ODE II ; λ = nb indiv. cohort, μ = âge cohort

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -d(t,\mu)\,\lambda(t) \\ \dot{\mu} = \nu(t,\mu). \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \lambda = \lambda_0 e^{-dt} \\ \mu = \sqrt{4t + (\mu_0+1)^2} - 1 . \end{cases}$$

provient de 2. v_0 (je pense).

Prenons maintenant le cas complet, avec feedback loop. L'exemple que je donne explose en temps mais ce n'est pas grave car je vais intégrer sur un domaine temporel borné. Seule la convergence sur $\mathbb{R}^+$ en s est importante !

Ainsi, je reprends plus ou moins les six fonctions

Soit :

$$\eta(t,s) = (1+s)\, e^{-dt}$$

$d = $ cste, $\underline{\underline{d < 0}}$ (d'où l'explosion en temps).

$$F = e^{-s}\, \mathbb{1}_{[s^*, +\infty[}(s)$$

$$A = e^{-\left(\frac{s^2}{2} + s\right)}$$

v et $v(s^*(t), 0)$ à déterminer pour que ça marche, et $s^*(t)$ à trouver analytiquement.

$$\begin{cases} \partial_t \eta + \partial_s (v\eta) = -d\eta & (1) \\ v_0\, \eta(t,0) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[s^*, +\infty[}(s)\, \eta\, ds & (2) \\ 1 = \int e^{-\frac{s^2}{2} - s}\, \eta\, ds & (3) \end{cases}$$

Comme précédemment, on déduit de (1) que :

$\partial_s(\eta v) = 0 \implies v\eta$ est f° du temps $\underline{\text{uniquement}}$.

(2) nous donnera la condition limite en s pour v, on a : $v(s^*(t), 0) = \left(2 + s^*(t)\right) e^{-s^*(t)}$.

(1) nous donnera la même solution pour v ;

$$v(s^*(t), s) = \frac{v(s^*(t), 0)}{1+s}.$$

$$= \frac{\left(2 + s^*(t)\right) e^{-s^*(t)}}{1+s}.$$

Trouvons $s^*(t)$ avec (3), $s^*(t)$ n'étant qu'une f° de t, on a bien $\partial_s(v\eta)$ $\underline{\text{h}}$ $\cancel{\neq}$ s ! (⟺ $v\eta$ f° de t uniquement).

$$(3) \Rightarrow 1 = \int_{s^*}^{+\infty} (1+s)\, e^{-\left(\frac{s^2}{2}+s\right)} e^{-dt}\, ds$$

$u = \frac{s^2}{2} + s$, sous la forme $u'e^{u}$

$$\Leftrightarrow e^{dt} = -e^{-\left(\frac{s^2}{2}+s\right)} \Big|_{s^*}^{+\infty}$$

$$\Leftrightarrow e^{dt} = e^{-\left(\frac{s^{*2}}{2}+s^*\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{s^{*2}}{2}(t) + s^*(t) + dt = 0$$

$$\Leftrightarrow s^{*2} + 2s^* + 2dt = 0$$

$$\Leftrightarrow s^*(t) = \sqrt{1-2dt} - 1$$ (pour avoir la solution positive).

$\sqrt{1-2dt} > 1$ car $d<0$, $t>0$.

D'où on a :

$$\eta(t,s) = (1+s)\,e^{-dt}$$

d = cste négative

$$A = e^{-s^2/2 - s}$$

$$F = \mathbb{1}_{[s^*;+\infty[}(s)\, e^{-s}.$$

$$s^*(t) = \sqrt{1-2dt} - 1$$

$$v(s^*,s) = \frac{(2+s^*(t))\,e^{-s^*(t)}}{1+s}$$

et $v\eta = f(t)$ uniquement, donc c'est bon.

$$v\eta = \left(1+\sqrt{1-2dt}\right) e^{1-\sqrt{1-2dt}}\, e^{-dt}.$$

$\eta \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ (normal vu que $d<0$ $\Rightarrow -d\eta$ est une source)