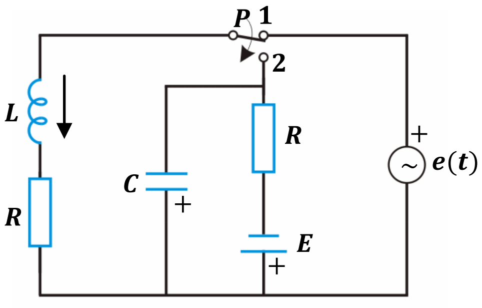
Prva parcijalna provjera znanja iz predmeta Električni krugovi II

Zadatak 1.

1.1. U kolu poznatih parametara R, L, C djeluje naponski generator konstantnog napona E i naponski generator promjenljivog napona $e(t)$. Postavite diferencijalnu jednačinu koja opisuje promjenu napona na kondenzatoru $u_c(t)$ tokom prelaznog procesa, ako se u trenutku $t = 0$ prekidač P trenutno prebacuje iz položaja (1) u položaj (2).



Rješenje:

$$-u_c(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) \quad (1)$$

$$E - u_c(t) = RC\frac{du_c(t)}{dt} - Ri_L(t) \quad (2)$$

Iz jednačine (2) slijedi: $i_L(t) = \frac{u_c(t)}{R} - \frac{E}{R} + C\frac{du_c(t)}{dt}$ (3)

Diferenciranjem relacije (3), dobija se: $\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du_c(t)}{dt} + C\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}$ (4)

Uvrštavanjem jednačina (3) i (4) u jednačinu (1), dobija se:

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + RC\right)\frac{du_c(t)}{dt} + 2u_c(t) = E$$

1.2. Za kolo iz prethodnog zadatka odredite zavisne početne uslove. Poznate vrijednosti su:
$E = 10\ (V);\ R = 10\ (\Omega);\ L = 10\ (mH);\ C = 100\ (\mu F);\ e(t) = 173 \cdot sin(577t + 30^\circ)\ (V).$

Rješenje:

Struja kroz zavojnicu je definisana izrazom: $i_L(t) = \frac{e(t)}{\mathcal{Z}_e}$ (5)

Ekvivalentna impedansa kola je: $\mathcal{Z}_e = R + j\omega L = |\mathcal{Z}_e|\angle\varphi$

$|\mathcal{Z}_e| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = 11{,}54\ \Omega \quad \varphi = arctg\frac{\omega L}{R} = 30^\circ$

Uvrštavanjem vrijednosti za $|\mathcal{Z}_e|$ i φ u jednačinu (5), dobija se:

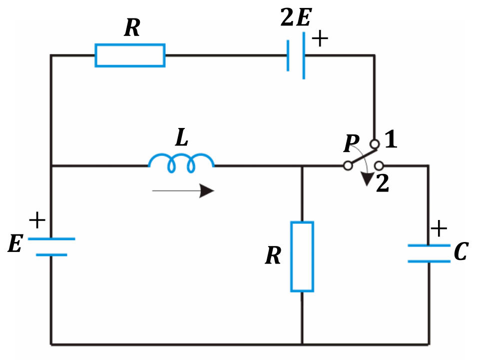
$i_L(t) = 15 \cdot sin577t$

Nezavisni početni uslovi su: $i_L(t) = 0;\quad u_c(0) = E = 10\ V$

Zavisni početni uslov se može dobiti iz relacije (2): $\frac{du_c(0)}{dt} = \frac{E - u_c(0) + Ri_L(0)}{RC} = 0$

Zavisni početni uslov se može dobiti iz relacije (1): $\frac{di_L(0)}{dt} = \frac{-u_c(0) - Ri_L(0)}{L} = -1000\ A/s$

1.3. U kolu na slici, koje je u stacionarnom stanju, u trenutku $t = 0$ prekidač se prebacuje iz položaja (1) u položaj (2). Odrediti izraz za lik struje kroz zavojnicu, uz pretpostavku da je početna elektrostatička energija u kondenzatoru jednaka nuli. Poznati parametri su $R = 0{,}5\ (\Omega)$; $L = 0{,}5\ (H)$; $C = 0{,}5\ (F)$; $E = 1\ (V)$; $i_L(0) = 2\ A$.



Rješenje:

$$E = L\frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) - RC\frac{du_c(t)}{dt} \tag{1}$$

$$u_c(t) = Ri_L(t) - RC\frac{du_c(t)}{dt} \tag{2}$$

Primjenom Laplace-ove transformacije, uz uslov da je $u_c(0) = 0$, dobijamo:

$$\frac{E}{p} = pLI_L(p) - Li_L(0) + RI_L(p) - pRCU_c(p) \tag{3}$$

$$U_c(p) = RI_L(p) - pRCU_c(p) \tag{4}$$

Iz jednačine (4) slijedi: $U_c(p) = \dfrac{RI_L(p)}{1 + pRC}$ (5)

Uvrštavanjem jednačine (5) u jednačinu (3), dobija se:

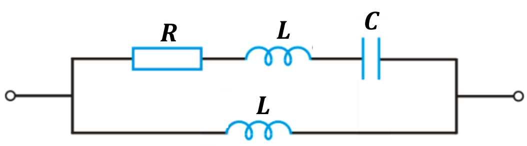
$$\frac{E}{p} = pLI_L(p) - Li_L(0) + RI_L(p) - pRC\frac{RI_L(p)}{1 + pRC}$$

$$E + pLi_L(0) = \left(p^2L + pR - \frac{p^2R^2C}{1 + pRC}\right)I_L(p)$$

Izraz za struju kroz zavojnicu je: $I_L(p) = \dfrac{p^2\big(RLCi_L(0)\big) + p\big(RCE + Li_L(0)\big) + E}{p(p^2RLC + pL + R)}$

Za date vrijednosti parametara: $I_L(p) = \dfrac{0{,}25p^2 + 1{,}25p + 1}{p(0{,}125p^2 + 0{,}5p + 0{,}5)}$

1.4. Za kolo sa slike odredite učestanost prave rezonancije. Poznati parametri su: R, L, C.



Rješenje:

$$i_L(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$$

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + RC\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0$$

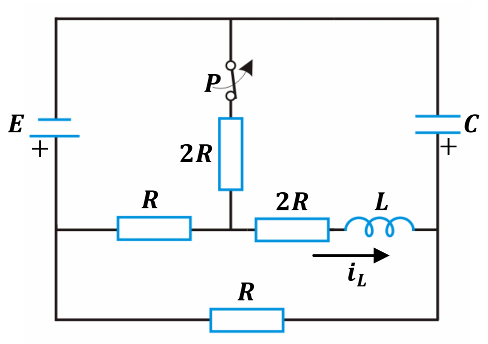
Karakteristična jednačina dobijene diferencijalne jednačine je: $LCp^2 + RCp + 1 = 0$

Korjeni karakteristične jednačine su: $p_{1,2} = -\dfrac{R}{2L} \pm j\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$

Učestanost prave rezonancije je: $\omega_{pr} = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}$

Zadatak 2.

U kolu na slici, koje se nalazi u stacionarnom režimu rada, u trenutku $t = 0$ otvara se prekidač. Koristeći klasičnu metodu odrediti vremensku funkciju $u_c(t)$ za promjenu napona na kondenzatoru poslije komutacije. Poznate vrijednosti su: $E = 11\ (V);\ R = 10\ (\Omega);$ $L = 10\ (H);\ C = 0{,}1\ (F)$.



Rješenje:

Za $t < 0$ nezavisni početni uslovi za struju kroz zavojnicu i za napon na krajevima kondenzatora mogu se odrediti iz slijedećih izraza:

$E = -11Ri_L(0);\ u_c(0) = -10Ri_L(0)$

$i_L(0) = -0{,}1\ (A);\ u_c(0) = 10\ (V)$

Za $t \geq 0$, mogu se postaviti jednačine dinamičke ravnoteže napisane prema KZS i KZN:

$$3Ri_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt} = E - u_c(t) \tag{1}$$

$$R\left(C\frac{du_c(t)}{dt} - i_L(t)\right) - L\frac{di_L(t)}{dt} - 3Ri_L(t) = 0 \tag{2}$$

Iz jednačne (2) slijedi: $$L\frac{di_L(t)}{dt} = RC\frac{du_c(t)}{dt} - 4Ri_L(t) \tag{3}$$

Uvrštavanjem jednačne (3) u jednačinu (1) slijedi:

$$3Ri_L(t) + RC\frac{du_c(t)}{dt} - 4Ri_L(t) = E - u_c(t) \tag{4}$$

Iz jednačine (4) slijedi: $$i_L(t) = C\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{R} - \frac{E}{R} \tag{5}$$

Diferenciranjem jednačine (5) slijedi: $$\frac{di_L(t)}{dt} = C\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{du_c(t)}{dt} \tag{6}$$

Uvrštavanjem jednačna (5) i (6) u jednačinu (1) slijedi:

$$3R\left(C\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{R} - \frac{E}{R}\right) + L\left(C\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{du_c(t)}{dt}\right) = E - u_c(t)$$

$$3RC\frac{du_c(t)}{dt} + 3u_c(t) - 3E + LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = E$$

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \left(3RC + \frac{L}{R}\right)\frac{du_c(t)}{dt} + 4u_c(t) = 4E \tag{7}$$

Opšte rješenje je dato kao zbir homogenog i partikularnog rješenja jednačine (7):

$$u_c(t) = u_{ch}(t) + u_{cp}(t)$$

Karakteristična jednačina koja odgovara homogenom dijelu diferencijalne jednačine ima oblik:

$$LCp^2 + \left(3RC + \frac{L}{R}\right)p + 4 = 0$$

čiji su korijeni $p_{1,2} = -2$

Opšte rješenje diferencijalne jednačine koja opisuje promjenu napona na kondenzatoru tokom prelaznog režima ima oblik:

$$u_c(t) = e^{-2t}(A_1 + A_2 t) + 11$$

Konstante A_1 i A_2 mogu se odrediti na osnovu:

- nezavisnog početnog uslova: $u_c(0) = A_1 + 11 = 10 \Rightarrow A_1 = -1\ (V)$
- zavisnog početnog uslova (iz relacije 5): $\left.\frac{du_c(t)}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{u_c(0)}{CR} + \frac{E}{CR} + \frac{i_L(0)}{C} = 0\ (V/s)$

Na osnovu opšteg rješenja slijedi: $\frac{du_c(t)}{dt} = -2e^{-2t}(A_1 + A_2 t) + e^{-2t}A_2$

odakle je $\left.\frac{du_c(t)}{dt}\right|_{t=0} = -2A_1 + A_2 = 0 \Rightarrow A_2 = -2\ (V)$

Vremenski izraz za promjenu napona na kondenzatoru u toku prelaznog režima ima oblik:

$$u_c(t) = 11 - e^{-2t}(1 + 2t)\ (V)$$

Zadatak 3.

3.1. U jednom RLC kolu određuje se promjena struje kroz zavojnicu $i_L(t)$ u toku prelaznog režima. Diferencijalna jednačina koja opisuje promjenu struje $i_L(t)$ ima oblik:

$$LC\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + 3RC\right)\frac{di_L(t)}{dt} + 4i_L(t) = \frac{E}{R}$$

Za koje vrijednosti kapaciteta kondenzatora C u kolu nastaje prelazni proces oscilatorno-prigušenog karaktera?

Rješenje:

$a)\ \frac{L}{R^2} < C < \frac{L}{9R^2}$ $\boxed{b)\ \frac{L}{9R^2} < C < \frac{L}{R^2}}$ $c)\ C = \frac{L}{9R^2}$ $d)\ C = \frac{L}{3R^2}$

Da bi sopstveni režim kola bio oscilatorno-prigušeni, potrebno je ispuniti uslov:

$\left(\frac{L}{R} + 3RC\right)^2 - 16LC < 0,$ odakle se dobija: $9R^4C^2 - 10LR^2C + L^2 < 0$

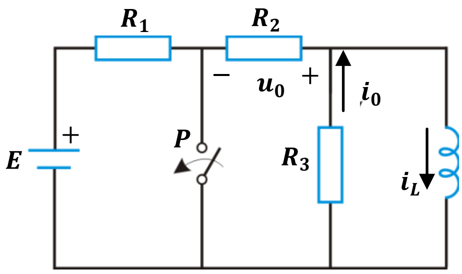
Gornja nejednačina je zadovoljena za vrijednosti kapaciteta kondenzatora C unutar intervala:

$$\frac{L}{9R^2} < C < \frac{L}{R^2}$$

3.2. U kolu na slici trenutno se, u trenutku $t = 0$, zatvara prekidač P. Diferencijalna jednačina koja opisuje promjenu struje $i_L(t)$ ima oblik:

$$L\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R_3R_2}{R_2 + R_3}i_L(t) = 0$$

Potrebno je odrediti vremensku funkciju promjene napona $u_0(t)$, nakon komutacije. Poznato je: $E = 10\ (V);\ R_1 = 2\ (\Omega);\ R_2 = 3\ (\Omega);\ R_3 = 6\ (\Omega);\ L = 2\ (H);\ i_L(0) = 2\ (A)$.



Rješenje:

$a)\ u_0(t) = -2e^{-t}\ (V)$ $b)\ u_0(t) = 4e^{-t}\ (V)$

$\boxed{c)\ u_0(t) = -4e^{-t}\ (V)}$ $d)\ u_0(t) = 2e^{-t}\ (V)$

Karakteristična jednačina je: $2p + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -1$

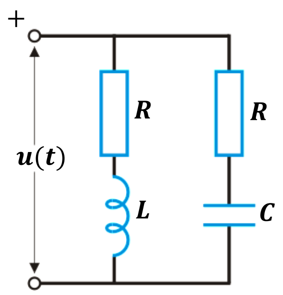
Opšte rješenje diferencijalne jednačine: $i_L(t) = Ae^{-t}\ (A)$

Konstanta A može se odrediti na osnovu nezavisnog početnog uslova: $i_L(0) = A = 2$

Vremenski izraz koji opisuje promjenu struje kroz zavojnicu je: $i_L(t) = 2e^{-t}\ (A)$

Funkcija promjene napona $u_0(t)$ je: $u_0(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = -4e^{-t}\ (V)$

3.3. U kolu predstavljenom na slici poznati su parametri R, L, C, kao i učestanost ω prostoperiodičnog napona $u(t)$. Odredite učestanost prave antirezonancije.



Rješenje:

$a)\ \omega_{pa} = \sqrt{\frac{1}{LC} - 1}$ $b)\ \omega_{pa} = \sqrt{\frac{R}{LC} - \frac{R}{L^2}}$

$\boxed{c)\ \omega_{pa} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}}$ $d)\ \omega_{pa} = \sqrt{1 - \frac{1}{LC}}$

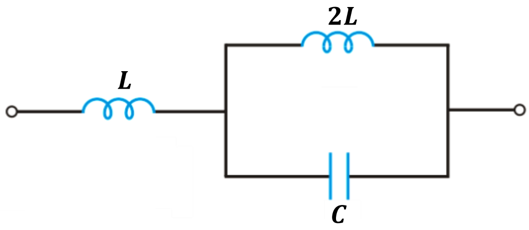
Iz jednačina kola napisanih preko KZ nije teško zaključiti da je sopstveni odziv kola opisan diferencijalnom jednačinom:

$$\frac{d^2u_c(t)}{dt^2} + \frac{2R}{L}\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC}u_c(t) = 0$$

Rješenja karakteristične jednačine su: $p_{1,2} = -\frac{R}{L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} = -\sigma_s \pm j\omega_s$

Učestanost prave antirezonancije kola određena je kao: $\omega_{pa} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$

3.4. Za reaktivno kolo sa slike odredite koliko je puta učestanost fazne rezonancije veća od učestanosti fazne antirezonancije. Rezonantne, odnosno antirezonantne učestanosti kola koje su jednake nuli, odnosno beskonačnosti, izostavite iz analize.



Rješenje:

$\boxed{a)\ \frac{\omega_r}{\omega_a} = \sqrt{3}}$ $\quad b)\ \frac{\omega_r}{\omega_a} = \sqrt{2}$

$c)\ \frac{\omega_r}{\omega_a} = 3$ $\quad d)\ \frac{\omega_r}{\omega_a} = 2$

Ulazna impedansa kola je: $\mathcal{Z}_{ul} = j\frac{2\omega^3L^2C - 3\omega L}{2\omega^2LC - 1}$

Iz uslova nastanka fazne rezonancije u kolu: $Im\{\mathcal{Z}_{ul}\} = \frac{2\omega^3L^2C - 3\omega L}{2\omega^2LC - 1} = 0 \Rightarrow \omega_r = \sqrt{\frac{3}{2LC}}$

Iz uslova nastanka fazne antirezonancije u kolu: $Im\{\mathcal{Y}_{ul}\} = -\frac{2\omega^2LC - 1}{2\omega^3L^2C - 3\omega L} = 0 \Rightarrow \omega_a = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$

Očigledno je da vrijedi: $\frac{\omega_r}{\omega_a} = \sqrt{3}$