SINUSOIDNO PROMJENJIVE VELIČINE
I
NAČELA RJEŠAVANJA KRUGOVA IZMJENIČNE STRUJE U KOMPLEKSNOM PODRUČJU

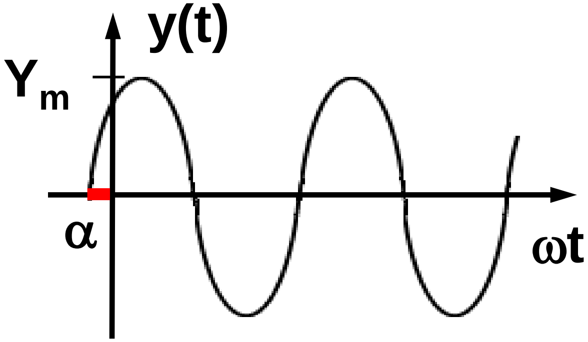
(pripremio prof.dr.sc. Armin Pavić)

6. predavanje iz OE

Sadržaj:

- Opći oblik i osnovne značajke sinusne funkcije - sinusoide
- Predstavljanje sinusnih funkcija vektorima
- Pojam i oblici prikaza kompleksnih brojeva
- Prikaz rotirajućeg vektora u kompleksnoj ravnini, pojmovi rotirajućeg i mirnog vektora te fazora struje i napona
- Impedancija i admitancija
- Jednadžbe Kirchhoffovih zakona u kompleksnom području
- Postupak rješavanja el. krugova u kompleksnom području

Opći oblik i osnovne značajke sinusne funkcije - sinusoide



- Opći izraz za vremenski promjenjivu sinusnu funkciju (sinusoidu) na slici lijevo jest:

$$y(t) = Y_m \sin(\omega t + \alpha)$$

- Osnovni elementi sinusne funkcije:
  - *kut*, ili *argument*, **(ωt+α)**, koji se raste u vremenu sa stalnom *kutnom brzinom* ω, od početne vrijednosti α (*početni kut* - u trenutku t=0);
  - *tjemena vrijednost*, ili *amplituda*, Y_m
- Periodičnost sinusne funkcije: $\sin(\alpha)=\sin(\alpha+k\cdot 2\pi)$ $(k\in N)$
  - Vrijednosti sinusne funkcije se ponavljaju nakon svakog povećanja kuta za 2π. To se dogodi tijekom vremena od jedne *periode T*, pa je stoga (stalna) brzina promjene kuta u vremenu $\omega=2\pi/T$ ($[\omega]$=rad/s), gdje je broj perioda u jednoj sekundi $f=1/T$ frekvencija sinusoide ($[f]$=1/s=Hz)

Još neka važna svojstva sinusne funkcije

- $\sin(\pi/2)=1$, $\sin(3\pi/2)=-1$, $\sin(0+k\pi)=0$ ($k\in N$);
- $\sin(\alpha+\pi/2)=\cos(\alpha)$, tj. $\sin(\alpha)=\cos(\alpha-\pi/2)$;
- $\sin(\alpha-\pi/2)=-\cos(\alpha)$, tj. $\sin(\alpha)=-\cos(\alpha+\pi/2)$;
- Zbroj sinusnih funkcija (jednakih frekvencija) jest sinusna funkcija (iste frekvencije);
- Razlika dviju sinusnih funkcija (jednakih frekvencija) jest sinusna funkcija (iste frekvencije);
- Derivacija sinusne funkcije jest sinusna funkcija:

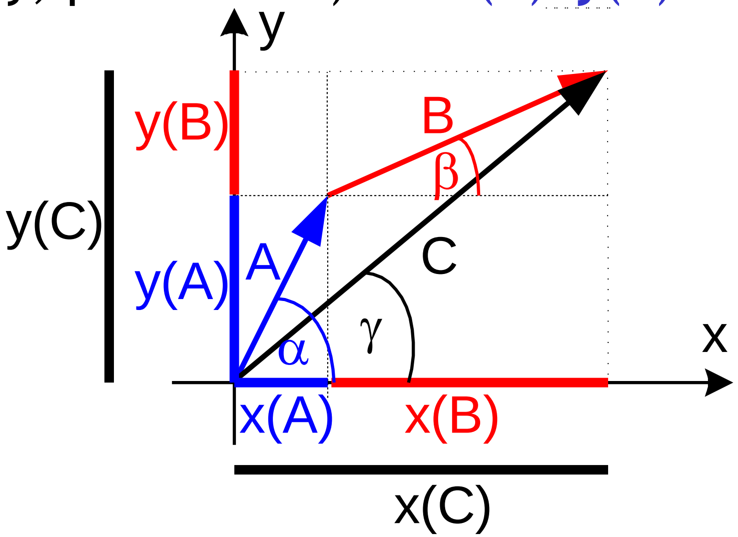
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\sin(\alpha)=\cos(\alpha)=\sin\left(\alpha+\pi/2\right)$$

- Integral sinusne funkcije jest sinusna funkcija:

$$\int \sin(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha=-\cos(\alpha)=\sin\left(\alpha-\pi/2\right)$$

Predstavljanje sinusnih funkcija vektorima

- U pravokutnom (XY) koordinatnom sustavu, bilo koji vektor **A** može se prikazati kao zbroj svojih komponenata u smjerovima x i y (projekcije vektora na apscisnu os x i na ordinatnu os y, prema slici): **A**=**x**(A)+**y**(A)



Komponente vektora **A** mogu se izraziti ovako: x(**A**)=A$\cos\alpha$ i y(**A**)=A$\sin\alpha$

Jednako se mogu izraziti i komponente vektora **B**: x(**B**)=B$\cos\beta$ i y(**B**)=B$\sin\beta$

Zbroj vektora **A** i **B** daje vektor **C** s komponentama x(**C**)=C$\cos\gamma$ i y(**C**)=C$\sin\gamma$

Pritom vrijedi: y(**C**)=y(**A**)+y(**B**), tj.

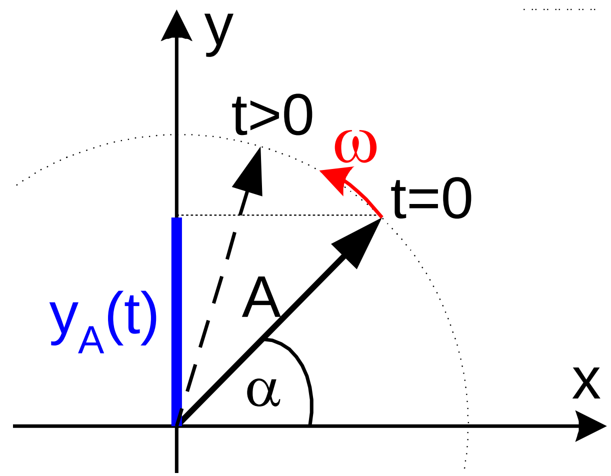
$$A\sin\alpha + B\sin\beta = C\sin\gamma$$

Zbrajanje sinusnih funkcija, umjesto složenim trigonometrijskim formulama, može se ovako obaviti jednostavnim zbrajanjem vektora!

- Pokažite da isto vrijedi i za oduzimanje sinusnih funkcija!

Sveza sinusoide i rotirajućeg vektora

- Ako kut vektora **A** prema apscisnoj osi x, od neke početne vrijednosti α raste u vremenu sa stalnom kutnom brzinom ω, taj se kut može se izraziti vremenskom funkcijom ($\omega t+\alpha$)



- Vektor **A** tu rotira stalnom brzinom u smjeru suprotnom okretanju kazaljki sata, a njegova komponenata y_A u smjeru osi y (projekcija vektora na os y) mijenja se u vremenu po funkciji

$$y_A(t)=A\sin(\omega t+\alpha)$$

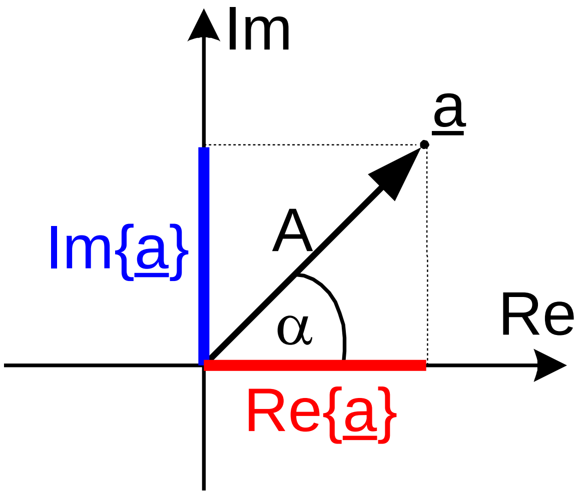
- Ovakav ***rotirajući vektor*** svojom komponentom y predstavlja opći oblik vremenski promjenjive sinusne funkcije – sinusoide. Stalna brzina kruženja vektora ω, naziva se još i *kružna frekvencija* ($\omega=2\pi f$).

Matematička osnova:
Pojam i način prikaza kompleksnih brojeva

- Kompleksni broj $\underline{a}$ može se općenito predstaviti kao zbroj jednog realnog i jednog imaginarnog broja: $\underline{a}=b+jc$

  gdje je $b=\mathrm{Re}\{\,\underline{a}\,\}$, $c=\mathrm{Im}\{\,\underline{a}\,\}$, a $j=\sqrt{-1}$ (imaginarna jedinica)

- Kompleksni broj $\underline{a}$ predstavlja jednu točku u *kompleksnoj ravnini* desno



- Osim svojim koordinatama na Re i Im osi (Re i Im dio kompleksnog broja), točka u kompl. ravnini određena je i duljinom svoje spojnice s ishodištem A i kutem α koji ona čini s realnom osi (*modul* i *kut* kompl. broja)

$$\underline{a}=\mathrm{Re}\{\underline{a}\}+j\mathrm{Im}\{\underline{a}\}=A\cos\alpha+jA\sin\alpha=Ae^{j\alpha}=A\angle\alpha$$

Sveza ovih parametara je: $A=\sqrt{\mathrm{Re}(\underline{a})^2+\mathrm{Im}(\underline{a})^2}$ $\qquad \alpha=\arctan\dfrac{\mathrm{Im}(\underline{a})}{\mathrm{Re}(\underline{a})}$

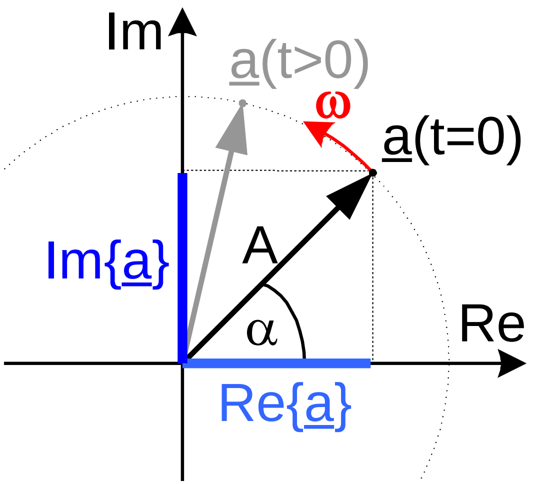
Matematička osnova:
Računanje s kompleksnim brojevima

- **Zbrajanje i oduzimanje** kompleksnih brojeva (algebarski oblik)
  - Realni (odnosno imaginarni) dio zbroja (ili razlike) jednak je zbroju (ili razlici) realnih (odnosno imaginarnih) dijelova dvaju brojeva.
- **Množenje** kompleksnih brojeva (eksponencijalni, ili polarni oblik)
  - Modul umnoška jednak je umnošku modula dvaju brojeva;
  - Kut umnoška jednak je zbroju kutova dvaju brojeva.
- **Dijeljenje** kompleksnih brojeva (eksponencijalni, ili polarni oblik)
  - Modul kvocijenta jednak je kvocijentu modula dvaju brojeva;
  - Kut kvocijenta jednak je razlici kutova dvaju brojeva.
- **Deriviranje** kompleksnog broja (po α) = **množenje** broja s **j**
  - Množenje s j = povećanje kuta (rotacija oko ishodišta) za $+\pi/2$
- **Integriranje** kompleksnog broja (po α) = **dijeljenje** broja s **j**
  - Dijeljenje s j = promjena kuta (rotacija oko ishodišta) za $-\pi/2$

Rotirajući vektor u kompleksnoj ravnini

- Svaka točka (kompleksni broj a) u kompleksnoj ravnini može se predstaviti vektorom s hvatištem u ishodištu. Duljina vektora A jednaka je modulu, a kut vektora α jednak je kutu kompleksnog broja a u točki na vrhu vektora.

- Raste li kut s vremenom od početne vrijednosti α stalnom kutnom brzinom ω, tada vektor rotira u smjeru suprotnom od kazaljki sata (+ smjer) sa stalnom kružnom frekvencijom ω. Taj rotirajući vektor određuje kompleksni broj **a**, tako da je



$$\underline{\mathbf{a}} = A\cos(\omega t+\alpha) + jA\sin(\omega t+\alpha) = Ae^{j(\omega t+\alpha)}$$

- Imaginarni dio kompleksnog broja **a**, koji predstavlja rotirajući vektor, mijenja se u vremenu kao opća sinusna funkcija – sinusoida:

$$\mathrm{Im}\{\,\underline{\mathbf{a}}\,\} = A\sin(\omega t+\alpha)$$

- Sinusoidno promjenjivi naponi i struje mogu se predstaviti kompleksnim brojem (vektorom u k. ravnini), što pojednostavnjuje računanja s njima!

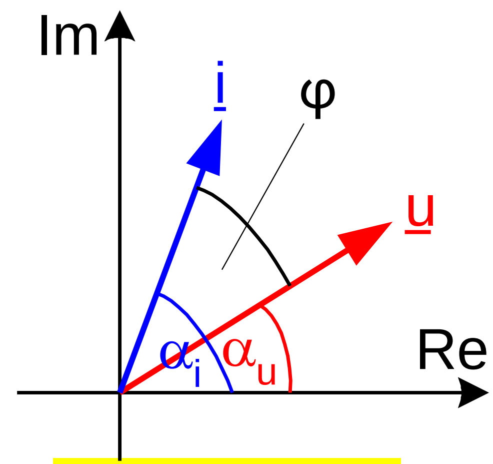
Predstavljanje sinusoidnih napona i struja u kompleksnom području

- U kompleksnoj ravnini ***rotirajući vektor***

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t+\alpha_u)} = U_m e^{j\alpha_u} \cdot e^{j\omega t}$$

predstavlja napon $u(t)=U_m \sin(\omega t+\alpha u)$: $\mathbf{u(t)=Im\{ \underline{u} \}}$

gdje dio kompleksnog broja $U_m e^{j\alpha_u} = \underline{U}_m$ određuje početni položaj (u t=0) vektora ($\underline{U}_m$=***mirni vektor***), dok dio $e^{j\omega t}$ određuje rotaciju vektora $\underline{u}$.



$\varphi = \alpha_u - \alpha_i$
fazni pomak

- Slično, struju $i(t)=I_m \sin(\omega t+\alpha i)$ predstavlja vektor

$$\underline{i} = I_m e^{j(\omega t+\alpha_i)} = I_m e^{j\alpha_i} \cdot e^{j\omega t}$$

gdje je $I_m e^{j\alpha_i} = \underline{I}_m$ mirni vektor (maksimalne vrijednosti) struje.

- Amplitudni i fazni odnos veličina (određen mirnim vektorima) ne mijenja se pri rotaciji vektora (iste kružne frekvencije), pa se računanja u kompleksnom području mogu obavljati samo s mirnim vektorima, a dio koji određuje rotaciju ($e^{j\omega t}$) dodaje se mirnom vektoru rezultata prije njegova prebacivanja u vremensko područje.

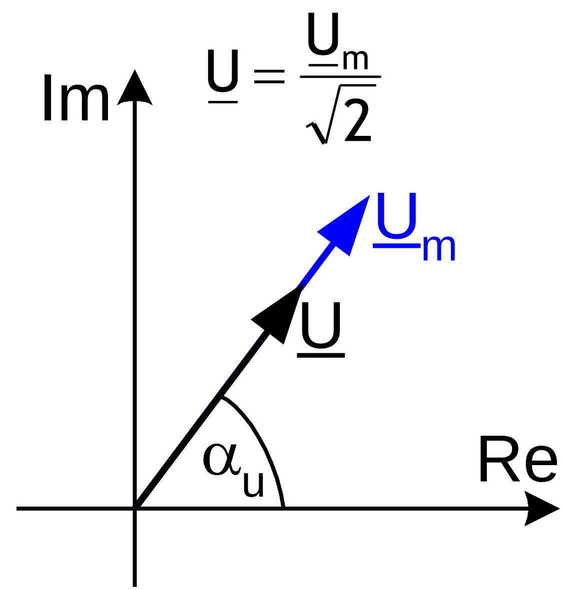
Efektivna vrijednost sinusoidne struje (i napona)

- Efektivna vrijednost vremenski promjenjive struje $i(t)$ jednaka je vrijednosti stalne, istosmjerne struje I koja bi na istom otporu R, u jednakom vremenu, stvorila jednaku količinu topline. Isto vrijedi za napon
- Efektivna vrijednost struje, ili napona, označava se velikim slovom bez indeksa, ili s indeksom "$_{\mathrm{ef}}$", tj., $I=I_{\mathrm{ef}}$ ($U=U_{\mathrm{ef}}$)
- Efektivna vrijednost sinusoidne struje (ili napona) je $\sqrt{2}$ puta manja od maksimalne (vršne) vrijednosti, tj.,

$$I = \frac{I_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}} \qquad U = \frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{2}}$$

Mirni vektori efektivne vrijednosti el. veličina

- U krugovima izmjenične struje u pravilu rabimo efektivne vrijednosti struja i napona, koje u kompleksnom području predstavljamo mirnim *vektorima efektivne vrijednosti*
- ***Vektor efektivne vrijednosti*** jest mirni vektor, koji ima isti kut (početni položaj u času t=0) kao mirni vektor maksimalne vrijednosti, a od njega je manji $\sqrt{2}$ puta.



- Vektore efektivne vrijednosti označavamo velikim slovom struje ili napona, npr. $\underline{U}=Ue^{j\alpha_u}=U\angle\alpha_u$ ili $\underline{I}=Ie^{j\alpha_i}=I\angle\alpha_i$.
- Smjer mirnih vektora u kompleksnoj ravnini ne određuje njihov prostorni smjer, nego kut (fazni pomak), pa se vektore struje i napona stoga još naziva i ***fazori***. Da bi ih razlikovali od ostalih kompleksnih brojeva, označava ih se i s *točkom iznad slova*.

Primjeri

1. Odredite kompleksne izraze za: a) rotirajući vektor; b) mirni vektor maksimalne vrijednosti; i c) mirni vektor efektivne vrijednosti napona zadanog kao: $u(t)=311\cos(314t)$ V
2. Izrazite fazor struje zadane kao $i(t)=14{,}14\sin(314t+30^\circ)$ A u: a) eksponencijalnom; b) polarnom; i c) pravokutnom (algebarskom) obliku kompleksnog broja.
3. Kolika je veličina ove struje u trenutku $t=0$?
4. Koliki je fazni pomak između struje i napona iz gornjih primjera? Koja od ovih veličina prethodi, a koja zaostaje u fazi?

- Što bi dobili dijeljenjem fazora napona s fazorom struje iz gornjih primjera?

Rješenja primjera

1. a) $\underline{u} = 311\ e^{\,j(314t+\pi/2)}$ V;

   b) $\underline{U}_m = 311\ e^{\,j\pi/2}$ V;

   c) $\underline{U} = 220\ e^{\,j\pi/2}$ V.

2. Izrazite fazor struje zadane kao $i(t)=14,14\sin(314t+30^\circ)$ A u:

   a) $\underline{I} = 10\ e^{\,j\,30^\circ}$ A;

   b) $\underline{I} = 10\ e\ \underline{\angle 30^\circ}$ A;

   c) $\underline{I} = 8,66 + j\,5$ A .

3. $i(t=0)=14,14\sin(30^\circ)$ A = 7,07 A .

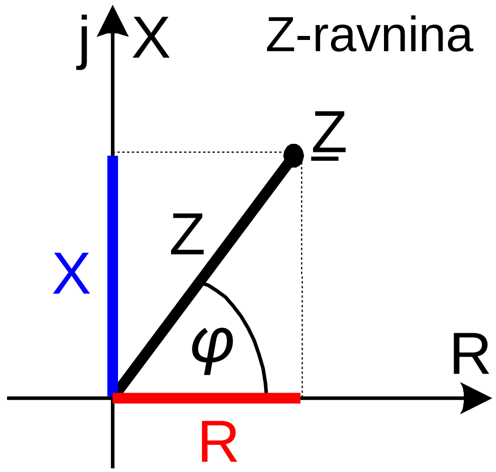
4. 60°; napon prethodi u fazi.

❖ Dobili bi kompleksni broj.

Pojam i značajke impedancije

- Omjer kompleksnih izraza napona i struje nekog elementa daje kompleksni broj koji predstavlja značajku toga elementa koju nazivamo ***impedancija*** i označavamo sa $\underline{Z}$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U\angle\alpha_u}{I\angle\alpha_i} = \frac{U}{I}\angle(\alpha_u - \alpha_i) = Z\angle\varphi$$



- $Z=U/I$ jest *iznos impedancije*, ili *prividni otpor* ([Z]=Ω), a

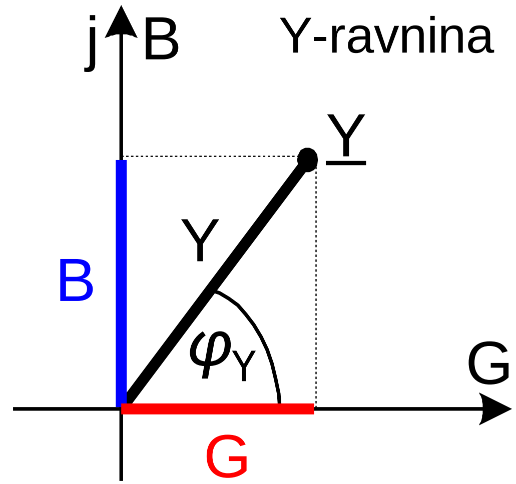
  $\varphi=\alpha_u-\alpha_i$ je *kut impedancije* koji pokazuje *fazni pomak napona prema struji*.

- Impedancija se prikazuje u posebnoj kompleksnoj (Z) ravnini s imaginarnim dijelom X i realnim dijelom impedancije R

$$\underline{Z} = Z\angle\varphi = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi = R + jX$$

Pojam i značajke admitancije

- Recipročna vrijednost impedancije, ili omjer kompleksnih izraza struje i napona nekog elementa daje kompleksni broj koji predstavlja značajku toga elementa što ju nazivamo ***admitancija*** i označavamo s $\underline{Y}$



$$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \frac{\underline{I}_m}{\underline{U}_m} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I\angle\alpha_i}{U\angle\alpha_u} = \frac{I}{U}\angle(\alpha_i - \alpha_u) = Y\angle\varphi_Y$$

- $Y=I/U=1/Z$ je *iznos admitancije*, ili *prividna vodljivost* ([Y]=S)

  $\varphi_Y=\alpha_i-\alpha_u=-\varphi$ je *kut admitancije* koji pokazuje *fazni pomak struje prema naponu*.

- Admitancija se prikazuje u posebnoj kompleksnoj (Y) ravnini s imaginarnim dijelom B i realnim dijelom admitancije G

$$\underline{Y} = Y\angle\varphi_Y = Y\cos\varphi_Y + j\,Y\sin\varphi_Y = G + jB$$

Primjer: Impedancije osnovnih elemenata

- **Otpor R:** $i(t)=I_m\sin(\omega t)$ $u(t)=R\cdot i(t)=R\cdot I_m\sin(\omega t)=U_m\sin(\omega t)$

  Fazori: $\underline{I}=I\angle 0;$ $\underline{U}=U\angle 0=R\cdot I\angle 0;$

  Impedancija: $$\underline{\mathbf{Z}}_R=\frac{U\angle 0}{I\angle 0}=\frac{R\cdot I}{I}\angle 0=R\angle 0=\mathbf{R}$$

- **Induktivitet L:**

  $$i(t)=I_m\sin(\omega t)\qquad u(t)=L\frac{di(t)}{dt}=\omega L I_m\cos(\omega t)=\omega L I_m\sin(\omega t+90^\circ)$$

  Fazori: $\underline{I}=I\angle 0;$ $\underline{U}=U\angle 90^\circ=\omega L\cdot I\angle 90^\circ;$

  Impedancija: $$\underline{\mathbf{Z}}_L=\frac{U\angle 90^\circ}{I\angle 0}=\frac{\omega L\cdot I}{I}\angle 90^\circ=\omega L\angle 90^\circ=j\boldsymbol{\omega}\mathbf{L}=jX_L$$

- **Kapacitet C:**

  $$u(t)=U_m\sin(\omega t)\qquad i(t)=C\frac{du(t)}{dt}=\omega C U_m\cos(\omega t)=\omega C U_m\sin(\omega t+90^\circ)$$

  Fazori: $\underline{U}=U\angle 0;$ $\underline{I}=I\angle 90^\circ=\omega C\cdot U\angle 90^\circ;$

  Impedancija: $$\underline{\mathbf{Z}}_C=\frac{U\angle 0}{I\angle 90^\circ}=\frac{U}{\omega C\cdot U}\angle -90^\circ=\frac{1}{\omega C}\angle -90^\circ=-j\frac{1}{\boldsymbol{\omega}\mathbf{C}}=-jX_C$$

Kirchhoffovi zakoni u kompleksnom području

- Pri rješavanju krugova izmjenične struje u kompleksnom području, *Kirchhoffovi zakoni vrijede za fazore* struja i napona, kako slijedi:

- **Kirchhofov zakon za struje:** $\sum_{alg} \underline{I} = 0$ ili $\sum \underline{I}_{ul} = \sum \underline{I}_{iz}$

  Algebarski zbroj fazora struja svih grana spojenih u neki čvor jednak je nuli (algebarski znači da se fazorima ulaznih struja daje jedan predznak (+), a fazorima izlaznih struja drugi (−). Ili: *U čvoru je jednak zbroj fazora ulaznih i izlaznih struja.*

- **Kirchhofov zakon za napone:** $\sum_{alg} \underline{U} = 0$ ili $\sum \underline{U}_{akt} = \sum \underline{U}_{pas}$

  Algebarski zbroj fazora svih napona u nekoj petlji el. kruga jednak je nuli (fazori napona koji u smjeru obilaska petlje rastu imaju predznak +, a fazori napona koji padaju imaju −. Ili: *U petlji je jednak zbroj fazora aktivnih i pasivnih napona.*

Primjer: Kirchhoffovi zakoni u kompleksnom području

Kirchhofov zakon za napone (KZN)

petlje 1, 2 i 3 :

1 $\underline{U}_1-\underline{I}_1 R_1+\underline{I}_5(-j/\omega C_1)+\underline{I}_4(j\omega L_1)=0$

2 $\underline{U}_2-\underline{I}_2 R_2+\underline{I}_6(-j/\omega C_2)-\underline{I}_5(-j/\omega C_1)=0$

3 $\underline{U}_3-\underline{I}_4(j\omega L_1)-\underline{I}_6(-j/\omega C_2)-\underline{I}_3(j\omega L_2)=0$

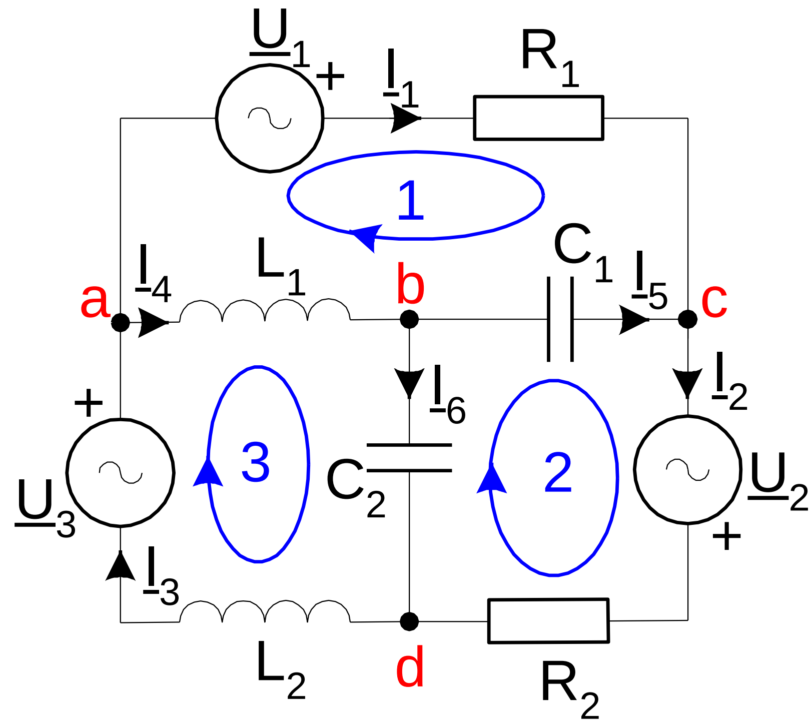
Kirchhofov zakon za struje (KZS)

čvorovi a, b i c :

a $\underline{I}_3-\underline{I}_1-\underline{I}_4=0$

b $\underline{I}_4-\underline{I}_5-\underline{I}_6=0$

c $\underline{I}_1+\underline{I}_5-\underline{I}_2=0$



- Kako bi dopunili jednadžbe KZN za petlje 1 i 3 da su induktiviteti L_1 i L_2 povezani međuinduktivitetom M (s točkicama na lijevim stranama oba induktiviteta?

Postupak rješavanja krugova izmjenične struje u kompleksnom području

1. *Preslikavanje* prikaza zadanih struja i napona *iz vremenskog u kompleksno područje*, na slijedeći način:
   A. Zadane struje i naponi izraze se kao sinusne funkcije te se odrede njihove efektivne vrijednosti (maksimalne vrijednosti se podijele s $\sqrt{2}$)
   B. Izraze se fazori pojedinih zadanih veličina, tako da je iznos fazora jednak efektivnoj vrijednosti, a kut fazora početnom kutu veličine.
2. Izražavanje impedancija pojedinih pasivnih elemenata kruga
3. Postavljanje jednadžbi i računanje nepoznatih struja i napona u kompleksnom području.
4. *Preslikavanje* kompleksnih prikaza izračunatih struja i napona *u vremensko područje*, na slijedeći način:
   A. Množenjem fazora s faktorom $\sqrt{2}$, pa zatim s $e^{j\omega t}$ odrede se rotirajući vektori izračunatih struja i napona.
   B. Izraze se *vremenske funkcije* traženih veličina, kao *imaginarni dijelovi* njihovih izračunatih *rotirajućih vektora*.