Уравнения, решени относно производната

$y'(x) = F(x, y(x))$ - общ вид, $F \in C(G)$, G-област в $\mathbb{R}^2$

Интегрална крива на уравнението:

$\{(x, y(x)), x \in \Delta, y(x)\}$ е решение на уравнението - граф. на реш. $y(x)$

Уравнения с разделящи се променливи

$y'(x) = f(x) . g(y(x))$

Хомогенни уравнения от първи ред

$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$, $f \in C(a, b)$; $M(x, y)y' + N(x, y) = 0$,

M, N - хомогенни от една и съща степен

полагане: $z(x) = \frac{y(x)}{x}$

Линейни уравнения от първи ред

$y' = a(x)y + b(x)$, $a(x)$ и $b(x)$ са непрекъснати функции

важна формула: $y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(C + \int b(x). e^{-\int a(x)dx} dx\right)$

Уравнения на Бернули

$y' = a(x)y + b(x)y^n$, $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Уравнения от първи ред, нерешени относно производната.

$F(x, y(x), y'(x)) = 0$

където $F(x, y, z)$ е ф-я на 3 променливи и $F, F'_y, F'_z \in C(Q)$

$Q = D \times (b, c)$, D - област в $\mathbb{R}^2$, $b, c \in \mathbb{R}$

$$a(x,y)(y')^2 + b(x,y)y' + c(x,y) = 0$$

Линейни уравнения от ред n

$L(y) = a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x)$

Подготовка за изпит по ДУПрил

Дефиниция:
Обикновено диференциално уравнение (ОДУ) от ред $n \in \mathbb{N}$ наричаме равенство от вида $F(x, y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$, където x е независима променлива, $y(x)$ е търсената неизвестна функция, а $F: G \longrightarrow \mathbb{R}$, G-област в $\mathbb{R}^{n+2}$ (област - отворено и свързано множество).

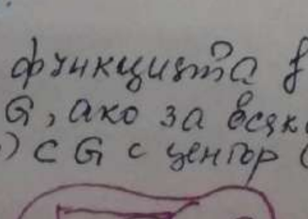
Дефиниция:
Множеството от функции, които са непрекъснати заедно с производните си до ред $k \in \mathbb{N}$ включително в множеството D, ще означаваме с $C^k(D)$. $C(D)$ - множеството от непрекъснатите функции в D. $C^\infty(D)$ - множеството от безкрайно гладките функции в D.

Дефиниция:
Казваме, че функцията $y \in C^n(\Delta)$, Δ-интервал е решение на уравнението $F(x, y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$, ако:
а) $(x, y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in G$ за всяко $x \in \Delta$
б) равенството е изпълнено за всяко $x \in \Delta$

Дефиниция:
Ще казваме, че функцията $f(x,y)$ удовлетворява условието на Липшиц (е Липшицова) по променливата y (равномерно относно x) (независимо от x) в Π, ако съществува константа $K>0$, такава че:
$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq K|y_2 - y_1|$ за всеки 2 точки $(x,y_1), (x,y_2) \in \Pi$

$$\left| \frac{f(x,y_2) - f(x,y_1)}{y_2 - y_1} \right| \leq K, \quad y_2 \neq y_1$$

Дефиниция:
Казваме, че функцията $f(x,y)$ е **локално липшицова** по y в областта G, ако за всяка точка $(x_0,y_0) \in G$ съществува правоъгълник $\Pi(x_0,y_0) \subset G$ с център (x_0,y_0), в който f е липшицова по y



Ако $f'_y \in C(G)$, то f е локално липшицова в G

Дефиниция:
Геометричното място на точките от D, които удовлетворяват системата $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ F'_z(x,y,z)=0 \end{cases}$ се нарича дискриминантна крива на уравнението $F(x, y(x), y'(x))=0$. Особените точки на това ур-е лежат върху L.

Дефиниция:
Казваме, че кривата L е обвивка на еднопараметричната фамилия от криви L_c, ако във всяка точка на L се допира точно 1 крива от фамилията.

Ако L_c е еднопараметрична фамилия от интегрални криви на уравнението $F(x,y(x),y'(x))=0$ и дискриминантната крива L е обвивка на тази фамилия, то L е интегрална крива на ур-то.
Решението на уравнението с интегр. крива L се нарича особено решение на (1)

Дефиниция:
Казваме, че функциите $y_1(x), \dots, y_m(x)$ са линейно независими в интервала Δ, ако от $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_m y_m(x) = 0$ за $x \in \Delta$ и $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{C}$, то $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$

Дефиниция:
Казваме, че функциите $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ са линейно зависими в интервала Δ, ако съществува ненулев набор от константи $c_1, c_2, \dots, c_m$, такива че $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_m y_m(x) = 0$ за $x \in \Delta$.

Дефиниция:
Казваме, че решението $\varphi(x)$ на ЗК $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, дефинирано в интервала Δ_φ, е продължение на решението $\psi(x)$ на ЗК, дефинирано в интервала Δ_ψ, ако $\Delta_\psi \subset \Delta_\varphi$ и $\varphi(x) = \psi(x)$ за $x \in \Delta_\psi$

Дефиниция:
Непродължимо решение на зад. на Коши наричаме решение, което съвпада с всяко свое продължение.

Дефиниция:
Нека $y_j \in C^n(\Delta)$, $j = 1, \dots, n$ и са ЛНЗ решения на хомогенното уравнение $L(y) = a_0(x) y^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x) y(x) = 0$
$a_j \in C(\Delta)$, $j = 0, 1, \dots, n$. Тогава ще казваме, че те са фундаментална система решения (ФСР) на уравнението.

Дефиниция:
Функцията $g(x,y)$ е хомогенна от степен k, ако $\forall \lambda$:
$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k g(x,y)$

Дефиниция:
Казваме, че точката $(x_0, y_0) \in D$ е обикновена точка за уравнението $F(x, y(x), y'(x)) = 0$, ако уравнението (2) $F(x_0, y_0, z) = 0$ има краен брой различни реални решения $z_1 < z_2 < \dots < z_m$ и $F'_z(x_0, y_0, z_j) \neq 0$ за $j = \overline{1,m}$, $(\mathcal{D}(x_0, y_0) > 0)$

Дефиниция:
Казваме, че точката $(x_0, y_0) \in D$ е особена точка за ур-то $F(x, y(x), y'(x)) = 0$, ако уравнението $F(x_0, y_0, z) = 0$ има реално решение z_0: $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$
$(D(x_0, y_0) = 0)$

Подготовка за изпит по ДУПрил

Теорема: (за устойчивост, Ляпунов)
Ако всички собствени стойности на $J(a,b)$ имат отрицателни реални части, то т.(a,b) е асимптотично устойчива за

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

Теорема: (за неустойчивост, Ляпунов)
Ако съществува собствена стойност на $J(a,b)$ с положителна реална част, то т.(a,b) е неустойчива за системата.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

Теорема: (Глобална теорема за $\exists$и!)
Нека $f \in C(G)$ и локално Липшицова по y в областта G.
Тогава за всяка точка $(x_0, y_0) \in G$ съществува единствено непродължимо решение на задачата на Коши $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Твърдение:
Множеството от решенията на хомогенното уравнение
$L(y) = a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = 0$, $a_j \in C(\Delta)$, $j = \overline{0,n}$
е линейно пространство.

Доказателство:
Трябва да докажем, че линейната комбинация от решенията на горното уравнение също е негово решение.
Нека $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$ са решения на уравнението и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ са произволни константи. Да разгледаме $\omega(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_m y_m(x)$

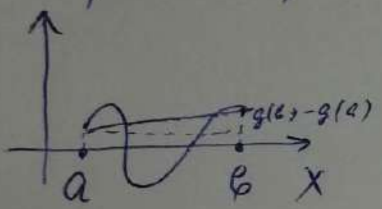
$$L(\omega) = a_0(\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m)^{(n)} + a_1(\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m)^{(n-1)} + \dots + a_n(\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m) =$$
$$= a_0(\lambda_1 y_1^{(n)} + \dots + \lambda_m y_m^{(n)}) + a_1(\lambda_1 y_1^{(n-1)} + \dots + \lambda_m y_m^{(n-1)}) + \dots + a_n(\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_m y_m) =$$
$$= \lambda_1(a_0 y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \dots + a_n y_1) + \dots + \lambda_m(a_0 y_m^{(n)} + a_1 y_m^{(n-1)} + \dots + a_n y_m) =$$
$$= \lambda_1 L(y_1) + \lambda_2 L(y_2) + \dots + \lambda_m L(y_m) = 0$$

Лема:

Нека $f, f_y \in C(П)$. Тогава $f(x,y)$ е липшицова по y в $П$.

Доказателство:

Теорема за крайните нараствания



$$g \in C([a,b]),\ g \in C'(a,b)$$

$$\exists\ \xi \in (a,b):\ g'(\xi) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

$f_y \in C(П) \Rightarrow \exists$ константа $k>0$: $|f_y(x,y)| \le k$ за $(x,y) \in П$

Ще покажем, че f е липшицова по y с константа k.

$(x,y_1)(x,y_2) \in П$ са произволни

$$\exists\ \xi \in (y_1,y_2):\ f_y(x,\xi) = \frac{f(x,y_2)-f(x,y_1)}{y_2-y_1}$$

$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)| = |f_y(x,\xi)| \cdot |y_2-y_1| \le k\,|y_2-y_1|$$

■

Лема 1

Нека $y_j \in C^{(m-1)}(\Delta)$, $j=\overline{1,..,m}$ и $w(x)$ е тяхната детерминанта на Вронски. Ако $\exists\, x_0 \in \Delta$, такава че $w(x_0) \neq 0$, то $y_1(x), y_2(x), \dots y_m(x)$ са ЛНЗ в Δ.

Лема 2

Нека $y_j \in C^{n}(\Delta), j=\overline{1,n}$ и са решения на хомог. ур-е.

$\underset{(3)}{L}(y) = a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = 0$, $a_j \in C(\Delta), j=\overline{1,n}$

и $w(x)$ е тяхната детерминанта на Вронски. Ако $\exists$ т. $x_0 \in \Delta$: $w(x_0)=0$, то $y_1, y_2, \dots, y_m$ са ЛЗ в Δ.

Теорема (НДУ) за ФСР:

Нека $y_1, y_2, \dots, y_m \in C(\Delta)$ са решения на хомогенното ур-е (3) и $w(x)$ е тяхната детерминанта на Вронски. Следните 3 тв. са еквив.:

1) $w(x) \neq$ за $\forall x \in \Delta$

2) $y_1, y_2, \dots y_m$ са ФСР

3) $\exists x_0 \in \Delta: w(x_0) \neq 0$

Леме:

Съществуват безбройно много ФСР на уравнението (3).

Д-во:

Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ е произволна матрица с $\det(A) \neq 0$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$

Нека $y_j(x)$ е решение на ЗК

$$\begin{cases} L(y_j) = 0, & x \in \Delta \\ y_j(x_0) = a_{1j}, \quad y_j'(x_0) = a_{2j}, \dots, y_j^{(n-1)}(x) = a_{nj} & \text{за } j=\overline{1,n}, \ x_0 \in \Delta \end{cases}$$

Да пресметнем тяхната дет. на Вронски

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det(A) \neq 0$$

$\Rightarrow y_1, y_2, \dots, y_n$ са ФСР. Неособените матрици $(n \times n)$ са безброй много

$\Rightarrow$ и ФСР на (3) са безброй много ∎

Теорема (локална теорема за съществуване и единственост)
Нека $f \in C(\Pi)$ и удовлетворява условието на Липшиц по y в Π. Тогава съществува единствено решение на задачата на Коши, дефинирано за $|x-x_0| \le h$, където $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ $(|f(x,y)| \le M)$

Доказателство.

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Нека $s \in [x_0-h, x_0+h]$ и y е решение на ЗК за $x \in [x_0-h, x_0+h]$ интегрираме от x_0 до x.

$$\int_{x_0}^{x} y'(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$$

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds \quad (3)$$

$\Rightarrow$ Всяко реш. на ЗК е реш. на интегр. уравнение

$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \le K|y_2 - y_1|$

Обратното, ако y е непрекъснато в $[x_0-h, x_0+h]$ решение на (3), то $\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds$ е диференцируема $\Rightarrow y'(x) = f(x, y(x))$

$\Rightarrow y(x)$ е диференцируема в $[x_0-h, x_0+h]$ и е реш. на ур. в (1)

$y(x_0) = y_0 + \int_{x}^{x_0} f(s, y(s))\,ds = y_0 \Rightarrow y(x)$ е реш. на ЗК

Пикар е предложил решението да бъде намерено чрез посл. на последов. приближения.

$y_0(x) \equiv y_0$

$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))\,ds$

$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))\,ds, \ n \ge 1$

Редицата от функции $\{y_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ е равномерно сходяща в $[x_0-h, x_0+h]$ и нейната граница $y(x)$ е реш. на (3)

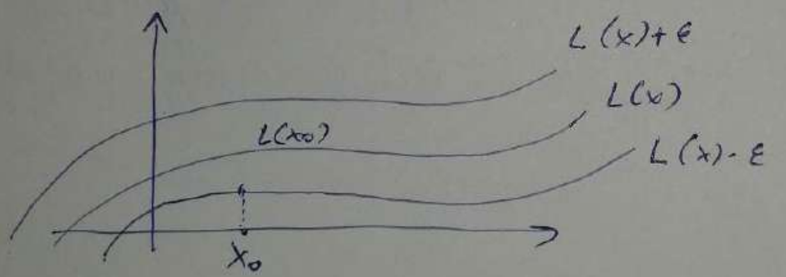
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n$ за $n \ge N(\varepsilon)$

$L-\varepsilon \quad L \quad L+\varepsilon$

$\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

фикс x_0 $\quad u_n(x_0) \xrightarrow[x \to +\infty]{} L(x_0)$

$u_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} L(x)$ поточково



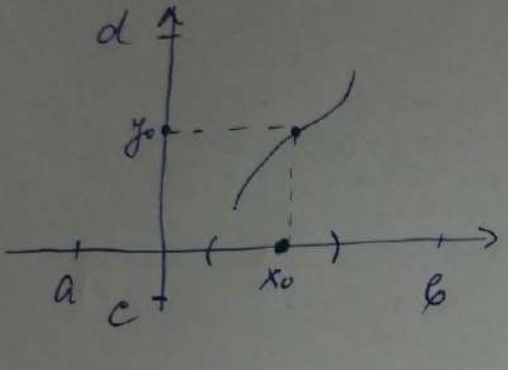
$u_n(x) \underset{n\ +\infty}{\rightrightarrows} L(x) \quad N(\varepsilon, x_0) \quad N(\varepsilon)$

Теорема:

Нека $f \in C(a,b)$, $g \in C(c,d)$ и $g(y) \neq 0$ за $y \in (c,d)$.
За всеки две точки $x_0 \in (a,b)$ и $y_0 \in (c,d)$ съществува единствено решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = f(x)\,g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

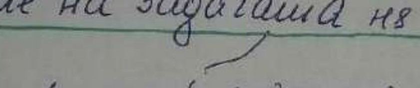
, което е дефин. в околност на т. x_0.



Доказателство:

Единственост: започване с дефиниране на решение

1 Нека $y \in C^1(\Delta)$ е решение на задачата на Коши, където $\Delta \subseteq (a,b)$, $x_0 \in \Delta$, Δ-интервал.



- виждаме на часта от диаграмата как изглежда интервала и къде се намира x_0

$y(x) \in (c,d)$ за $x \in \Delta$

За $s \in \Delta$: $y'(s) = f(s)\,g(y(s))$, $g(y(s)) \neq 0$ - взимаме някаква точка s от интервала Δ и решаваме по метода, по който се решават уравн. с разделящи се променливи

$$\Rightarrow \frac{y'(s)}{g(y(s))} = f(s)$$

За произволно $x \in \Delta$, интегрираме това равенство от x_0 до x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{g(y(s))}\,ds = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds \Rightarrow (*) \int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\lambda}{g(\lambda)} = \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$$

Нека: $\lambda = y(s)$

$s = x_0 \Rightarrow \lambda = y(x_0) = y_0$, $s = x \Rightarrow \lambda = y(x)$

Да разгледаме функциите:

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds \quad \text{и} \quad G(y) := \int_{y_0}^{y(x)} \frac{d\lambda}{g(\lambda)} \Rightarrow$$ Равенството (*) приема вида $G(y(x)) = F(x)$

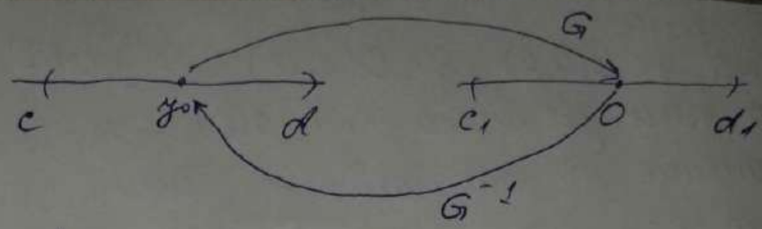
функцията G има следните свойства: - първо разглеждаме свойствата на G

$G(y_0) = 0$

$G \in C^1(c,d)$

$G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$

↳ функцията $G(y)$ е монотонна $\Rightarrow$ е обратима функция

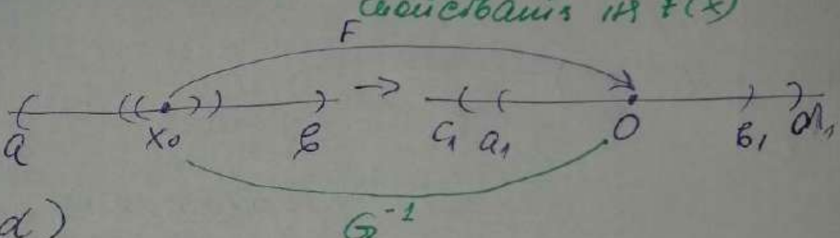


и нека G^{-1} е нейната обратна функция $G^{-1}(0) = y_0$

$$H(x) = \int_a^x h(s)\,ds \Rightarrow H'(x) = h(x)$$

функцията $F(x)$ има следните свойства: - Сега насочваме внимание към свойствата на $F(x)$

$F(x_0) = 0$, $F \in C^1(a, b)$



Ако x е достатъчно малко, т.е. $x \in \Delta_1 \subseteq \Delta$

Δ_1 - интервал, то

$F(x) \in (c_1, d_1) \xrightarrow{G^{-1}} (c, d)$

За $x \in \Delta_1$ $\quad y(x) = G^{-1}(F(x)) \dots (\#)$

$\Rightarrow$ всяко реш. на ЗК има вида $(\#)$ в интервала Δ_1

Съществуване:

Да разгледаме функцията $\varphi(x) := G^{-1}(F(x))$ за $x \in \Delta_1$

$\varphi(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0$

$G(\varphi(x)) = F(x) \,\Big|\, \frac{d}{dx}$

$G'(\varphi(x))\varphi'(x) = F'(x)$

$\frac{1}{g(\varphi(x))}\varphi'(x) = f(x)$

$\varphi'(x) = f(x)\,g(\varphi(x))$

$\Rightarrow \varphi(x)$ е решение на ЗК

∎

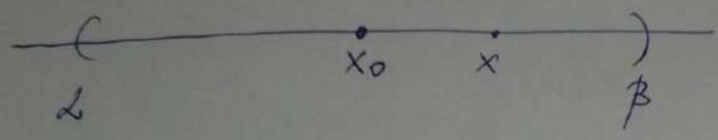
Теорема:

Нека a и b (са непрекъснати) $\in C(\alpha,\beta)$, $x_0 \in (\alpha,\beta)$, $y_0 \in \mathbb{R}$.
Тогава задачата на Коши $\begin{cases} y' = a(x)\,y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ има единствено решение и то е дефинирано в целия интервал (α,β).

Доказателство:

1) Единственост:

Нека $y \in C^1(\alpha,\beta)$ е решение на ЗК.



За $s \in (\alpha,\beta)$

$$y'(s) = a(s)y(s) + b(s)$$

За произволно $\tau \in (\alpha,\beta)$ да умножим това равенство с $e^{-\int_{x_0}^{\tau} a(s)\,ds}$

$$e^{-\int_{x_0}^{s} a(\tau)d\tau}\, y'(s) = e^{-\int_{x_0}^{s} a(\tau)d\tau}\big(a(s)y(s) + b(s)\big)$$

$$e^{-\int_{x_0}^{s} a(\tau)d\tau}\big(y'(s) - a(s)y(s)\big) = e^{-\int_{x_0}^{s} a(\tau)d\tau} \cdot b(s)$$

$$\left(e^{-\int_{x_0}^{s} a(\tau)d\tau}\, y(s)\right)'_s = e^{-\int_{x_0}^{s} a(\tau)d\tau}\, b(s)$$

За произволно $x \in (\alpha,\beta)$ интегрираме от x_0 до x

$$\int_{x_0}^{x}\left(e^{-\int_{x_0}^{s} a(\tau)d\tau}\, y(s)\right)'_s ds = \int_{x_0}^{x} b(s)\cdot e^{-\int_{x_0}^{s} a(\tau)d\tau}\, ds$$

$$e^{-\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau}\, y(x) - e^{-\int_{x_0}^{x_0} a(\tau)d\tau}\, y(x_0) = \int_{x_0}^{x} b(s)\cdot e^{-\int_{x_0}^{s} a(\tau)d\tau}\, ds$$

$$(*)\; y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau}\Big(\underbrace{y_0 + \int_{x_0}^{x} b(s)\cdot e^{-\int_{x_0}^{s} a(\tau)d\tau}\, ds}_{A(x)}\Big)$$

$y(x)$ беше произволно решение на ЗК

$\Rightarrow$ всяко решение на ЗК има вида $(*)$, т.е. то съвпада с $y(x)$

Съществуване:

Нека $y(x)$ е ф-я, деф. чрез (*)

$y \in C(\alpha, \beta)$

$$y(x_0) = e^{\int_{x_0}^{x_0} a(\tau)d\tau}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x_0} b(s) \cdot e^{-\int_{x_0}^{s} a(\tau)d\tau} ds\right) = y_0$$

$$y' = e^{\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau} \left(\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau\right)'_x \cdot A(x) + e^{\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau} \left(0 + b(x) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau}\right) =$$

$$= e^{\int_{x_0}^{x} a(\tau)d\tau} \cdot a(x) \cdot A(x) + b(x)$$

$$= a(x) \cdot y(x) + b(x) \quad \in C(\alpha, \beta)$$

$$\Rightarrow y \in C'(\alpha, \beta) \text{ и е реш. на ЗК.}$$

■