Énoncé 2013

Ecole Nationale de la Statistique et de l'Analyse Economique (Sénégal)

Année académique 2012/2013

(ENSAE)

TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A
DURÉE 3 Heures

Le sujet comporte vingt questions indépendantes, chacune notée sur deux points. La réponse à chaque question doit être bien rédigée. Tout résultat non justifié est considéré comme non valable.

1 Calculer la limite en *zéro* des fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2x^2}\left[(1+x)^4 - 1 - 4x\right]\ ; \quad g(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$$

2 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\ sin(x)\left[x - \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\ ; \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{5}{x^5-1} - \frac{3}{x^3-1}\right).$$

avec $\mathrm{E}(x)$ désignant la partie entière de x.

3 Peut-on prolonger par continuité en zéro la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$? Justifier votre réponse.

4 Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$ fixés. Calculer suivant les valeurs de a et b $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$.

5 $a)$ Montrer que, si $p<0$, la fonction $f : x \longmapsto x^3+px+q$ admet un maximum M et un minimum m.

$b)$ Calculer le produit $M.m$ en fonction de p et q. En déduire que l'équation $x^3+px+q=0$ admet trois racines distinctes si, et seulement si $4p^3+27q^2<0$.

6 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ donné, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+\sqrt{x+a}}=a$.

7 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit f_1 et f_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}-\{0,1\}$ par :

$$f_1(x)=1-\frac{1}{x}, \qquad \text{et} \qquad f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x)).$$

Calculer $f_{2013}(2013)$

8 On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\textbf{(E)} \qquad \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$

$a)$ Montrer que x est solution de $(\mathbf{E})$ si, et seulement si

$$(\mathbf{E}') \qquad \left|\sqrt{x-1}-2\right|+\left|\sqrt{x-1}-3\right|=1.$$

$b)$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'equation $|u-2|+|u-3|=1$.

Conclure pour l'équation $(\mathbf{E})$

9 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+...+\frac{1}{x^8}=0$$

10 Soit un polynôme $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ où $a_i \in \mathbb{N}\ \forall i = 0,1,\ldots,n$. Montrer que 1 est racine de $B(x)=P(x)-S$, où S est la somme des coéfficients du polynôme P.
Soit l'entier N s'ecrivant sous la forme $N=a_n\,a_{n-1}\cdots a_2a_1a_0$. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

11 Soit la fonction f définie par $f(x)=\mathrm{E}(x)+(x-\mathrm{E}(x))^2\,, \quad x\in\mathbb{R}$ où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et tracer la courbe de f pour $x\in[-2,\,2]$.

(12) On considére les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} |x-k| \text{ et } g(x) = f(x) + |x-4|$$

Construire les courbes de f et de g dans deux repères differents en déduire leurs extrémums.

(13) Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,|x|$ est bijective. Etudier la dérivabilité de la fonction réciproque g et définir g'.

(14) Soit $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1$

$a)$ Montrer qu'un réel $\alpha \neq 0$ est racine de $P(x)$ si et seulement si α est solution de l'équation

$$\textbf{(E'')} \quad : \quad x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

$b)$ En posant $u = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$, Résoudre l'equation **(E'')** et en déduire les racines de $P(x)$.

(15) On pose $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

$a)$ Déterminer les constantes réelles a, b et c telles que $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$b)$ En déduire une expression simple de U_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

(16) Etudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = |x|^{\alpha} \sin\frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

où α est un rationnel strictement positif fixé puis la continuité de la fonction dérivée de f.

(17) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,on considére les fonctions f_n, $\quad g_n$ et h_n définie sur $]0,1[$ par :

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k, \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k\,x^k \text{ et } h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k^2\,x^k.$$

$a)$ Exprimer simplement $f_n(x)$ sans le signe $\sum$

$b)$ Etablir une relation entre $g_n(x)$ et $f_n^{'}(x) \quad \forall x \in]0,1[$. En déduire les expressions simplifiées de $g_n(x)$ et de $h_n(x)$ sans le signe $\sum$.

$c)$ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x)$.

(18) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{(-x^2+3x+4)(x^2-x-2)}{3x^2+4x-7} \leq 0$.

(19) Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction f telle que $f(x) = cos\left(\sqrt{x}\right)$.

(20) On considère une suite arithmétique $(a_n)_{n\geq 1}$ de raison $r \neq 0$ avec $a_n > 0, \quad \forall n \geq 1$.
Prouver que :

$a)$ $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \dfrac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$.

$b)$ $\dfrac{1}{a_1\,a_2} + \dfrac{1}{a_2\,a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}\,a_n} = \dfrac{n-1}{a_1\,a_n}$.

FIN DU SUJET et BONNE CHANCE

Corrigé 2013

Ecole Nationale de la Statistique et
de l'Analyse Economique (Sénégal)

Année académique 2012/2013

(ENSAE)

TEST DE PRESELECTION ITS VOIE A CORRIGE-TYPE

1 Calcul de limite en *zéro* des fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{2x^2}\left[(1+x)^4 - 1 - 4x\right]\ ; \quad g(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$$

- $f(x) = \dfrac{1}{2x^2}\left[(1+x)^4 - 1 - 4x\right]$

$$f(x) = \frac{1}{2x^2}\left[(1+x)^4 - 1 - 4x\right] = \frac{1}{2}\left[6 + 4x + x^2\right] \qquad \forall x \neq 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \ f(x) = 3}$$

- $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. En posant $y^6 = 1 + x$,

$$\lim_{x\to 0} \ g(x) = \lim_{y\to 1} \frac{y^3-1}{y^2-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^2+y+1}{y+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \ g(x) = \frac{3}{2}}$$

2 Calcul des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \ \sin(x)\left[x - \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\ ; \quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{5}{x^5-1} - \frac{3}{x^3-1}\right).$$

avec $\mathrm{E}(x)$ désignant la partie entière de x.

• $\lim\limits_{x\to 0} \ \sin(x)\left[x - \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$

$\forall x \neq 0 \qquad \sin x\left[x-\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = x\sin(x) - \dfrac{\sin x}{x} * x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)$ et comme $\lim_{x\to 0} x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) = 1$

car $x\left((\frac{1}{x}-1)\right) \leq x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x>0$ et $x\left(\frac{1}{x}\right) \leq x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x\left((\frac{1}{x}-1)\right)$ si $x<0$

Donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \ \sin(x)\left[x-\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = -1}$

• $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5-1} - \dfrac{3}{x^3-1}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{5}{x^5-1} - \frac{3}{x^3-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{5(x^2+x+1)-3(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-3x^4-3x^3+2x^2+2x+2}{(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-3x^3-6x^2-4x-2}{(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{-3-6-4-2}{5*3} = \frac{-15}{15} = -1$$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5-1} - \dfrac{3}{x^3-1}\right) = -1}$

3 Peut-on prolonger par continuité en zéro la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$? Justification.

Posons $y_n^1 = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ et $y_n^2 = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$

Si on pose $x = \dfrac{1}{y_n^1}$. Quand $x\to 0$, $y_n^1 \to +\infty$ avec $n\to+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n^1) = +\infty \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} f(y_n^2) = -\infty$$

Donc on ne peut pas prolonger par continuité f.

4 Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$ fixés. Calcul suivant les valeurs de a et b $\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-(\frac{b}{a})^n}{1+(\frac{b}{a})^n}$$

• si $a>b$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n} = 1$

• si $a = b$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = 0$

• si $a < b$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\frac{a}{b})^n - 1}{(\frac{a}{b})^n + 1} = -1$

5 *a*) Montrons que, si $p < 0$, la fonction $f : x \longmapsto x^3 + px + q$ admet un maximum M et un minimum m.
On a $f'(x) = 3x^2 + p$ et $f''(x) = 6x$. Sur $]-\infty; 0]$ $f''(x) < 0$ et sur $]0; +\infty[$ $f''(x) > 0$ et donc $f'(x) = 0 \iff 3x^2 + p = 0$ avec $p < 0 \iff x^2 = \dfrac{-p}{3} \iff$ $x = \pm\sqrt{\dfrac{-p}{3}}$
Donc si $p < 0$, f admet un maximum M sur $]-\infty; 0]$ et un minimum m sur $]0; +\infty[$.

b) Calculons le produit $M.m$ en fonction de p et q.

$$M.m = f(-\sqrt{\frac{-p}{3}}).f(\sqrt{\frac{-p}{3}}) = [(-\sqrt{\frac{-p}{3}})^3 + p(-\sqrt{\frac{-p}{3}}) + q][(\sqrt{\frac{-p}{3}})^3 + p(\sqrt{\frac{-p}{3}}) + q]$$

$$= [-(\frac{-p}{3})\sqrt{\frac{-p}{3}} - p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q][\frac{-p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} + p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q] = \frac{4p^3}{27} + q^2$$

Déduisons-en que l'équation $x^3 + px + q = 0$ admet trois racines distinctes si et seulement si $4p^3 + 27q^2 < 0$.
En effet, $Mm < 0$ si et seulement si $4p^3 + 27q^2 < 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Donc f admet trois racines distinctes.

6 Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ donné, résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x + \sqrt{x+a}} = a$.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\sqrt{x + \sqrt{x+a}} = a \iff \begin{cases} x + a \geq 0 \\ x + \sqrt{x+a} \geq 0 \\ x + \sqrt{x+a} = a^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + a \geq 0 \\ x + \sqrt{x+a} = a^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + a \geq 0 \\ x + a = (a^2 - x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + a \geq 0 \\ x^2 - (2a^2+1)x - a + a^4 = 0 \end{cases}$$

$\Delta = (2a^2 + 1)^2 + 4a - 4a^4 = (2a + 1)^2 \geq 0$
$x_1 = a^2 + a + 1$ et $x_2 = a^2 - a$.

$a^2 + a + 1$ ne vérifie pas l'équation. Donc cette équation a une solution unique : $a^2 - a$

7 Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit f_1 et f_n les fonctions définies sur $\mathbb{R} - \{0,1\}$ par : $f_1(x) = 1 - \frac{1}{x}$, et $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$. Calculons $f_{2013}(2013)$
Il suffit de calculer f_2, f_3 et f_4.

$$f_1(x) = 1 - \frac{1}{x} f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$$

Donc $f_2(x) = f_1(f_1(x)) = 1 - \dfrac{x}{x-1} = -\dfrac{1}{x-1}$; $f_3(x) = f_1(f_2(x)) = x$
et $f_4(x) = f_1(f_3(x)) = 1 - \dfrac{1}{x}$
Ainsi, $f_n(x) = f_{nmod4}(x)$. Par suite, $\boxed{f_{2013}(2013) = f_1(2013) = 1 - \dfrac{1}{2013}}$

8 On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$\textbf{(E)} \qquad \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

$a)$ Montrons que x est solution de $(\mathbf{E})$ si, et seulement si

$$(\mathbf{E}') \qquad \left|\sqrt{x-1} - 2\right| + \left|\sqrt{x-1} - 3\right| = 1.$$

Il suffit juste de remarquer que :
$x + 3 - 4\sqrt{x-1} = (2 - \sqrt{x-1})^2$ et $x + 8 - 6\sqrt{x-1} = (3 - \sqrt{x-1})^2$.
D'où

$$(\mathbf{E}') \qquad \left|\sqrt{x-1} - 2\right| + \left|\sqrt{x-1} - 3\right| = 1.$$

$b)$ Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $|u-2| + |u-3| = 1$.
$|u-2| + |u-3| = 1 \iff |u-2| = 1 - |u-3|$
$\iff \begin{cases} |u-3| \leq 1 \\ (u-2)^2 = 1 + (u-3)^2 - 2|u-3| \end{cases}$ (Après avoir enlevé les valeurs absolues,)
$\iff \begin{cases} u-3 = u-3 \\ u \leq 3 \\ u^2 - 6u + 8 < 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} u-3 = -u+3 \\ u \geq 3 \\ u^2 - 6u + 8 \leq 0 \end{cases}$
D'où $\boxed{S_{(\mathbf{E}'')} = [2;3]}$

Conclusion pour l'équation $(\mathbf{E})$
Pour $(\mathbf{E})$, on pose $u = \sqrt{x-1} \iff \begin{cases} 2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3 \\ x \geq 1 \end{cases}$
D'où $\boxed{S_{(\mathbf{E})} = [5;10]}$

9 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ... + \frac{1}{x^8} = 0$$

Pour $x = 1$, l'équation n'est pas vérifié. Donc $x = 1$ n'est pas solution.

De plus, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ... + \frac{1}{x^8} = \dfrac{1}{x} * \dfrac{1-(\dfrac{1}{x})^8}{1-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{x}(1-\dfrac{1}{x^8}) * \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x^8-1}{x^8} * \dfrac{1}{x-1}$

Comme $x \neq 1$ et $x \neq 0$ alors $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ... + \frac{1}{x^8} = 0 \iff x^8 - 1 = 0 \iff x = \pm\sqrt[8]{1}$

D'où $\boxed{x = -1}$ est la solution de l'équation $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ... + \frac{1}{x^8} = 0$.

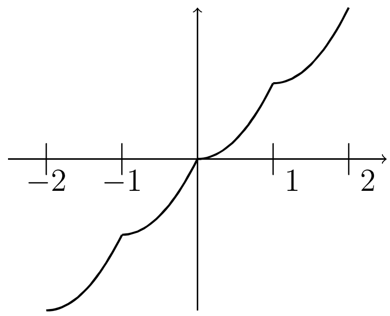
10 Soit un polynôme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ où $a_i \in \mathbb{N}\ \forall i = 0, 1, \ldots, n$. Montrer que 1 est racine de $B(x) = P(x) - S$, où S est la somme des coefficients du polynôme P.
$P(1) = a_n + a + \ldots + a_1 + a_0 = S$. Donc 1 est racine de $B(x) = P(x) - S$.
$N = a_n\, a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ Déduisons que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9. Démonstration par récurrence.
Si $N = a_1 \times 10 + a_0$. N est divisible par 9 ssi $10a_1 + a_0 = 9k \iff 9a_1 + a_1 + a_0 = 9k \iff a_1 + a_0$ divisible par 9.
Supposons qu'au rang n on a le résultat et montrons qu'on l'a aussi au rang $n+1$.
Posons aussi N_n l'entier au rang n.
$N_{n+1} = a_{n+1} \times 10^{n+1} + N_n \iff N_{n+1}$ est divisible par 9 ssi $a_{n+1} + 9k + S_n$ divisible par 9.
$N_{n+1} = (1+9)^{n+1}a_{n+1} + 9k + S_n = [9^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} 9^k + 1]a_{n+1} + 9k + S_n$. et donc c'est divisible par 9 ssi $S_n + a_{n+1}$ divisible par 9.

11 Soit la fonction f définie par $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2, x \in \mathbb{R}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x. Étudions la continuité de f sur $\mathbb{R}$ et traçons la courbe de f pour $x \in [-2, 2]$.
f est continue sur $]n, n+1[\forall n \in \mathbb{Z}$. Donc étudions la continuité pour $n \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} n + (x-n)^2 = n \quad \text{et} \lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} n - 1 + (x - n + 1)^2 = n$$

Donc f est continue en n. D'où f est continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Construction de la courbe de f</u>



(12) On considére les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par

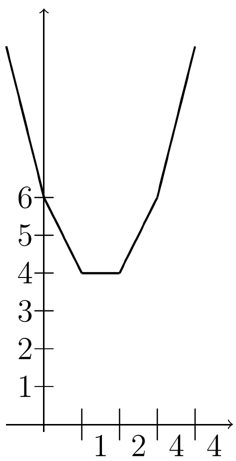
$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} |x-k| \text{ et } g(x) = f(x) + |x-4|$$

Construisons les courbes de f et de g dans deux repères differents et déduisons-en leurs extrémums.

$f(x) = |x| + |x-1| + |x-2| + |x-3|$.

$$f(x) = \begin{cases} x+x-1+x-2+x-3 = 4x-6 & \text{si } x \geq 3 \\ x+x-1+x-2-x+3 = 2x & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ x+x-1-x+2-x+3 = 4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ x-x+1-x+2-x+3 = -2x+6 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -x-x+1-x+2-x+3 = -4x+6 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 4x-6 & \text{si } x \geq 3 \\ 2x & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -2x+6 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -4x+6 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$



Pour g, c'est le même principe et on obtient:

13) Montrons que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\,|x|$ est bijective. f est impaire et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$.
La restriction de f sur $\mathbb{R}_+$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ à $\mathbb{R}_+$ et admet pour réciproque la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sqrt{x}$.
Il en résulte que f est une bijection définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa réciproque est g définie par:

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Étudions la dérivabilité de la fonction réciproque g et définir g'.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ sauf en 0. Et :

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}^*, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}$$

14) $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1$

$a)$ Montrons qu'un réel $\alpha \neq 0$ est racine de $P(x)$ si et seulement si α est solution de l'équation **(E")** : $x^2 - x - 4 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$.
$P(0) = 1 \neq 0$. Donc 0 n'est pas racine de $P(x)$.
$P(\alpha) = 0 \iff \alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 = 0 \iff \alpha^2(\alpha^2 - \alpha - 4 - \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2}) = 0$ car $\alpha \neq 0$.
D'où $\alpha^2 - \alpha - 4 - \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha^2} = 0$

$b)$ $u = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$, Résolvons l'équation **(E")** et déduisons-en les racines de $P(x)$.
$(\alpha + \dfrac{1}{\alpha})^2 = \alpha^2 + 2 + \dfrac{1}{\alpha^2}$. Donc $\alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2} = u^2 - 2$.
(E") devient $u^2 - 2 - u - 4 = 0 \iff u^2 - u - 6 = 0$.
Les solutions de cette équation sont -2 et 3.

$$u = -2 \iff \alpha + \frac{1}{\alpha} = -2 \iff \alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0 \iff \alpha = -1$$

$$u = 3 \iff \alpha + \frac{1}{\alpha} = 3 \iff \alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0 \iff \alpha_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

. Au total, l'ensemble des solutions est $\boxed{S = \{-1, \alpha_1, \alpha_2\}}$

(15) On pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

$a)$ Déterminons les constantes réelles $a,\ b$ et c telles que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
On obtient $a = c = \frac{1}{2}$ et $b = -1$.

$b)$ Déduisons-en une expression simple de U_n en fonction de n puis calculons $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

$$\begin{aligned}
U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} - \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\
&= 1 - \frac{3n+4}{2(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$

(16) Étudions la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = |x|^\alpha \sin\frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

où α est un rationnel strictement positif fixé puis la continuité de la fonction dérivée de f.
f est impaire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.

$$\forall x > 0, \quad |f(x)| = |x|^\alpha |\sin\frac{1}{x}| \leq |x|^\alpha$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et f est continue en 0.
Posons $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x}$ et donc φ n'a pas de limite en 0 quand $0 \leq \alpha \leq 1$ et si $\alpha > 1$, $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = 0 \to f'(0) = 0$.

De plus, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}$ $f'(x) = x^{\alpha-2}(\alpha x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$. On en déduit que si $\alpha \geq 2$, f n'a pas de limite en 0.

En somme, $\left|\begin{array}{ll} 0<\alpha\leq 1 & f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \\ 1<\alpha\leq 2 & f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f' \text{ est continue sur } \mathbb{R}^* \\ \alpha>2 & f \text{ est dérivable et de dérivée continue sur } \mathbb{R}^*. \end{array}\right.$

17 Pour tout $n \in \mathbb{N}$,on considère les fonctions f_n, g_n et h_n définie sur $]0,1[$ par :

$$f_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k, \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k\, x^k \text{ et } h_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k^2\, x^k.$$

$a)$ Exprimons simplement $f_n(x)$ sans le signe $\sum$.
f_n est une somme de termes d'une suite géométrique de raison x. Donc $f_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$b)$ Établissons une relation entre $g_n(x)$ et $f'_n(x)$ $\forall x \in]0,1[$.

$$f'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = \sum_{k=0}^{n-1} k\,x^k + \sum_{k=0}^{n-1} x^k = g_n(x) - nx^n + f_n(x) - x^n$$

Déduisons-en les expressions simplifiées de $g_n(x)$ et de $h_n(x)$ sans le signe $\sum$.
De ce qui précède, $g_n(x) = f'_n(x) + nx^n - f_n(x) + x^n$.

$$f'_n(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

$$g_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + (n+1)x^n = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$$

On fait pareille en dérivant g_n et on obtient $h_n(x) = g'_n(x) - 2g_n(x) - f_n(x) + (n+1)^2x^n$

$c)$ Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(x)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{1-x}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2} = \dfrac{x}{(1-x)^2}$. $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}}$

Vous calculerez la valeur de la limite après avoir calculer h_n.

18 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{(-x^2+3x+4)(x^2-x-2)}{3x^2+4x-7} \leq 0.$
Les racines des termes un à un sont:

- $-x^2+3x+4$

$\Delta = 25$. Donc les racines sont $x_1 = \dfrac{-3-5}{-2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{-2} = -1$

- x^2-x-2

$\Delta = 9$. Donc les racines sont $x_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$

- $-x^2+3x+4$

1 est racine et l'autre racine est $-\dfrac{7}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		-1		1		2		4		$+\infty$
$-x^2+3x+4$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$		$+$	0	$-$	
x^2-x-2		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$		$+$	
$3x^2+4x-7$		$+$	$\|\|$	$-$		$-$	$\|\|$	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{(-x^2+3x+4)(x^2-x-2)}{3x^2+4x-7}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{\text{S=}]-\infty, \frac{7}{3}[\cup]1,2]\cup[4,+\infty[\cup\{-1\}}$$

19 Etudions la dérivabilité à droite en 0 de la fonction f telle que $f(x) = cos\left(\sqrt{x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x}) - \cos(\sqrt{0})}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x})^2} = -\frac{1}{2}$$

Donc la fonction f est dérivable à droite et elle n'est définie que sur $\mathbb{R}+$

(20) On considère une suite arithmétique $(a_n)_{n\geq 1}$ de raison $r \neq 0$ avec $a_n > 0, \ \ \forall n \geq 1$.
Prouvons que :

$a)$ $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \dfrac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$.

Par récurrence, pour $n = 3$,

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} = \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3} = \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{-r}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{-r}$$

$$= \frac{1}{r}(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_1}) = \frac{1}{r}\frac{a_3-a_1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_1}} = \frac{2r}{r(\sqrt{a_3}+\sqrt{a_1})} = \frac{2}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_1}}$$

Donc la proposition est vraie à l'ordre 3. Supposons vraie, la proposition jusqu'à un certain rang n et vérifions si elle l'est aussi à l'ordre $n+1$. Ainsi, on a:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}} + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$$

$$= \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}} + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$$

$$= \frac{(n-1)(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})}{a_n-a_1}+\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n+1}-a_n} = \frac{(n-1)(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_1})}{(n-1)r}+\frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}}{r}$$

$$= \frac{\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_1}}{r} = \frac{a_{n+1}-a_1}{r(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1})} = \frac{nr}{r(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1})} = \frac{n}{\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_1}}$$

Donc la proposition est vraie $\forall n \geq 1$.

$b)$ $\dfrac{1}{a_1\,a_2} + \dfrac{1}{a_2\,a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}\,a_n} = \dfrac{n-1}{a_1\,a_n}$.

Il suffit de remarquer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{a_n\,a_{n-1}} = \frac{1}{r}(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n})$$

Donc $\dfrac{1}{a_1\,a_2} + \dfrac{1}{a_2\,a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}\,a_n} = \dfrac{1}{r}(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2} + \dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_3} + \dfrac{1}{a_3} - \dfrac{1}{a_4} + \cdots + \dfrac{1}{a_{n-1}} - \dfrac{1}{a_n})$

$$= \frac{1}{r}(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}) = \frac{a_n-a_1}{r\,a_1\,a_n} = \frac{(n-1)\,r}{r\,a_1\,a_n} = \frac{n-1}{a_1\,a_n}$$

FIN DU CORRIGÉ-TYPE