

LABORATOR #8

EX#1 Fie $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in (0, \infty)$. Creați un fișier în Python® prin care să se genereze un număr aleator X distribuit normal $N(\mu, \sigma^2)$

- (a) $X = \mu + \sqrt{-2\sigma^2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$, cu U_1, U_2 numere generate independent aleator uniform în $[0, 1]$;
- (b) $X = \mu + \sqrt{-2\sigma^2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$, cu U_1, U_2 numere generate independent aleator uniform în $[0, 1]$;
- (c) folosind algoritmul de generare din Python®.

Creați un fișier în Python® prin care

- (d) să se realizeze N simulări pentru fiecare dintre cazurile (a), (b), respectiv (c);
- (e) să se afișeze în aceeași figură histrogramele corespunzătoare simulărilor realizate la (d), pentru fiecare dintre cazurile (a), (b), respectiv (c);
- (f) să se afișeze în aceeași figură de la (e) graficul funcției de densitate $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$;
- (g) să se estimeze numeric media și varianța variabilei aleatoare distribuită normal $N(\mu, \sigma^2)$ folosind simulările de la (d), pentru fiecare dintre cazurile (a), (b), respectiv (c).

EX#2 Fie $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in (0, \infty)$, X un număr aleator distribuit normal $N(\mu, \sigma^2)$. Fie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Creați un fișier în Python® prin care să se genereze un număr aleator Y

- (a) $Y = \alpha + X$;
- (b) $Y = \beta X$;
- (c) $Y = \alpha + \beta X$.

Creați un fișier în Python® prin care

- (d) să se realizeze N simulări pentru fiecare dintre cazurile (a), (b), respectiv (c);
- (e) să se afișeze în câte o figură histrograma corespunzătoare simulărilor realizate la (d) pentru cazul (a), (b) și (c), împreună cu graficul funcției de densitate $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{[x-(\alpha+\mu)]^2}{2\sigma^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\beta\mu)^2}{2\beta^2\sigma^2}}$, respectiv $\frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2\sigma^2}} e^{-\frac{[x-(\alpha+\beta\mu)]^2}{2\beta^2\sigma^2}}$.

EX#3 Fie X_1, X_2, \dots, X_n variabile aleatoare reale independente și identic distribuite, de medie $\mu := \mathbb{E}[X_1]$ și varianță finită $\sigma^2 := \text{Var}(X_1)$. Fie

$$Z := \sqrt{n} \left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu \right).$$

Creați un fișier în Python® prin care:

- (a) să se genereze N simulări pentru Z ;
- (b) să se afișeze în aceeași figură histograma corespunzătoare simulărilor realizate la
(a) și graficul funcției de densitate $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

EX#4 Fie mersul aleator $(Y_n)_{n \geq 0}$ ce pornește din 0 și se deplasează la fiecare pas +1 sau -1 cu probabilitate $p \in [0, 1]$, respectiv $1 - p$, i.e.

$$Y_0 = 0,$$

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n, \quad X_n \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Creați un fișier în Python® prin care

- (a) să se simuleze o traiectorie a mersului aleator corespunzătoare primilor n pași și să se afișeze într-o figură graficul traiectoriei;
- (b) să se simuleze N poziții (finale) ale mersului aleator după primii n pași;
- (c) să se afișeze în aceeași figură histograma corespunzătoare simulărilor realizate la
(b) și graficul funcției de densitate $\frac{1}{\sqrt{2\pi n \sigma^2}}e^{-\frac{(x-n\mu)^2}{2n\sigma^2}}$, unde $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = Var(X_1)$.

EX#5 Fie mersul aleator $(Y_n)_{n \geq 0}$

$$Y_0 = 0,$$

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n, \quad X_n \sim \begin{pmatrix} -1/\sqrt{0.5} & 0 & 1/\sqrt{0.5} \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Creați un fișier în Python® prin care

- (a) să se simuleze o traiectorie a mersului aleator corespunzătoare primilor n pași și să se afișeze într-o figură graficul traiectoriei;
- (b) să se simuleze N poziții (finale) ale mersului aleator după primii n pași;
- (c) să se afișeze în aceeași figură histograma corespunzătoare simulărilor realizate la
(b) și graficul funcției de densitate $\frac{1}{\sqrt{2\pi n \sigma^2}}e^{-\frac{(x-n\mu)^2}{2n\sigma^2}}$, unde $\mu = \mathbb{E}[X_1]$, $\sigma^2 = Var(X_1)$;
- (d) comparați rezultatele cu cele obținute la Ex#4 corespunzătoare lui $p = 0.5$.

Indicații Python®: `numpy`, `numpy.random`, `scipy.stats`, `matplotlib.pyplot`,
`matplotlib.pyplot.hist`