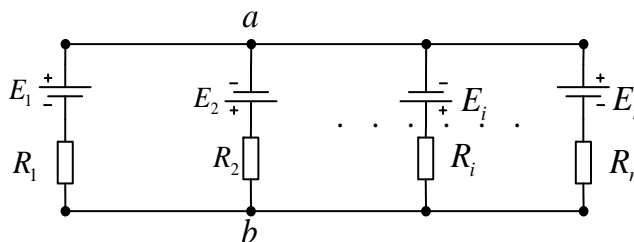
13

## Millmanov teorem - dokaz (1)\*

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- Tvrdnja: U el. krugovima s dva čvora, *a* i *b*, napon  $U_{ab}$  određuje se tako da se algebarski zbroj struja svih strujnih izvora u čvoru *a* podijeli sa zbrojem vodljivosti svih grana između *a* i *b*.



Sl. 10.2

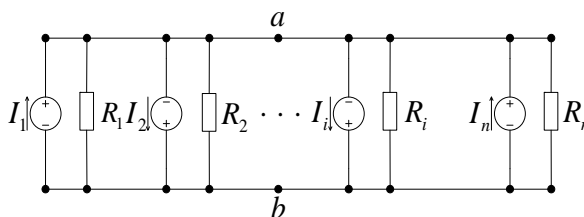
14

## Millmanov teorem - dokaz (2)\*

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Dokaz: Izravna posljedica metode potencijala čvorova kada je  $\check{c} = 2$ , ili pretvorbom naponskih u strujne izvore (sl. 10.2 vs. sl. 10.3).



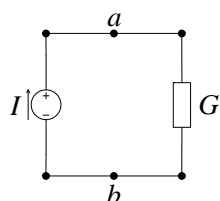
Sl. 10.3

$$I_i = \frac{E_i}{R_i}, \quad i = 1, \dots, n$$

15

## Millmanov teorem - dokaz (3)\*

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Sl. 10.4

$$I = \text{alg} \sum_{i=1}^n I_i = \text{alg} \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{R_i}; \quad G = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

$$U_{ab} = \frac{I}{G} = \frac{\text{alg} \sum_{i=1}^n \frac{E_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}, \quad \text{što je i trebalo dokazati.}$$

16



## Postupci za analizu (izračun) cjelokupne mreže

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Kao što je u metodi potencijala čvorova, uvrštavanjem jednačbi KZN u jednačbe KZS, smanjen broj jednačbi potreban za rješavanje mreže, slično bi, uvrštavanjem jednačbi KZS u jednačbe KZN, umjesto  $g$  jednačbi dobili sustav od samo  $n$  jednačbi u kojem su nepoznanice struje grana koje pripadaju samo jednoj od  $n$  nezavisnih petlji (kontura) mreže. Postupak rješavanja mreže tim sustavom jednačbi naziva se *metoda konturnih struja*.
- ♦ Metodu konturnih struja nećemo ovdje bliže proučavati, a spominjemo je stoga jer se ona, kao i metoda izravne primjene Kirchhoffovih zakona te metoda potencijala čvorova, kao i Millmanov teorem, rabi za izračun struja svih grana, tj. za analizu stanja cjelokupne el. mreže.
- ❖ Vrijedi li to i za metodu superpozicije?

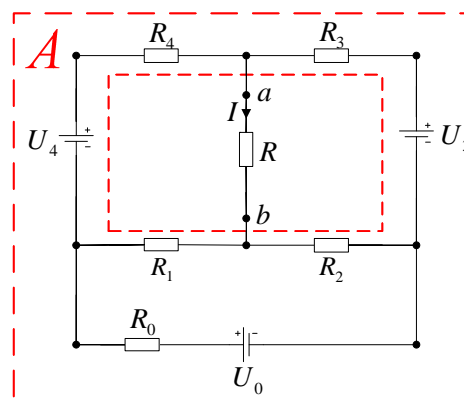
17

## El. mreža s gledišta jednog elementa

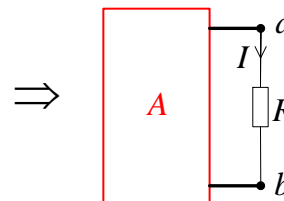
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Zanima li nas stanje samo jednog elementa el. mreže, (npr. otpor  $R$  između točaka  $a$  i  $b$  u mreži na slici), ostatak mreže možemo razmatrati kao “crnu kutiju”, na slici označenu sa  $A$ .



$A$  - aktivna linearna mreža



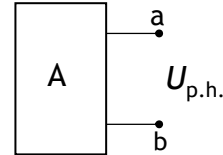
18

## Aktivna linearna mreža (s 2 točke) $\equiv$ realni izvor

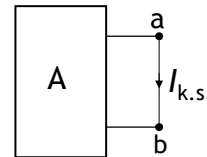
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Odspojimo li otpor  $R$ , između točaka a i b je neki napon  $U_{ab(p.h.)} = \text{napon praznog hoda}$



- ♦ Zamijenimo li otpor  $R$  kratkim spojem, kroz kratki spoj između točaka a i b teče struja  $I_{ab(k.s.)} = \text{struja kratkog spoja}$



- ♦ Aktivna linearna mreža A, gledana s dviju točaka (a i b), ponaša se kao realni izvor!
- ♦ Omjer napona praznog hoda i struje kratkog spoja je *unutarnji otpor mreže*  $R_{ab}$

$$R_{ab} = \frac{U_{p.h.}}{I_{k.s.}}$$

19

## Theveninov teorem

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Gledana s dviju priključnih točaka nekog elementa, aktivna linearna mreža može se nadomjestiti *naponskim modelom realnog izvora* (Thevenenov izvor) s parametrima  $E_T$  i  $R_T$ .
- ♦ Elektromotorna sila Thevenenovog nadomjesnog izvora ( $E_T$ -Thevenenov napon) jednaka je *naponu praznog hoda* između tih dviju točaka.
- ♦ Unutarnji otpor Thevenenovog nadomjesnog izvora ( $R_T$ -Thevenenov otpor) jednak je *ukupnom otporu mreže* između tih dviju točaka.

20

## Postupak primjene Theveninovog teorema



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ Označe se priključne točke (npr.  $a$  i  $b$ ) elementa mreže za koji hoćemo odrediti struju (ili napon) te se taj element odspoji iz mreže (prazni hod između točaka  $a$  i  $b$ ).
- ♦ Odredi se napon praznog hoda  $U_{ab(p.h.)}$  (ostatka mreže) čime je određen Thevenenov napon:  $U_T = U_{ab(p.h.)}$ .
- ♦ Odredi se ukupni otpor ostatka mreže između točaka  $a$  i  $b$   $R_{ab(p.h.)}$  tako da se umrtve (ugase) svi izvori, čime je određen Thevenenov otpor  $R_T = R_{ab(p.h.)}$ .
- ♦ Ostatak mreže prikaže se Thevenenovim izvorom, na koji se spoji prethodno iz mreže odspojeni element te se odredi njegova struja ili napon.

21

## Theveninov teorem - dokaz (1)\*



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ Tvrdnja:

Struja kroz bilo koju granu  $a$ - $b$  el. kruga (mreže), gdje se između točaka  $a$  i  $b$  nalazi otpor  $R$ , određuje se tako da se preostali dio kruga zamijeni ekvivalentnim naponskim izvorom.

Elektromotorna sila ekvivalentnog izvora ( $E_T$ ) jednaka je naponu koji vlada na krajevima grane  $a$ - $b$  kada je ona otvorena.

Unutarnji otpor ekvivalentnog izvora ( $R_T$ ) jednak je ukupnom otporu pasivnoga kruga promatranog s otvorenih krajeva  $a$  i  $b$ . Pasivni krug nastaje od el. kruga (mreže) gašenjem izvora.

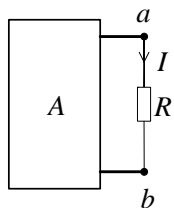
22

## Theveninov teorem - dokaz (2)\*

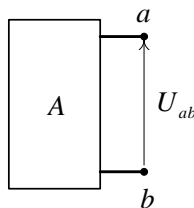
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



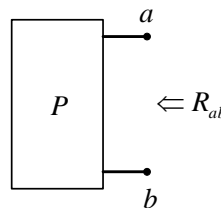
Dokaz:



Sl. 10.6a



Sl. 10.6b



Sl. 10.6c

Na sl. 10.6a i sl. 10.6b **A** je **aktivni** krug. Sl. 10.6c predstavlja **pasivni** krug **P**, dobiven gašenjem izvora u **A**.

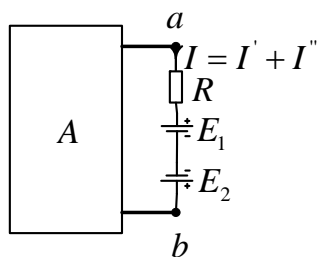
23

## Theveninov teorem - dokaz (3)\*

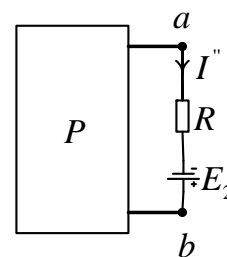
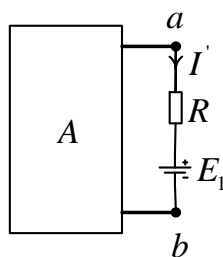
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Uzmimo dva naponska izvora  $E_1$  i  $E_2$ ,  $E_1 = E_2 = U_{ab}$ , i spojimo ih u granu  $a-b$  kako to pokazuje sl. 10.2a.



Sl. 10.7a



Sl. 10.7c

Primijenimo načelo superpozicije na način da ugasimo  $E_2$  i ostavimo  $E_1$  i sve izvore u aktivnom krugu **A**. Tada kroz **R** teče struja  $I'$  koja je, jer je  $E_1 = U_{ab}$ , jednaka 0 (sl. 10.7b).

24

## Theveninov teorem - dokaz (4)\*

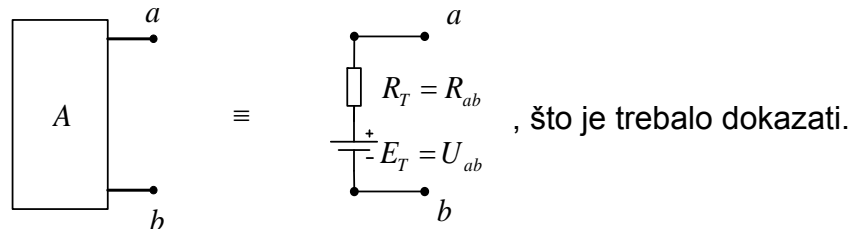
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



U drugom koraku superpozicije (sl. 10.7c) ugasimo sve izvore u  $A$  i  $E_1$ , a ostavimo aktivnim samo  $E_2$ . Sada kroz granu a-b teče struja  $I''$ . Kako je  $I = I' + I''$ ,  $I' = 0$ , slijedi da je

$$I = I'' = \frac{E_2}{R + R_{ab}}$$

Iz svega slijedi da je



25

## Nortonov teorem

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Gledana s dviju priključnih točaka nekog elementa, aktivna linearna mreža može se nadomjestiti *strujnim modelom realnog izvora* (Nortonov izvor) s parametrima  $I_N$  i  $R_N$ .
- ♦ Struja Nortonovog nadomjesnog izvora ( $I_N$  - Nortonova struja) jednaka je *struji kratkog spoja* između tih točaka.
- ♦ Unutarnji otpor Nortonovog nadomjesnog izvora ( $R_N$  - Nortonov otpor) jednak je *ukupnom otporu mreže* između tih dviju točaka.

26

## Postupak primjene Nortonovog teorema



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ Označe se priključne točke (npr. a i b) elementa mreže za koji hoćemo odrediti struju (ili napon) te se taj element odspoji, a njegove priključne točke (a i b) se kratko spoje.
- ♦ Odredi se struja tog kratkog spoja  $I_{ab(k.s.)}$  čime je određena Nortonova struja:  $I_N = I_{ab(k.s.)}$ .
- ♦ Odspoji se kratki spoj te se odredi ukupni otpor ostatka mreže između točaka a i b  $R_{ab(p.h.)}$ , tako da se umrtve svi izvori, čime je određen Nortonov otpor  $R_N = R_{ab(p.h.)}$  ( $=R_T!$ ).
- ♦ Ostatak mreže prikaže se Nortonovim izvorom, na koji se spoji prethodno iz mreže odspojeni element te se odredi njegova struja ili napon.

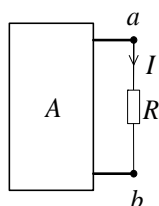
27

## Nortonov teorem - dokaz (1)\*

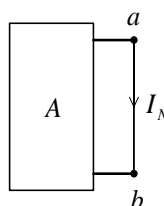


OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

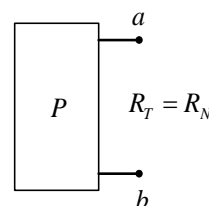
- ♦ Tvrdnja: Struja kroz bilo koju granu **a-b** el. kruga (mreže), gdje se između točaka **a** i **b** nalazi otpor **R**, određuje se tako da se preostali dio kruga zamijeni ekvivalentnim strujnim izvorom. Struja ekvivalentnog strujnog izvora ( $I_N$ ) jednaka je struji kroz granu **a-b** kada se ona kratko spoji. Unutarnji otpor ekvivalentnog strujnog izvora ( $R_N$ ) određuje se na isti način kao i u Theveninovom teoremu (iz čega slijedi da je  $R_N = R_T$ ).



Sl. 10.8a



Sl. 10.8b



Sl. 10.8c

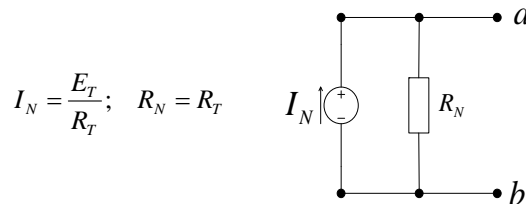
28

## Nortonov teorem - dokaz (2)\*

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Dokaz: Izravno slijedi iz Theveninova teorema i pretvorbe realnog naponskog u realni strujni izvor.

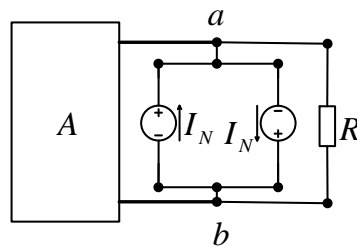


Alternativa je primjena načela superpozicije putem dodavanja dva strujna izvora istog iznosa struja a suprotnog smjera (iznos je  $I_N$ ) paralelno grani a-b (sl. 10.9).

29

## Nortonov teorem - dokaz (3)\*

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Sl. 10.9

U istosmjernim el. krugovima Theneninov i Nortonov teorem su ekvivalentne tvrdnje s različitim nadomjesnim parametrima za aktivnu linearnu mrežu A.

U krugovima izmjenične struje ne postoji u svim slučajevima ekvivalencija ova dva teorema. Naime, postoje izmjenični el. krugovi u kojima se može primijeniti samo jedan od ova dva teorema i to opravdava zašto se formuliraju odvojeno.

30