LABORATOR #3

EX#1 Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Creaţi un fişier în Python® prin care:

(a) să se estimeze numeric (frecvenţionist) probabilitatea ca un număr x generat aleator uniform în $[a, b]$ să aparţină intervalului $[c, d] \subseteq [a, b]$;

(b) să se apeleze (a) pentru $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ aleşi arbitrar.

EX#2 Fie $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 2}$. Creaţi un fişier în Python® prin care:

(a) să se estimeze numeric (frecvenţionist) probabilitatea ca (x, y) să aparţină domeniului $[c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, unde x este un număr generat aleator uniform în $[a_1, b_1]$, iar y este un număr generat aleator uniform în $[a_2, b_2]$, independent de x;

(b) să se apeleze (a) pentru $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 2}$, aleşi arbitrar;

(c) să se reprezinte grafic simulările realizate la (b).

EX#3 Fie $B(\mathbf{0}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ \|\mathbf{x}\|_2 \leq r\}$ (i.e. bila $d-$dimensională centrată în $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^d$ şi de rază $r > 0$). Creaţi un fişier în Python® prin care, folosind faptul că $B(\mathbf{0}, r) \subset [-R_1, R_1] \times ... \times [-R_d, R_d]$, $R_i \geq r$, $i = \overline{1, d}$,

(a) să se estimeze numeric (frecvenţionist) aria discului $B(\mathbf{0}, r) \subset \mathbb{R}^2$;

(b) să se apeleze (a) pentru $r = 1$;

(c) să se estimeze numeric (frecvenţionist) volumul bilei $B(\mathbf{0}, r) \subset \mathbb{R}^d$;

(d) să se apeleze (c) pentru $r = 1$ şi $d = \overline{1, 10}$;

(e) să se reprezinte grafic simulările realizate la (b) şi (d) pentru cazul $d = 2$.

EX#4 Fie discul eliptic $E(\mathbf{0}, a, b) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ (i.e. discul eliptic centrat în $\mathbf{0} = (0, 0)$ de semiaxe $a > 0$ şi $b > 0$). Creaţi un fişier în Python® prin care, folosind faptul că $E(\mathbf{0}, a, b) \subset [-\tilde{a}, \tilde{a}] \times [-\tilde{b}, \tilde{b}]$, $\tilde{a} \geq a$, $\tilde{b} \geq b$,

(a) să se estimeze numeric (frecvenţionist) aria discului eliptic $E(\mathbf{0}, a, b)$;

(b) să se apeleze (a) pentru a şi b aleşi arbitrar;

(c) să se reprezinte grafic simulările realizate la (b).

EX#5 Fie discul $B(\mathbf{P}, r) \subset \mathbb{R}^2$ centrat în $\mathbf{P} = (2, 2)$ de rază $r = \sqrt{2}$ şi discul eliptic $E(\mathbf{0}, a, b)$ centrat în $\mathbf{0} = (0, 0)$ de semiaxe $a = 3$ şi $b = 2$. Creaţi un fişier în Python® prin care, folosind faptul că $B(\mathbf{P}, r) \cap E(\mathbf{0}, a, b) \subset [-4, 4] \times [-4, 4]$,

(a) să se estimeze numeric (frecvenţionist) aria $B(\mathbf{P}, r) \cap E(\mathbf{0}, a, b)$;

(b) să se reprezinte grafic simulările realizate la (a).

EX#6 Fie domeniile mărginite $D_i \subset \mathbb{R}^2$, $i = \overline{1,3}$, date de

$$D_1 = \{(x,y) \in [-3,3] \times [-3,3] : \; f_1(x,y) \le 0\},$$
$$D_2 = \{(x,y) \in [-5,5] \times [-5,5] : \; f_2(x,y) \le 0\},$$
$$D_3 = \{(x,y) \in [-2.5,2.5] \times [-2.5,2.5] : \; f_3(x,y) \le 0\},$$

unde $f_1(x,y) = x^2 + y^4 + 2xy - 1$, $f_2(x,y) = y^2 + x^2 \cos x - 1$, $f_3(x,y) = \mathrm{e}^{x^2} + y^2 - 4 + 2.99 \cos y$. Creaţi un fişier în Python® prin care:

(a) se estimeze numeric (frecvenţionist) aria fiecărui domeniu D_i, $i = \overline{1,3}$;

(b) să se reprezinte grafic simulările realizate la (a).

EX#7 Fie discul $B(\mathbf{0}, r)$ centrat în $\mathbf{0} = (0,0)$ de rază $r > 0$, şi pătratul $P(\mathbf{0}, R)$ centrat în $\mathbf{0} = (0,0)$ de latură $R \ge 2r$. Ştiind că $\pi = \dfrac{Aria(B(\mathbf{0}, r))}{Aria(P(\mathbf{0}, R))} \cdot \dfrac{R^2}{r^2}$, creaţi un fişier în Python® prin care să se estimeze numeric (frecvenţionist) numărul π.

EX#8 Creaţi un fişier în Python® prin care să se estimeze numeric (frecvenţionist) numărul π folosind experimentul lui Buffon (Buffon's needle problem).

Indicaţie: Fie $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,d}$. Fie $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$ şi $M \subseteq D$ domeniu măsurabil Lebesgue. Probabilitatea ca $\mathbf{x}$ generat aleator uniform în D să aparţină lui M este $\dfrac{\lambda(M)}{\lambda(D)}$, unde $\lambda(A) =$ măsura Lebesgue a mulţimii A.

Indicaţii Python®: `numpy`, `numpy.random.rand`, `numpy.random.uniform`, `matplotlib`, `matplotlib.pyplot`