Métodos Numéricos y Estadísticos

Grado en Ingeniería Informática

Curso 2015-2016

Tema 2

Integración numérica

Eva María Mazcuñán Navarro

Eva María Mazcuñán Navarro
Departamento de Matemáticas
Universidad de León
E-mail: emmazn@unileon.es

Contenidos

En este tema aprenderemos varias técnicas de **integración numérica** para calcular un valor aproximado de

$$\int_a^b f(x)dx,$$

siendo f una función integrable en el intervalo $[a,b]$ con valores reales.

La técnica básica para calcular integrales definidas es la *Regla de Barrow*. Para aplicar esta técnica, se necesita una expresión para F, la primitiva de la función f a integrar, de manera que esa expresión pueda después evaluarse en los extremos de integración a y b. Pero el cálculo de primitivas no es un proceso constructivo (como ocurre con el cálculo de derivadas). Sabemos que toda función continua tiene una primitiva, pero en muchas ocasiones no es posible expresar esta primitiva en términos de funciones elementales. Este es el caso de funciones relativamente simples como

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}, \cos(x^2), e^{-x^2}, \frac{x}{\log(x)}, \frac{\log(x)}{x}, \sqrt{x^3-1},$$

y muchas otras que aparecen en diferentes situaciones prácticas.

Este problema con el cálculo de primitivas impide aplicar la regla de Barrow para calcular el valor exacto de determinadas integrales[1].

Para solventar la limitación anterior, se desarrollan las técnicas de integración numérica para calcular integrales definidas de forma aproximada.

Obviamente, también es necesario recurrir a la integración numérica cuando no se tiene una fórmula explícita para la función f, sino que únicamente se dispone de una tabla con los valores de f en una colección de puntos.

Estudiaremos tres técnicas de integración numérica:

1. La regla del **trapecio**
2. La regla del **punto medio**
3. La regla de **Simpson**

Y para cada una de las tres reglas veremos una versión **simple** y una versión **compuesta**.

[1]No obstante, el hecho de no poder aplicar la regla de Barrow no quiere decir que no pueda obtenerse el valor exacto de una integral definida. Su cálculo puede también llevarse a cabo utilizando desarrollos en serie, métodos de cálculo en varias variables, de variable compleja, etc. Por ejemplo, la función e^{-x^2} no tiene primitiva expresable en términos de funciones elementales. Pero aplicando técnicas de cálculo en dos variables –cambio a polares en la integral $\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dx\ dy$– se puede deducir que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$

1. Reglas simples

La idea detrás de cualquiera de las reglas que estudiaremos, en su versión simple, consiste en calcular P, el polinomio interpolador de f en determinados nodos del intervalo $[a,b]$, y después aproximar

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx.$$

En los tres gráficos de la Figura 1 se ilustran las versiones simples de la regla de los trapecios, la regla del punto medio y la regla de Simpson. El área rayada representa el valor exacto de la integral y el área coloreada la aproximación. A continuación se detallan los nodos considerados en cada caso y las fórmulas que se derivan.

En el caso de la regla de los trapecios simple, Figura 1(a), se considera el polinomio interpolador de f en los extremos del intervalo, a y b, cuya gráfica es la recta uniendo los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Definición 1 (Regla de los trapecios simple)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \tfrac{b-a}{2}\Big(f(a)+f(b)\Big)$$ ❖

En la regla del punto medio simple, Figura 1(b), se considera el polinomio interpolador de f en el punto medio el punto del intervalo $[a,b]$, $m = \dfrac{a+b}{2}$. Es decir, se aproxima f por el polinomio constante de valor $f(m)$.

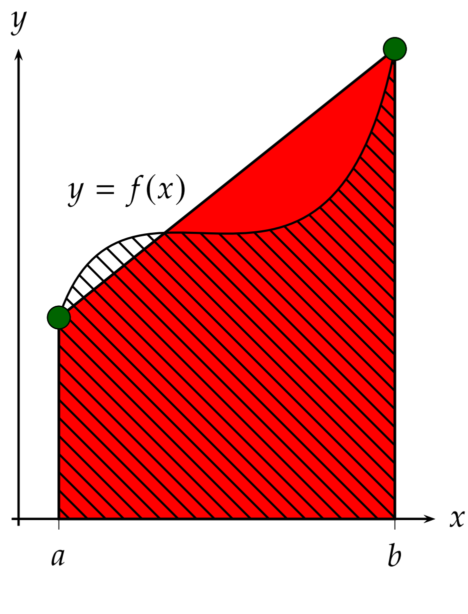
Definición 2 (Regla del punto medio simple)

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(m)$$ ❖

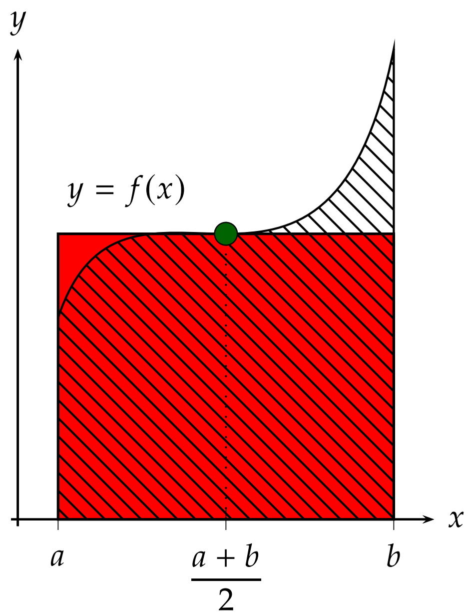
Y en la regla de Simpson simple, Figura 1(c), se considera el polinomio interpolador de f en los tres nodos a, $m = \dfrac{a+b}{2}$ y b.

Definición 3 (Regla de Simpson simple)

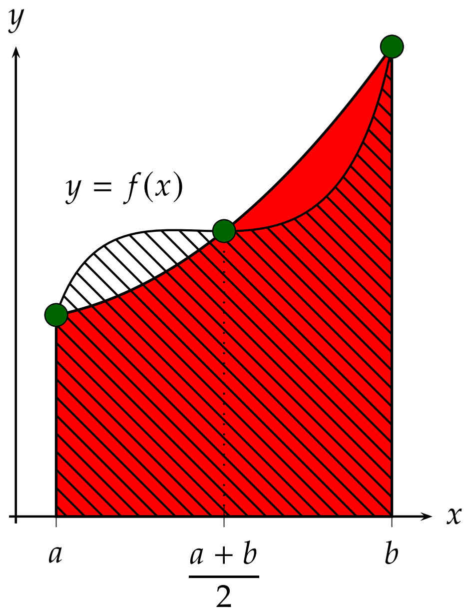
$$\int_a^b f(x)dx \approx \tfrac{b-a}{6}\Big(f(a)+4f(m)+f(b)\Big)$$ ❖



(a) *Regla de los trapecios simple*



(b) *Regla del punto medio simple*



(c) *Regla de Simpson simple*

Figura 1: *Reglas simples de integración numérica*

2. Reglas compuestas

De las versiones simples de las tres reglas que acabamos de estudiar, se derivan las correspondientes versiones compuestas, sin más que dividir el intervalo $[a, b]$ en varios subintervalos de la misma longitud y aplicar en cada uno de ellos la correspondiente regla simple, según se explica a continuación.

Pongamos que queremos dividir el intervalo $[a, b]$ en k subintervalos

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{k-1}, a_k].$$

de la misma longitud ($a_0 = a$ y $a_k = b$). La longitud de cada subintervalo será

$$h = \frac{b-a}{k}.$$

Los valores a_i que dan los extremos de los subintervalos se calculan con la recurrencia

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_i = a_{i-1} + h \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \end{cases} \tag{1}$$

Por la aditividad de la integral se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x)dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \cdots + \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx.$$

Finalmente, se aplica en cada sumando de la fórmula anterior la correspondiente regla simple.

En definitiva, las reglas compuestas utilizan interpolación segmentaria. La Figura 2 ilustra la regla de los trapecios compuesta con $k = 5$ intervalos.

Las siguientes definiciones muestran las fórmulas de las versiones compuestas de la regla de los trapecios, del punto medio y de Simpson. En todas ellas los valores a_i son los dados en (1); y m_i denota el punto medio del intervalo $[a_i, a_{i+1}]$, esto es

$$m_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}.$$

Definición 4 (Regla de los trapecios compuesta con k intervalos)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2k}\Big(f(a_0) + 2f(a_1) + \cdots + 2f(a_{k-1}) + f(a_k)\Big)$$

❖

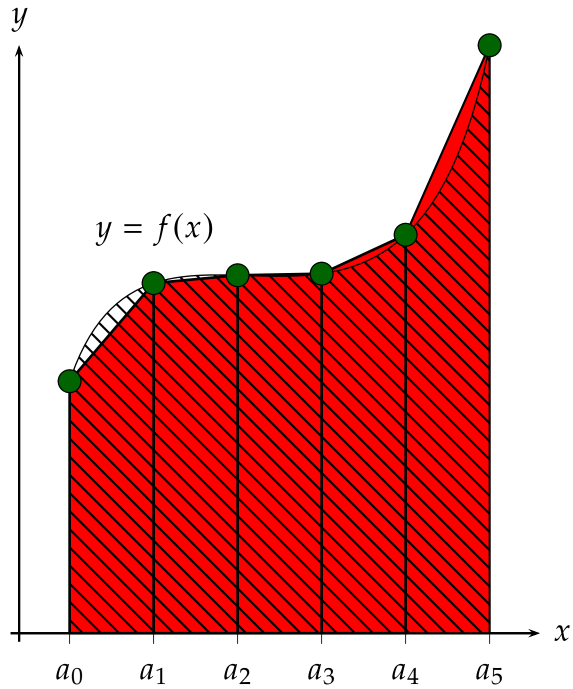


Figura 2: *Regla de los trapecios compuesta con 5 intervalos*

Definición 5 (Regla del punto medio compuesta con k intervalos)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{k}\Big(f(m_0) + \cdots + f(m_{k-1})\Big)$$ ❖

Definición 6 (Regla de Simpson compuesta con k intervalos)

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6k}\Big(f(a_0)+ \\ + 2f(a_1) + \cdots + 2f(a_{k-1}) + \\ + 4f(m_0) + \cdots + 4f(m_{k-1}) + \\ + f(a_k)\Big)$$ ❖

Notar que las definiciones de las reglas simples quedan englobadas como un caso particular de las reglas compuestas (basta poner $k = 1$).

Problema 1

Considerar la integral

$$I = \int_{-3}^{1} (0.03x^5 + 1)\, dx.$$

Aproximarla mediante los siguientes métodos:

(a) La regla de los trapecios simple.
(b) La regla del punto medio simple.
(c) La regla de Simpson simple.
(d) La regla de los trapecios compuesta con 2 intervalos.
(e) La regla del punto medio compuesta con 2 intervalos.
(f) La regla de Simpson compuesta con 2 intervalos.

Para los siguientes apartados, utilizar una hoja de cálculo.

(g) La regla de los trapecios compuesta con 6 intervalos.
(h) La regla del punto medio compuesta con 6 intervalos.
(i) La regla de Simpson compuesta con 6 intervalos.

Problema 2

Considerar una función f que toma los valores que se indican en la tabla siguiente:

x	$f(x)$
0	0
4	0.5
6	1.2
12	4.8
18	10.8
20	13.3
24	19.2

Utilizar los datos de la tabla para aproximar la integral $\int_0^{24} f(x)\, dx$ mediante los siguientes métodos:

(a) La regla del punto medio compuesta con 3 intervalos.
(b) La regla de Simpson compuesta con 2 intervalos.

3. Error

Las fórmulas del error para los polinomios interpoladores, que se vieron en el tema anterior, permiten deducir fórmulas del error para las reglas de integración. Los siguientes teoremas establecen cotas superiores del error cometido al aproximar una integral mediante las versiones compuestas de la regla de los trapecios, del punto medio y de Simpson (para las reglas simples basta poner $k = 1$).

Teorema 1 (Error de la regla de los trapecios)

Supongamos que f es de clase $\mathscr{C}^2$ en $[a,b]$. Si A es la aproximación de $\int_a^b f(x)dx$ por la regla de los trapecios compuesta con k intervalos, se tiene que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - A \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12k^2},$$

donde

$$M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Teorema 2 (Error de la regla del punto medio compuesta)

Supongamos que f es de clase $\mathscr{C}^2$ en $[a,b]$. Si A es la aproximación de $\int_a^b f(x)dx$ por la regla del punto medio compuesta con k intervalos, se tiene que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - A \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{24k^2},$$

donde

$$M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Teorema 3 (Error de la regla de Simpson)

Supongamos que f es de clase $\mathscr{C}^4$ en $[a,b]$. Si A es la aproximación de $\int_a^b f(x)dx$ por la regla de Simpson compuesta con k intervalos, se tiene que

$$\left| \int_a^b f(x)dx - A \right| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880k^4},$$

donde

$$M = \text{máx}_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

Problema 3

Considerar de nuevo la integral del Problema 1

$$I = \int_{-3}^{1} (0.03x^5 + 1)\, dx.$$

Para la aproximación mediante la regla del punto medio compuesta con 2 intervalos –apartado (e)– se pide:

(a) Calcular una cota del error cometido con dicha aproximación. Comparar con el error real.

(b) Calcular dos valores I_{min} e I_{max} de manera que podamos garantizar que se cumple la desigualdad

$$I_{min} \leq I \leq I_{max}.$$

(c) Basándose en la aproximación que se obtuvo en el Problema 1 y la cota del error que acaba de obtenerse, ambas redondeadas a dos decimales ¿puede garantizarse que I es menor que 15? ¿y menor que 10?

Para la aproximación mediante la regla de Simpson compuesta con 6 intervalos –apartado (i)– se pide:

(d) Calcular una cota del error cometido con dicha aproximación. Comparar con el error real.

(e) Basándose en la aproximación que se obtuvo en el Problema 1 y la cota del error que acaba de obtenerse, ambas redondeadas a 3 decimales ¿puede garantizarse que I es menor que 0.37?

Problemas complementarios

Problema 4

Se necesita calcular $\int_0^{0.6} f(x)\,dx$ para una determinada función f de la que se conoce la siguiente información:

x	$f(x)$
0	1
0.1	8
0.2	4
0.3	3.5
0.4	5
0.5	1
0.6	2

Aproximar la integral indicada usando los siguientes métodos:
(a) La regla de los trapecios compuesta con 6 intervalos.
(b) La regla de Simpson compuesta con 3 intervalos.

Problema 5 (Integrales elípticas de primera especie)

Para oscilaciones pequeñas (amplitud máxima inferior a $\pi/12$), el período P de un péndulo simple puede aproximarse por

$$P \approx 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

donde ℓ es la longitud del péndulo y g es la aceleración de la gravedad.

Ahora, el valor exacto del período de un péndulo con amplitud máxima ϕ_0, de cualuqier magnitud, viene dado por la integral

$$P = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-\operatorname{sen}\left(\frac{\phi_0}{2}\right)^2 \operatorname{sen}(\phi)^2}}.$$

Dado un péndulo de longitud $\ell = 1.6\ m$ y amplitud máxima $\phi_0 = \dfrac{\pi}{4}$, se pide:

(a) Aproximar el valor de su período utilizando la regla compuesta de los trapecios con 7 intervalos (tomar $g = 9.8\ m/s^2$). Utilizar una hoja de cálculo.
(b) Obtener una cota del error para la aproximación calculada en el apartado anterior. Estimar M realizando una gráfica con `Maxima`.
(c) A partir del valor aproximado y la cota del error obtenidos en los apartados anteriores, redondeados a tres decimales, construir un intervalo $[P_{min}, P_{max}]$ de manera que podemos asegurar que el valor exacto del período del péndulo está en dicho intervalo.
(d) Utilizar el intervalo del apartado anterior para responder a las siguientes preguntas: ¿Puede asegurarse que el período del péndulo es inferior a 2.64 s? ¿y superior a 2.63 s?

Problema 6 (Integrales elípticas de segunda especie)

La longitud L de una elipse con semieje mayor A y semieje menor B viene dada por

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{A^2 - (A^2 - B^2)\cos^2(t)}dt.$$

Para una elipse de semiejes $A = 18\ cm$ y $B = 6\ cm$, se pide

(a) Aproximar su longitud utilizando el método de Simpson con 5 intervalos. Utilizar una hoja de cálculo.
(b) Calcular una cota del error para la aproximación del apartado anterior. Estimar M realizando una gráfica con `Maxima`.
(c) En base a los resultados anteriores ¿Puede afirmarse que la longitud de la elipse es superior a 80 cm?

Problema 7 (La campana de Gauss)

La probabilidad de que una variable aleatoria X, con distribución normal de media 0 y desviación típica 1, tome valores entre a y b, se representa en la Figura (a) y viene dada por

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$

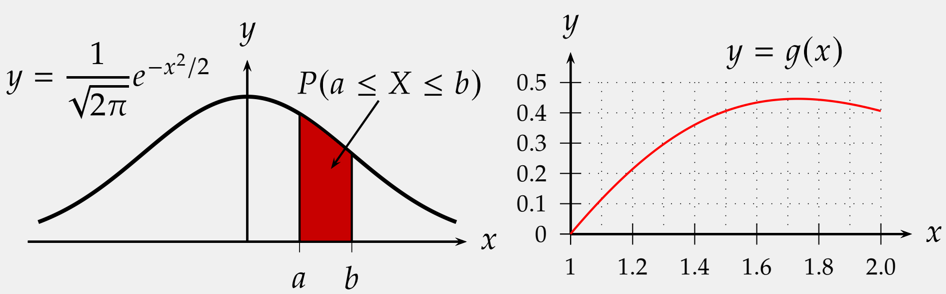
(a) Aproximar $P(1 \leq X \leq 2)$ usando la regla de los trapecios con 4 intervalos (trabajar con 4 decimales).

(b) La Figura (b) muestra la gráfica de la función

$$g(x) = e^{-x^2/2}(x^2 - 1).$$

Utilizar esta gráfica para determinar una cota del error de la aproximación calculada en el apartado anterior.

(c) A partir de los resultados de los apartados anteriores, redondeados a 4 decimales ¿puede asegurarse que $P(1 \leq X \leq 2) \leq 0.14$?



(a) *Probabilidad normal*

(b) *Gráfica de* $g(x) = e^{-x^2/2}(x^2 - 1)$

Problemas de examen

Problema 8 ★

Considerar la integral

$$I = \int_1^2 (x^2 + 18\log(x)) dx.$$

(a) Aproximar I mediante la regla de los trapecios compuesta con 4 intervalos.

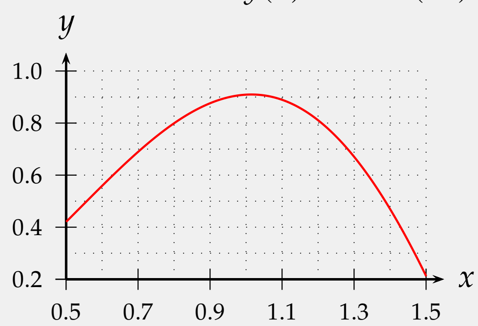
(b) Calcular una cota del error para la aproximación obtenida en el apartado anterior.

Problema 9 ★

(a) Aplicar la regla de Simpson compuesta con 2 intervalos para aproximar la integral

$$\int_{0.5}^{1.5} \big(x\,\mathrm{sen}(2x) + 2\cos(2x) + x\big)\,dx.$$

(b) Dar una cota para el error asociado a la aproximación calculada en el apartado anterior. Para ello, utilizar la siguiente figura, que muestra la gráfica de la función $g(x) = x\,\mathrm{sen}(2x)$:



Problema 10 ★

Considerar una función f que toma los valores que se indican en la tabla siguiente:

x	$f(x)$
0	0
4	0.5
6	1.2
12	4.8
18	10.8
20	13.3
24	19.2

Aproximar la integral $\int_0^{24} f(x)\, dx$ mediante los siguientes métodos:

(a) La regla del punto medio compuesta con 3 intervalos.
(b) La regla de Simpson compuesta con 2 intervalos.