



RLC krugovi i frekvencijske karakteristike

(uredio prof.dr.sc. Armin Pavić)



Zadani su \dot{U} i \underline{Z} , a traži se \dot{I}

$$\left. \begin{array}{l} \dot{U} = U \cdot e^{j\alpha_u} \\ \underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} \end{array} \right\} \dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{U \cdot e^{j\alpha_u}}{Z \cdot e^{j\varphi}} = \frac{U}{Z} \cdot e^{j(\alpha_u - \varphi)}$$

$$\varphi = \alpha_u - \alpha_i$$

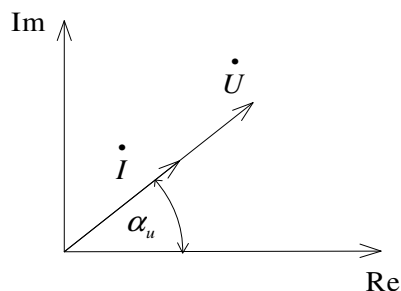
Napon i struja na omskom otporu

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



a) OMSKI OTPOR

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{\dot{U}}{R} = \frac{U \cdot e^{j\alpha_u}}{R \cdot e^{j0}} = \frac{U}{R} \cdot e^{j\alpha_u}$$



Napon i struja ovdje imaju **isti fazni kut**, pa kažemo da su na omskom otporu napon i struja **u fazi**.

3

Napon i struja na induktivitetu

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

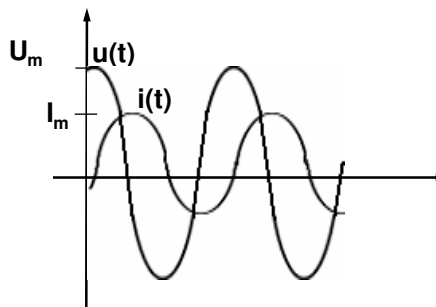
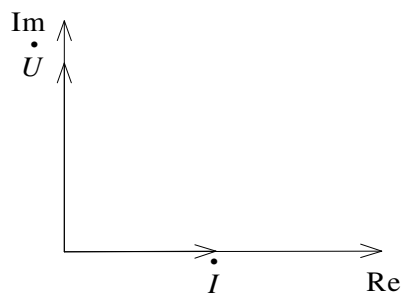


b) INDUKTIVITET

$$\underline{Z} = jX_L = j\omega L \quad j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{U \cdot e^{j\alpha_u}}{jX_L} = \frac{U \cdot e^{j\alpha_u}}{X_L \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{U}{X_L} \cdot e^{j\left(\alpha_u - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Struja kasni za naponom za $\frac{\pi}{2}$.



4

Napon i struja na kapacitetu



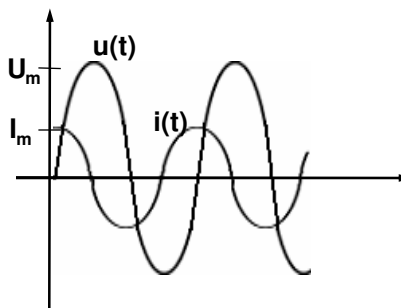
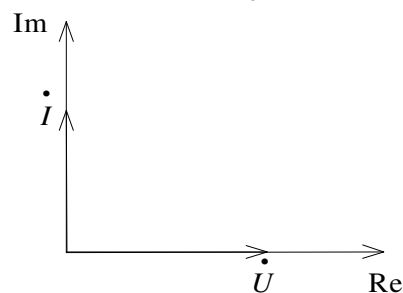
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

c) KAPACITET

$$\underline{Z} = -j \cdot \frac{1}{\omega C} = -jX_C$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{U \cdot e^{j\alpha_u}}{-jX_C} = \frac{U \cdot e^{j\alpha_u}}{X_C \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \frac{U}{X_C} \cdot e^{j\left(\alpha_u + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Struja prethodi naponu za $\frac{\pi}{2}$.



5

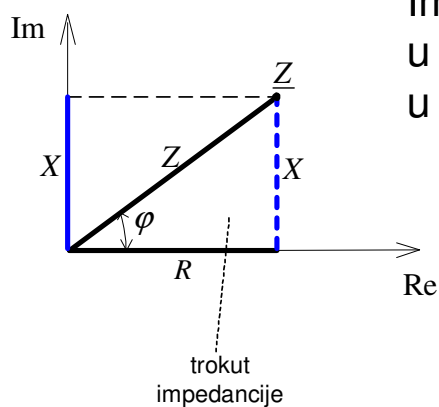
Impedancija u kompleksnoj (Z) ravlini



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

OPĆI SLUČAJ

$$\underline{Z} = Z \angle \varphi [\Omega]$$

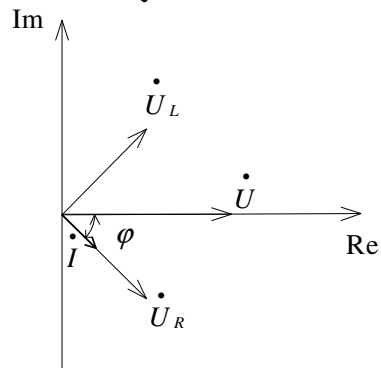
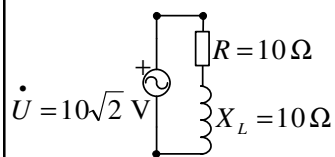


Impedancija može biti u I. kvadrantu ($\varphi > 0$), ili u IV. kvadrantu ($\varphi < 0$).

6

Serijski RL krug

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$\underline{Z}_{RL} = R + jX_L = 10 + j10 = 10\sqrt{2}\angle 45^\circ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{RL}} = \frac{10\sqrt{2}}{10\sqrt{2}\angle 45^\circ} = 1\angle -45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_R = \dot{I} \cdot R = 10\angle -45^\circ \text{ V}$$

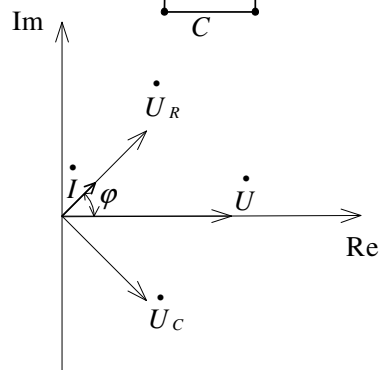
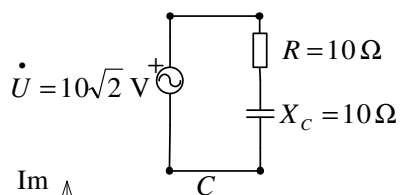
$$\dot{U}_L = \dot{I} \cdot \underline{X}_L = 10\angle 45^\circ \text{ V}$$

Induktivno ponašanje kruga
($\varphi > 0$)

7

Serijski RC krug

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$\underline{Z}_{RL} = R - jX_C = 10 - j10 = 10\sqrt{2}\angle -45^\circ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{RC}} = \frac{10\sqrt{2}}{10\sqrt{2}\angle -45^\circ} = 1\angle 45^\circ \text{ A}$$

$$\dot{U}_R = \dot{I} \cdot R = 10\angle 45^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_C = \dot{I} \cdot \underline{X}_C = 10\angle -45^\circ \text{ V}$$

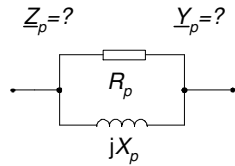
Kapacitivno ponašanje kruga
($\varphi < 0$)

8

Paralelni RL spoj (Primjer: pretvorba u ekv. serijski)

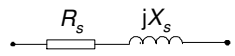


OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$\begin{aligned}\underline{Z}_p &= \frac{R_p \cdot jX_p}{R_p + jX_p} \cdot \frac{R_p - jX_p}{R_p - jX_p} = \frac{jR_p^2 \cdot X_p + X_p^2 \cdot R_p}{R_p^2 + X_p^2} = \\ &= \frac{R_p \cdot X_p^2}{R_p^2 + X_p^2} + j \frac{R_p^2 \cdot X_p}{R_p^2 + X_p^2} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}_p\} + j \operatorname{Im}\{\underline{Z}_p\} \\ \underline{Y}_p &= G_p + \underline{B}_p = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{jX_p} = \frac{1}{R_p} - j \frac{1}{X_p}\end{aligned}$$

Pretvorba u ekvivalentni serijski spoj (R_s ; X_s =?)



$$\begin{aligned}\underline{Z}_s &= R_s + jX_s = \underline{Z}_p \rightarrow R_s = \frac{R_p \cdot X_p^2}{R_p^2 + X_p^2}; \quad X_s = \frac{R_p^2 \cdot X_p}{R_p^2 + X_p^2} \\ \underline{Y}_s &= \frac{1}{\underline{Z}_s} = \frac{1}{R_s + jX_s} \cdot \frac{R_s - jX_s}{R_s - jX_s} = \frac{R_s}{R_s^2 + X_s^2} - j \frac{X_s}{R_s^2 + X_s^2}\end{aligned}$$

Serijski u paralelni?
(R_p ; X_p =?)

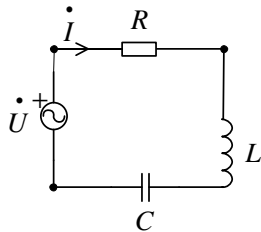
$$\underline{Y}_p = \frac{1}{R_p} - j \frac{1}{X_p} = \underline{Y}_s \rightarrow R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s}; \quad X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}$$

9

Serijski RLC krug - izračun impedancije



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$\underline{Z} = R + j\omega L - j \cdot \frac{1}{\omega C} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

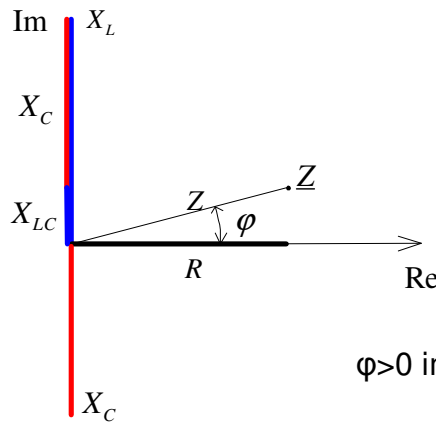
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

10

Serijski RLC krug - impedancija u Z-ravnini

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$\underline{Z} = Z \angle \varphi [\Omega]$$

$$\dot{U} = \dot{I} \cdot \underline{Z}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{U \cdot e^{j\alpha_u}}{Z \cdot e^{j\varphi}} = \frac{U}{Z} \cdot e^{j(\alpha_u - \varphi)}$$

$\varphi > 0$ impedancija je induktivnog tipa
(struja zaostaje za naponom)

$\varphi < 0$ impedancija je kapacitivnog tipa
(struja prethodi naponu)

11

Serijski RLC krug - impedancija i struja u rezonanciji

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



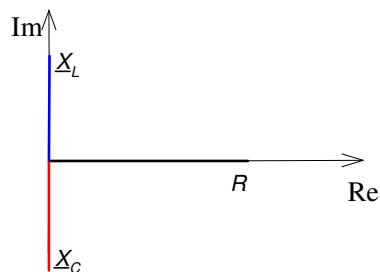
Uvjet rezonancije

Rezonantna frekvencija

$$X_L = X_C \Rightarrow \text{Im}\{\underline{Z}\} = 0$$

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \quad \omega L = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$\underline{Z} = R \rightarrow$ Napon i struja su u fazi i sav napon izvora je na omskom otporu, pa struja ima maksimalni iznos.



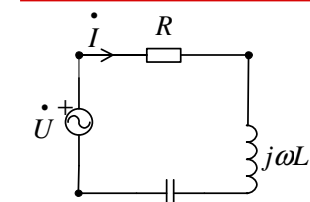
$\omega > \omega_0$, krug se ponaša induktivno

$\omega < \omega_0$, krug se ponaša kapacitivno

12

Serijski RLC krug - vektorski dijagram u rezonanciji

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

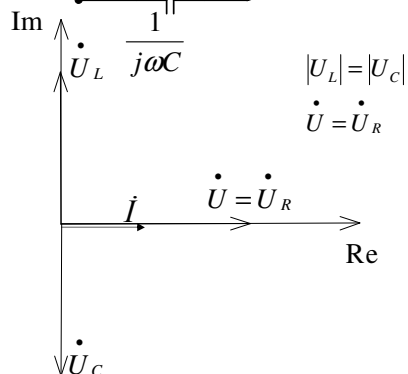


$$\dot{U}_R = \dot{I} \cdot R$$

$$\dot{U}_L = \dot{I} \cdot j\omega L$$

$$\dot{U}_C = \dot{I} \cdot \frac{1}{j\omega C}$$

U postupku analize kruga prvo odredimo impedanciju, pa na temelju nje struju te napone na pojedinim elementima.

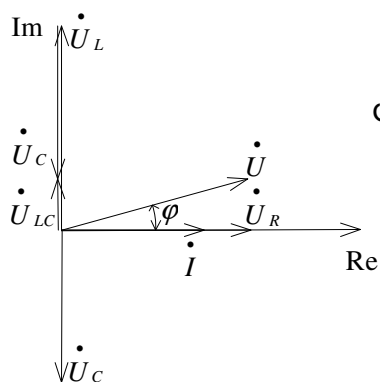


U rezonanciji napon na induktivitetu jednak je naponu na kapacitetu pa serijsku rezonanciju još nazivamo i naponska rezonancija.

13

Serijski RLC krug - vektorski dijagram

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



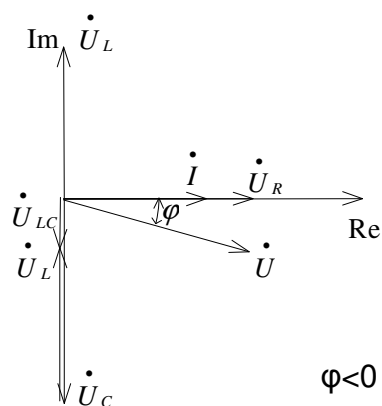
$\varphi > 0$ - induktivno ponašanje kruga

Struja \dot{I} je zajednička veličina za sve elemente ovoga kruga, pa je prikladno vektor struje uzeti za referentan (na realnoj osi) te od nje početi crtati vektorski dijagram.

14

Serijski RLC krug - vektorski dijagram

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

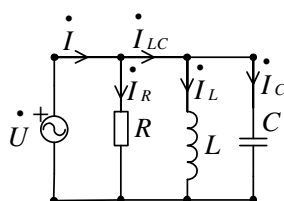


$\varphi < 0$ - kapacitivno ponašanje kruga

15

Paralelni RLC krug

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Zajednička veličina na svim elementima je napon.

$$\dot{U} = \dot{U}_R = \dot{U}_L = \dot{U}_C$$

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$$

B_L – induktivna vodljivost

B_C – kapacitivna vodljivost

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{U}}{R} = \dot{U} \cdot G$$

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}}{jX_L} = \dot{U} \cdot (-jB_L)$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{-jX_C} = \dot{U} \cdot (jB_C)$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \dot{U} \cdot \underline{Y}$$

16

Paralelni RLC krug - vektorski dijagram (opći slučaj)

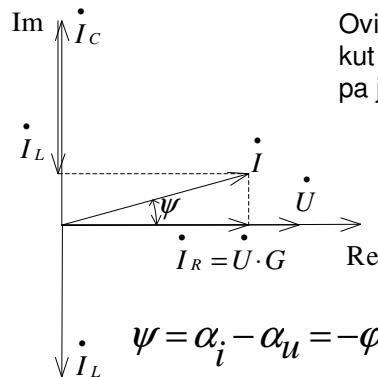


OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

$$\dot{U} \cdot \underline{Y} = \dot{U} \cdot G + \dot{U} \cdot (-jB_L) + \dot{U} \cdot (jB_C)$$

$$\underline{Y} = G + j(B_C - B_L) = G + jB \quad \text{admitancija kruga}$$

Imaginarni dio admitancije $B (=B_C - B_L)$ nazivamo **susceptancija**.



Ovisno o odnosu iznosa susceptancija B_C i B_L kut admitancije može biti pozitivan ili negativan, pa je krug tada kapacitivnog ili induktivnog tipa.

$$\dot{I}_C = \dot{U} \cdot jB_C$$

$$\dot{I}_R = \dot{U} \cdot G$$

$$\dot{I}_L = \dot{U} \cdot (-jB_L)$$

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$$

17

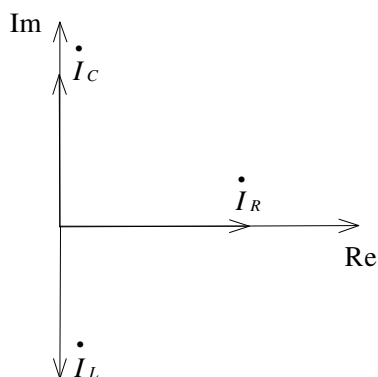
Paralelni RLC krug - vektorski dijagram (rezonancija)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

$B_L = B_C$ posebni slučaj

$\text{Im}\{\underline{Y}\} = 0$ REZONANCIJA



$$|I_L| = |I_C|$$

$$\dot{I} = \dot{I}_R \quad (\text{REZONANCIJA})!$$

U rezonanciji paralelnog RLC kruga (strujna rezonancija) struja je minimalna.

18

Paralelni RLC krug - rezonancija

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Paralelnu rezonanciju nazivamo i strujna rezonancija
- ♦ Sa strane izvora kao da je LC dio odspojen. Struje I_L i I_C teku, ali su suprotnog smjera i istog iznosa. Dobijemo titrajni krug gdje energija neprestano prelazi s L na C i obratno (akumulirana elektrostatska energija na kondenzatoru, pretvara se u magnetsku energiju i obratno).
- ♦ Uvjet rezonancije:

$$B_C = B_L$$

$$\omega C = \frac{1}{\omega L} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

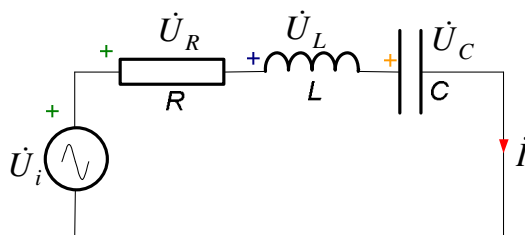
$\omega < \omega_0$ - krug se ponaša induktivno

$\omega > \omega_0$ - krug se ponaša kapacitivno

19

Frekvencijske ovisnosti - serijski RLC krug (naponski izvor)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



- ♦ Analizira se promjena veličina u krugu pri promjeni frekvencije od 0, preko ω_0 , do ∞

- Impedancija kruga je:

$$Z = R + jX = R + j(X_L - X_C) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

20

Frekvencijske ovisnosti - serijski RLC krug (naponski izvor)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- Pri promjeni frekvencije: $\underline{Z}(\omega) = |\underline{Z}(\omega)|e^{j\varphi}$

$$|\underline{Z}(\omega)| = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$U \neq f(\omega)$ - naponski izvor

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{X}{R}\right) = \arctg\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)}$$

$$I(\omega) = U \cdot Y(\omega)$$

$$R = \text{konst.} \quad X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

$$U_R(\omega) = R \cdot I(\omega)$$

$$X_L(\omega) = \omega \cdot L \quad X_C(\omega) = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

21

Frekvencijske ovisnosti - serijski RLC krug (rezonancija)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- U rezonanciji je: $X(\omega_0) = \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
 $Z(\omega_0) = R$

$$X_{L0} = \omega_0 L = \frac{1}{\sqrt{LC}} L = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

$$X_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$$

- ρ - valni otpor (γ - valna vodljivost)
 $\rho = \text{karakteristična impedancija kruga}$ $\rho = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\Omega)$

- Faktor dobrote kruga Q $Q = \frac{\rho}{R}$

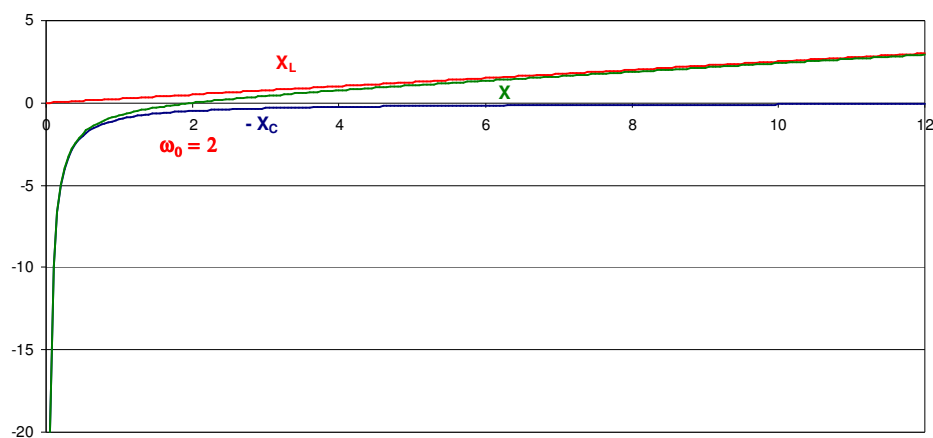
U rezonanciji je:

$$I_0 = \frac{U_i}{R} \quad U_{R0} = I_0 \cdot R = U_i \quad U_{L0} = I_0 X_{L0} = U_i \frac{\rho}{R} \quad U_{C0} = I_0 X_{C0} = U_i \frac{\rho}{R}$$

22

Frekvencijske karakteristike - reaktancije X_L , X_C i X

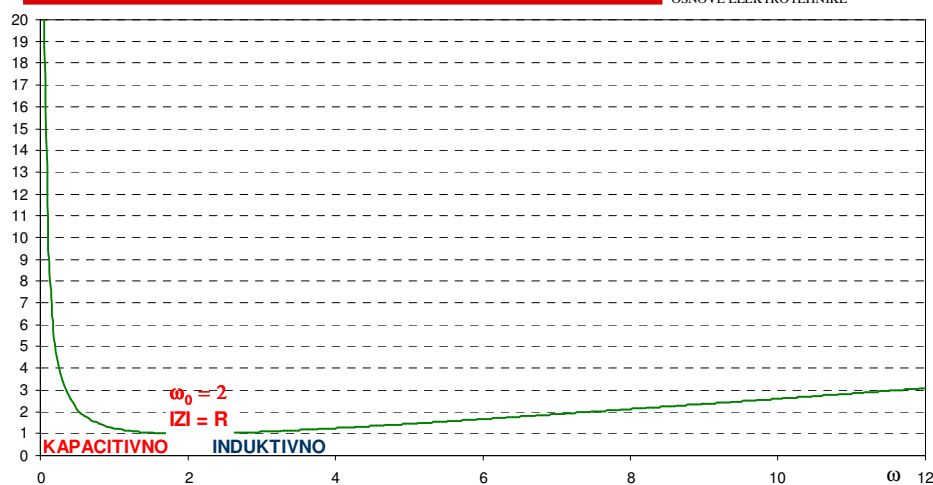
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



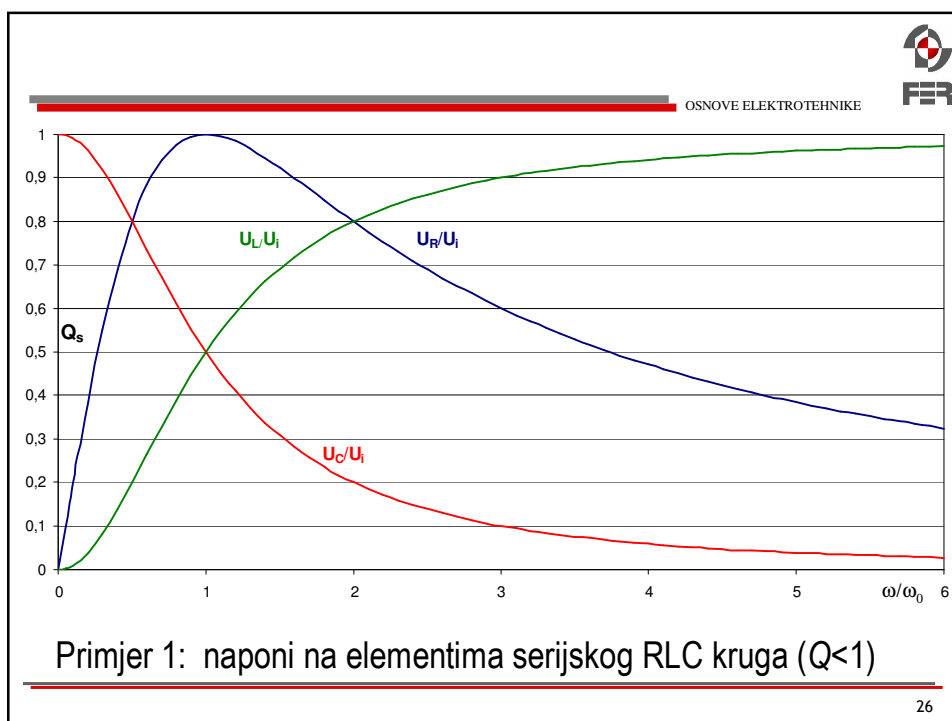
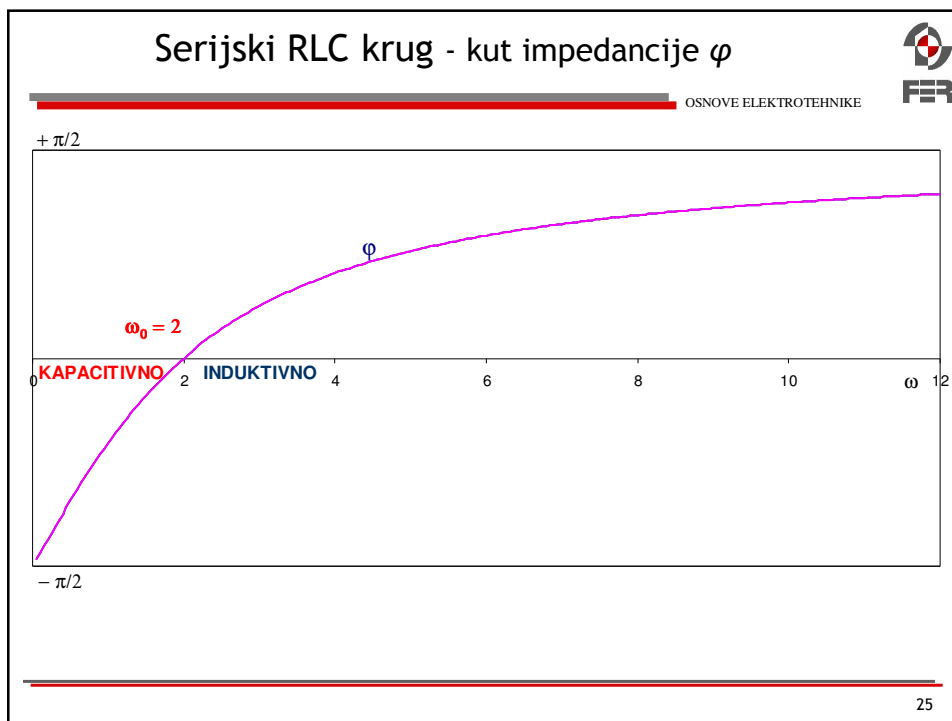
23

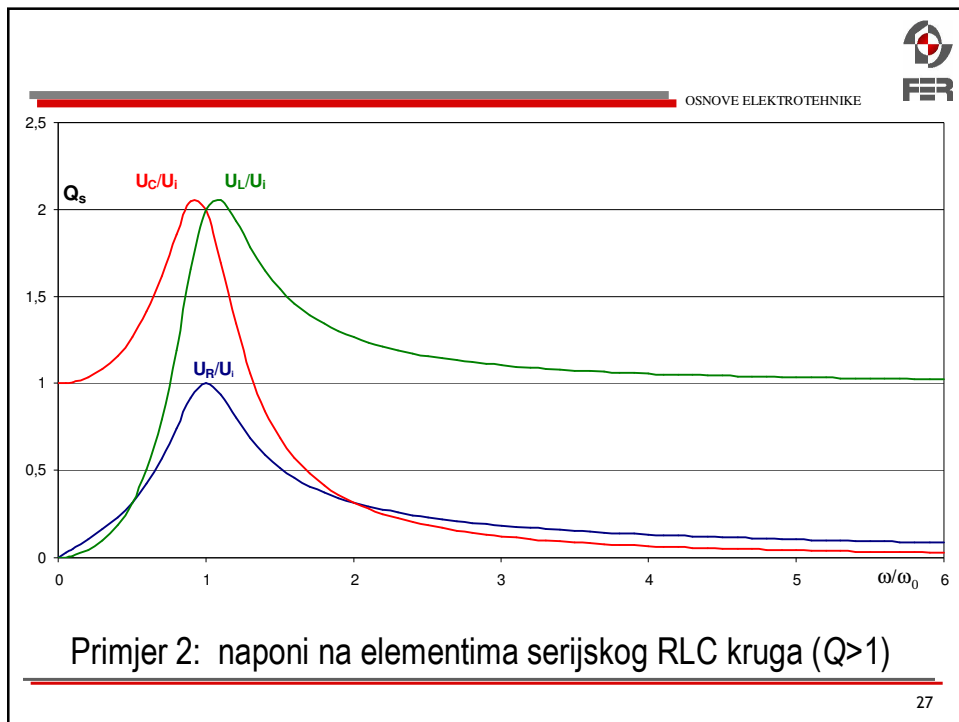
Serijski RLC krug - iznos impedancije Z


OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



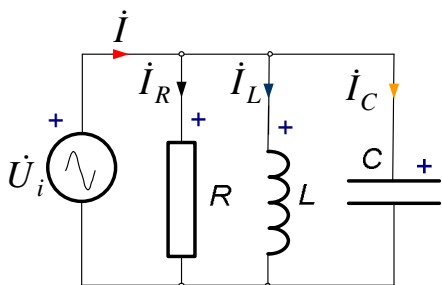
24





OSNOVE ELEKTROTEHNIKE 

Frekvencijske ovisnosti - paralelni RLC krug (naponski izvor)



■ Admitancija kruga je:

$$\underline{Y} = G + jB = G + j(B_C - B_L) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

♦ Analiziraju se veličine u krugu pri promjeni frekvencije od 0 do ∞

28

Frekvencijske ovisnosti - paralelni RLC krug (admitancija)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- Pri promjeni frekvencije: $G = \text{konst.}$ $B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L}$

$$\underline{Y}(\omega) = |\underline{Y}(\omega)|e^{j\psi}$$

$$|\underline{Y}(\omega)| = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

$$\psi(\omega) = \arctg\left(\frac{B}{G}\right) = \arctg\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}\right)$$

- Pri frekvenciji $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ imaginarni dio admitancije B jednak je nuli. Admitancija je realna ($\underline{Y}=G$) i u krugu je nastupila rezonancija.

29

Frekvencijske ovisnosti - paralelni RLC krug (rezonancija)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

U rezonanciji je: $B(\omega_0) = \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$ $\underline{Y}(\omega_0) = G = \frac{1}{R}$

$$B_{C0} = \omega_0 C = \frac{1}{\sqrt{LC}} C = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma$$

$$B_{L0} = \frac{1}{\omega_0 L} = \frac{\sqrt{LC}}{L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma$$

γ - valna vodljivost;

ρ - valni otpor (karakteristična impedancija) $\rho = \frac{1}{\gamma} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (\Omega)$

- Struje pri rezonanciji su:

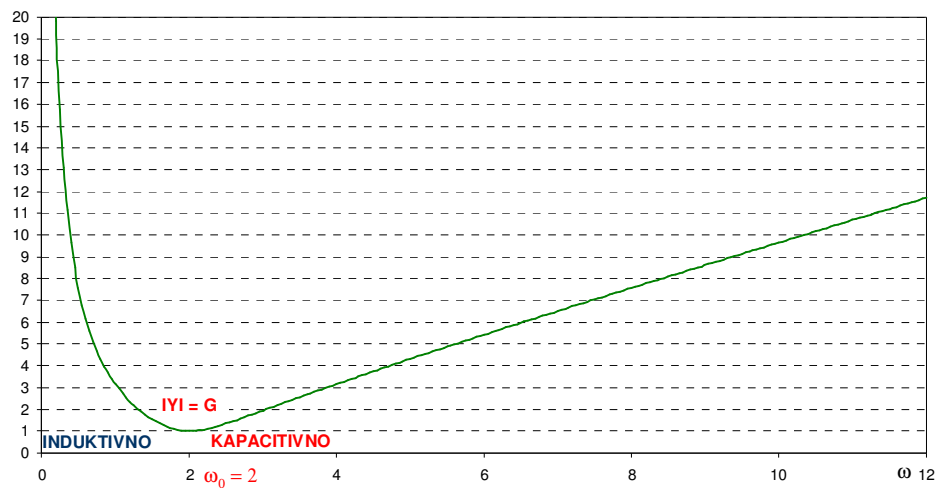
$$I_{R0} = I_0 = U_i G \quad I_{L0} = U_i B_{L0} = U_i \gamma \quad I_{C0} = U_i B_{C0} = U_i \gamma$$

30

Paralelni RLC krug - iznos admitancije Y



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

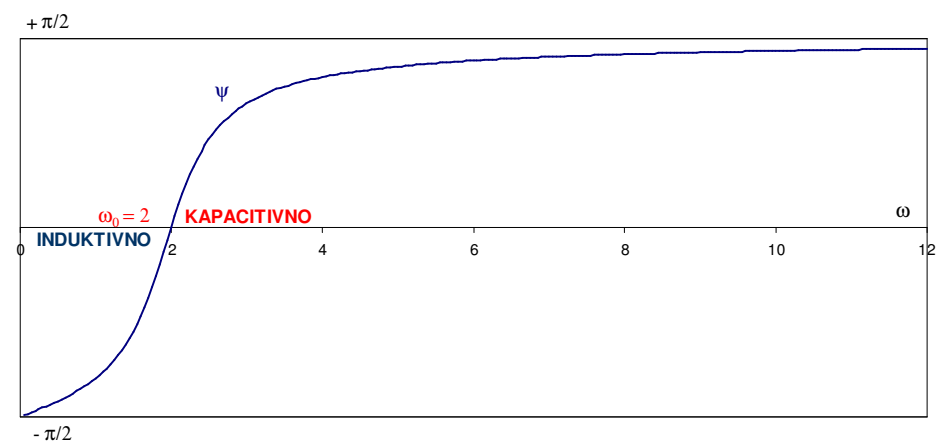


31

Paralelni RLC krug - kut admitancije ψ



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

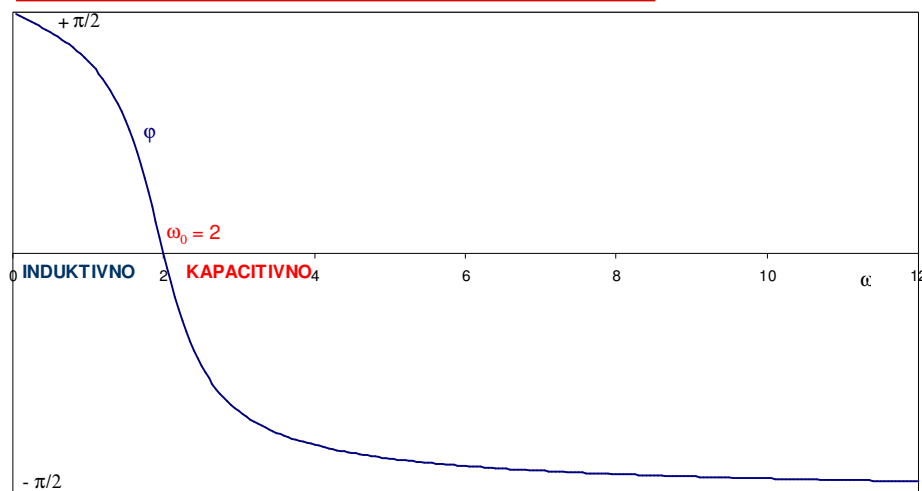


32

Paralelni RLC krug - kut impedancije φ



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



33

Frekvencijske ovisnosti - paralelni RLC krug (rezonancija)



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE

- ♦ Impedancija je:

$$\underline{Z}(\omega) = \frac{1}{\underline{Y}(\omega)} = \frac{G}{G^2 + B^2(\omega)} - j \frac{B(\omega)}{G^2 + B^2(\omega)} = |Z| e^{j\varphi}$$

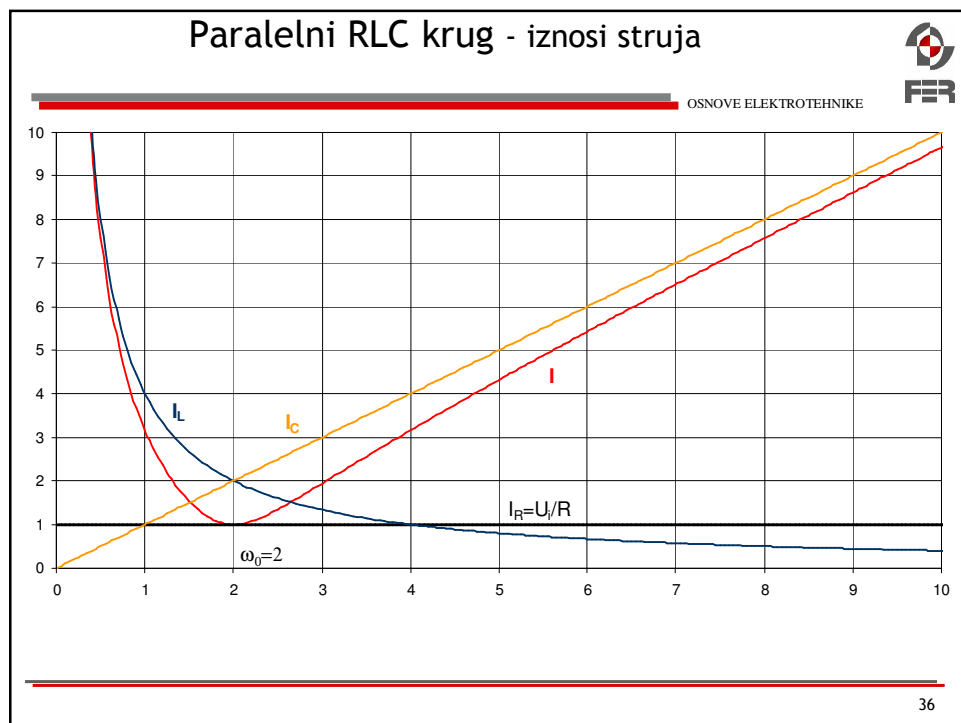
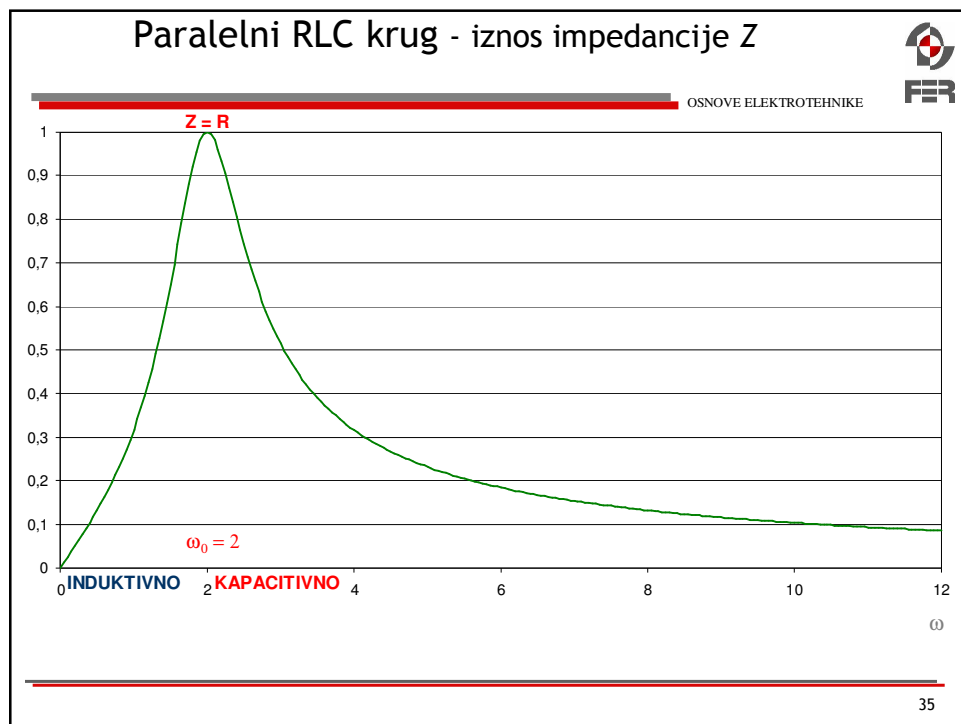
$$|Z(\omega)| = \frac{1}{|\underline{Y}(\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

$$\varphi = \arctg\left(-\frac{B}{G}\right) = -\psi$$

- ♦ Struja izvora je: $\dot{I} = \dot{U}_i \cdot \underline{Y} \ ; \ \frac{\dot{I}}{I_0} = \frac{\dot{U}_i \cdot \underline{Y}}{\dot{U}_i \cdot G} = \frac{\underline{Y}}{G}$

- ♦ u rezonanciji je iznos struje minimalan $I_0 = U_i G$ pa se ova rezonancija naziva i **antirezonancija**

34





Primjer 3.

U serijskom RLC spoju, priključenom na izvor napona stalne amplitude, a promjenjive frekvencije, paralelno serijskom spoju omskog otpora R i induktiviteta L spojen je voltmetar. Skicirajte kako bi se mijenjao napon voltmetra ako bi frekvencija napona izvora rasla od nule prema beskonačno velikoj vrijednosti.

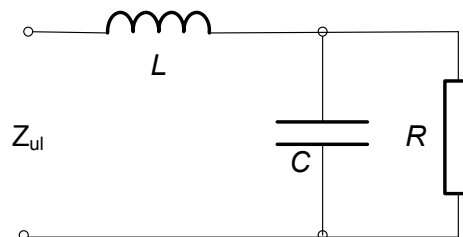
37



Primjer 4.

Za spoj prema slici ulazna impedancija kod frekvencije $\omega=0$ iznosi 5Ω , a kod rezonantne frekvencije je $2,5 \Omega$. Koliki je X_C ?

(Rješenje: $X_C=5 \Omega$)



38

Frekvencijske ovisnosti - Primjeri

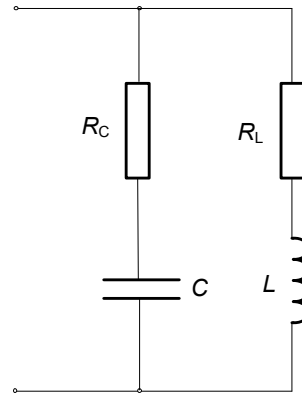
OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Primjer 5.

Odrediti rezonantnu frekvenciju za spoj na slici.
Postoji li mogućnost da ovaj spoj ne može doći u stanje rezonancije?

Postoji li mogućnost da spoj bude u rezonanciji na svim frekvencijama?



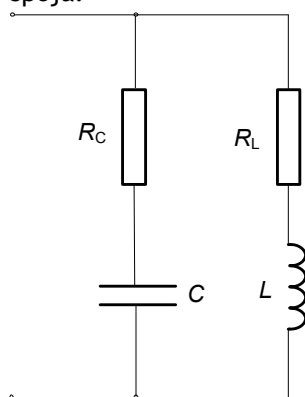
39

Frekvencijske ovisnosti - Primjer 5 (rješenje)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



Za odrediti rezonantnu frekvenciju, treba izraziti impedanciju ili admitanciju spoja:



$$\underline{Y} = \frac{1}{R_L + j\omega L} + \frac{1}{R_C - j\frac{1}{\omega C}}$$

$$\underline{Y} = \left(\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2} \right) + j \left(\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} \right)$$

Uvjet za rezonanciju je:

$$\text{Im}\{\underline{Y}\} = 0 \Rightarrow \frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2}$$

40

Frekvencijske ovisnosti - Primjer 5 (rješenje)

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE



$$\frac{\frac{1}{\omega_0 C}}{R_C^2 + \frac{1}{(\omega_0 C)^2}} = \frac{\omega_0 L}{R_L^2 + (\omega_0 L)^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - \rho^2}{R_C^2 - \rho^2}} ; \quad \rho^2 = \frac{L}{C}$$

Da bi se ω_0 bio realan broj (uvjet za rezonanciju) mora biti:

$$R_L^2 > \frac{L}{C} \text{ i } R_C^2 > \frac{L}{C} \quad \text{ili} \quad R_L^2 < \frac{L}{C} \text{ i } R_C^2 < \frac{L}{C}$$

Ako ovi uvjeti nisu zadovoljeni, rezonancija ne može nastupiti!

Posebni slučaj: $R_L^2 = R_C^2 = \frac{L}{C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{0}{0}$ (neodređeni oblik)

U ovom slučaju ω_0 je neodređeno, tj.
spoj rezonira na svim frekvencijama!