УЧЕБЕН ПРОЕКТ

по

„Диференциални уравнения и приложения“

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,
учебна година 2023/2024
Тема СИ2024-УП-4.11.

Изготвил:	Ивайло Ангелов Андреев
Ф. №:	4MI0600186
Група:	4

08.06.2024г.
София

Contents

1 ТЕМА (ЗАДАНИЕ) НА ПРОЕКТА

Дадена е задачата на Коши за уравнението на хармоничния осцилатор:

$$\begin{cases} y'' + ky' + 5y = a\cos(\omega_0\, t) \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Дадена е задачата на Коши за уравнението на хармоничния осцилатор:

1. (4 т.) Решете символно задачата с MATLAB дадената задача при $k = 0.3$ и $a = 0$. Начертайте графиката на намереното решение в интервала $[0, 50]$.

2. (3 т.) При $k = 0$ и $a = 2$ изберете подходяща стойност на честотата ω_0 на външната сила така, че да демонстрирате явлението резонанс.

3. (3 т.) При $k = 0$ и $a = 2$ изберете подходяща стойност на честотата ω_0 на външната сила така, че да демонстрирате явлението биене.

4. (10 т.) Решете символно с MATLAB получените задачи в подточки (2) и (3) и начертайте графиките на решенията им в същия интервал както в подточка (1). Разположете всички графики една под друга.

2 РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧАТА

2.1 Теоретична част

Нека разгледаме уравнението на хармоничния осцилатор в общия случай.

$$\begin{cases} y'' + ky' + 5y = f(t) \\ y(0) = \eta_0 \\ y'(0) = \nu_0 \end{cases}$$

k - коефициент на загуба на енергия
$\omega > 0$ - собствена честота на системата
η_0 - начално положение
ν_0 - начална скорост
$f(t)$ - външна сила, която действа на системата
За $f(x) = a\cos(\omega_0 t)$ имаме, че ω_0 е честотата на външната сила.

За подточка (1) имаме следното:

$$y'' + 0.3y' + 5y = 0$$

Това уравнение демонстрира явлението триене.

Идея за решаване аналитично:

Това е хомогенно линейно ОДУ от втори ред.
Представяме характеристичния полином на уравнението:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 0.3\lambda + 5 = 0$$

$$10\lambda^2 + 3\lambda + 50 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 10 \times 50}}{2 \times 10}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3}{20} \pm i\frac{\sqrt{1991}}{20}$$

Оттук представяме фундаменталната система решения:

$$\text{ФСР} = \left\{ e^{-\frac{3}{20}t} \cos\left(\frac{\sqrt{1991}}{20}t\right),\ e^{-\frac{3}{20}t} \sin\left(\frac{\sqrt{1991}}{20}t\right) \right\}$$

Така обшия вид на хомогенното уравнение е:

$$y = C_1 e^{-\frac{3}{20}t} \cos\left(\frac{\sqrt{1991}}{20}t\right) + C_2 e^{-\frac{3}{20}t} \sin\left(\frac{\sqrt{1991}}{20}t\right)$$

Можем да намерим точното уравнение, решение на задачата на Коши, като заместим с началните условия от задачата на Коши.

За подточки (2) и (3) имаме следното:

$$y'' + 5y = 2\cos(\omega_0\, t)$$

Имаме следното:

$$\begin{cases} \omega^2 = 5 \\ \omega > 0 \end{cases}$$

Откъдето $\omega = \sqrt{5}$

Резонанс

Резпнанс се демонстрира, когато честотата на външната сила е равна на собствената честота на системата. А именно:

$$\omega_0 = \omega = \sqrt{5}$$

Биене

Биене се демонстрира, когато честотата на външната сила е близка до собствената честота на системата. А именно:

$$\omega_0 = \omega + \epsilon = \sqrt{5} + \epsilon; \quad \epsilon > 0$$

Идея за решаване аналитично на:

$$y'' + 5y = 2\cos(\omega_0\, t)$$

Това е нехомогенно линейно ОДУ от втори ред.

Първо ще намерим общото решение на хомогенното уравнение.
Представяме характеристичния полином на уравнението:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 5 = 0$$

$$\lambda^2 = -5$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{5}$$

Оттук представяме фундаменталната система решения:

$$\text{ФСР} = \{\cos(\sqrt{5}t),\ \sin(\sqrt{5}t)\}$$

Така обшото решение на хомогенното уравнение е:

$$y_0 = C_1\cos(\sqrt{5}t) + C_2\sin(\sqrt{5}t)$$

Търсим частно решение на нехомогенно уравнение:

$$y'' + 5y = 2\cos(\omega_0 t)$$

$$e^{i\,\omega_0\,t} = \cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)$$

Откъдето $\cos(\omega_0 t) = \text{Re}(e^{i\omega_0 t})$ Ще намеим частно решение на уравнението:

$$y'' + 5y = 2e^{i\,\omega_0 t}$$

$2e^{i\omega_0 t}$ е квазиполиноим от вида $P^0 e^{\alpha t}$, където $P^0 = 2$ е полином от нулева степен и $\alpha = i\omega_0$.
Така частното решение на уравнението y_1 има вида:

$$y_1 = t^s Q^0 e^{\alpha t},$$

където $\alpha = i\omega_0$, s е показва, че α е s-кратен корен на характеристичния полином $P(\lambda)$, а $Q^0(t) = at^0 = a$ е произволен полином от нулева степен.

I-ви случай: при резонанс

$$\omega_0 = \sqrt{5}$$

$$\alpha = i\sqrt{5} \in \{\lambda_i\} \quad i \in \{1,2\}$$

$$y_1 = t^1 a e^{i\omega_0 t}$$

$$y_1 = ate^{i\sqrt{5}t}$$

$$y_1'' = i2a\sqrt{5}e^{i\sqrt{5}t} - 5ate^{i\sqrt{5}t}$$

С y'' и y замесваме в уравнението $y'' + 5y = 2e^{i\omega_0 t}$.

$$i2a\sqrt{5}e^{i\sqrt{5}t} - 5ate^{i\sqrt{5}t} + 5ate^{i\sqrt{5}t} = 2e^{i\sqrt{5}t}$$

$$i2a\sqrt{5} - 5at + 5at = 2$$

$$i2a\sqrt{5} = 2$$

$$ia\sqrt{5} = 1$$

$$a = \frac{1}{i\sqrt{5}}$$

$$a = -\frac{i\sqrt{5}}{5}$$

Заместваме в y_1 с намерената стойност за a.

$$y_1 = -i\frac{\sqrt{5}}{5}te^{i\sqrt{5}t}$$

$$y_1 = -i\frac{\sqrt{5}}{5}t[\cos(\sqrt{5}t) + i\sin(\sqrt{5}t)]$$

$$y_1 = -\frac{\sqrt{5}}{5}t[i\cos(\sqrt{5}t) - \sin(\sqrt{5}t)]$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}t\sin(\sqrt{5}t) - i\frac{\sqrt{5}}{5}t\cos(\sqrt{5}t)$$

$$\mathrm{Re}(y_1) = \frac{\sqrt{5}}{5}t\sin(\sqrt{5}t)$$

Общото решение на нехомогенното уравнение $y'' + 5y = 2\cos(\omega_0 t)$ е:

$$y = y_0 + \mathrm{Re}(y_1) = C_1\cos(\sqrt{5}t) + C_2\sin(\sqrt{5}t) + \frac{\sqrt{5}}{5}t\sin(\sqrt{5}t)$$

Можем да намерим точното уравнение, решение на задачата на Коши, като заместим с началните условия от задачата на Коши.

II-ви случай: при биене

$$\omega_0 = \sqrt{5} + \epsilon \neq \sqrt{5} \quad \epsilon > 0$$

$$\alpha \notin \{\lambda_i\} \quad i \in \{1,2\}$$

$$y_1 = t^0 ae^{i\omega_0 t}$$

$$y_1 = ae^{i\omega_0 t}$$

$$y_1'' = -a\omega_0^2 e^{i\omega_0 t}$$

С y'' и y замесваме в уравнението $y'' + 5y = 2e^{i\omega_0 t}$.

$$-a\omega_0^2 e^{i\omega_0 t} + 5ae^{i\omega_0 t} = 2e^{i\omega_0 t}$$

$$-a\omega_0^2 + 5a = 2$$

$$a = \frac{2}{5 - \omega_0^2}$$

Заместваме в y_1 с намерената стойност за a.

$$y_1 = \frac{2}{5 - \omega_0^2} e^{i\omega_0 t}$$

$$y_1 = \frac{2}{5 - \omega_0^2} (\cos(\omega_0 t) + i \sin(\omega_0 t))$$

$$y_1 = \frac{2}{5 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t) + i \frac{2}{5 - \omega_0^2} \sin(\omega_0 t)$$

$$\mathrm{Re}(y_1) = \frac{2}{5 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t)$$

Общото решение на нехомогенното уравнение
$y'' + 5y = 2\cos(\omega_0\, t)$ е:

$$y = y_0 + \mathrm{Re}(y_1) = C_1 \cos(\sqrt{5}t) + C_2 \sin(\sqrt{5}t) + \frac{2}{5 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t)$$

Можем да намерим точното уравнение, решение на задачата на Коши, като заместим с началните условия от задачата на Коши.

2.2 Matlab код

```matlab
% Task (1), demonstrates 'friction'
function task1
    y = dsolve( ...
        'D2y + 0.3 * Dy + 5 * y = 0', ...
        'y(0) = -1', 'Dy(0) = 1', ...
        'x' ...
    );
    x = linspace(0, 50, 1000);
    plot(x, eval(y))
end

% Task (2), demonstrates 'resonance'
function task2
    y = dsolve( ...
        'D2y + 5 * y = 2 * cos(sqrt(5) * t)', ...
        'y(0) = -1', 'Dy(0) = 1', ...
        't' ...
    );
    t = linspace(0, 50, 1000);
    plot(t, eval(y))
end

% Task (3), demonstrates 'beats'
function task3
    a = 2;
    k = 0;
    omega = sqrt(5);
    epsilon = 0.3;
    omega0 = omega + epsilon;
    y = dsolve( ...
        'D2y + k * Dy + omega^2 * y = 2 * cos(omega0 * t)', ...
        'y(0) = -1', 'Dy(0) = 1', ...
        't' ...
    );
    t = linspace(0, 50, 1000);
    plot(t, eval(y))
end
```

2.3 Графики

Графика на решението на уравнението:

$$\begin{cases} y'' + 0.3y' + 5y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

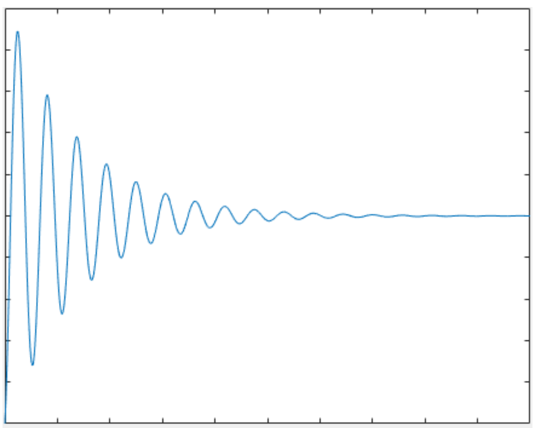

Figure 1: Триене

Графика на решението на уравнението:

$$\begin{cases} y'' + 5y = 2\cos(\sqrt{5}t) \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

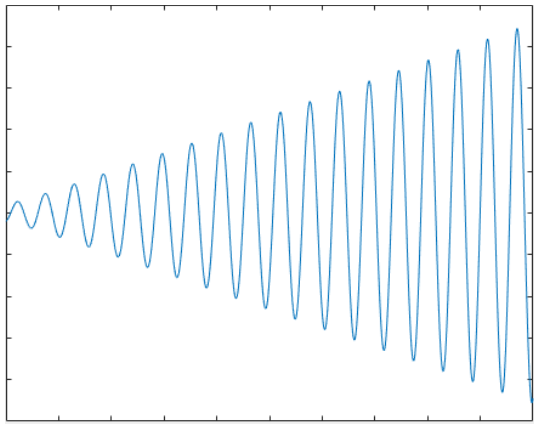

Figure 2: Резонанс

Графика на решението на уравнението:

$$\begin{cases} y'' + 5y = 2\cos((\sqrt{5}+\epsilon)t) \quad \epsilon > 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

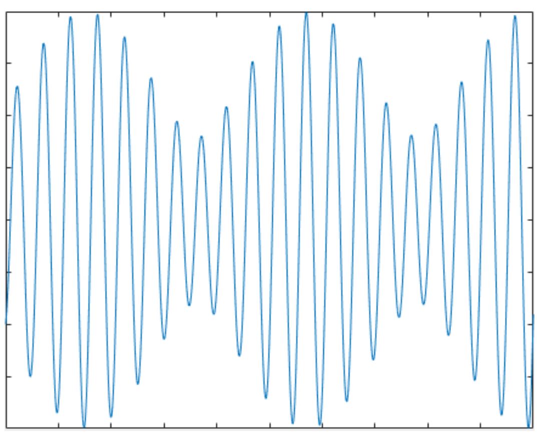

Figure 3: Биене

2.4 Коментари към получените с MatLab резултати

За явлението биене в подточка (3) избраната стойност за ϵ е 0.3, защото така се демонстрира явлението ясно в дадения интервал $[0, 50]$.

В подточка (1) се демонстрира триене, защото стойността на коефициента на загуба на енергия е по-голяма от нула.
Ако този коефициент бъде зададен да е 0, то тогава няма да се получава триене, а периодично движение.

Графика на решението на уравнението:

$$\begin{cases} y'' + 5y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

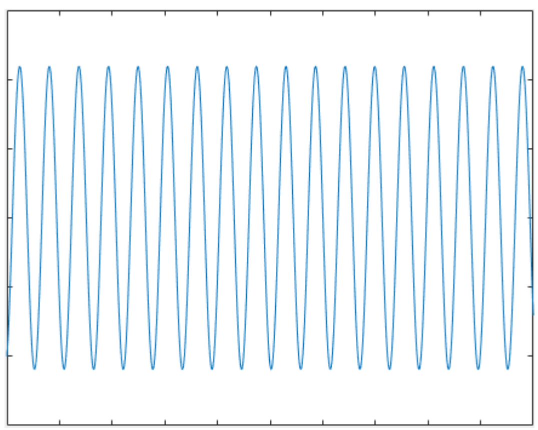

Figure 4: Периодично движение

Аналитичнито решение на това уравнение е аналогично на решението в подточка (1).