ДУПР теореми и дефиниции

Теорема за съществуване и единственост на решение на Задача на Коши (за уравнение с разделящи се променливи)

Нека f(x) е непрекъсната в интервала (a,b) и g(y) е непрекъсната в интервала (c,d). Вземаме точката x0 ∈ (a,b) и точката y0 ∈ (c,d). Нека също така g(y)≠0 за всяко y∈(c,d). Тогава задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y(x)) \\ y(x0) = y0 \end{cases}$$

Има единствено решение.

Теорема за съществуване и единственост на решение на Задача на Коши (за хомогени уравнения)

Нека f(z) ∈ C(a,b). Тогава за всяка точка (x0; y0) ∈ { a < y/x < b, x≠0 }, такава че f(y0/x0) ≠ y0/x0, съществува единствено решение на задачата на Коши

y'(x) = f (y(x) /x), y(x0) = y0.

Теорема за съществуване и единственост на решение на Задача на Коши (за линейни уравнения)

Нека a(x) ,b(x) ∈ $C^1(\Delta)$, x0 ∈ Δ и y0 ∈ $\mathbb{R}$. Тогава съществува единствено решение на задачата на Коши

y'=a(x)y+b(x), y(x0)=y0

и това решение е дефинирано в целия интервал Δ.

Дефиниция за удовлетворяване на условието на Липшиц

Казваме че функцията f(x,y) удовлетворява условието на Липшиц (е липшицова) в правоъгълника П, по променливата y (равномерно относно x) ако съществува K>0 такова че за всеки две точки (x,y1), (x,y2)∈П е изпълнено

| f(x,y1) – f(x,y2)| <= K |y1-y2|

Лема за липшицова функция и нейната частна производна

Нека частната производна f_y на функцията f съществува и е непрекъсната в правоъгълника П. Тогава функцията f е липшицова по y в П.

Локална теорема за съществуване и единственост

Нека f∈C(П) и f е липшицова по y в П. Тогава задачата на Коши

$$\left|\begin{array}{l} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{array}\right.$$

притежава единствено решение, дефинирано поне за x∈[x0-h;x0+h] където h=min{a,b/M}, M= $\max_{П}$|f(x,y)|.

Глобална теорема за съществуване и единственост

Нека f∈C(G) и f е локално-липшицова по y в G. Тогава за всяка точка (x0; y0)∈G задачата на Коши

$$\left|\begin{array}{l} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{array}\right.$$

притежава единствено непродължимо решение.

Дефиниция за обикновена точка

Казваме че точката $(x_0,y_0) \in D$ е обикновена точка за уравнението

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

ако уравнението $F(x_0,y_0,z)=0$ има краен брой различни реални решения $z_1<z_2<\dots<z_m$ и $F'_z(x_0,y_0,z_j)\neq 0$ за $j=1,2..m$.

Дефиниция за особена точка

Казваме че точката $(x_0,y_0) \in D$ е особена точка за уравнението

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

ако уравнението $F(x_0,y_0,z)=0$ има поне едно реално решение $z=b$ за което $F'_z(x_0,y_0,b)=0$.

Теорема за решения на задачата на Коши в околност на обикновена точка

Теорема 1.1 *Нека точката $(x_0, y_0) \in D$ е обикновена точка за уравнението (1). Тогава съществува околност U на (x_0, y_0), в която са дефинирани такива функции $f_j(x,y)$, $\frac{\partial f_j}{\partial y} \in C(U)$, $j = 1, 2, \dots m$, че всяко решение на задачата на Коши*

$f_j(x_0,y_0)=z_j$

$$ЗК: \ F(x, y, y') = 0, \ y(x_0) = y_0$$

е решение на някоя от задачите на Коши

$$ЗК_j: \ y' = f_j(x, y), \ y(x_0) = y_0, \ j = 1, 2, \dots m.$$

Обратно: Всяко едно от решенията на задачита на Коши $ЗК_j$, $j = 1, 2, \dots m$ е решение на задачата на Коши ЗК.

Дефиниция за обвивка на фамилия

Казваме че гладката неизродена крива L е обвивка на фамилията L_c ако във всяка точка на L до нея се допира точно една крива от фамилията L_c.

(L е дискриминатна крива на уравнението $F(x_0,y_0,z)=0$ ако е обвивка на фамилията от кривите на обикновените решения.)

Линейното нехомогенно обикновено диференциално уравнение от ред n има вида

$$L(y) \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

Теорема за съществуване и единственост на решение на Задача на Коши (за линейни нехомогенни уравнения от n-ти ред)

Задача на Коши: Да се намери в Δ функция $y = y(x)$, за която

$$\begin{cases} L(y)(x) = f(x), \ x \in \Delta, \\ y(x_0) = \alpha_1, \\ y'(x_0) = \alpha_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n, \end{cases}$$

където $x_0 \in \Delta$, $\alpha_\nu \in \mathbf{C}$, $\nu = 1, 2, \dots n$.

Теорема 1.1 *(за съществуване и единственост, без доказателство). При горните предположения задачата на Коши притежава единствено решение в целия интервал Δ.*

Забележка 1.2 *Производните до ред $n-1$ на решението са диференцируеми, и следователно непрекъснати функции в Δ. Тогава от самото уравнение следва, че и n-тата производна на решението е непрекъсната в Δ.*

Лема за линейни хомогенни уравнения

Лема 1.3 *Решенията на линейното хомогенно уравнение $L(y) = 0$ образуват линейно пространство.*

Доказателство. Нека $y_\nu \in C^{k}(\Delta)$, $L(y_\nu) = 0$, $C_\nu \in \mathbf{C}$, $\nu = 1, \dots, k$. От линейността на L следва

$$L(C_1 y_1 + \cdots + C_k y_k) = C_1 L(y_1) + \cdots + C_k L(y_k) = 0,$$

т.е. произволна линейна комбинация от решения на хомогенното уравнение също е решение на хомогенното уравнение, с което лемата е доказана.

Ще докажем, че пространството от решения на хомогенното уравнение е крайномерно и размерността му е точно n.

Дефиниция за Линейно независими функции

Дефиниция 1.4 *Казваме, че функциите $y_1, \dots, y_k$, дефинирани в интервала Δ, са линейно независими в Δ, ако от*

$$C_1 y_1(x) + \dots + C_k y_k(x) \equiv 0, \ x \in \Delta,$$

където $C_1, \dots, C_k \in \mathbf{C}$, следва, че $C_1 = \dots = C_k = 0$.

Дефиниция за Линейно зависими функции

Дефиниция 1.5 *Казваме, че функциите $y_1, \dots, y_k$, дефинирани в интервала Δ, са линейно зависими в Δ, ако можем да намерим такива константи $C_1, \dots, C_k \in \mathbf{C}$, $|C_1| + \dots + |C_k| \neq 0$, че*

$$C_1 y_1(x) + \dots + C_k y_k(x) \equiv 0, \ x \in \Delta.$$

Дефиниция за фундаментална система

Дефиниция 1.6 *Казваме, че решенията $y_1, \dots, y_n$ на линейното хомогенно диференциално уравнение $L(y) = 0$ от ред n образуват фундаментална система (накратко ФС), ако са линейно независими в Δ.*

Лема (критерии за ЛНЗ функции)

Ще получим удобни критерии за линейна независимост на диференцируеми функции чрез детерминантата на Вронски (или Вронскиан)

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_k(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_k'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(k-1)}(x) & \cdots & y_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix},$$

където $y_1, \dots, y_k \in C^{k-1}(\Delta)$.

Лема 1.7 *Нека функциите $y_1, \dots, y_k \in C^{k-1}(\Delta)$ и да допуснем, че съществува такава точка $x_0 \in \Delta$, че $W(x_0) \neq 0$. Тогава функциите $y_1, \dots, y_k$ са линейно независими в Δ.*

Лема (критерии за ЛЗ функции)

$L(y) = 0$

Лема 1.8 *Нека функциите $y_1, \dots, y_n \in C^n(\Delta)$ са решения на линейното хомогенно уравнение и да допуснем, че съществува такава точка $x_0 \in \Delta$, че $W(x_0) = 0$. Тогава решенията $y_1, \dots, y_n$ са линейно зависими в Δ.*

Лема (Необходимо и достатъчно условие за фундаментална система)

Лема 1.9 *(НДУ за ФС) Нека функциите $y_1, \dots, y_n \in C^n(\Delta)$ са решения на линейното хомогенно уравнение и $W(x)$ е тяхната детерминанта на Вронски. Следните три твърдения са еквивалентни:*

а) $W(x_0) \neq 0$ за поне едно $x_0 \in \Delta$;
б) системата $y_1, \dots, y_n$ е фундаментална;
в) $W(x) \neq 0$ за всяко $x \in \Delta$.

Теорема за фундаментална система решения на линейно хомогенно диференциално уравнение

Теорема 1.10 *Линейното хомогенно диференциално уравнение от ред n притежава безбройно много фундаментални системи решения.*

Теорема за линейно пространство от решения на линейно хомогенно уравнение от n-ти ред

Теорема 1.11 *Линейното пространство от решения на хомогенното уравнение от ред n е с размерност точно n, и ако $y_1, \dots, y_n$ образуват фундаментална система в Δ, а y е произволно решение на хомогенното уравнение, то*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x), \ x \in \Delta,$$

където $C_1 \dots, C_n \in \mathbf{C}$ (формула за вида на общото решение на хомогенното уравнение).

Теорема за съществуване и единственост на решение на Задача на Коши (за система линейни обикновени уравнения)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t),\ t \in \Delta. \tag{2}$$

Ако към системата (2) добавим и n начални условия за n-те неизвестни функции $x_1(t),\ x_2(t), \dots x_n(t)$ в нея

$$x(t_0) = x_0,\ t_0 \in \Delta,\ x_0 \in \mathbf{C}^n, \tag{3}$$

то получаваме задача на Коши.

Теорема 0.1 *Нека функциите $a_{ij}(t)$ и $f(t)$ са дефинирани и непрекъснати в интервала Δ, а $t_0 \in \triangle$. Тогава задачата на Коши (2), (3) притежава единствено решение, дефинирано в целия интервал Δ.*

Когато $f(t) \equiv \vec{0}$, системата (2) се нарича хомогенна, в противен случай се нарича нехомогенна. Да разгледаме сега хомогенната система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),\ t \in \Delta. \tag{4}$$

Лема за линейно пространство от решения на хомогенна система линейни уравнения

Лема 0.2 *Решенията на системата (4) образуват линейно пространство с размерност n.*

Дефиниция за фундаментална система решения на хомогенна система линейни уравнения

Дефиниция 0.3 *Системата $\varphi_1,\ \varphi_2, \dots,\ \varphi_n$ от решения на (4) се нарича фундаментална система в Δ, ако е линейно независима в този интервал.*

Лема за Фундаментални системи на хомогенна система линейни уравнения

Лема 0.4 *Системата (4) притежава безбройно много фундаментални системи.*

Дефиниция за фундаментална матрица на хомогенна система

Дефиниция 0.5 *Нека решенията* $\varphi_k = (\varphi_k^1, \varphi_k^2, \ldots, \varphi_k^n)$, $k = 1, 2, \ldots n$ *на (4) са линейно независими в* Δ. *Матрицата*

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) \; \varphi_2^1(t) \ldots \varphi_n^1(t) \\ \varphi_1^2(t) \; \varphi_2^2(t) \ldots \varphi_n^2(t) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_1^n(t) \; \varphi_2^n(t) \ldots \varphi_n^n(t) \end{pmatrix}, \; t \in \Delta, \qquad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \\ C_n \end{pmatrix}$$

се нарича фундаментална за системата (4), а нейната детерминанта - детерминанта на Вронски за $\{\varphi_k\}_1^n$. *Детерминанта на матрицата* Φ *се нарича детерминанта на Вронски и в случая, когато функциите* $\{\varphi_k\}_1^n$ *са линейно зависими.*

Лема (критерии за линейна независимост за дадена n-торка орт решения на хомогенно уравнение)

Лема 0.6 *Нека* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *са решения на системата (4), дефинирани в* Δ, *а* $W(t)$ *е тяхната детерминанта на Вронски. Следните три твърдения са еквивалентни.*

1. *Съществува* $t_0 \in \Delta$, *за което* $W(t_0) \neq 0$.
2. *Системата* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *е линейно независима в* Δ.
3. $W(t) \neq 0$ *за всяко* $t \in \Delta$.

$\Psi = A\Psi + f$

$x = Ax + f$

Дефиниция за равновесна точка за автономна система

Дефиниция 0.1.1 *Казваме, че точката $a \in G$ е положение на равновесие за автономната система, ако $f(a) = 0$.*

Дефиниция за устойчивост на равновесие на автономна система

Дефиниция 0.2.1 *Казваме, че a е устойчиво положение на равновесие на автономната система $\dot{x} = f(x)$, ако за всяка околност U на a съществува такава околност V, че решението $x = x(t, x_0)$, удовлетворяващо началното условие $x(t_0, x_0) = x_0$, има свойствата:*

1. *Решението $x = x(t, x_0)$ е дефинирано за всички $t \geq t_0$.*

2. *Решението остава в U при $t \geq t_0$, т.е. $x(t, x_0) \in U$ за всяко $t \geq t_0$.*

Положението на равновесие се нарича асимптотично устойчиво, ако е устойчиво и

$$\lim_{t \to \infty} x(t, x_0) = a.$$

Теорема на Ляпунов за устойчивост (по линейно приближение)

Теорема 0.2.1 (Ляпунов, за устойчивост) *Ако a е положение на равновесие за автономната система и всички собствени числа на якобиевата матрица*

$$\begin{pmatrix} f_{1x_1}(a) & \dots & f_{1x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{nx_1}(a) & \dots & f_{nx_n}(a) \end{pmatrix} \tag{0.2.1}$$

имат отрицателни реални части, то a е асимптотично устойчиво положение на равновесие.

Теорема на Ляпунов за неустойчивост (по линейно приближение)

Теорема 0.2.2 (Ляпунов, за неустойчивост) *Ако a е положение на равновесие за автономната система и якобиевата матрица 0.2.1 има поне едно собствено число с положителна реална части, то a е неустойчиво положение на равновесие.*

Теорема за единствено решение на смесена задача на струната

описва със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 < x < L, \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=L} = 0,\ t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

където $a > 0$ е константа, $\varphi(x) \in C^2[0, L],\ \psi(x) \in C^1[0, L]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(L) = \varphi''(L) = \psi(L) = 0$.

В сила е следната

Теорема 1.1 *При така напарвените предположения задачта (1) притежава единствено решение $u \in C^2(\bar{G})$, където $G := \{(x, t) :\ 0 < x < L,\ t > 0\}$.*

Теорема за единствено решение на смесена задача на топлопроводимост

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, \ 0 < x < L, \ t > 0, \quad , t < T \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ 0 \le x \le L, \\ u|_{x=0} = 0, \ u|_{x=L} = 0, \ 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{2}$$

където $\varphi(x) \in C^2[0, L]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$.

Разглежданата задача наричаме смесена задача за уравнението на топлопроводноста, защото освен начално условие имаме и гранични условия зададени в краищата на пръта.

Теорема 0.1.1. *При направените предположения задачата (2) притежава единствено решение.*

Уравнение от вида

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + p(x,y)u_x + q(x,y)u_y + r(x,y)u = f(x,y), \tag{1}$$

където $(x,y) \in G$ (G-област в равнината) са независими променливи, а $u(x,y)$ е търсената функция се нарича линейно ЧДУ от втори ред с две независими променливи.

Ще предполагаме, че $|a(x,y)| + |b(x,y)| + |c(x,y)| \neq 0$.

Дефиниция за вид на точка при частно диференциално уравнение

Дефиниция 1.1 *Казваме, че в точката $(x_0, y_0) \in G$ уравнението (1) е*

1. *хиперболично, ако $D(x_0,y_0) := b^2(x_0,y_0) - a(x_0,y_0)c(x_0,y_0) > 0$;*
2. *параболично, ако $D(x_0,y_0) = 0$;*
3. *елиптично, ако $D(x_0,y_0) < 0$.*

Казваме, че уравнението е хиперболично/параболично/елиптично в областта $\Omega \subseteq G$ ако то е хиперболично/параболично/елиптично във всяка точка от Ω.