Les arbres binaires de recherche

Arbres binaires de Recherche ABR

- Les ABR sont des structures de données qui peuvent supporter des opérations courantes sur des ensembles dynamiques.
  - ex: rechercher, minimum, maximum, prédécesseur….
- Cette structure de données est maintenue sous forme d'arbre binaire avec racine.
- Un ABR a pour structure logique un arbre binaire.

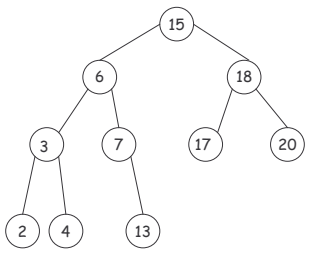
Clés

- Chaque nœud d'un ABR est associé à une clé
  - on supposera que chaque clé est numérique
  - Il faut que 2 clés soient comparables.

Propriétés des ABR

- soit x un nœud d'un ABR
- x a au plus 2 fils
  - fils gauche
  - fils doit
- si y est un nœud du sous arbre gauche de x alors:
  - clé(y)<clé(x)
- si y est un nœud du sous arbre droit de x alors:
  - clé(y)>clé(x)

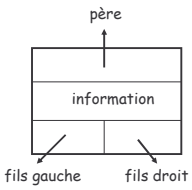
Exemple d'ABR



Description d'un noeud

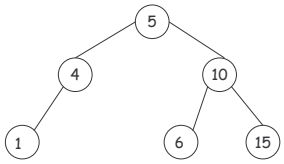
- Un ABR est donc composé de nœuds qui peuvent être créés de manière dynamique
- Si un nœud n'a pas de père, le pointeur est mis à NIL

```
Enregistrement Nœud {
    cle : Entier;
    gauche : ↑Nœud;
    droit : ↑Nœud;
    pere : ↑Nœud;
}
```



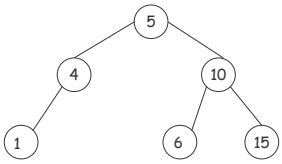
Affichage des nœuds d'un ABR dans l'ordre croissant des clés

- Pour afficher dans l'ordre :
  - Parcours en profondeur d'abord infixe.



Recherche d'une clé minimum ou d'une clé maximum

- On sait que la valeur maximum se trouve dans le sous arbre droit de la racine
- Il faut donc chercher le fils droit du fils droit du fils droit….jusqu'à une feuille.



Maximum d'un ABR: Pseudo code

```
ABR-Max(Nœud x): Entier
Début
     tant que x.droite ≠ NIL
          x ← x.droite;
     fin tant que
     retourner x
Fin
```

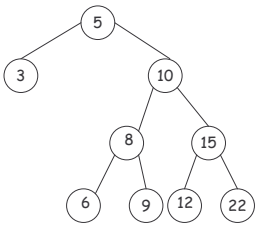
Recherche

- parcours dans l'arbre, depuis la racine jusqu'à l'élément recherché (ou une feuille si l'élément n'existe pas) en branchant à chaque nœud en fonction de la valeur de la clé

```
recherche(o: ↑Nœud, c: clé) : booléen
début
  si o ≠ NIL alors
    si la_clé(o) = c retourne VRAI;
    sinon si la_clé(o) > c retourne recherche(o.filsg, c)
    sinon retourne recherche(o.filsd, c)
    fsi
  sinon retourne FAUX;
fin
```

Successeur et prédécesseur

- Soit x un nœud
- on cherche y tel que
  - clé(y)>clé(x)
- et tel que pour tout nœud z
  - z≠x et z≠y
  - on n'ait pas clé(y)>clé(z)>clé(x)

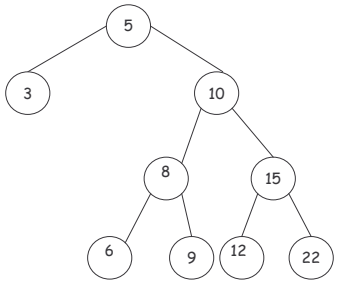


12 est le successeur de 10
22 est le successeur de 15
5 est le successeur de 3

Successeur et prédécesseur

- Le successeur d'un nœud x est le nœud possédant la plus petite clé dans le sous-arbre droit si x en possède un
- sinon c'est le nœud qui est le 1er ancêtre de x dont le fils gauche est aussi un ancêtre de x (ou x lui-même)

Successeur et prédécesseur Exemple



Successeur d'un ABR

```
ABR-Successeur(Nœud x): Noeud
Début
Y : Nœud;
     si x.droite ≠ NIL
          retourner ABR_MIN(x.droite);
     fin si
     y ← x.pere;
     tant que y ≠ NIL et x == y.droite
        x ← y;
        y ← y.pere;
     fin tant que
     retourner y;
Fin
```

Insertion et suppression d'un nœud dans l'ABR

- Les opérations d'insertion et de suppression d'un noeud modifient l'ensemble dynamique représenter par l'ABR
- La structure dynamique doit être modifiée tout en gardant une structure d'ABR

Insertion

- 2 techniques :
  - Insertion à la racine l'ABR
    - Modification de la structure de l'ABR
  - Insertion aux feuilles de l'ABR
    - Modification de la hauteur de l'ABR

Ajout d'une feuille

- recherche de la clé de l'élément que l'on essaye d'insérer
  - **si** élément existant **alors** rien à faire
  - **sinon** la recherche s'est arrêtée sur un arbre vide, qu'il suffira de remplacer par l'élément à insérer
- complexité moyenne de PCE(T)
- complexité au pire de h(T)

Insertion d'un nœud aux feuilles

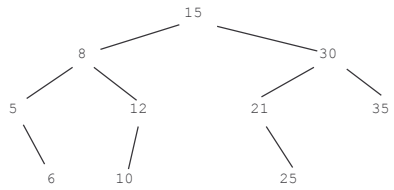
```
ABR-Inserer(T : Noeud, z : Noeud)
Entrées : T la racine de l'ABR, Z le nouveau nœud à inserér
Sorties : T l'arbre dans lequel on a inséré z.
Début
   x,y : Nœud;

   y ← NIL;
   x ← T;
   tant que x ≠ NIL
      y ← x;
      si z.clé < x.clé
           x ← x.gauche;
      sinon
           x ← x.droit;
      fin si
   fin tant que
   z.pere ← y
   si y == NIL
      T ← z
   sinon
      si z.clé < y.clé
         y.gauche ← z;
      sinon
         y.droit ← z;
      fin si
   fin si
Fin
```

Insertion d'un nœud aux feuilles

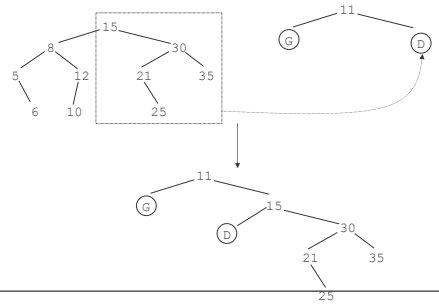
```
ABR-Inserer(T : Noeud, z : Noeud) : Noeud
Entrées : T la racine de l'ABR, Z le nouveau nœud à inserér
Sorties : T l'arbre dans lequel on a inséré z.
Début
   si (T == NIL)
      retourner z;
   sinon
      si (z.clé ≤ T.clé)
          T.gauche ← ABR-Inserer(T.gauche,z);
          retourner T;
      sinon
          T.droit ← ABR-Inserer(T.droit,z);
          retourner T;
      fin si
   fin si
Fin
```

Ajout à la racine : exemple (1)

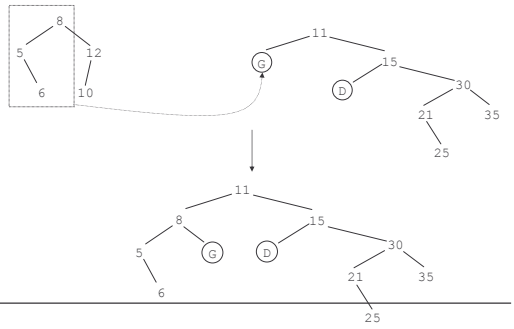
- Ajout de 11 à l'arbre suivant :



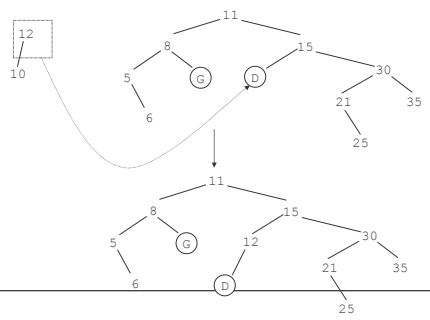
Ajout à la racine : exemple (2)



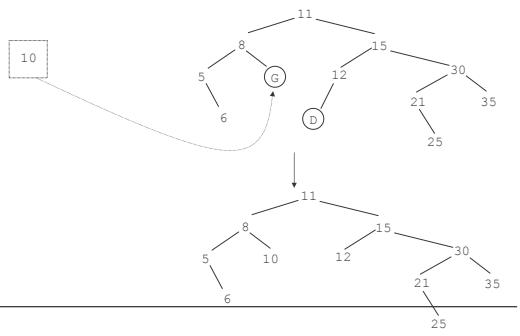
Ajout à la racine : exemple (3)



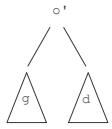
Ajout à la racine : exemple (4)



Ajout à la racine : exemple (5)



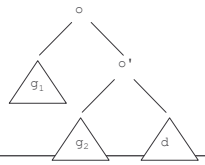
Généralisation (1)



- Soit un arbre `a = <o', g, d>`
- Ajouter le nœud `o` à `a`, c'est construire l'arbre `<o, a1, a2>` tel que :
  - `a1` contienne tous les nœuds dont la clé est inférieure à celle de `o`
  - `a2` contienne tous les nœuds dont la clé est supérieure à celle de `o`

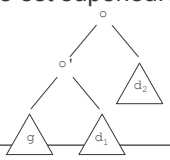
Généralisation (2)

- si la_clé(`o`) < la_clé(`o'`)
  - `a1 = g1` et `a2 = <o', g2, d>`
- `g1` = nœuds de `g` dont la clé est inférieure à la clé de `o`
- `g2` = nœuds de `g` dont la clé est supérieure à la clé de `o`



Généralisation (3)

- si la_clé(`o`) > la_clé(`o'`)
  - `a1 = <o', g, d1>` et `a2 = d2`
- `d1` = nœuds de `d` dont la clé est inférieure à la clé de `o`
- `d2` = nœuds de `d` dont la clé est supérieure à la clé de `o`

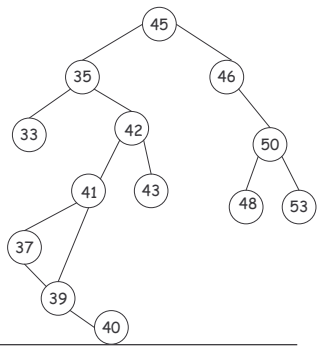


Suppression

- Recherche du nœud
  - si feuille, suppression simple
  - si nœud interne au sens large, suppression du nœud et raccordement du sous-arbre
  - si nœud interne, suppression du nœud et remplacement soit par
    - le nœud du sous-arbre gauche dont la clé est la plus grande
    - le nœud du sous-arbre droit dont la clé est la plus petite
- Complexité
  - Complexité moyenne de PC(a)
  - complexité au pire de h(a)

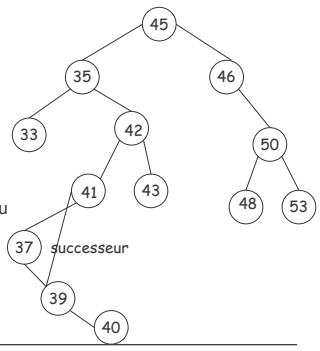
Suppression d'un nœud

1. Suppression d'une feuille
2. Suppression d'un nœud avec 1 enfant
3. Suppression d'un nœud avec 2 enfants



Suppression d'un nœud

- Suppression d'un nœud avec 2 enfants
  - écraser le nœud avec son successeur
  - le fils droit du successeur
    - devient le fils gauche du père du successeur



Suppression d'un nœud

```
Supprimer_ABR(Nœud T, Nœud z)
Entrées : Un ABR T et un nœud Z
Sortie : Un ABR T dans lequel le nœud z a été supprimé
Début
     si T ≠ NIL
          si (z.clé < T.clé)
               retourner (Supprimer_ABR(T.gauche, z));
          sinon si (z.clé > T.clé)
                    retourner(Supprimer_ABR(T.droit,z));
               sinon si (T.gauche == NIL)
                         retourner (T.droit);
                    sinon si (T.droit == NIL)
                              retourner (T.gauche)
                         sinon
                              T.clé ←successeur(T.gauche,z);
                           retourner (Supprimer_ABR(T.gauche,T.clé));
                              fin si
                        fin si
                   fin si
     fin si
     retourner T;
fin
```

Notes sur la complexité

- Les différentes opérations ont une complexité au pire de h(a)
  - $\lfloor \log_2 n \rfloor \leq h(a) \leq n-1$
  - Pour les arbres complets, complexité en $O(\log_2 n)$
  - Pour les arbres dégénérés, complexité en O(n)
- La complexité dépend de la forme de l'arbre, qui dépend des opérations d'ajout et de suppression
  - ajout d'éléments par clés croissantes → arbre dégénéré
  - en moyenne, la profondeur est de $2 \log_2 n$
  - but = équilibrer les arbres en hauteur

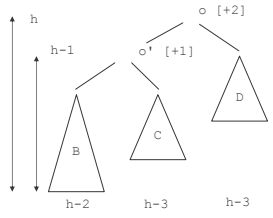
Arbres H-équilibrés / arbres AVL

- Définitions
  - déséquilibre(a) = h(g(a)) – h(d(a))
  - un arbre a est **H-équilibré** si pour tous ses sous-arbres b, on a :
    - déséquilibre(b) ∈ {-1, 0, 1}
  - un **arbre AVL** est un arbre de recherche qui est H-équilibré
    - les propriétés et les opérations définies sur les arbres de recherche peuvent s'appliquer aux arbres AVL

Opérations de rotation

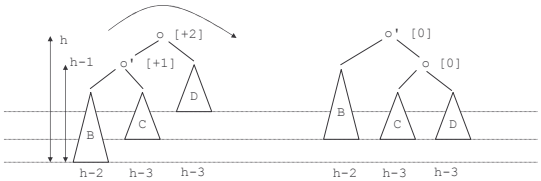
- Le problème est d'essayer de rééquilibrer un arbre déséquilibré afin de le ramener à un arbre H-équilibré.
- Cas d'un déséquilibre +2
  - on suppose que les sous-arbres droit et gauche sont H-équilibrés
  - hauteur du sous-arbre gauche supérieure de 2 à la hauteur du sous-arbre droit
  - opération à pratiquer dépend du déséquilibre du sous-arbre gauche qui peut être +1, 0, -1

Déséquilibre +1 sur le fils gauche



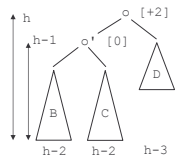
- rotation à droite :
  - o′ devient la racine de l'arbre
  - Le fils droit de o′ devient le fils gauche de o
  - o devient le fils droit de o′

Déséquilibre +1 sur le fils gauche



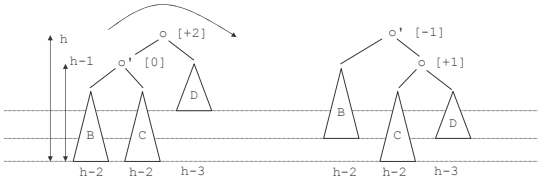
- Si l'arbre A est un arbre binaire de recherche, le résultat est un arbre binaire de recherche
  - le déséquilibre de l'arbre résultant est nul
  - arbre H-équilibré dont la hauteur est diminuée d'1

Déséquilibre 0 sur le fils gauche



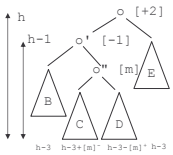
- rotation à droite :
  - o′ devient la racine de l'arbre
  - Le fils droit de o′ devient le fils gauche de o
  - o devient le fils droit de o′

Déséquilibre 0 sur le fils gauche



- Si l'arbre A est un arbre binaire de recherche, le résultat est un arbre binaire de recherche
  - le déséquilibre de l'arbre résultant est de -1
  - arbre H-équilibré dont la hauteur est identique

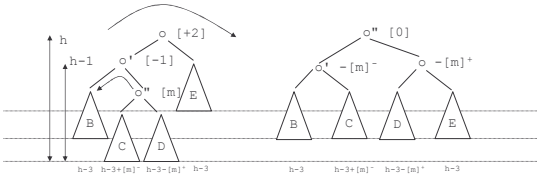
Déséquilibre -1 sur le fils gauche



Avec m le déséquilibre de o"
- $[m]^+ = \max(0, m)$
- $[m]^- = \min(0, m)$

- rotation gauche-droite
  - Rotation à gauche sur le fils gauche
  - Rotation à droite sur la racine

Déséquilibre -1 sur le fils gauche



- Si l'arbre A est un arbre binaire de recherche, le résultat est un arbre binaire de recherche
  - le déséquilibre de l'arbre résultant est de 0
  - arbre H-équilibré dont la hauteur est diminuée d'1

Opérations de rééquilibrage

arbre origine	opération	résultat	hauteur
+1 +2	rotation droite	0 0	diminution
0 +2	rotation droite	-1 +1	identique
-1 +2 -1	rotation gauche droite	+1 0 0	diminution
-1 +2 0	rotation gauche droite	0 0 0	diminution
-1 +2 +1	rotation gauche droite	0 0 -1	diminution
-2 -1	rotation gauche	0 0	diminution
-2 0	rotation gauche	-1 +1	identique
-2 -1 +1	rotation droite gauche	+1 0 0	diminution
-2 +1 0	rotation droite gauche	0 0 0	diminution
-2 +1 +1	rotation droite gauche	0 0 -1	diminution

Opération d'ajout

- Principe :
  - ajout du nœud par l'opération ajouter-f
  - rééquilibrage de l'arbre en partant de la feuille et en remontant vers la racine
- Complexité :
  - complexité au pire en $O(\log_2 n)$ en nb de comparaisons
  - au plus une rotation
  - expérimentalement : en moyenne une rotation pour 2 ajouts

Opération de suppression

- Principe :
  - suppression du nœud par l'opération sur les arbres de recherche
  - rééquilibrage de l'arbre en partant du nœud supprimé et en remontant vers la racine
- Complexité :
  - complexité au pire en $O(\log_2 n)$ en nb de comparaisons et en nb de rotations
  - il peut y avoir plus d'une rotation
  - expérimentalement : en moyenne une rotation pour 5 suppressions

Problème

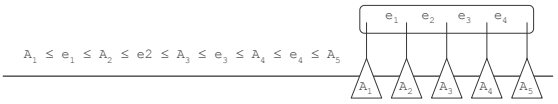
- si gestion de grands ensembles d'éléments
  - Impossible de conserver toutes les infos en mémoire centrale
  - Utilisation du disque dur
    - découpé en secteurs
    - secteurs regroupés en blocs = groupes de secteurs consécutifs transférés en une seule opération

Constats

- taille d'un élément généralement inférieure à un secteur de disque
  - stockage de plusieurs éléments dans un secteur ou bloc disque
- temps d'accès disque important par rapport aux opérations de traitement en mémoire centrale
  - limiter au maximum le nombre d'accès disque nécessaires pour effectuer une recherche
  - essayer de faire en sorte que les nœuds voisins soient stockés dans un même bloc disque

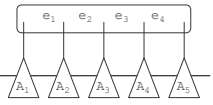
Arbres généraux de recherche

- généralisation des arbres binaires de recherche
  - pour chaque nœud, plusieurs valeurs de clés permettant de trier les nœuds fils
  - nombre de clés nécessaires = nb de fils – 1
  - soient e_1, e_2, ..., e_n, ces clés
    - elles doivent être triées pour pouvoir faire effectivement une partition sur les éléments des descendants



Opération de recherche

- Identique à celle des arbres binaires sauf que pour chaque nœud
  - soit la clé c cherchée est dans la liste des valeurs du nœud → fin
  - soit il faut parcourir l'ensemble des clés pour savoir dans quel sous-arbre se trouve la clé recherchée (si $e_2 < c < e_3$, alors si l'élément est dans l'arbre, il sera dans A_3)



Complexité

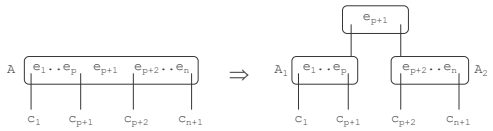
- Opération fondamentale
  - recherche du rang dans un nœud
  - lecture d'un nœud
- Complexité en O(h(A))
- Limitations
  - le nombre d'éléments d'un nœud doit être borné
  - la lecture d'un nœud doit se faire en une seule fois

Opération de rééquilibrage

- But = conserver le degré des nœuds borné
  - **éclatement** d'un arbre A dont le degré est trop important en deux sous-arbre A_1 et A_2 séparés par un élément e issu de la liste de la racine de A
  - **regroupement** d'un arbre A avec l'un de ses frères gauche et droit quand son degré est trop faible
  - **répartition** entre deux sous-arbres voisins lorsque leurs degrés sont trop différents

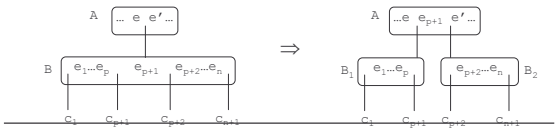
Eclatement à la racine

- éclatement de A en A_1 et A_2 séparés par e, issu de A
- augmente d'1 la hauteur de l'arbre



Eclatement d'un nœud

- éclatement de B en B_1 et B_2 séparés par e, issu de B
- construction de A' avec B remplacé par B_1 et B_2, et e inséré à la racine A
- le degré de A augmente de 1

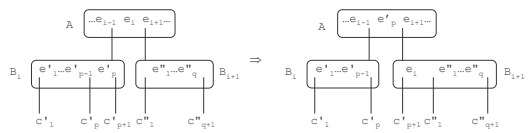


Regroupement

- Inverse de l'opération d'éclatement
- regroupement de deux sous-arbres avec la valeur qui les sépare

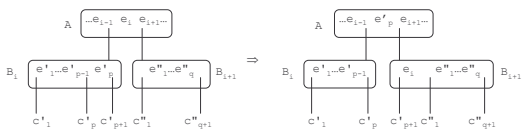
Répartition (1)

- soient deux sous-arbres B_i et B_{i+1} séparés par e_i
  - transfert depuis l'arbre dont le degré est le plus élevé
  - transfert de gauche à droite
    - faire descendre e_i dans B_{i+1}
    - le remplacer par le dernier élément de B_i
    - transférer le dernier sous-arbre de B_i dans B_{i+1}



Répartition (2)

- le degré de B_i diminue de 1
- le degré de B_{i+1} augmente de 1
- le degré de A est inchangé



Arbres balancés

- Arbres généraux de recherche permettent de stocker un ensemble d'éléments et de les retrouver par leur clé
- Propriété :
  - si le degré des nœuds est borné, la complexité de l'opération de recherche est au pire proportionnelle à la hauteur de l'arbre
  - important de minimiser la hauteur de l'arbre
  - pour les arbres binaires, propriété d'être H-équilibré

Définition

- un arbre balancé, ou B-arbre, d'ordre m est un arbre général de recherche tel que toutes les feuilles soient au même niveau, tout nœud contienne au plus 2m éléments et tout nœud sauf la racine contienne au moins m éléments

Propriétés

- minorant de n
  - racine à au moins 1 élément
  - tout nœud a au moins m éléments
  - $n \geq 1 + 2m(1 + (m+1) + (m+1)^2 + ... + (m+1)^{h-1}) = 2(m+1)^h - 1$
- majorant de n
  - tout nœud a au plus M éléments
  - $n \leq M(1 + (M+1) + (M+1)^2 + ... + (M+1)^h) = (M+1)^{h+1} - 1$
- la hauteur d'un arbre de ce type contenant n éléments est telle que

$$\log_{M+1}(n+1) - 1 \leq h \leq \log_{m+1}\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

Propriétés

- On peut vérifier que les opérations d'éclatement, de regroupement et de répartition permettent de maintenir les propriétés sur le degré des nœuds
- En pratique, m est compris entre 20 et 500, suivant la taille d'un élément et la taille d'un bloc mémoire
- pour m=100
  - 8 millions pour une hauteur de 2
  - 1,6 milliards d'éléments pour une hauteur 3

Opérations d'ajout

- on recherche l'élément dans l'arbre
- on rajoute l'élément dans la bonne feuille s'il n'existait pas
- si la feuille dans laquelle on insère le nouvel élément contient moins de 2m-1 éléments, on obtient un B-arbre
- sinon, c'est un arbre de recherche qu'il faut corriger pour retrouver un B-arbre

Eclatement à la remontée

- si la feuille dans laquelle on insère le nouvel élément contient déjà 2m éléments
  - on la fait éclater en deux feuilles de degré m
  - si la feuille n'est pas la racine, cela fait remonter un élément chez le père
  - si le père contient déjà 2m éléments, il faut l'éclater à son tour, et ainsi de suite jusqu'à un ascendant contenant moins de 2m éléments ou jusqu'à la racine, elle-même éventuellement éclatée si elle contient déjà m élément, ce qui augmente la taille de l'arbre de 1
- Inconvénient
  - nécessite de conserver le chemin depuis la racine jusqu'à la feuille

Eclatement à la descente

- si on doit faire l'adjonction dans un sous-arbre qui contient 2m éléments
  - on le fait éclater
  - on continue l'adjonction dans celui des deux sous-arbres qui convient
- inconvénients
  - les sous-arbres peuvent devenir de degré m-1
  - on fait des éclatements qui sont peut-être inutiles

Suppression

- on recherche l'élément dans l'arbre
- si il se trouve dans une feuille, il est extrait de la liste de la feuille
- si il se trouve dans un nœud qui n'est pas une feuille, il doit être remplacé par un élément qui continue de faire la séparation entre les deux sous-arbres qui l'encadrent
  - soit i le rang de l'élément à supprimer, i et i+1 les rangs des sous-arbres, on peut choisir soit :
    - le + grand élément du sous-arbre i, le dernier élément de sa feuille la + à droite
    - le + petit élément du sous-arbre i+1, le premier élément de sa feuille la + à gauche
- Après suppression, il faut éventuellement corriger l'arbre pour en faire un B-arbre, en partant du sous-arbre i ou i+1 dans lequel a été choisi l'élément remplaçant l'élément supprimé, et en remontant vers le sommet par regroupement ou répartition

Complexité (1)

- Le degré des nœuds est borné
  - le traitement d'un nœud a une durée constante
- Les opérations de recherche, d'ajout et de suppression ont une complexité :
  - exprimée en terme d'opérations de traitement d'un nœud
  - proportionnelle à la hauteur des arbres
  - donc $\leq \log_{m+1}((n+1)/2)$

Complexité (2)

- Le traitement d'un nœud nécessite
  - un accès disque (lecture ou écriture)
  - le traitement du nœud en mémoire centrale (recherche, ajout, suppression dans une liste de taille au plus 2m)
- Remarques
  - même si le traitement du nœud est en O(m), il restera inférieur au temps d'accès disque (10000 fois plus lents que les accès à la mémoire centrale)
  - but de la diminution de la hauteur de l'arbre = diminuer le nb d'accès disques

Complexité (3)

- Lors d'un ajout, il peut y avoir éclatement de nœuds en cascade jusqu'à la racine
  - 3 accès disque à chaque éclatement
  - nb d'éclatements borné par la hauteur de l'arbre
  - en moyenne 1 éclatement pour 1,38 ajouts
- Facteur important = *taux de remplissage*
  - rapport entre le nb d'éléments dans le B-arbre et le nb d'éléments qu'il pourrait contenir au maximum
    - compris entre 0,5 et 1
    - en moyenne de 0,7