Metody Numeryczne
Projekt 2 – Układy równań liniowych

dr inż. Grzegorz Fotyga, ETI PG

28 marca 2018

1. Wstęp

Celem projektu jest implementacja metod iteracyjnych (Jacobiego i Gaussa-Seidla) i bezpośrednich (Gaussa) rozwiązywania układów równań liniowych. Testy poszczególnych metod będą przeprowadzane na układach równań, które powstają w wyniku dyskretyzacji równań różniczkowych i są powszechnie stosowane w takich zagadnieniach jak: elektronika, elektrodynamika, mechanika (zastosowania lotnicze, biomechanika, motoryzacyja), badanie wytrzymałości materiałów i konstrukcji, symulacje odkształceń, naprężeń, przemieszczeń i drgań, akustyka, fotonika, termodynamika, dynamika płynów i wiele innych.

W rzeczywistych problemach rozwiązywane są układy równań zawierające setki milionów niewiadomych, dla których obliczenia trwają często wiele godzin, a nawet dni, mimo wykorzystywania najnowszych superkomputerów. Opracowanie nowych efektywnych metod rozwiązań (dostosowanych do współczesnych architektur komputerowych) jest dużym wyzwaniem zarówno z punktu widzenia matematyki, jak i informatyki. Jest ono przedmiotem badań wielu ośrodków naukowych, ponieważ bez niego rozwój wymienionych wyżej dziedzin wiedzy byłby **niemożliwy**.

W praktyce najczęściej stosuje się tak zwany rzadki format przechowywania macierzy (który przechowuje tylko wartości niezerowe i ich położenie w macierzy), ponieważ zdecydowana większość elementów ma wartość 0. Jednak ze względu na prostotę, w zadaniu będzie wykorzystywany tzw. format pełny (przechowujący wszystkie wartości, również 0), który może być stosowany w problemach zawierających nie więcej niż kilka tysięcy niewiadomych. Mimo, że testowane będą jedynie podstawowe metody rozwiązań, wykonanie projektu będzie dobrym fundamentem do poznania znacznie bardziej zaawansowanych technik, jak np.: metody rozwiązania oparte na podprzestrzeni Kryłowa, prekondycjonery, zrównoleglanie obliczeń, metody wielopoziomowe itp.

2. Konstrukcja układu równań

Układ równań liniowych ma następującą postać:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą systemową, która reprezentuje badaną dziedzinę (obwód elektroniczny, sala koncertowa, turbina, karoseria samochodu itp.), $\mathbf{b}$ jest wektorem pobudzenia (np. impuls elektroniczny, wektor siły, fala dźwiękowa itp.), natomiast $\mathbf{x}$ jest wektorem rozwiązań reprezentującym szukaną wielkość fizyczną (np. rozkład pola elektromagnetycznego, natężenie dźwięku).

- Na potrzeby testów przyjmijmy, że $\mathbf{A}$ jest tzw. macierzą pasmową o rozmiarze $N \times N$, gdzie N ma wartość $9cd$, c jest przedostatnią cyfrą numeru Twojego indeksu, natomiast d ostatnią[1]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a3 & a2 & a1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

  Macierz $\mathbf{A}$ zawiera więc pięć diagonali - główna z elementami $a1$, dwie sąsiednie z elementami $a2$ i dwie skrajne diagonale z elemetnami $a3$.

- Prawa strona równania to wektor $\mathbf{b}$ o długości N.

- W wyniku rozwiązania układu równań (1) otrzymujemy wektor $\mathbf{x}$.

3. Wektor residuum

Ważnym elementem algorytmów iteracyjnych (np. Jacobiego i Gaussa-Seidla) jest określenie, w której iteracji algorytm powinien się zatrzymać. Jedną z metod jest korzystanie z tzw. wektora residuum, które dla k – tej iteracji przyjmuje postać:

$$\mathbf{res}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}. \tag{3}$$

Badając normę euklidesową wektora residuum ($norm(\mathbf{res}^{(k)})$), możemy w każdej iteracji algorytmu obliczyć jaki błąd wnosi wektor $\mathbf{x}^{(k)}$. Jeżeli rozwiązanie zbiegnie się do dokładnego, residuum jest wektorem zerowym. Przeważnie jako kryterium stopu przyjmuje się normę z residuum o wartości mniejszej niż 10^{-6} (10^{-9}).

4. Zadania

- **Zadanie A** – Stwórz układ równań dla $a1 = 5 + e$, gdzie e jest czwartą cyfrą Twojego indeksu, $a2 = a3 = -1$ i $N = 9cd$ (patrz – punkt 2). $\mathbf{b}$ jest wektorem o długości N, którego $n-$ty element ma wartość $sin(n \cdot (f+1))$, gdzie f jest trzecią cyfrą Twojego indeksu. (10%)

- **Zadanie B** – Zaimplementuj metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych: Jacobiego i Gaussa–Seidla. Sprawdź ile iteracji potrzebuje każda z nich, dla układu równań z podpunktu $\mathbf{A}$, żeby otrzymać normę z wektora residuum równą 10^{-9}. Porównaj czas trwania algorytmów. (30%)

- **Zadanie C** – Stwórz układ równań dla $a1 = 3$, $a2 = a3 = -1$ i $N = 9cd$, natomiast wektor $\mathbf{b}$ pozostaw bez zmian. Czy metody iteracyjne dla takich wartości zbiegają się? (10%)

- **Zadanie D** – Zaimplementuj metodę bezpośredniego rozwiązania układów równań liniowych: metodę faktoryzacji LU i zastosuj do przypadku $\mathbf{C}$. Ile wynosi norma z residuum w tym przypadku? (30%)

[1] Przykładowo: dla indeksu 102263 $N = 963$.

- **<u>Zadanie E</u>** – Stwórz wykres zależności czasu trwania poszczególnych algorytmów od liczby niewiadomych $N = \{100, 500, 1000, 2000, 3000 \ldots\}$ dla przypadku z punktu **A**. (10%)

- **<u>Zadanie F</u>** – Zwięźle opisz swoje obserwacje po wykonaniu podpunktów A–E. (10%)