

**Задачи за подготовка за контролна работа № 1
по "Диференциални уравнения и приложения",
спец. "Софтуерно инженерство"**

Задача 1. Решете задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Задача 2. Решете задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y}, \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

Задача 3. Решете задачата на Коши

$$\begin{cases} (1 - 2x)(xy' + 2y) = x^4y^2, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Задача 4. Решете задачата на Коши

$$\begin{cases} 2(x + 1)yy' = 4y^2 + x(x + 1)^3, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Задача 5. Решете задачата на Коши

$$\begin{cases} 2(1 - x)^4y' = (x - 1)^3y - xy^3, \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

Задача 6. Решете уравнението

$$2(y')^2 + 4xy' + x^2 - 2y = 0.$$

Задача 7. Решете уравнението

$$x(y')^2 = xyy'' - (x + 1)yy'.$$

Задача 8. Решете уравнението

$$(y')^2 - yy'' = \left(1 - \frac{1}{x}\right) yy'.$$

Задача 9. Решете задачата

$$\begin{cases} xy'' = y'(\ln y' - \ln x), \\ y(1) = -1, \quad y'(1) = e. \end{cases}$$

Задача 10. Решете задачата

$$\begin{cases} xy'' + 2y' = 3 \ln x, \\ y(1) = 2, \quad y'(1) = 1. \end{cases}$$

Задача 11. Докажете, че задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = a(x)y + e^x, \\ y(1) = -1, \end{cases}$$

където $a \in C(\mathbb{R})$, може да има най-много едно решение $y \in C^1(\mathbb{R})$.

Задача 12. Докажете, че съществува решение $y \in C^1(\mathbb{R})$ на задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = \sin(x)y + b(x), \\ y(-1) = -1, \end{cases}$$

където $b \in C(\mathbb{R})$.

Задача 13. Докажете, че съществува единствено решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = \cos(x + y), \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Определете интервал, в който е дефинирано това решение.

Задача 14. Докажете, че съществува единствено решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^4, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Определете интервал, в който е дефинирано това решение.

Задача 15. Решете уравнението

$$y' = \frac{2x - y - 1}{x + y + 3}$$

Задача 16. Решете уравнението

$$y' = \frac{x - 2y + 2}{y - x - 1}$$