

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA



**SOBRE EL ESTUDIO PERTURBATIVO DE DISTINTAS TEORÍAS  
DE ESPÍN-2**

Trabajo Especial de Grado presentado por  
Amado Navas  
ante la Facultad de Ciencias de la  
Ilustre Universidad Central de Venezuela  
como requisito parcial para optar al título  
de: **Licenciado en Física**  
Con la tutoría de: Prof. José A. López

Noviembre-2019  
Caracas-Venezuela

*Escuela de Física*



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA



**SOBRE EL ESTUDIO PERTURBATIVO DE DISTINTAS TEORÍAS  
DE ESPÍN-2**

Trabajo Especial de Grado presentado por  
Amado Navas  
ante la Facultad de Ciencias de la  
Ilustre Universidad Central de Venezuela  
como requisito parcial para optar al título  
de: **Licenciado en Física**  
Con la tutoría de: Prof. José A. López

Noviembre-2019  
Caracas-Venezuela



25 de marzo de 2020

Consejo de la Escuela de Física  
Facultad de Ciencias  
Universidad Central de Venezuela

Estimados miembros del Consejo de Escuela

Reciban un cordial saludo. Conforme a lo establecido en el artículo 13 de la “Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV” les remito tres ejemplares de la monografía de TEG del estudiante **Amado Navas**, CI: **V-25686409**, titulado **SOBRE EL ESTUDIO PERTURBATIVO DE DISTINTAS TEORÍAS DE ESPÍN-2**, los cuales he revisado y considero listos para la evaluación por parte de un jurado.

Agradeciendo la consideración que sirvan prestar a la presente, me despido atentamente,

Prof. José A. López  
C.I: V-10504342  
Tutor  
UCV



Quiero agradecer a mi madre, por ser mi piedra angular y una fuente infinita de apoyo. A mi padre, por sin saberlo haber sido mi fuente de inspiración y la más probable causa de la escogencia de mi carrera y a mi hermana, por educarme en aspectos de la vida que los libros no pueden enseñar.

A mis amigos, Juan, Sergio, Mauricio, Marlon, Andrea, Angel, Franczheska, Ligia y Marie. Los amo como si fueran mis hermanos, este viaje hubiera sido imposible sin ustedes.

A mi abuela Ana, mis tías Eugenia y Anabel, mis tíos Marcos, Cesar y José, mis primos Santiago y Rodolfo. Ustedes me proporcionaron apoyo y un lugar seguro al cual recurrir.

A todos ustedes y a todos los que me apoyaron, jamas podré pagarles todo lo que han hecho por mi, en serio, muchas gracias.





# Agradecimientos

Quiero agradecer mis profesores, Ernesto Contreras, Anamaria Font, Leonardo Vivas, Gabriel Abellan, Rosa Mujica, Abraham Lozada y a aquellos que no alcanzo a nombrar. La educación que me dieron es uno de mis más preciados e importantes recursos.

A mis futuros colegas y amigos, Laura, Hector, María, Victor, Gabriel, Richert y a todos los demas que no alcanzo a nombrar. Ustedes hicieron más fácil y llevadero este viaje.

A mi tutor José López, quien se esforzó para que me esforzara, respondió mis dudas e inquietudes, e hizo posible este proyecto.

Al laboratorio de campos y partículas, en donde surgió la mayoría de este trabajo.

Y a mi amada UCV, por hacerme la persona que soy hoy en día.



## RESUMEN

Se quiere estudiar las teorías de espín  $s = 2$ . Para ello partimos de las teorías más conocidas de espín  $s = 0$  y  $s = 1$ , con el proposito de familiarizarnos con conceptos básicos de las teorías de campos. Luego se estudian las teorías singulares con la finalidad de entender la reducción de grados de libertad debido a redundancias en las teorías. Luego partimos de la formulación lineal más general posible para teorías de espín  $s = 2$ , luego clasificamos las teorías, se cuenta el número de grados de libertad de cada una, se hallan sus ecuaciones de movimiento y se construyen los respectivos propagadores.



# Índice general

<b>Lista de figuras</b>	<b>13</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>15</b>
<b>2. Campo de Klein-Gordon</b>	<b>17</b>
2.1. Cuantización del campo KG . . . . .	18
2.2. Relaciones de conmutación covariantes . . . . .	21
2.3. Propagador de Feynman del campo de Klein-Gordon . . . . .	23
<b>3. Campo de Maxwell</b>	<b>27</b>
3.1. Campo de Maxwell sin fuentes . . . . .	27
3.2. Cuantización canónica en el calibre de Lorentz . . . . .	29
3.3. Propagador de los fotones . . . . .	31
<b>4. Cuantización canónica de teorías singulares</b>	<b>35</b>
4.1. Formulación Hamiltoniana . . . . .	35
4.2. Condiciones de consistencia . . . . .	37
4.3. Cantidades de primera y segunda clase, corchetes de Dirac . . . . .	38
4.4. Cuantización de sistemas con ligaduras de primera clase . . . . .	39
4.5. Cuantización de sistemas con ligaduras de segunda clase . . . . .	39
4.6. Sistemas singulares con infinitos grados de libertad . . . . .	40
<b>5. Aspectos sobre las teorías de espín-2</b>	<b>43</b>
5.1. Acción general para teorías de espín-2 . . . . .	43
5.2. Teorías lineales de espín-2 estándar . . . . .	44
5.3. Conteo de grados de libertad . . . . .	45
5.3.1. Teoría de Einstein-Hilbert . . . . .	45
5.3.2. Teoría de Fierz-Pauli . . . . .	45
5.4. Ecuaciones de movimiento y fijación de calibre . . . . .	46

---

5.4.1.	Teoría de Einstein-Hilbert . . . . .	46
5.4.2.	Teoría de Fierz-Pauli . . . . .	47
5.5.	Propagadores para las distintas teorías . . . . .	47
5.5.1.	Teoría de Einstein-Hilbert . . . . .	47
5.5.2.	Teoría de Fierz-Pauli . . . . .	49
<b>6.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>51</b>

# Índice de figuras

2.1. Contorno para la representación integral en $p_0$ . . . . .	23
2.2. Contorno para la representación integral del propagador $\Delta_F$ . . . . .	25





# Capítulo 1

## Introducción

Se quiere realizar un estudio general sobre las teorías de espín 2 desde el punto de vista de las teorías de campos. Para ello se hace una introducción al tema en el capítulo 2 con el campo de Klein-Gordon [1] donde sentaremos las bases para nuestro trabajo, desde la acción hasta el propagador, pasando por las ecuaciones de movimiento, sus soluciones, y varios elementos básicos de las teorías de campos.

Luego de esto estudiaremos nuestra primera teoría singular en el capítulo 3, que corresponde al campo de Maxwell [1] [2]. Aquí podremos ver que es una teoría singular además de como lidiar con ella, veremos su acción, las modificaciones que se le hacen, procederemos a cuantizarla y resolver sus ecuaciones de movimiento. Luego ver como los grados de libertad se reducen debido a la invariancia de calibre utilizando el método de Gupta-Bleuler y finalmente calcular el propagador de la teoría.

En el capítulo 4 procederemos a hacer un análisis más sistemático de las teorías singulares [3]. Aquí veremos explícitamente qué las hace singulares. Veremos que esto es causado por unos objetos llamados ligaduras, veremos entonces como formular las teorías tomando en cuenta estas ligaduras y como dependiendo de las ligaduras nuestras teorías serán de una forma u otra.

En el capítulo 5 es donde se debate todo lo referente a teorías de espín 2. Comenzamos igual que en el campo de Klein-Gordon escribiendo su acción acorde a [4] [5]. De aquí procedemos a clasificarlas usando los resultados de [6] y a contar sus grados de libertad valiéndonos de similitudes con la teoría de Maxwell [7] [8]. Luego de esto se utilizan las ecuaciones de Euler-Lagrange para calcular las ecuaciones de movimiento. Finalmente utilizamos fenomenología para construir el propagador de la teoría no masiva [5], y una

---

prescripción de la mecánica cuántica para construir el propagador de la teoría masiva [7].

---

## Capítulo 2

# Campo de Klein-Gordon

El campo de escalar de Klein-Gordon (campo KG) es el modelo básico con el que se trabaja en la teoría de campos estándar es por ello que siempre que se estudian los campos más complejos como los campos de Dirac, Proca o Maxwell vemos que en todos estos siempre terminamos con una ecuación o una solución que tiene cierta reminiscencia al campo de KG [1] [8]. Para las teorías de espín-2 estudiadas en el presente trabajo este sigue siendo el caso, ya que veremos que tanto la estructura de la acción como la del propagador mantienen cierto parecido con las correspondientes estructuras del campo de KG [4].

El campo de Klein-Gordon surgió como solución a la ecuación de Klein-Gordon. Ésta fue un intento de conciliar la teoría de la relatividad con la mecánica cuántica. Para ello se partió de la ecuación para la energía

$$E^2 = (\vec{p})^2 + m^2,$$

en donde se está trabajando (y se seguirá así por el resto del trabajo) con unidades naturales, es decir,  $c = \hbar = 1$ . A dicha ecuación se la somete al proceso de primera cuantización por lo que los observables  $E, \vec{p}$  se asocian con operadores actuando sobre un espacio de Hilbert

$$\begin{aligned}\vec{p} &\rightarrow -i\nabla, \\ E &\rightarrow i\partial_t,\end{aligned}$$

esto nos deja con la ecuación de KG

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(\vec{x}, t) + m^2 \phi(\vec{x}, t) = 0,$$

en donde estamos utilizando (y seguiremos utilizando) el convenio de suma de Einstein y

---

la métrica

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación de KG es la ecuación de movimiento obtenida luego de hacer variaciones y aplicar el principio de Hamilton a la acción

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2), \quad (2.1)$$

de donde extraemos la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2). \quad (2.2)$$

## 2.1. Cuantización del campo KG

Queremos realizar el proceso de segunda cuantización acorde a [1]. Primero debemos encontrar el campo conjugado al campo  $\phi(\vec{x}, t)$

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x),$$

en donde por simplicidad escribimos  $\phi(\vec{x}, t) = \phi(x)$ . Ahora promovemos los campos a operadores es un espacio de Hilbert  $(\phi(x), \pi(x)) \rightarrow (\hat{\phi}(x), \hat{\pi}(x))$ , y proponemos las relaciones de conmutación a tiempos iguales

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.3)$$

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{y}, t)] = [\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = 0. \quad (2.4)$$

Ahora procedemos a expandir  $\hat{\phi}$  en términos de operadores escalera con la base  $N_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$  en donde  $N_p$  es una constante de normalización cuyo valor es

$$\frac{1}{\sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}},$$

en donde  $\omega_p = \sqrt{(\vec{p})^2 + m^2}$ , luego el operador de campo  $\hat{\phi}$  queda como

$$\hat{\phi}(x) = \int d^3p N_p e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \hat{a}(\vec{p}, t),$$

si sustituimos en la ecuación de movimiento nos queda

$$\ddot{\hat{a}}(\vec{p}, t) = -((\vec{p})^2 + m^2)\hat{a}(\vec{p}, t),$$

que se soluciona con

$$\hat{a}(\vec{p}, t) = \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i\omega_p t} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{i\omega_p t},$$

en donde hemos utilizado el hecho de que  $\hat{\phi} = \hat{\phi}^\dagger$ , por lo que el operador de campo se escribe como

$$\hat{\phi}(x) = \int d^3p N_p \left( \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i(p_\mu x^\mu)} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{i(p_\mu x^\mu)} \right), \quad (2.5)$$

en donde  $(p_\mu) = (\omega_p, \vec{p})$ . De aquí procederemos a hacer una separación del campo en dos partes

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^+(x) &= \int d^3p N_p \hat{a}_{\vec{p}} e^{-i(p_\mu x^\mu)}, \\ \hat{\phi}^-(x) &= \int d^3p N_p \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{i(p_\mu x^\mu)}, \end{aligned}$$

con todo esto procedemos a escribir las relaciones de conmutación para los operadores  $\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ . Si sustituimos  $\hat{\phi}$  y la derivada correspondiente en las ecuaciones (2.3) y (2.4) obtenemos el álgebra de los operadores de escalera

$$\left[ \hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \right] = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (2.6)$$

$$\left[ \hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'} \right] = \left[ \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}'}^\dagger \right] = 0, \quad (2.7)$$

por lo que de ahora en adelante nos podremos referir al operador  $\hat{a}_{\vec{p}}$  como operador de aniquilación, y al operador  $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$  como operador de creación, en donde

$$\hat{a}_{\vec{p}} |0\rangle = 0. \quad (2.8)$$

Ahora definiremos el producto con ordenamiento normal. Sean dos operadores en un espacio de Hilbert  $\hat{\psi}, \hat{\chi}$ , que se pueden separar de la misma manera que el operador  $\hat{\phi}$ , por ejemplo  $\hat{\chi} = \hat{\chi}^+ + \hat{\chi}^-$ , en donde  $\hat{\chi}^+ \propto e^{-i(p_\mu x^\mu)}$  y  $\hat{\chi}^- \propto e^{i(p_\mu x^\mu)}$ , se define el producto de ordenamiento normal entre  $\hat{\psi}$  y  $\hat{\chi}$  como

$$: \hat{\psi} \hat{\chi} : \equiv \hat{\psi}^- \hat{\chi}^- + \hat{\psi}^- \hat{\chi}^+ + \hat{\chi}^- \hat{\psi}^+ + \hat{\psi}^+ \hat{\chi}^+.$$

Ahora escribiremos el operador Hamiltoniano  $\hat{H}$  usando la siguiente relación

$$\hat{H} = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left( \hat{\pi}(x) \dot{\hat{\phi}}(x) - \mathcal{L} \right)$$

$$\Rightarrow \hat{H} = \int d^3x \frac{1}{2} \left( \hat{\pi}(x)^2 + (\nabla \hat{\phi}(x))^2 + m^2 \hat{\phi}(x)^2 \right), \quad (2.9)$$

que luego de sustituir los campos  $\hat{\phi}$  y  $\hat{\pi} = \dot{\hat{\phi}}$ , y hacer las integraciones correspondientes nos deja

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d^3p \omega_p \left( \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \right);$$

sin embargo esta integral es problemática, puesto que  $\hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger = \delta^3(0) + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$ , es decir, tenemos que la delta de Dirac sale de la integral y nos da un valor infinito para la energía. Para solucionar esto hacemos una redefinición del Hamiltoniano ahora usando el producto normal

$$\hat{\hat{H}} = \int d^3x \frac{1}{2} : \left( \hat{\pi}(x)^2 + (\nabla \hat{\phi}(x))^2 + m^2 \hat{\phi}(x)^2 \right) :,$$

que nos da como resultado

$$\hat{\hat{H}} = \int d^3p \omega_p \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}},$$

que no presenta el problema de ser divergente, sino que su valor depende del estado  $|\psi\rangle$  sobre el que actúe.

Ahora queremos calcular el momentum del campo ( $\vec{P}$ ), para ello escribimos el tensor de energía momentum del campo de KG y nos restringimos a trabajar en la parte espacial de su sector vectorial, es decir, los elementos  $\Theta_{0i}$

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \Rightarrow \hat{\vec{P}} = - \int d^3x \hat{\pi}(x) \nabla \hat{\phi}(x);$$

sin embargo no hay ninguna razón por la que los operadores  $\hat{\pi}, \nabla \hat{\phi}$  sean multiplicados únicamente en ese orden por lo que lo más natural se simetrizar el operador en este producto

$$\hat{\vec{P}} = - \frac{1}{2} \int d^3x \left( \hat{\pi}(x) \nabla \hat{\phi}(x) + \nabla \hat{\phi}(x) \hat{\pi}(x) \right),$$

esto garantiza que  $\hat{\vec{P}}$  sea hermítico. Luego de expandir  $\hat{\vec{P}}$  en términos de los operadores de escalera este se puede escribir como

$$\hat{\vec{P}} = \frac{1}{2} \int d^3p p \vec{p} \left( \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \right),$$

este operador a diferencia del operador  $\hat{H}$  no presenta problemas en el estado de vacío, debido a que el momentum puede tomar valores positivos y negativos por lo que no requiere ninguna modificación.

## 2.2. Relaciones de conmutación covariantes

Hasta ahora hemos trabajado con relaciones de conmutación en donde se escoge un tiempo en particular. Esto desde el punto de vista de la relatividad especial es poco satisfactorio, ya que solo trabaja en un sistema de referencia y no de una manera más general. Lo que se hará ahora es calcular el conmutador de los operadores de campo en coordenadas espacio-temporales arbitrarias sin escoger el mismo tiempo, es decir, se calculará  $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)]$ . Para ello separaremos el campo en las partes  $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^+(x) + \hat{\phi}^-(x)$ , e introduciremos esto en el conmutador

$$[\hat{\phi}^+(x) + \hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^-(y)],$$

que se reduce a

$$[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)] = [\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y)] + [\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)],$$

puesto que  $[\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^+(y)] = [\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^-(y)] = 0$ . Luego basta calcular uno solo de estos conmutadores porque sucede que

$$[\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)] = -[\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y)]^\dagger. \quad (2.10)$$

Veamos ahora el primer conmutador

$$[\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)] = \int d^3p d^3p' N_p N_{p'} [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] e^{-i(p_\mu x^\mu - p'_\mu y^\mu)},$$

que utilizando (2.6) nos queda como

$$[\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)] = \int d^3p N_p^2 e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)},$$

luego, usamos (2.10) y nos da que el conmutador original es

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)] &= \int d^3p N_p^2 (e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} - e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}) \\ &= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \omega_p} \sin[p_\mu(x^\mu - y^\mu)]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De donde podemos extraer

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(x), \hat{\phi}^\dagger(y)] &= i\Delta(x - y) \\ &= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \omega_p} \sin[p_\mu(x^\mu - y^\mu)], \end{aligned}$$

luego

$$\Delta(x-y) = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \omega_p} \sin[p_\mu(x^\mu - y^\mu)], \quad (2.12)$$

Que es una función conocida como función de Pauli-Jordan, esta función cumple con las siguientes propiedades

1. Debido a su construcción es igual para todos los observadores, es decir, es una función escalar relativista.
2. Es una función impar, es decir,  $\Delta(x-y) = -\Delta(y-x)$
3. Cumple con las condiciones de contorno  $\Delta(0, \vec{z}) = 0$  donde  $z = x - y$ , y con  $\left. \frac{\partial}{\partial z_0} \Delta(z_0, \vec{z}) \right|_{z_0=0} = -\delta^3(\vec{z})$
4. Satisface la ecuación homogénea de Klein-Gordon  $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Delta(z) = 0$
5. Se puede deducir de la propiedad 3 que para todos los vectores tipo espacio la función se anula, es decir,  $\Delta(x-y) = 0$  si  $(x-y)^2 < 0$ , esto da como origen a la microcausalidad, es decir, para dos puntos con separación tipo espacio los operadores de campo no podrán interactuar entre ellos.

Podemos expresar (2.12) de una manera más satisfactoria desde un punto relativista, esto al darnos cuenta que podemos escribirla a través del teorema del residuo como una integral sobre un contorno  $\mathcal{C}$  en la variable  $p_0$ , es decir,

$$\Delta(z) = \int_{\mathcal{C}} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot z}}{p^2 - m^2}, \quad (2.13)$$

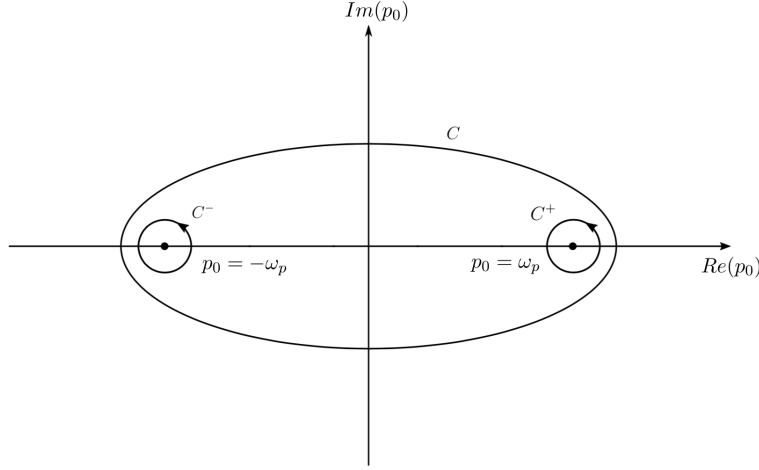
ya que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0 x_0}}{p^2 - m^2} &= \int_{\mathcal{C}} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{e^{-ip_0 x_0}}{p_0^2 - \omega_p^2} \\ &= -2\pi i \left( \text{Res}|_{p_0=\omega_p} + \text{Res}|_{p_0=-\omega_p} \right) \\ &= -i \frac{1}{2\omega_p} (e^{-i\omega_p x_0} - e^{i\omega_p x_0}). \end{aligned}$$

En donde el contorno  $\mathcal{C}$  es

Además también se puede ver que con los contornos  $\mathcal{C}^+$  y  $\mathcal{C}^-$  podemos construir las funciones  $i\Delta^+(z) = [\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)]$ ,  $i\Delta^-(z) = [\hat{\phi}^-(x), \hat{\phi}^+(y)]$ .



Figura 2.1: Contorno para la representación integral en  $p_0$ 

## 2.3. Propagador de Feynman del campo de Klein-Gordon

Para definir el propagador de Feynman primero definiremos el producto de tiempo ordenado entre dos operadores  $\hat{A}(x), \hat{B}(y)$  como

$$T(\hat{A}(x)\hat{B}(y)) = \begin{cases} \hat{A}(x)\hat{B}(y) & \text{si } x_0 > y_0 \\ \hat{B}(y)\hat{A}(x) & \text{si } y_0 > x_0 \end{cases},$$

que también se puede escribir como

$$T(\hat{A}(x)\hat{B}(y)) = \hat{A}(x)\hat{B}(y)\Theta_H(x_0 - y_0) + \hat{B}(y)\hat{A}(x)\Theta_H(y_0 - x_0),$$

donde  $\Theta_H$  es la función escalón de Heaviside definida por

$$\Theta_H(x - x') = \begin{cases} 1 & \text{si } x > x' \\ 0 & \text{si } x' > x \end{cases}.$$

Ahora procedemos a definir el propagador de Feynman como

$$i\Delta_F(x - y) = \langle 0 | T(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y)) | 0 \rangle,$$

que como estamos trabajando con el campo KG real sucede que  $\hat{\phi} = \hat{\phi}^\dagger$ . Además de esto es importante revisar (2.8), ya que nos permite escribir

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^+(x) | 0 \rangle &= 0, \\ \langle 0 | \hat{\phi}^-(x) &= 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

si ahora vemos la primera parte del producto de tiempo ordenado del propagador de Feynman, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | (\hat{\phi}^+(x) + \hat{\phi}^-(x))(\hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^-(y)) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \hat{\phi}^+(x) \hat{\phi}^+(y) + \hat{\phi}^-(x) \hat{\phi}^-(y) + \hat{\phi}^+(x) \hat{\phi}^-(y) + \hat{\phi}^-(x) \hat{\phi}^+(y) | 0 \rangle \quad (2.15) \\ &= \langle 0 | \hat{\phi}^+(x) \hat{\phi}^-(y) | 0 \rangle,\end{aligned}$$

en donde hemos utilizado (2.14). Ahora añadimos un término que nos permite reescribir (2.15) de forma conveniente

$$\begin{aligned}\langle 0 | \hat{\phi}(x) \hat{\phi}(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{\phi}^+(x) \hat{\phi}^-(y) - \hat{\phi}^-(x) \hat{\phi}^+(y) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | [\hat{\phi}^+(x), \hat{\phi}^-(y)] | 0 \rangle \quad (2.16) \\ &= i\Delta^+(x - y),\end{aligned}$$

en donde hemos utilizado (2.14). Similarmente se obtiene que para  $y_0 > x_0$

$$\langle 0 | \hat{\phi}(y) \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = -i\Delta^-(x - y), \quad (2.17)$$

obteniendo que

$$\Delta_F(x - y) = \Delta^+(x - y)\Theta_H(x_0 - y_0) - \Delta^-(x - y)\Theta_H(y_0 - x_0), \quad (2.18)$$

esto en representación integral es

$$i\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p} [\Theta_H(x_0 - y_0) e^{-ip \cdot (x-y)} + \Theta_H(y_0 - x_0) e^{ip \cdot (x-y)}],$$

que puede ser escrito

$$\Delta_F(x - y) = \int_{C_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2}. \quad (2.19)$$

En donde el contorno utilizado es

Este resultado se podría replicar si en lugar de integrar por el contorno  $C_F$ , integramos sobre el eje real  $p_0$  y evitamos las singularidades al trasladar la parte racional del integrando por una cantidad infinitesimal  $i\epsilon$ , es decir,

$$\begin{aligned}\Delta_F(x - y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \Delta_F(p) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon},\end{aligned} \quad (2.20)$$

de (2.19) podemos extraer la representación de  $\Delta_F$  en el espacio de momentum

$$\begin{aligned}\Delta_F(x - y) &= \int_{C_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2} = \int_{C_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{1}{p^2 - m^2} \\ &= \int_{C_F} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \Delta_F(p) \\ \Rightarrow \Delta_F(p) &= \frac{1}{p^2 - m^2},\end{aligned}$$

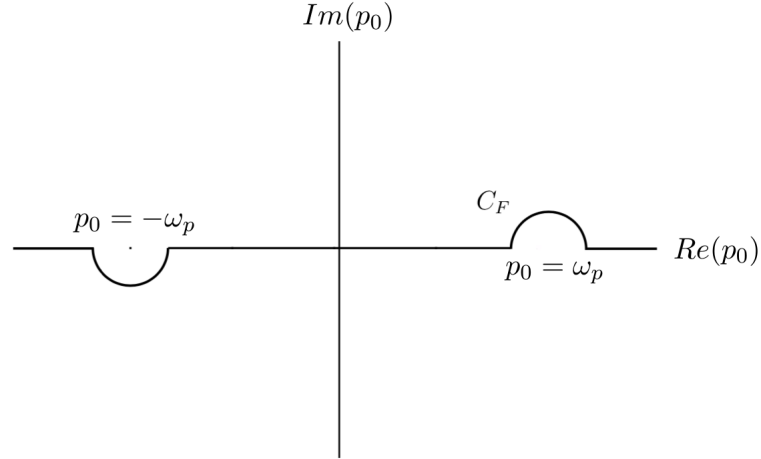


Figura 2.2: Contorno para la representación integral del propagador  $\Delta_F$

dicha representación servirá como base para los distintos propagadores de las demás teorías trabajadas en el presente trabajo.

El propagador  $\Delta_F$  puede ser interpretado de la siguiente manera. La primera mitad ( $x_0 > y_0$ ) es la amplitud de probabilidad de que se cree una partícula en  $y$  y luego sea aniquilada en  $x$ . Similarmente la segunda mitad del propagador corresponde a la antipartícula del campo (En nuestro caso es la misma partícula) siendo creada en  $x$  y aniquilada en  $y$ . Esto fue interpretado por Richard Feynman [1] como que la antipartícula es una partícula que se mueve hacia atrás en el tiempo.



# Capítulo 3

## Campo de Maxwell

Similarmente a como el campo de Klein-Gordon es un ejemplo básico en la teoría de campos, el campo de Maxwell es el primer ejemplo de una teoría con libertad de calibre. Es decir, las variables no están únicamente determinadas por la dinámica del sistema. Para solventar esto se hará uso de una fijación de calibre a nivel de la densidad Lagrangiana siguiendo los métodos presentados en [1] [2] que nos permitirán realizar la segunda cuantización del campo.

### 3.1. Campo de Maxwell sin fuentes

Es conveniente escribir la acción del campo de Maxwell en términos del tensor  $F^{\mu\nu}$  que se define de la siguiente forma

$$(F^{\mu\nu}) = (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

donde  $A^\mu$  es el cuadrivector potencial definido por  $(A^\mu) = (\phi, \vec{A})$ . Usando esto la acción se escribe de manera bastante sencilla como

$$S = \int -\frac{d^4x}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

de donde extraemos la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu};$$

sin embargo esta acción presentaría un problema a la hora de cuantizar, si calculamos el campo conjugado a  $A^\mu$

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\mu)} = -F_{0\mu},$$

---

vemos que el campo conjugado  $\pi_0 = 0$  debido a la antisimetría del tensor  $F^{\mu\nu}$ , esto sería incompatible con las relaciones de conmutación a tiempos iguales, porque haría que una de ellas fuera inmediatamente cero en lugar de una delta. Para solucionar este problema haremos uso de una modificación propuesta por Fermi y le añadiremos un término a la acción

$$S' = - \int d^4x \left( \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \zeta (\partial_\sigma A^\sigma)^2 \right),$$

en donde podemos escoger el valor del parámetro  $\zeta$  como  $\zeta = 1$  a lo que generalmente se le refiere como calibre de Feynman. Usando este calibre la acción pasa a ser

$$S'' = - \int d^4x \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu, \quad (3.3)$$

que reproducirá las ecuaciones de Maxwell en el calibre de Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0; \quad (3.4)$$

sin embargo (3.4) no especifica por completo el campo ya que podemos hacer la transformación  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$  siempre que  $\partial_\mu \partial^\mu f = 0$ . La condición (3.4) se puede demostrar que es incompatible con la cuantización estándar [1], por lo que se procederá a cuantizar la acción (3.3) como si fuera la original y luego aplicaremos la condición (3.4) usando el método de Gupta-Bleuler para reproducir el electromagnetismo.

El campo conjugado correspondiente a (3.3) es

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial (\partial_0 A^\mu)} = -\partial^0 A_\mu.$$

Ademas de esto la ecuación de movimiento del campo pasa a ser una ecuación de onda regular

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 0,$$

que puede ser interpretada como 4 campos de Klein-Gordon no masivos propagándose.

La densidad Hamiltoniana es

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'' &= \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}'' \\ &= -\frac{1}{2} \pi^\mu \pi_\mu + \frac{1}{2} \partial_k A_\nu \partial^k A^\nu, \end{aligned}$$

Que separada en parte espacial y parte temporal se escribe como

$$\mathcal{H}'' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left[ (\dot{A}^k)^2 + (\nabla A^k)^2 \right] - \frac{1}{2} \left[ (\dot{A}^0)^2 + (\nabla A^0)^2 \right], \quad (3.5)$$

mostrándonos así lo que parece ser un problema de la teoría, el Hamiltoniano parece poder tomar valores de energía negativos dependiendo del campo  $A^0$ . Más tarde al cuantizar veremos que esto resulta ser una dificultad evitable.

Aparte de la densidad Hamiltoniana podemos calcular el tensor de energía momentum

$$\begin{aligned}\Theta^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} \partial^\nu A_\sigma - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}'' \\ &= -\partial^\mu A^\sigma \partial^\nu A_\sigma + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial^\rho A^\sigma \partial_\rho A_\sigma,\end{aligned}$$

de donde extraemos la densidad de momentum

$$p^i = \Theta^{0i} = -\partial^0 A^\sigma \partial^i A_\sigma,$$

que es lo mismo que

$$\vec{p} = -\sum_{k=1}^3 \dot{A}^k \nabla A^k + \dot{A}^0 \nabla A^0.$$

## 3.2. Cuantización canónica en el calibre de Lorentz

Usando los objetos presentados en la sección anterior procedemos a realizar la cuantización del campo vectorial. Para ello proponemos las relaciones de conmutación a tiempos iguales

$$\begin{aligned}\left[ \hat{A}^\mu(\vec{x}, t), \hat{\pi}^\nu(\vec{x}', t) \right] &= i\eta^{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \\ \left[ \hat{A}^\mu(\vec{x}, t), \hat{A}^\nu(\vec{x}', t) \right] &= \left[ \hat{\pi}^\mu(\vec{x}, t), \hat{\pi}^\nu(\vec{x}', t) \right] = 0,\end{aligned}\tag{3.6}$$

que parecen ser relaciones de conmutación regulares salvo por el cambio de signo introducido por  $\eta$ . Esto trae varias consecuencias para la teoría ya que se podrían ver estados con norma negativa u otro tipo de problemas. Más tarde veremos como el método de Gupta-Bleuler solventa todo esto.

Podemos solucionar las ecuaciones dinámicas de los campos utilizando la expansión de Fourier

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=0}^3 \left( \hat{a}_{\vec{k}\lambda} \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) e^{ik \cdot x} \right), \tag{3.7}$$

donde  $\omega_k = k_0 = |\vec{k}|$ , y los objetos  $\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda)$  son los vectores de polarización del campo que se escriben como

$$\begin{aligned}\epsilon^\mu(\vec{k}, 0) &= (1, 0, 0, 0), \\ \epsilon^\mu(\vec{k}, i) &= (0, \vec{\epsilon}(\vec{k}, i)) \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad ,\end{aligned}$$

en donde los vectores de polarización espacial se definen usando

$$\begin{aligned}\epsilon(\vec{k}, 1) \cdot \vec{k} &= \epsilon(\vec{k}, 2) \cdot \vec{k} = 0, \\ \vec{\epsilon}(\vec{k}, 3) &= \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Y el conjunto total de vectores de polarización cumple con la relación de completitud

$$\sum_{\lambda=0}^3 \eta^{\lambda\lambda} \epsilon_{\mu}(\vec{k}, \lambda) \epsilon_{\nu}(\vec{k}, \lambda) = \eta_{\mu\nu},\tag{3.9}$$

donde  $\eta^{\lambda\lambda}$  no está sumando sobre  $\lambda$ , sino que toma los valores  $\eta^{00} = 1, \eta^{ii} = -1$  para  $i = 1, 2, 3$ . Los vectores  $\epsilon$  también cumplen con la relación de ortogonalidad

$$\epsilon^{\mu}(\vec{k}, \lambda) \epsilon_{\mu}(\vec{k}, \lambda') = \eta_{\lambda\lambda'}.$$

Si ahora introducimos la expansión (3.7) en las relaciones de conmutación (3.6) encontramos

$$\begin{aligned}[\hat{a}_{\vec{k}'\lambda'}, \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^{\dagger}] &= -\eta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\vec{k}' - \vec{k}), \\ [\hat{a}_{\vec{k}'\lambda'}, \hat{a}_{\vec{k}\lambda}] &= [\hat{a}_{\vec{k}'\lambda'}^{\dagger}, \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^{\dagger}] = 0,\end{aligned}\tag{3.10}$$

donde vemos que los operadores  $\hat{a}_{\vec{k}\lambda}, \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^{\dagger}$  cumplen con el álgebra de los operadores escalera. Esto sin embargo presenta un problema ya que si calculamos la norma del espacio con una partícula obtenemos que (asumiendo que el vacío está normalizado  $\langle 0|0\rangle = 1$ )

$$\begin{aligned}\langle 1_{\vec{k},\lambda} | 1_{\vec{k},\lambda} \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_{\vec{k}\lambda} \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^{\dagger} | 0 \rangle \\ &= -g_{\lambda\lambda} \delta^3(0) \langle 0|0 \rangle,\end{aligned}$$

aquí podemos ver varios problemas, el primero sería la delta que haría divergente nuestra norma; esto es un problema que depende de la normalización que escogemos para nuestra teoría y puede ser evitado si asumimos que estamos integrando sobre un cubo de volumen  $V$  muy grande. Luego aparece el verdadero problema al ver que el estado con  $\lambda = 0$  tiene norma negativa.

Para solventar esto utilizamos el método de Gupta-Bleuler. Este consiste en tomar una versión más fuerte del calibre de Lorentz aplicada en los estados físicos del sistema. Para ello primero separamos el operador de campo

$$\begin{aligned}\hat{A}_{\mu} &= \hat{A}_{\mu}^{+} + \hat{A}_{\mu}^{-}, \\ \hat{A}_{\mu}^{+} &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=0}^3 \hat{a}_{\vec{k}\lambda} \epsilon_{\mu}(\vec{k}, \lambda) e^{-ik \cdot x}, \\ \hat{A}_{\mu}^{-} &= \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=0}^3 \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^{\dagger} \epsilon_{\mu}(\vec{k}, \lambda) e^{ik \cdot x},\end{aligned}$$



e imponemos la condición  $\partial^\mu \hat{A}_\mu^+ |\Phi\rangle = 0$  que es equivalente a  $\langle 0 | \partial^\mu \hat{A}_\mu^- = 0$ . Luego si sustituimos la expansión de los campos en la condición de Gupta-Bleuler obtenemos

$$\int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^3} e^{-ik \cdot x} \sum_{\lambda=0}^3 k \cdot \epsilon(\vec{k}, \lambda) \hat{a}_{\vec{k}\lambda} |\Phi\rangle = 0,$$

al aplicar la definición de la parte espacial (3.8) así como la propiedad  $k \cdot \epsilon(\vec{k}, 0) = -k \cdot \epsilon(\vec{k}, 3)$  obtenemos los vínculos

$$\begin{aligned} (\hat{a}_{\vec{k}0} - \hat{a}_{\vec{k}3}) |\Phi\rangle &= 0, \\ \langle \Phi | (\hat{a}_{\vec{k}0}^\dagger - \hat{a}_{\vec{k}3}^\dagger) &= 0, \end{aligned}$$

de los cuales podemos extraer la relación entre los valores de expectación

$$\langle \Phi | \hat{a}_{\vec{k}0}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}0} | \Phi \rangle = \langle \Phi | \hat{a}_{\vec{k}3}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}3} | \Phi \rangle,$$

por lo que al hacer cálculos como  $\langle 1_{\vec{k},\lambda} | 1_{\vec{k},\lambda} \rangle$  nos evitamos los signos negativos de los fotones escalares (aquellos con  $\lambda = 0$ ) ya que se cancelan con los fotones longitudinales (aquellos con  $\lambda = 3$ ). Finalmente haciendo uso de este método se encuentra que el valor de expectación del Hamiltoniano para los fotones es

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle &= \int d^3 k \omega_k \left( \sum_{\lambda=1}^2 \langle \Phi | \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\lambda} | \Phi \rangle + \langle \Phi | \hat{a}_{\vec{k}3}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}3} - \hat{a}_{\vec{k}0}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}0} | \Phi \rangle \right) \\ &= \int d^3 k \omega_k \sum_{\lambda=1}^2 \langle \Phi | \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\lambda} | \Phi \rangle \\ &= \int d^3 k \omega_k \sum_{\lambda=1}^2 n_{\vec{k},\lambda}. \end{aligned}$$

### 3.3. Propagador de los fotones

El propagador del campo de fotones se calcula de la misma manera que para el campo KG, es decir, realizamos el producto de tiempo ordenado insertando la expansión de Fourier (3.7) donde se verá que hay una métrica negativa producto de las relaciones de conmutación (3.10)

$$\begin{aligned} iD_F^{\mu\nu}(x-y) &= \langle 0 | T \left( \hat{A}^\mu(x), \hat{A}^\nu(y) \right) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3 k}{2\omega_k(2\pi)^3} \left( \sum_{\lambda=0}^3 (-\eta_{\lambda\lambda}) \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) \epsilon^\nu(\vec{k}, \lambda) \right) \times \\ &\quad (\Theta_H(x_0 - y_0) e^{-ik \cdot (x-y)} + \Theta_H(y_0 - x_0) e^{ik \cdot (x-y)}), \end{aligned}$$

luego si usamos la relación de completitud (3.9) y la integral (2.20) llegamos a

$$D_F^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} D_F^{\mu\nu}(k),$$

donde el propagador de Feynman en el espacio de momentum es

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-\eta^{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon},$$

gracias a que en la suma de los vectores de polarización no nos restringimos a grados de libertad físicos. Para entender mejor como afecta tener todos los grados de libertad, veremos como cada uno afecta al propagador. Sin embargo, antes de esto haremos un par de definiciones

$$n = (1, 0, 0, 0),$$

$$\epsilon(\vec{k}, 3) = \frac{k - n(k \cdot n)}{[(k \cdot n)^2 - k^2]^{1/2}}.$$

Usando esto el propagador se escribe como

$$D_F^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left( \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) \epsilon^\nu(\vec{k}, \lambda) + \epsilon^\mu(\vec{k}, 3) \epsilon^\nu(\vec{k}, 3) - \epsilon^\mu(\vec{k}, 0) \epsilon^\nu(\vec{k}, 0) \right)$$

$$= \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left( \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) \epsilon^\nu(\vec{k}, \lambda) + \frac{k^2 n^\mu n^\nu}{(k \cdot n)^2 - k^2} + \frac{k^\mu k^\nu - (k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)(k \cdot n)}{(k \cdot n)^2 - k^2} \right),$$

En donde se ve claramente una separación del propagador en 3 partes.

Parte transversa

$$D_{F(trans)}^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left( \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda) \epsilon^\nu(\vec{k}, \lambda) \right),$$

parte Coulombiana

$$D_{F(Coul)}^{\mu\nu}(k) = \frac{n^\mu n^\nu}{(k \cdot n)^2 - k^2},$$

y parte residual

$$D_{F(Res)}^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{k^\mu k^\nu - (k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)(k \cdot n)}{(k \cdot n)^2 - k^2}.$$

Si procedemos a analizar cada parte del propagador encontraremos que, se puede demostrar que la parte residual interactuando con corrientes conservadas no contribuye y por lo tanto puede ser retirada del propagador. La parte Coulombiana puede ser expresada como (usando  $n = (1, 0, 0, 0)$ )

$$D_{F(Coul)}^{\mu\nu}(k) = \frac{\delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0}}{|\vec{k}|^2},$$

que es la transformada de Fourier del potencial de Coulomb en el espacio de coordenadas, si realizamos la antitransformada encontramos

$$\begin{aligned} D_{F(Coul)}^{\mu\nu}(x-y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} D_{F(Coul)}^{\mu\nu}(k) \\ &= \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0} \frac{\delta(x_0 - y_0)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|}, \end{aligned}$$

En donde vemos que este propagador describe una interacción estática e instantánea entre la componente 0 del campo electromagnético, y la componente 0 de la corriente. Esta parte del propagador corresponde al intercambio de fotones escalares y longitudinales, por lo que si dejamos de considerar estos grados de libertad no tendríamos interacciones de este tipo.



# Capítulo 4

## Cuantización canónica de teorías singulares

Del electromagnetismo clásico sabemos que el campo electromagnético tiene solo dos grados de libertad correspondientes a las dos polarizaciones de la luz. Es decir, de los 4 grados de libertad que tiene el vector  $A^\mu$  dos son no físicos. Más tarde veremos que en las teorías de espín-2 también hay grados de libertad no físicos que deben ser descartados. En las próximas secciones introduciremos una manera sistemática para lidiar con estos grados de libertad no físicos y como cuantizar las teorías que los presentan siguiendo los métodos de [3] [9] .

### 4.1. Formulación Hamiltoniana

Por simplicidad en la introducción trabajaremos con sistemas clásicos con finitos grados de libertad.

Sea el sistema descrito por la acción sin dependencia explícita del tiempo

$$S = \int dt L(q_i(t), \dot{q}^j(t)),$$

las ecuaciones de movimiento obtenidas usando el principio de Hamilton

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i},$$

pueden ser escritas como

$$\ddot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}.$$

---

Es decir que para determinar de manera unívoca las aceleraciones  $\ddot{q}_i$  es requisito que la matriz Hessiana

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i},$$

sea invertible. Si esto no sucede entonces tendremos que algunas de las aceleraciones no son funciones de las posiciones y las velocidades, es decir, algunas de las variables no son independientes entre ellas. Lo que significa que tendremos relaciones entre las variables  $p, q$  llamadas ligaduras primarias que surgirán al escribir la formulación Hamiltoniana de la teoría. Esto es

$$\phi_r(q_i, p^j) = 0 \quad , \quad r = 1, \dots, R, \quad (4.1)$$

donde  $R$  es el número de ligaduras primarias de la teoría. Para tomar en cuenta dichas ligaduras en nuestra descripción podemos añadirlas al Lagrangiano de la teoría usando multiplicadores de Lagrange  $\lambda_r$

$$L(q_i(t), \dot{q}^j(t)) + \lambda_r \phi_r(q_i, p^j).$$

Si vemos la transformación habitual entre Lagrangiano y Hamiltoniano

$$H = p_i \dot{q}^i - L(q_i(t), \dot{q}^j(t)),$$

y hacemos variaciones sobre el Hamiltoniano

$$dH = \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i,$$

encontramos que es función únicamente de los momenta y de las posiciones, por lo que al tener un sistema con ligaduras en el que no podríamos despejar las velocidades  $\dot{q}^i$  debemos añadir las ligaduras usando multiplicadores de Lagrange al Hamiltoniano, obteniendo así el Hamiltoniano primario  $H_P$

$$H_P = H + \lambda_r \phi_r. \quad (4.2)$$

Luego podemos escribir la acción del sistema como

$$S = \int dt (p_i \dot{q}^i - H - \lambda_r \phi_r) \quad (4.3)$$

Para la que usando variaciones y el principio de Hamilton obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda_r \frac{\partial \phi_r}{\partial q^i}, \\ \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p^i} + \lambda_r \frac{\partial \phi_r}{\partial p^i}, \\ \phi_r &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Si introducimos el corchete de Poisson para sistemas de finitos grados de libertad

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial G}{\partial q_i},$$

vemos que las ecuaciones de movimiento se pueden escribir como

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= \{p_i, H_P\} + \lambda_r \{p_i, \phi_r\}, \\ \dot{q}^i &= \{q^i, H_P\} + \lambda_r \{q^i, \phi_r\}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

para una función  $F$  del espacio de fases, su ecuación de movimiento puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \{F, H_P\} - \{F, \lambda_r\} \phi_r \\ &\approx \{F, H_P\}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde el símbolo  $\approx$  indica que estamos dentro de la subvariedad del espacio de fases definida por las ligaduras (4.1), usando esta nomenclatura de ahora en adelante diremos que  $\phi_r \approx 0$ .

## 4.2. Condiciones de consistencia

Para que el método sea consistente es necesario demandar que el sistema no salga de la subvariedad definida por (4.1), es decir, demandamos que la evolución temporal de las ligaduras sea nula

$$\dot{\phi}_r = \{\phi_r, H\} + \lambda_a \{\phi_r, \phi_a\} \approx 0,$$

de estas condiciones de consistencia podemos obtener 4 casos

1. Ecuaciones del tipo  $0 = 0$  o repetición de alguna ligadura conocida, este caso no aporta información nueva a nuestra teoría.
2. Condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange  $\lambda_r$  que deben ser introducidas a la teoría para obtener las ecuaciones de movimiento.
3. Se obtienen nuevas ecuaciones que solo dependen de las variables  $q_i, p^j$  y las relacionan de una nueva manera, estas serán llamadas ligaduras secundarias y se suelen representar como  $\chi_s(q_i, p^j) \approx 0$  con  $s = 1, \dots, S$  el número de ligaduras secundarias obtenidas.
4. Se obtienen ecuaciones inconsistentes en cuyo caso la teoría debe ser revisada y reconsiderada.

Si estamos en el caso (3) se deben tomar las ligaduras secundarias y al igual que las primarias exigirles consistencia, de aquí podemos extraer más ligaduras, condiciones para los multiplicadores, o los demás casos.

Finalmente quedamos con un sistema que se mueve dentro de una subvariedad del espacio de fases definida por las ligaduras primarias  $\phi_r \approx 0$  y secundarias  $\chi_s \approx 0$ .

### 4.3. Cantidades de primera y segunda clase, corchetes de Dirac

De ahora en adelante por conveniencia escribiremos todas las ligaduras sean primarias o secundarias con el mismo símbolo  $\phi_n(p_i, q^j) \approx 0$  con  $n = 1, \dots, R + S$ .

Una separación más importante que la de primaria y secundaria a la hora de hacer la formulación es la separación en cantidades de primera y segunda clase, diremos que una cantidad  $\phi_n$  es de primera clase si su corchete de Poisson con todas las demás cantidades es nulo, es decir, Si  $G$  es de primera clase

$$\{G, \phi_n\} \approx 0 \quad , \quad \forall n = 1, \dots, R + S.$$

Si esto no sucede entonces se dice que la cantidad es de segunda clase.

Para poder cuantizar sistemas con ligaduras de segunda clase debemos hacer una redefinición del corchete de Poisson, estos nuevos corchetes llamados corchetes de Dirac se definen de la siguiente forma: Sean las ligaduras de segunda clase denotadas por  $\theta_a$ , entonces el corchete de Dirac de dos cantidades  $A, B$  viene dado por

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \theta_a\} \mathcal{C}_{ab} \{\theta_b, B\}, \quad (4.7)$$

donde  $\mathcal{C}_{ab}$  se define de la siguiente forma

$$\mathcal{C}_{ab} \{\theta_b, \theta_c\} = \delta_{ac},$$

es decir que la matriz generada por los corchetes de Poisson de las ligaduras de segunda clase tiene inversa  $\mathcal{C}_{ab}$ . Esto siempre es verdad ya que si llega a suceder que no es invertible es porque hay combinaciones de ligaduras de segunda clase que resultan cero, es decir, la combinación es de primera clase por lo que se podría construir una nueva matriz descartando los elementos generados con dichas combinaciones. Obteniendo siempre una matriz ( $\{\theta_b, \theta_c\}$ ) que sea invertible (o un sistema sin verdaderas ligaduras de segunda clase).



## 4.4. Cuantización de sistemas con ligaduras de primera clase

Para este sistema la cuantización es prácticamente la misma que para los sistemas sin ligaduras, es decir, las variables  $(q_i, p^j)$  son asociadas a operadores en un espacio de Hilbert  $(\hat{q}_i, \hat{p}^j)$ . Los corchetes de Poisson son asociados con conmutadores multiplicados por  $-i$

$$\{ \ , \ }_{PB} \rightarrow -i [ \ , \ ],$$

se postulan las relaciones de conmutación

$$[\hat{q}_i, \hat{p}^j] = i\delta_i^j,$$

los estados físicos  $|\psi\rangle$  del sistema son aquellos que cumplen con

$$\hat{\phi}_n |\psi\rangle \approx 0,$$

y todas las cantidades de primera clase  $G$  se asocian con un operador en el espacio de Hilbert que cumple con

$$[\hat{G}, \hat{\phi}_n] |\psi\rangle \approx 0.$$

## 4.5. Cuantización de sistemas con ligaduras de segunda clase

Que existan ligaduras de segunda clase implica que el sistema posee ciertos grados de libertad que no son de interés físico, para lidiar con esto definiremos los corchetes de Dirac que restringirán las variables físicas a mantenerse en la subvariedad del espacio de fases definida por las ligaduras. Usando estos corchetes en el formalismo en lugar de los habituales corchetes de Poisson, sucede que todas las ligaduras se comportan como si fueran de primera clase, es decir,

$$\{\theta_a, \phi_n\}_D \approx 0 \quad , \quad \forall a, n.$$

Ahora el proceso de cuantización prescribe nuevamente que las variables  $(q_i, p^j)$  son asociadas a operadores en un espacio de Hilbert  $(\hat{q}_i, \hat{p}^j)$ , y los corchetes de Dirac sean sustituidos por unos conmutadores que podemos llamar conmutadores de Dirac que poseen la misma estructura que los corchetes pero intercambiando los corchetes de Poisson por conmutadores, esto para dos operadores  $\hat{A}, \hat{B}$  es

$$[\hat{A}, \hat{B}]_D = [\hat{A}, \hat{B}] - [\hat{A}, \hat{\theta}_a] \mathcal{C}_{ab} [\hat{\theta}_b, \hat{B}].$$

Luego la sustitución de corchetes de Dirac por conmutadores de Dirac es

$$\{ \ , \ }_{PB} \rightarrow [ \ , \ ]_D,$$

se postulan las relaciones de conmutación

$$[\hat{q}_i, \hat{p}^j]_D = i\delta_i^j,$$

y los estados físicos  $|\psi\rangle$  del sistema son aquellos que cumplen con

$$\hat{\phi}_n |\psi\rangle \approx 0,$$

De esta manera culminamos con la cuantización de sistemas singulares con finitos grados de libertad.

## 4.6. Sistemas singulares con infinitos grados de libertad

Al principio del capítulo se dijo que por simplicidad se iba a hacer el desarrollo en sistemas con grados de libertad finitos, ahora procederemos a hacer el desarrollo con sistemas con infinitos grados de libertad.

Consideremos el Lagrangiano para los campos  $\psi_I$ , este ahora será un funcional de dichos campos y de sus derivadas

$$L = L[\psi_I, \partial_\mu \psi_I] = \int d^3x \mathcal{L}(\psi_I, \partial_\mu \psi_I),$$

aquí también se puede ver que la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  es una función de los campos  $\psi_I$  y sus derivadas. Luego como queremos hacer el paso al formalismo Hamiltoniano queremos definir el campo conjugado  $\pi_I$ , para ello haremos uso de la derivación funcional

$$\pi_I = \frac{\delta L}{\delta \dot{\psi}_I}.$$

Luego escribimos el Hamiltoniano usando la transformada de Legendre y encontramos que

$$H = \int d^3x (\pi_I \dot{\psi}_I - \mathcal{L}) = \int d^3x \mathcal{H}(\pi_I, \psi_I, \nabla \pi_I, \nabla \psi_I),$$

con esto ahora podemos escribir la acción en términos de la densidad Hamiltoniana y obtenemos

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x (\pi_I \dot{\psi}_I - \mathcal{H}).$$

Haciendo variaciones a la acción y aplicando el principio de Hamilton obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_I &= \left( \frac{\partial}{\partial \pi_I} - \partial_i \frac{\partial}{\partial (\partial_i \pi_I)} \right) \mathcal{H} \equiv \frac{\delta H}{\delta \pi_I}, \\ \dot{\pi}_I &= - \left( \frac{\partial}{\partial \psi_I} - \partial_i \frac{\partial}{\partial (\partial_i \psi_I)} \right) \mathcal{H} \equiv - \frac{\delta H}{\delta \psi_I},\end{aligned}$$

donde se introduce la derivada funcional como

$$\frac{\delta}{\delta \psi_I} = \frac{\partial}{\partial \psi_I} - \partial_i \frac{\partial}{\partial (\partial_i \psi_I)},$$

ella misma a través de la relación

$$\psi_I(\vec{x}, t) = \int d^3 x' \psi_I(\vec{x}', t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'),$$

ahora definimos la derivada funcional como

$$\frac{\delta \psi_I(\vec{x}, t)}{\delta \psi_J(\vec{x}', t)} = \delta_{IJ} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}').$$

Las ecuaciones de movimiento para un funcional de los campos  $\psi_I, \pi_J$  puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\dot{F}[\psi_I, \pi_J] &= \int d^3 x \left( \frac{\delta F}{\delta \psi_I} \dot{\psi}_I + \frac{\delta F}{\delta \pi_I} \dot{\pi}_I \right) \\ &= \int d^3 x \left( \frac{\delta F}{\delta \psi_I} \frac{\delta H}{\delta \pi_I} - \frac{\delta F}{\delta \pi_I} \frac{\delta H}{\delta \psi_I} \right) = \{F, H\},\end{aligned}$$

donde  $\{ , \}$  es el corchete de Poisson.

Si ahora introducimos ligaduras  $\Phi$  al sistema debemos hacerlo igual que antes, usando multiplicadores de Lagrange  $\lambda_r$ , estas ligaduras ahora serán funcionales de los campos y se escriben como la integral de una cierta densidad que llamaremos  $\phi_r$

$$\Phi[\psi_I, \pi_J, \lambda] = \int d^3 x \lambda_r(\vec{x}, t) \phi_r(\vec{x}, t).$$

Podemos escribir el Hamiltoniano primario de la teoría como

$$H_P = H + \Phi[\psi_I, \pi_J, \lambda],$$

y la acción como

$$S = \int d^4 x \left( \pi_I \dot{\psi}_i - \mathcal{H} - \lambda_r \phi_r \right).$$

Si aplicamos variaciones y el principio de Hamilton obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_I &= \frac{\delta H}{\delta \pi_I} + \frac{\delta \Phi}{\delta \pi_I} = \{\psi_I, H\} + \{\psi_I, \Phi\}, \\ \dot{\pi}_I &= - \frac{\delta H}{\delta \psi_I} - \frac{\delta \Phi}{\delta \psi_I} = \{\pi_I, H\} + \{\pi_I, \Phi\}.\end{aligned}$$

La evolución temporal con ligaduras de un funcional cualquiera del espacio de fases viene dada por

$$\dot{F} = \{F, H\} + \{F, \Phi\}.$$

Finalmente los algoritmos y reglas para encontrar ligaduras secundarias e identificarlas como de primera y segunda clase siguen siendo los mismos.

Ademas de eso también procederemos a definir el corchete de Dirac para sistemas con infinitos grados de libertad. Sean  $F, G$  funcionales del espacio de fases de la teoría,  $\Theta_s$  ligaduras de segunda clase, entonces el corchete de Dirac se define como

$$\{F(\vec{x}), G(\vec{y})\}_D = \{F(\vec{x}), G(\vec{y})\} - \iint d^3u d^3v \{F(\vec{x}), \Theta_\kappa(\vec{u})\} \mathcal{C}^{\kappa\omega}(\vec{u}, \vec{v}) \{\Theta_\omega(\vec{v}), G(\vec{y})\},$$

donde  $\mathcal{C}^{\kappa\omega}(\vec{u}, \vec{v})$  es la inversa a

$$\mathcal{C}_{\kappa\omega}(\vec{x}, \vec{y}) = \{\Theta_\kappa(\vec{x}), \Theta_\omega(\vec{y})\},$$

que se calcula usando la relación

$$\int d^3z \mathcal{C}^{\kappa\omega'}(\vec{x}, \vec{z}) \mathcal{C}_{\omega'\omega}(\vec{z}, \vec{y}) = \delta_\omega^\kappa \delta^3(\vec{x} - \vec{y}).$$


---

# Capítulo 5

## Aspectos sobre las teorías de espín-2

### 5.1. Acción general para teorías de espín-2

Las teorías de espín-2 corresponden a representaciones tensoriales del grupo de Lorentz [10], esto se escribe con un campo tensorial de dos índices  $h_{\mu\nu}$ . En nuestro caso nos restringiremos a un campo simétrico, es decir,  $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ . Ya aclarado esto queremos escribir el Lagrangiano relativista más general posible para este campo. Para ello nos basamos en [5] [4] y encontraremos los términos cinéticos de la forma  $\partial h \partial h$  y los términos masivos de la forma  $h h$ . Los términos cinéticos posibles son

1.  $\partial_\alpha h_{\mu\nu} \partial^\alpha h^{\mu\nu}$ ,
2.  $\partial_\alpha h^{\alpha\mu} \partial_\mu h$ ,
3.  $\partial_\alpha h \partial^\alpha h$ ,
4.  $\partial_\alpha h_{\mu\nu} \partial^\nu h^{\mu\alpha}$ ,
5.  $\partial_\alpha h^{\alpha\mu} \partial^\nu h_{\nu\mu}$ ,

aquí se usa  $h \equiv h^\mu{}_\mu$ , luego en la construcción de la acción los últimos dos términos son equivalentes haciendo integración por partes [5] por lo que solo se tomara al ultimo término en nuestro caso. Luego los términos masivos son

1.  $h_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$ ,
2.  $h^2$ .

Finalmente tomando todos los términos posibles y sumándolos con parámetros arbitrarios  $\kappa_i$  para el sector cinético y  $\mu_j$  para el sector masivo, obtenemos la acción más general lineal

---

de espín-2

$$S[h_{\mu\nu}] = \int d^4x \{ \kappa_1 \partial_\alpha h_{\mu\nu} \partial^\alpha h^{\mu\nu} + \kappa_2 \partial_\alpha h^{\alpha\mu} \partial^\nu h_{\nu\mu} + \kappa_3 \partial_\alpha h^{\alpha\mu} \partial_\mu h + \kappa_4 \partial_\alpha h \partial^\alpha h + \mu_1 h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \mu_2 h^2 \}, \quad (5.1)$$

podemos reescribir de manera más compacta esta acción [4] si hacemos uso de los objetos

$$\mathcal{K}^{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma} = \kappa_1 \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \kappa_2 \eta^{\mu\alpha} \eta^{\rho\beta} \eta^{\nu\sigma} + \kappa_3 \eta^{\alpha\mu} \eta^{\nu\beta} \eta^{\sigma\rho} + \kappa_4 \eta^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma},$$

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\rho\sigma} = \mu_1 \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + \mu_2 \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma},$$

quedando la acción con una forma similar a la acción de Klein-Gordon

$$S[h_{\mu\nu}] = \int d^4x \{ \mathcal{K}^{\alpha\beta\mu\nu\rho\sigma} \partial_\alpha h_{\mu\nu} \partial_\beta h_{\rho\sigma} + \mathcal{M}^{\mu\nu\rho\sigma} h_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} \}.$$

## 5.2. Teorías lineales de espín-2 estándar

Peter van Nieuwenhuizen demostró que los únicos Lagrangianos posibles completamente lineales con espín  $s = 2$  que no tienen fantasmas (grados de libertad con energía negativa), ni taquiones [6] son los Lagrangianos de Einstein-Hilbert linealizado

$$S_{EH} = - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\alpha h_{\mu\nu} \partial^\alpha h^{\mu\nu} - \partial_\alpha h \partial^\alpha h) + (\partial_\alpha h^{\alpha\mu} \partial_\mu h - \partial_\alpha h^\alpha{}_\mu \partial_\nu h^{\nu\mu}) \right], \quad (5.2)$$

y el Lagrangiano de Fierz-Pauli

$$S_{FP} = - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\alpha h_{\mu\nu} \partial^\alpha h^{\mu\nu} - \partial_\alpha h \partial^\alpha h) + (\partial_\alpha h^{\alpha\mu} \partial_\mu h - \partial_\alpha h^\alpha{}_\mu \partial_\nu h^{\nu\mu}) + \frac{m^2}{2} (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) \right]. \quad (5.3)$$

De estas la única que presenta una invariancia de calibre es la teoría de Hilbert-Einstein, que es invariante ante el difeomorfismo  $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \epsilon \partial_\mu \xi_\nu + \epsilon \partial_\nu \xi_\mu$ , donde  $\xi_\mu$  es un parámetro de calibre con características similares al parámetro de la transformación de calibre de la teoría de Maxwell.

Ya cuando pasamos a teorías no lineales se pueden recuperar las teorías sin taquiones y sin fantasmas como por ejemplo la teoría dRGT; sin embargo estas teorías escapan el interés del presente trabajo.

## 5.3. Conteo de grados de libertad

### 5.3.1. Teoría de Einstein-Hilbert

El campo  $h_{\mu\nu}$  en 3+1 dimensiones tiene 16 grados de libertad; sin embargo como estamos trabajando con un campo simétrico  $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$  estos se reducen a 10, luego debido a la libertad de calibre sabemos que perderemos aún más grados de libertad tal como pasó en el campo de Maxwell. Para saber cuantos grados de libertad se pierden primero definiremos el tensor de traza inversa  $\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}$ , que bajo el difeomorfismo  $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$  transforma de la forma

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu + \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\xi_\alpha,$$

si tomamos la divergencia de esto obtenemos

$$\partial^\nu\bar{h}'_{\mu\nu} = \partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} - \square\xi_\mu,$$

en donde podemos fijar el calibre haciendo

$$\partial^\nu\bar{h}'_{\mu\nu} = 0 \tag{5.4}$$

que es equivalente a decir  $\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} = \square\xi_\mu$ . Ahora de 5.4 podemos ver claramente que se reducen 4 grados de libertad debido a las 4 ecuaciones que tenemos; sin embargo si se analiza bien la ecuación podemos ver que hay lo que se conoce como una libertad residual, es decir, podemos añadir un vector  $\zeta_\mu$  que cumpla con  $\square\zeta_\mu = 0$  y no alterar en absoluto 5.4. Esta libertad residual equivale a 4 ecuaciones más por lo que reducirá a su vez 4 grados de libertad adicionales dejandonos con un total de 2 grados de libertad para la teoría[8].

### 5.3.2. Teoría de Fierz-Pauli

Nuevamente partimos de un campo simétrico  $h_{\mu\nu}$  con 10 grados de libertad; sin embargo la libertad de calibre de la que gozábamos en la teoría no masiva se pierde en la teoría masiva debido al término masivo que rompe con la invariancia, por lo que en principio se espera que haya más grados de libertad en la teoría. Para realizar un conteo nos valdremos del truco de Stueckelberg [7], este notó que una simetría de calibre en la teoría no es más que una redundancia en la descripción. Por lo que su procedimiento lo que hace es introducir a mano estas redundancias de modo que se recuperen las simetrías perdidas, en nuestro campo esto se hace al añadir el término

$$h_{\mu\nu} + \frac{2}{m}\partial_{(\mu}B_{\nu)}$$

que es de la forma del difeomorfismo por lo que la parte cinética de nuestra teoría se ve invariante, mientras que la parte masiva ahora es de la forma

$$\mathcal{L}_m = -\frac{m^2}{2} \left[ \left( h_{\mu\nu} + \frac{2}{m} \partial_{(\mu} B_{\nu)} \right)^2 - \left( h + \frac{2}{m} \partial_\alpha B^\alpha \right)^2 \right]$$

esto ahora es invariante frente a las transformaciones

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \quad ; \quad B_\mu \rightarrow B_\mu - m \xi_\mu.$$

Ahora queremos seguir identificando grados de libertad, por lo que separamos el campo  $B_\mu$  en  $B_\mu + \frac{1}{m} \partial_\mu \phi$ , con esto ahora la parte masiva del Lagrangiano queda de la forma

$$\mathcal{L}_m = -\frac{m^2}{2} (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2h^{\mu\nu} (\Phi_{\mu\nu} - \Phi \eta_{\mu\nu}) - 2(h_{\mu\nu} - h \eta_{\mu\nu}) \partial^{(\mu} B^{\nu)},$$

donde  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ ,  $\Phi_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu \phi$  y  $\Phi = \square \phi$ . Esta acción ahora goza de la libertad de calibre

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \quad , \quad B_\mu \rightarrow B_\mu - m \xi_\mu, \\ B_\mu + \partial_\mu V \quad , \quad \phi - m\lambda,$$

por lo que ahora podemos diferenciar claramente un campo no masivo de espín 2  $h_{\mu\nu}$ , un campo no masivo de espín 1  $B_\mu$  y un campo masivo de espín 0  $\phi$ , que proporcionan 2, 2 y 1 grado de libertad respectivamente[11].

## 5.4. Ecuaciones de movimiento y fijación de calibre

### 5.4.1. Teoría de Einstein-Hilbert

Puesto que luego se propone calcular los propagadores de la teoría, es necesario añadir un término de interacción al Lagrangiano con la forma  $\lambda h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ , en donde  $\lambda$  es la constante de acople y  $T^{\mu\nu}$  es la fuente, luego utilizamos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a h_{bc})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_{bc}} = 0, \quad (5.5)$$

que nos dan las ecuaciones de movimiento de la teoría de Einstein-Hilbert

$$\square h^{bc} - (\partial^b \partial_\nu h^{c\nu} + \partial^c \partial_\nu h^{b\nu}) + (\partial^b \partial^c h + \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} \eta^{bc}) - \square h \eta^{bc} = \lambda T^{bc}, \quad (5.6)$$

donde  $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ . Esta ecuación, como es de esperar también es invariante ante el difeomorfismo  $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$ , por lo tanto podemos simplificar la teoría fijando



un calibre. Aquí nuevamente usaremos el calibre  $\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = \square \xi_\mu$  que es llamado el calibre armónico y con esto la ecuación de movimiento se reduce a

$$\square \bar{h}_{bc} = \lambda T_{bc}, \quad (5.7)$$

que no es más que una ecuación de onda para el campo  $\bar{h}_{\mu\nu}$ .

### 5.4.2. Teoría de Fierz-Pauli

Por completitud también añadiremos un término  $\lambda h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$  a la acción de Fierz-Pauli y haremos uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.5), obteniendo así

$$\begin{aligned} \square h^{bc} - (\partial^b \partial_\nu h^{c\nu} + \partial^c \partial_\nu h^{b\nu}) + (\partial^b \partial^c h + \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} \eta^{bc}) - \square h \eta^{bc} \\ - m^2 (h^{bc} - h \eta^{bc}) = \lambda T^{bc}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

## 5.5. Propagadores para las distintas teorías

### 5.5.1. Teoría de Einstein-Hilbert

De la ecuación de movimiento (5.7) podemos escribir

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2} \lambda T_{\mu\nu},$$

esto nos permite suponer que un término de interacción será de la forma

$$T'_{\mu\nu} \frac{1}{k^2} T^{\mu\nu},$$

ahora queremos darle características a la fuente  $T^{\mu\nu}$  para que reproduzca las características de la gravedad, primero queremos que en los límites de bajas energías se reproduzca un término similar a la ley de gravitación Newtoniana, es decir, algo de la forma

$$\frac{T'_{00} T_{00}}{(\vec{k})^2}, \quad (5.9)$$

luego procedemos a escribir la interacción completa

$$\begin{aligned} T'_{\mu\nu} \frac{1}{k^2} T^{\mu\nu} = \frac{1}{\omega^2 - (\vec{k})^2} [T'_{00} T_{00} - 2T'_{03} T_{03} - 2T'_{02} T_{02} - 2T'_{01} T_{01} + 2T'_{23} T_{23} + 2T'_{31} T_{31} + 2T'_{21} T_{21} \\ + T'_{33} T_{33} + T'_{22} T_{22} + T'_{11} T_{11}], \end{aligned}$$

aquí procedemos ahora a utilizar la ley de conservación  $k^\mu T_{\mu\nu} = 0$ , y a través de un boost nos trasladamos a un sistema tal que

$$\omega T_{0\nu} = -k^3 T_{3\nu},$$

con esto podemos escribir el término de interacción de la siguiente forma

$$T'_{\mu\nu} \frac{1}{k^2} T^{\mu\nu} = I_0 + I_-,$$

donde  $I_0$  corresponde a la interacción retardada, e  $I_-$  corresponde a la interacción instantánea, estos términos son iguales a

$$I_0 = -\frac{1}{(\vec{k})^2} \left[ T'_{00} T_{00} \left( 1 - \frac{\omega^2}{(\vec{k})^2} \right) - 2T'_{02} T_{02} - 2T'_{01} T_{01} \right],$$

$$I_- = \frac{1}{\omega^2 - (\vec{k})^2} [T'_{11} T_{11} + T'_{22} T_{22} + 2T'_{21} T_{21}],$$

de aquí podemos ver que ya el término de interacción instantánea cumple con nuestro objetivo de a bajas energías reproducir el término de la forma (5.9), por lo que nos concentraremos en la interacción retardada. Un detalle que notamos es que tiene 3 términos que corresponderían a 3 polarizaciones, ya que esto no puede ser puesto que la gravedad solo tiene 2 grados de libertad, tenemos que corregirlo haciendo una suma apropiada con un término del tipo  $\alpha T'^{\mu}_{\mu} \frac{1}{k^2} T^{\nu}_{\nu}$  eliminando así interacciones provenientes del grado de libertad escalar; si  $\alpha = -\frac{1}{2}$  el término de interacción instantánea puede ser escrito como

$$I_- = \frac{1}{\omega^2 - (\vec{k})^2} \left[ \frac{1}{2} (T'_{11} - T'_{22}) (T_{11} - T_{22}) + 2T'_{12} T_{12} \right],$$

aquí aunque no lo parezca esto corresponde a 2 polarizaciones, puesto que se ve una clara separación en 2 términos involucrando partes de cada fuente. Estas polarizaciones son generadas por las combinaciones de elementos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (T_{11} - T_{22}) \quad \text{y} \quad \sqrt{2} T_{12},$$

en general el término de interacción queda de la forma

$$T'_{\mu\nu} \frac{1}{k^2} T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T'^{\mu}_{\mu} \frac{1}{k^2} T^{\nu}_{\nu}$$

que se puede escribir como

$$T'_{\rho\sigma} G^{\rho\sigma\mu\nu} T_{\mu\nu},$$

donde  $G^{\rho\sigma\mu\nu}$  es el propagador de la teoría y se escribe como[5]

$$G^{\rho\sigma\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}) \frac{1}{k^2}, \quad (5.10)$$

este podría ser utilizado en el marco de la teoría de perturbaciones en los distintos términos de la serie perturbativa, como de hecho se hizo para el término con el que fue construido.

### 5.5.2. Teoría de Fierz-Pauli

Para la teoría de Fierz-Pauli se utiliza un método diferente. Queremos escribir la acción de Fierz-Pauli de la siguiente forma

$$S_{FP} = \int d^4x \frac{1}{2} h_{\mu\nu} O^{\mu\nu\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$$

para ello hacemos integración por partes y llegamos a

$$O^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = (\eta^{(\mu}{}_{\alpha} \eta^{\nu)}{}_{\beta} - \eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}) (\square - m^2) - 2\partial^{(\mu} \partial_{(\alpha} \eta^{\nu)}{}_{\beta)} + \partial^\mu \partial^\nu \eta_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \partial_\beta \eta^{\mu\nu},$$

es sencillo ver que este operador satisface

$$O^{\mu\nu\alpha\beta} = O^{\nu\mu\alpha\beta} = O^{\mu\nu\beta\alpha} = O^{\alpha\beta\mu\nu},$$

y en el espacio de momentum se escribe como

$$\tilde{O}^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = (\eta^{(\mu}{}_{\alpha} \eta^{\nu)}{}_{\beta} - \eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}) (k^2 - m^2) - 2k^{(\mu} k_{(\alpha} \eta^{\nu)}{}_{\beta)} + k^\mu k^\nu \eta_{\alpha\beta} + k_\alpha k_\beta \eta^{\mu\nu},$$

entonces el propagador es aquel objeto que cumpla con las mismas simetrías y también con la identidad [7]

$$\tilde{O}^{\mu\nu\alpha\beta} D_{\alpha\beta\sigma\lambda} = \frac{i}{2} (\delta_\sigma^\mu \delta_\lambda^\nu + \delta_\sigma^\nu \delta_\lambda^\mu),$$

esto se resuelve construyendo un objeto con todas las posibles combinaciones de métricas  $\eta_{\mu\nu}$  y los momentos  $k^\mu$ . Una vez aplicado  $\tilde{O}^{\mu\nu\alpha\beta}$  a todas estas posibles combinaciones se llega a que

$$D_{\alpha\beta\sigma\lambda} = \frac{-i}{(\vec{k})^2 + m^2} \left[ \frac{1}{2} (p_{\alpha\sigma} p_{\beta\lambda} + p_{\alpha\lambda} p_{\beta\sigma}) - \frac{1}{3} p_{\alpha\beta} p_{\sigma\lambda} \right], \quad (5.11)$$

donde  $p_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha k_\beta}{m^2}$ . Este propagador luego puede usarse en la teoría de perturbaciones en las líneas internas con momento  $k$ ; sin embargo para  $k$  grande presenta un crecimiento del tipo  $\sim \frac{k^2}{m^4}$  lo que implica que no se pueden utilizar los métodos más habituales para renormalizar la teoría [7].



# Capítulo 6

## Conclusiones

En este trabajo se estudiaron varios aspectos de la teoría de campos para poder realizar un análisis de las teorías de espín  $s = 2$ , para ello primero se estudió el campo de espín  $s = 0$  acorde a [1]. Donde se partió desde su ecuación de movimiento para construir su acción haciendo uso de la forma de las ecuaciones de Euler-Lagrange. Luego se resolvieron las ecuaciones de movimiento y se introdujeron los operadores de escalera y las relaciones de conmutación, también se vio como utilizar el ordenamiento normal para evitar ciertos problemas que surgían con algunos operadores, y finalmente se calculó el propagador de la teoría culminando así con los conceptos más básicos de las teorías de campos.

Después de esto se estudió el campo de Maxwell con  $s = 1$  usando los métodos de [1] [2]. Para tener un ejemplo de una teoría singular y con invariancia de calibre. Aquí pudimos ver que la teoría presentaba problemas si se intentaban utilizar los métodos aprendidos en el capítulo 2, por lo que se partió de una modificación propuesta por Fermi, que puede reproducir los resultados del electromagnetismo. Luego encontramos las ecuaciones de movimiento que pudimos resolver utilizando una expansión en términos de los operadores de escalera correspondientes para esta teoría y los vectores de polarización del campo  $\epsilon_\mu(\vec{k}, \lambda)$ . Luego de esto se utilizó el método de Gupta-Bleuler para fijar el calibre a nivel de la teoría cuántica y resolver nuevos problemas que surgían con la teoría. Para finalmente calcular el propagador de la misma y analizarlo viendo su descomposición.

En el capítulo 4 se estudió el método de Dirac para cuantizar teorías singulares [3] [9], esto con el propósito de entender como lidiar con teorías con redundancias (grados de libertad no físicos). Aquí primero vimos como formular teorías con variables ligadas, luego vimos como tratar y clasificar dichas ligaduras, para finalmente ver como se realiza la cuantización con este tipo de teorías.

---

Finalmente en el capítulo 5 vimos que la acción lineal más general de espín  $s = 2$  es

$$S[h_{\mu\nu}] = \int d^4x \{ \kappa_1 \partial_\alpha h_{\mu\nu} \partial^\alpha h^{\mu\nu} + \kappa_2 \partial_\alpha h^{\alpha\mu} \partial^\nu h_{\nu\mu} \\ + \kappa_3 \partial_\alpha h^{\alpha\mu} \partial_\mu h + \kappa_4 \partial_\alpha h \partial^\alpha h + \mu_1 h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + \mu_2 h^2 \},$$

luego utilizamos los resultados [6] para clasificar las teorías puramente lineales escribiendo así lo dos únicos Lagrangianos posibles que poseen energía positiva y son carentes de taquiones; estas teorías son:

- Teoría de Einstein-Hilbert que es descrita por la acción

$$S_{EH} = - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\alpha h_{\mu\nu} \partial^\alpha h^{\mu\nu} - \partial_\alpha h \partial^\alpha h) + (\partial_\alpha h^{\alpha\mu} \partial_\mu h - \partial_\alpha h^\alpha{}_\mu \partial_\nu h^{\nu\mu}) \right].$$

- Teoría de Fierz-Pauli que la describe la acción

$$S_{FP} = - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\alpha h_{\mu\nu} \partial^\alpha h^{\mu\nu} - \partial_\alpha h \partial^\alpha h) + (\partial_\alpha h^{\alpha\mu} \partial_\mu h \right. \\ \left. - \partial_\alpha h^\alpha{}_\mu \partial_\nu h^{\nu\mu}) + \frac{m^2}{2} (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) \right].$$

Luego se procedió a fijar un calibre para poder contar el número de grados de libertad en la teoría de Einstein-Hilbert, encontrando que en total la teoría propaga 2 grados de libertad [8]; mientras que para la teoría de Fierz-Pauli se tuvo que utilizar el método de Stueckerlber para contar un total de 5 grados de libertad [7].

Posteriormente se calcularon la ecuación de movimiento de la teoría de Einstein-Hilbert y se vio como la fijación de calibre reducía y simplificaba su forma a la de una ecuación de onda normal. También se calculó la ecuación de movimiento para la teoría de Fierz-Pauli y puesto que esta no es invariante frente a transformaciones conocidas no hay ninguna modificación a las ecuaciones dinámicas.

Finalmente se calcularon los propagadores de las distintas teorías. Para la teoría de Einstein-Hilbert se calculó el propagador en el calibre armónico y se le impusieron condiciones a la fuente para replicar los resultados conocidos para la gravedad [5] encontrando que el propagador es de la forma

$$G^{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}) \frac{1}{k^2},$$

y para la teoría de Fierz-Pauli lo que se hizo fue re-escribir la acción para luego utilizar el operador diferencial para poder calcular el propagador [7], encontrando que este es

$$D_{\alpha\beta\sigma\lambda} = \frac{-i}{(\vec{k})^2 + m^2} \left[ \frac{1}{2} (p_{\alpha\sigma} p_{\beta\lambda} + p_{\alpha\lambda} p_{\beta\sigma}) - \frac{1}{3} p_{\alpha\beta} p_{\sigma\lambda} \right],$$

donde  $p_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha k_\beta}{m^2}$ .

---





# Bibliografía

- [1] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Field quantization*. Springer Science & Business Media, 2013.
  - [2] Franz Mandl and Graham Shaw. *Quantum field theory*. John Wiley & Sons, 2010.
  - [3] Paul AM Dirac. Lectures on quantum mechanics, yeshiva university. *New York*, pages 40–66, 1964.
  - [4] Atsushi Naruko, Rampei Kimura, and Daisuke Yamauchi. On lorentz-invariant spin-2 theories. *Physical Review D*, 99(8):084018, 2019.
  - [5] Richard Feynman. *Feynman lectures on gravitation*. CRC Press, 2018.
  - [6] Peter van Nieuwenhuizen. On ghost-free tensor lagrangians and linearized gravitation. *Nuclear Physics B*, 60:478–492, 1973.
  - [7] Kurt Hinterbichler. Theoretical aspects of massive gravity. *Reviews of Modern Physics*, 84(2):671, 2012.
  - [8] Bernard Schutz. *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
  - [9] Christian Fräðdorf. Quantization of singular systems in canonical formalism. 2011.
  - [10] Michele Maggiore. *A modern introduction to quantum field theory*, volume 12. Oxford university press, 2005.
  - [11] Claudia de Rham. Massive gravity. *Living reviews in relativity*, 17(1):7, 2014.
-