Métodos Numéricos y Estadísticos

Grado en Ingeniería Informática
Curso 2015-2016

Tema 1

Interpolación polinómica

Eva María Mazcuñán Navarro

Eva María Mazcuñán Navarro
Departamento de Matemáticas
Universidad de León
E-mail: emmazn@unileon.es

Contenidos

1. Interpolación de Lagrange

1.1. Definición de polinomio interpolador

Sean x_1, x_2, y_1 e y_2 números reales cualesquiera. Conocemos la siguiente propiedad:

Existe una única recta pasando por los puntos del plano (x_1, y_1) y (x_2, y_2). ❖

Problema 1

Calcular la única recta pasando por los puntos $(1, -1)$ y $(-2, 5)$.
Para ello, escribir la ecuación de la recta en la forma

$$y = a_0 + a_1 x,$$

siendo a_0 y a_1 los valores a determinar.

Problema 2

Calcular la única recta pasando los puntos $(1, -1)$ y $(-2, -1)$ (en este caso no es necesario realizar ningún cálculo).

Cuando $x_1 = x_2$, la recta pasando por los puntos (x_1, y_1) y $(x_2, y_2) = (x_1, y_2)$ es la recta vertical de ecuación $x = x_1$. A partir de ahora excluiremos este caso y supondremos que $x_1 \neq x_2$.

Siendo $x_1 \neq x_2$, la ecuación de la recta pasando por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puede escribirse como

$$y = a_0 + a_1 x$$

para determinados números reales a_0 y a_1. De manera que dicha recta puede verse como la gráfica del polinomio

$$P(x) = a_0 + a_1 x.$$

Que la recta pase por un punto del plano (x_i, y_i) es equivalente a que el polinomio P cumpla

$$P(x_i) = y_i.$$

De acuerdo con las consideraciones anteriores, la propiedad mencionada al inicio de la sección (para $x_1 \neq x_2$) puede escribirse utilizando lenguaje de polinomios de la forma siguiente:

Existe un único polinomio P de grado menor o igual que 1 verificando

$$P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2.$$

Nuestro objetivo es estudiar cómo se generaliza la propiedad anterior al caso de más de dos puntos. La respuesta la da el Teorema 1.

De aquí en adelante, $x_1, \ldots, x_n$ representarán n números reales distintos entre sí; e $y_1, \ldots, y_n$ denotarán n números reales cualesquiera.

Teorema 1 (Polinomio interpolador)

Existe un único polinomio P de grado menor o igual que $n-1$ verificando

$$P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, \ldots, P(x_n) = y_n.$$

Dicho polinomio recibe el nombre de ***polinomio interpolador de Lagrange*** *(o simplemente* ***polinomio interpolador****) en los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.*

Ahora podemos referirnos a la única recta pasando por los puntos del plano (x_1, y_1) y (x_2, y_2) como el polinomio interpolador en dichos puntos.

En el Teorema 1 hay dos condiciones:
(A) P es de grado menor o igual que $n-1$,
(B) $P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, \ldots, P(x_n) = y_n$.
Es importante precisar que lo que asegura el Teorema 1 es que hay un único polinomio P cumpliendo *simultáneamente* (A) y (B), que se denomina polinomio interpolador en $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Dicho de otra forma, el Teorema 1 define el polinomio interpolador $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ como el único polinomio verificando *simultáneamente* (A) y (B).

El siguiente problema muestra que el papel de la hipótesis (A) es fundamental: si se suprime se pierde la unicidad.

Problema 3

Sabemos (Problema 1) que $P(x) = 1 - 2x$ verifica

$$P(1) = -1, P(-2) = 5.$$

Consideremos ahora $Q(x) = x^2 - x - 1$.

(a) Comprobar que Q también cumple

$$Q(1) = -1, Q(-2) = 5.$$

(b) ¿Es Q el polinomio interpolador en $(1, -1)$ y $(-2, 5)$?

(c) Notar que
$$Q(x) = P(x) + (x-1)(x+2).$$
¿Explica esta relación entre P y Q que sean $P(1) = Q(1)$ y $P(-2) = Q(-2)$?

(d) Demostrar que, no sólo la parábola $y = Q(x)$ pasa por los puntos $(1,-1)$ y $(-2,5)$, sino que hay infinitas parábolas pasando por los puntos $(1,-1)$ y $(-2,5)$.
(Pista: *Pensar en la ecuación del apartado anterior.*)

(e) ¿Cuántos polinomios hay de grado 3 cuya gráfica pasa por los puntos $(1,-1)$ y $(-2,5)$?

El problema anterior pone de manifiesto que, si bien pasando por dos puntos del plano hay una única recta (su polinomio interpolador), hay infinitas parábolas, infinitos polinomios de grado 3, ... cuyas gráficas también pasan por esos dos puntos.

En general, dados n puntos, si bien hay un único polinomio de grado menor o igual que $n-1$ cuya gráfica pasa por ellos (su polinomio interpolador), para $m \geq n$, existen infinitos polinomios de grado m cuyas gráficas también pasan por esos n puntos. El siguiente resultado lo demuestra:

Teorema 2

Sea P el polinomio interpolador en $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Sean m_1, m_2, ..., m_n números naturales, mayores o iguales que 1. Sea λ un número real cualquiera.

El polinomio
$$Q_\lambda(x) = P(x) + \lambda(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\cdots(x-x_n)^{m_n}$$
es de grado $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ y verifica
$$Q_\lambda(x_1) = y_1, Q_\lambda(x_2) = y_2, \ldots, Q_\lambda(x_n) = y_n.$$

El polinomio interpolador en n puntos es, por definición, de grado *menor o igual* que $n-1$. Notar que puede ser de grado estrictamente menor que $n-1$: En el Problema 2 tenemos $n = 2$ puntos y su polinomio interpolador es $P(x) = -1$, de grado 0, menor estricto que $n-1 = 1$.

Problema 4

Consideremos el polinomio

$$P(x) = 1 - x.$$

(a) Comprobar que P verifica $P(0) = 1$, $P(1) = 0$ y $P(2) = -1$.

Argumentar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(b) P es el polinomio interpolador en $(0, 1)$ y $(1, 0)$.
(c) P es el polinomio interpolador en $(0, 1)$ y $(2, -1)$.
(d) P es el polinomio interpolador en $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(2, -1)$.

Problema 5

Consideremos el polinomio

$$P(x) = 1 - x + x^2.$$

(a) Comprobar que P verifica $P(-1) = 3$, $P(0) = 1$, $P(1) = 1$ y $P(2) = 3$.

Argumentar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(b) P es el polinomio interpolador en $(-1, 3)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$.
(c) P es el polinomio interpolador en $(-1, 3)$, $(0, 1)$ y $(2, 3)$.
(d) P es el polinomio interpolador en $(-1, 3)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ y $(2, 3)$.
(e) P es el polinomio interpolador en $(-1, 3)$ y $(0, 1)$.

Problema 6

Es evidente que no existe ningún polinomio de grado 0 (recta horizontal) pasando por los puntos $(1, -1)$ y $(-2, 5)$. Razonarlo sabiendo que el polinomio interpolador en estos dos puntos es $P(x) = 1 - 2x$.

Teorema 3 (Caracterización del polinomio interpolador)

El polinomio interpolador de Lagrange en $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ es el polinomio P de menor grado cumpliendo

$$P(x_1) = y_1, P(x_2) = y_2, \ldots, P(x_n) = y_n.$$

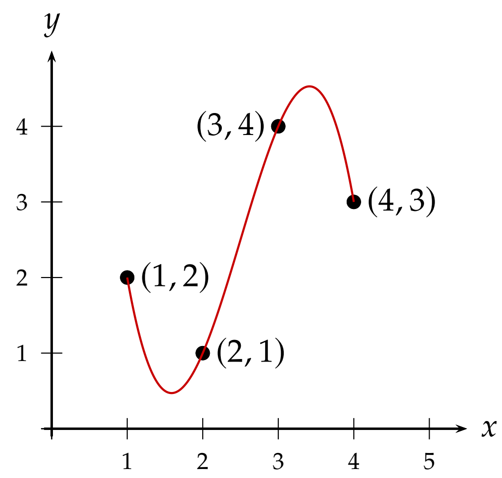


Figura 1

Problema 7

Sabemos (Problema 2) que el polinomio interpolador en los puntos $(1, -1)$ y $(-2, -1)$ es

$$P(x) = -1.$$

(a) ¿Cuántos polinomios de grado 1 (rectas con pendiente distinta de cero) pasan por $(1, -1)$ y $(-2, -1)$?
(b) ¿Y polinomios de grado 2 (parábolas)?
(c) ¿Y polinomios de grado 3?

1.2. Base de Newton

Queremos diseñar una montaña rusa que pase por los puntos

$$(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3),$$

como en la Figura 1.

Para ello, decidimos calcular el polinomio interpolador en estos puntos, es decir, el único polinomio P de grado menor o igual que 3, verificando

$$P(1) = 2, P(2) = 1, P(3) = 4 \text{ y } P(4) = 3.$$

Expresamos P como

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \tag{1}$$

para determinados números reales a_0, a_1, a_2 y a_3.

Imponiendo las condiciones del enunciado se obtiene el sistema

$$\begin{cases} 2 = P(1) = a_0 + a_1 \;\; + a_2 \;\;\; + a_3 \\ 1 = P(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 \;\; + 8a_3 \\ 4 = P(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 \;\; + 27a_3 \\ 3 = P(4) = a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3. \end{cases}$$

Los cálculos necesarios para resolver el sistema son algo engorrosos para hacerlos a mano. Podríamos resolver el sistema con `Maxima`:

```
(%i1) linsolve(
        [
          2 = a0 + a1 + a2 + a3,
          1 = a0 + 2*a1 + 4*a2 + 8*a3,
          4 = a0 + 3*a1 + 9*a2 + 27*a3,
          3 = a0 + 4*a1 + 16*a2 + 64*a3
        ],
        [a0, a1, a2, a3]
      );
```

(%o1) $[a0 = 15, a1 = -\frac{65}{3}, a2 = 10, a3 = -\frac{4}{3}]$

El polinomio buscado es

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 15 - 65/3x + 10x^2 - 4/3x^3.$$

En el siguiente problema se propone una nueva expresión para P que solventa el problema anterior con los cálculos.

Problema 8

Queremos calcular el polinomio interpolador P en $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,4)$ y $(4,3)$, para diseñar el trazado de la Figura 1.

Expresamos P como

$$P(x) = b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)(x-2) + b_3(x-1)(x-2)(x-3), \quad (2)$$

para determinados números reales b_0, b_1, b_2 y b_3.

Calcular P utilizando esta nueva expresión.

Al resolver el Problema 8, se aprecia la ventaja de usar la base

$$\{1, x-1, (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3)\} \quad (3)$$

en la expresión (2) respecto a usar la base canónica

$$\{1, x, x^2, x^3\}$$

en la expresión (1). Al usar la base (3) obtenemos un sistema triangular, que podemos resolver a mano.

La base (3) se denomina **base de Newton** asociada a las abcisas de los tres primeros puntos, $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, 4)$.

El mismo efecto (proporcionar un sistema triangular) haría usar la base de Newton asociada a las abcisas de cualesquiera tres de los cuatro puntos (no hace falta que sean los tres primeros). Podríamos haber considerado, por ejemplo, $(1, 2)$, $(3, 4)$ y $(4, 3)$ y la base de Newton asociada

$$\{1, x - 1, (x - 1)(x - 3), (x - 1)(x - 3)(x - 4)\}.$$

1.3. Propiedad de permanencia

Problema 9

Se desea ampliar la montaña rusa de la Figura 1 para que pase por el nuevo punto $(5, -1)$. Para ello, calcularemos Q, el polinomio interpolador en los puntos

$$(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3) \text{ y } (5, -1).$$

Al resolver el Problema 9 se vé que el polinomio Q está relacionado con el polinomio P del Problema 8 a través de la ecuación siguiente:

$$Q(x) = P(x) + \frac{3}{8}(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4).$$

El siguiente resultado explica la situación general.

Teorema 4 (Propiedad de permanencia)

Sea P el polinomio interpolador de Lagrange en (x_1, y_1),(x_2, y_2), . . . ,(x_n, y_n). Consideremos un punto adicional (x_{n+1}, y_{n+1}), con x_{n+1} diferente de x_1,x_2, $\cdots$, x_n. Llamemos Q al polinomio interpolador de Lagrange en los $n + 1$ puntos (x_1, y_1),(x_2, y_2), . . . , (x_n, y_n),(x_{n+1}, y_{n+1}).

Se cumple que

$$Q(x) = P(x) + a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n),$$

para determinado número real a_n. ❖

En el contexto del resultado anterior, pueden presentarse dos situaciones:

- Que conozcamos P y queramos calcular Q, esto es, que queramos incluir un nuevo punto, como en el Problema 9. En este caso a_n se determinará imponiendo la condición
$$Q(x_{n+1}) = y_{n+1}.$$
- Que conozcamos Q y queramos calcular P, es decir, que queramos excluir un punto. En este caso no es necesario ningún cálculo adicional para determinar a_n, basta notar que es el coeficiente de Q para la potencia x^n. Ésta es la situación en el siguiente problema.

Problema 10

Sabiendo que el polinomio interpolador en $(-2,-1)$, $(1,5)$, $(0,-7)$ y $(2,19)$ es
$$P(x) = -x^3 + 4x^2 + 9x - 7,$$
calcular el polinomio interpolador en $(-2,-1)$, $(1,5)$ y $(0,-7)$.

1.4. Funciones dadas en forma de tabla

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supongamos que no se conoce el valor de f en todos los puntos de su dominio, sino sólo para determinados números reales x_1, x_2, ... y x_n de A, esto es, la información que tenemos de la función f viene dada por la tabla

x	$f(x)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$

Esta situación se presenta por ejemplo para funciones experimentales o cuya evaluación no se puede llevar a cabo de manera exacta o es muy costosa. Se plantea el problema de obtener una aproximación de $f(x)$ para un valor x distinto de los de la tabla.

El problema puede resolverse calculando el polinomio interpolador P en los puntos $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, ... y $(x_n, f(x_n))$, para luego aproximar
$$f(x) \approx P(x). \tag{4}$$

Al polinomio P se le suele llamar simplemente **polinomio interpolador de f** en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se les llama **nodos de interpolación**.

A esta técnica de aproximación se le denomina **interpolación de la función f**. Cuando x está fuera del intervalo determinado por los nodos de interpolación se habla de **extrapolación**.

Problema 11

Consideremos una función f de la que se conocen los valores indicados en la tabla siguiente:

x	$f(x)$
-1	1
0	0
1	1

(a) Calcular el polinomio interpolador de f en los tres nodos de la tabla. Utilizarlo para aproximar $f(0.5)$.
(b) Calcular el polinomio interpolador de f en los nodos 0 y 1. Utilizarlo para aproximar $f(0.5)$.

En el siguiente resultado se estudia el error cometido al utilizar la aproximación de la ecuación (4).

Teorema 5 (Error de interpolación)

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en A, y sea P el polinomio interpolador de f en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dado x en A, consideremos el intervalo $[a, b]$ más pequeño conteniendo a x_1, x_2, ..., x_n y a x.

Si f es de clase $\mathscr{C}^n$ en $[a, b]$, entonces existe ξ en $[a, b]$ de manera que

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n). \tag{5}$$

❖

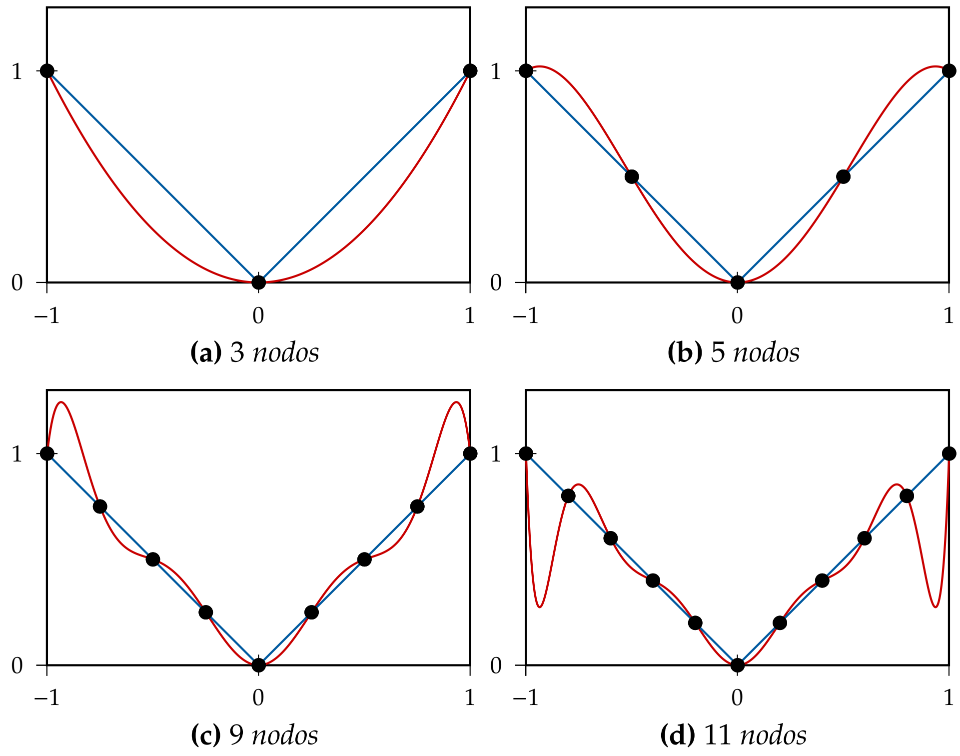


Figura 2: *Efecto borde en la interpolación de la función* $f(x) = |x|$

Problema 12

Notar que la función f del Problema 11 podría ser $f(x) = |x|$. Si este fuera el caso ¿cuál de las dos aproximaciones de $f(0.5)$ sería más acertada?

Cuando se considera un número elevado de nodos de interpolación, especialmente cuando se trata de nodos igualmente espaciados, aparece el fenómeno conocido como **efecto borde**, que se muestra en los gráficos de la Figura 2. Por tanto, la inclusión de un mayor número de nodos no siempre garantiza una mejor aproximación, sino que puede empeorarla por el efecto borde.

El efecto borde también es problema fuera del contexto de la aproximación de funciones, porque da lugar a trazados demasiado oscilantes.

Una alternativa a la interpolación de Lagrange (para evitar la aparición del efecto borde), es la **interpolación de Lagrange segmentaria**.

La interpolación de Lagrange segmentaria para aproximar un valor $f(x)$

consiste simplemente en escoger k de los nodos de la tabla ($k < n$) para calcular el polinomio interpolador P en esos k nodos y utilizar la aproximación $f(x) \approx P(x)$. Obviamente (por intuición y por el Teorema 5) escogeremos los k nodos más próximos a x.

Cuando se usan dos nodos, se habla de interpolación **lineal**; cuando se usan tres, de interpolación **cuadrática**; y, en general, cuando se usan k nodos, de interpolación segmentaria **de grado $k - 1$**.

Problema 13

La tabla adjunta proporciona el número de viajeros que suben al metro en una estación a las horas indicadas:

Hora	Viajeros
8	41
10	21
11	9
13	17
14	32

(a) Obtener el número estimado de viajeros que suben en esta estación a las 10:25 horas, mediante interpolación lineal.
(b) Realizar la estimación anterior mediante interpolación cuadrática.

2. Interpolación de Lagrange paramétrica

2.1. Curvas paramétricas

Definición 1 (Curva paramétrica)

Llamaremos *curva paramétrica* en $\mathbb{R}^k$ a una función f definida en $\mathbb{R}$ o en un subconjunto A de $\mathbb{R}$ y con valores en $\mathbb{R}^k$, esto es

$$\begin{gathered} f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k \\ f(t) = \big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t)\big), \end{gathered}$$

donde $f_1, \dots, f_k$ son funciones con valores reales, que llamaremos **funciones coordenadas** de f.

Se puede pensar en la variable independiente t como el tiempo, y en $f(t)$ como las coordenadas de la posición de un móvil en el instante t. Al conjunto imagen

$$f(A) = \{f(t) \mid t \in A\}$$

lo llamaremos **camino descrito** por f. No obstante, es frecuente identificar la curva f y el camino que describe $f(A)$, y llamar también a $f(A)$ curva paramétrica. ❖

En la Figura 3 se muestran varios ejemplos de (caminos descritos por) curvas paramétricas en $\mathbb{R}^2$.

Notar que las fórmulas para las curvas de la Figura 3(c) y la Figura 3(d) no especifican las coordenadas de $f(t)$ sino que tienen la forma

$$f(t) = p_0 f_0(t) + p_1 f_1(t) + \cdots + p_n f_n(t),$$

siendo $f_0, f_1, \ldots, f_n$ funciones con valores reales y $p_0, p_1, \ldots, p_n$ puntos de $\mathbb{R}^2$. La curva de la Figura 3(c) es el segmento uniendo $(-2,-1)$ y $(1,1)$. Y la curva de la Figura 3(d) se denomina **curva de Bézier** con **puntos de control** $(-1,1)$, $(-1,-1)$ y $(1,0)$.[1]

Definición 2 (Polinomio paramétrico)

Un **polinomio paramétrico** es una curva paramétrica cuyas funciones coordenadas son polinomios. El **grado** de un polinomio paramétrico es el máximo de los grados de sus funciones coordenadas. ❖

Por ejemplo, $P(t) = (1+t-3t^2+2t^4, 5-t+7t^3)$ es un polinomio paramétrico en $\mathbb{R}^2$ de grado 4.

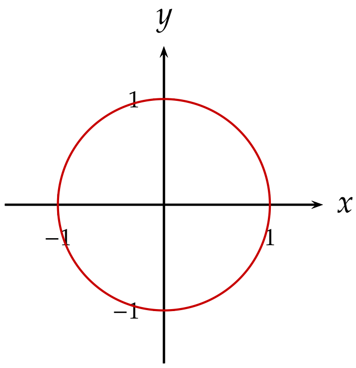
2.2. Polinomio interpolador paramétrico

En el resto de la sección t_1, t_2, ..., t_n representarán n números reales distintos entre sí; mientras que (x_1, y_1) (x_2, y_2), ... (x_n, y_n) representarán n puntos cualesquiera de $\mathbb{R}^2$.

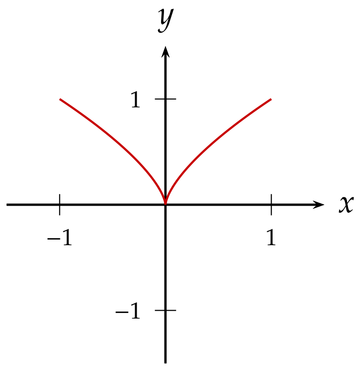
El Teorema 6 es la versión paramétrica del Teorema 1. Para compararlos, pensar en las identificaciones de la siguiente tabla:

Polinomio	Polinomio paramétrico en $\mathbb{R}^2$
$x_1, x_2, \ldots, x_n$	$t_1, t_2, \ldots, t_n$
$y_1, y_2, \ldots, y_n$	$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$

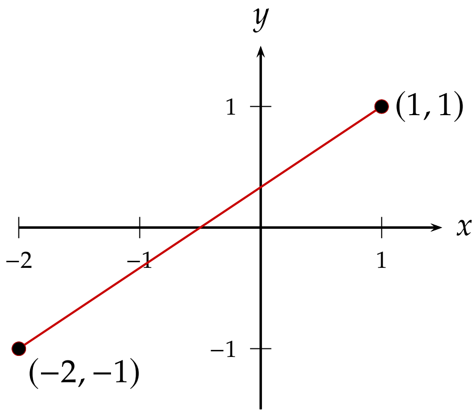
[1] Las curvas de Bézier son el elemento básico para la construcción de los denominados **splines**.



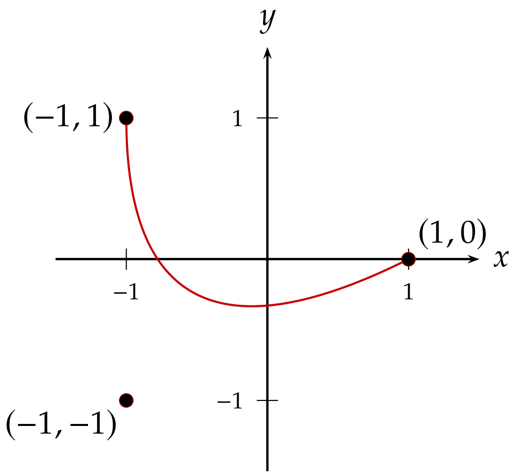
(a) $f(t) = \big(cos(t), sin(t)\big), \quad t \in [0, \pi]$



(b) $f(t) = (t^3, t^2), \quad t \in [-1, 1]$



(c) $f(t) = (-2, -1)(1 - t) + (1, 1)t, \quad t \in [0, 1]$



(d) $f(t) = (-1, 1)(1 - t)^2 + 2(-1, -1)t(1 - t) + (1, 0)t^2, \quad t \in [0, 1]$

Figura 3: *Caminos descritos por varias curvas paramétricas*

Teorema 6 (Polinomio interpolador paramétrico)

Existe un único polinomio paramétrico P en $\mathbb{R}^2$ de grado menor o igual que $n-1$ verificando

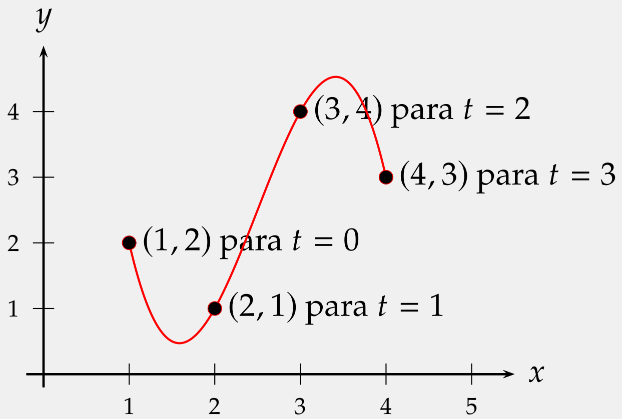
$$P(t_1) = (x_1, y_1), P(t_2) = (x_2, y_2), \ldots, P(t_n) = (x_n, y_n).$$

A P lo llamaremos ***polinomio interpolador de Lagrange paramétrico*** *(o simplemente* ***polinomio interpolador paramétrico*** *o* ***polinomio interpolador****) para los tiempos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ y los puntos (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.* ❖

Las aplicaciones de los polinomios paramétricos en $\mathbb{R}^2$ incluyen el diseño de trazados que se recorren en función del tiempo (ver Problema 14) y de trazados que no pueden ser la gráfica de un polinomio en $\mathbb{R}$ (ver Problema 20).

Problema 14

Queremos modelizar el movimiento de un vagón en la montaña rusa del Problema 8 de manera que pase por los puntos $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,4)$ y $(4,3)$ en los instantes de tiempo 0, 1, 2 y 3.



Calcular el polinomio interpolador paramétrico $P(t) = (x(t), y(t))$ asociado a los datos

t	(x, y)
0	$(1,2)$
1	$(2,1)$
2	$(3,4)$
3	$(4,3)$

El camino descrito por esta curva proporcionará el recorrido buscado.

Problema 15

(a) Calcular Q, el polinomio interpolador en los puntos $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, 4)$. ¿Encuentras alguna relación con el polinomio P del Problema 14?

(b) A partir del resultado del problema anterior, y sin realizar ningún cálculo adicional, calcular R, el polinomio interpolador en los puntos $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$ y $(3, 3)$.

Los resultados que se vieron en la sección anterior para polinomios en $\mathbb{R}$ se generalizan a polinomios paramétricos en $\mathbb{R}^2$ sin más que aplicarlos a cada coordenada de la curva.

Problemas complementarios

Problema 16

(a) Calcular el polinomio interpolador en $(1, 2)$, $(3, -2)$ y $(4, -7)$.

En la siguiente tabla, indicar cuántos polinomios existen del grado indicado cuya gráfica pasa por los tres puntos anteriores:

Grado 0	Grado 1	Grado 2	Grado 3

(b) Hacer lo mismo para $(1, 2)$, $(3, 2)$ y $(4, -4)$.

Problema 17

En el Problema 8, se calculó el polinomio interpolador en los puntos $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$ y $(4, 3)$, que resultó ser de grado 3.

Teniendo en cuenta esta información, responder razonadamente a las siguientes preguntas:

(a) Además de P ¿cuántos polinomios Q existen de grado 3 verificando $Q(1) = 2$, $Q(2) = 1$, $Q(3) = 4$ y $Q(4) = 3$?

(b) ¿Existe algún polinomio Q de grado 2 cuya gráfica pase por los puntos $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(3, 4)$ y $(4, 3)$? En caso afirmativo ¿cuántos?

(c) ¿Existe algún polinomio Q de grado 4 verificando $Q(1) = 2$, $Q(2) = 1$, $Q(3) = 4$ y $Q(4) = 3$? En caso afirmativo ¿cuántos?

Problema 18

(a) Calcular P, el polinomio interpolador en los puntos $(-1, -8)$, $(1, -2)$, $(2, -2)$ y $(4, 22)$.

(b) Calcular el polinomio de menor grado Q cuya gráfica pasa por los cuatro puntos anteriores y que además verifica $Q(0) = 1$.

(c) Calcular el único polinomio R de grado menor o igual que 2 cuya gráfica pasa por los puntos $(-1, -8)$, $(1, -2)$ y $(2, -2)$.

(d) Calcular el polinomio de menor grado S verificando $S(-1) = -8$, $S(1) = -2$ y $S(4) = 22$.

Problema 19

Considerar la función

$$f(x) = \frac{log(x)}{log(4)}, \quad x > 0.$$

Calcular el polinomio interpolador de f en cada uno de los conjuntos de nodos que se listan a continuación:

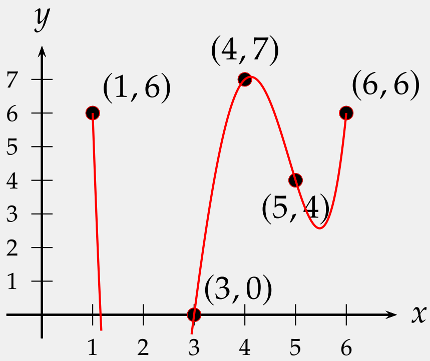
(a) $\{1, 64\}$ (b) $\{1, 16, 256\}$ (c) $\{4, 16, 64\}$

(d) $\{1, 4, 16, 64, 256\}$.

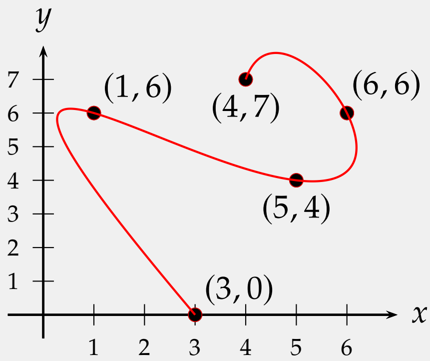
Para el polinomio interpolador P de cada apartado, calcular la diferencia $|f(32) - P(32)|$ y observar que la precisión no se mejora necesariamente aumentando el número de nodos de interpolación.

Problema 20

Queremos diseñar un trazado que pase por los puntos $(3,0)$, $(1,6)$, $(5,4)$, $(6,6)$ y $(4,7)$, en este orden. Podríamos calcular el polinomio interpolador en $(3,0)$, $(1,6)$, $(5,4)$, $(6,6)$ y $(4,7)$; pero su gráfica, que puede verse en la figura (a), no pasa por los puntos en el orden correcto. De hecho, el trazado buscado no puede ser la gráfica de ninguna función.



(a) *Polinomio*



(b) *Curva polinómica*

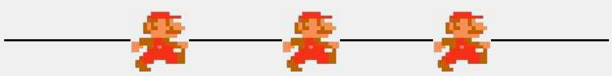
Para solucionar este problema calcular el polinomio paramétrico $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de menor grado, de manera que

$$P(0) = (3,0),\ P(1) = (1,6),\ P(2) = (5,4),\ P(3) = (6,6) \text{ y } P(4) = (4,7).$$

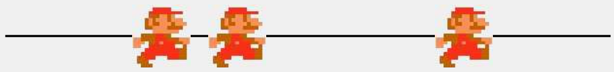
El camino descrito por esta curva proporcionará el trazado buscado, que puede verse en la figura (b).

Problema 21

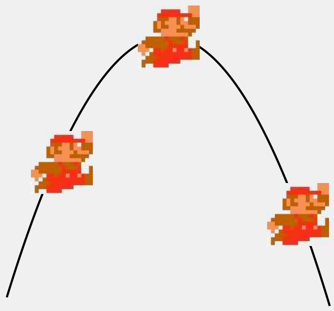
En las tres gráficas de la figura siguiente se representan tres movimientos diferentes de un personaje de videojuego. En cada caso, el personaje aparece representado en las posiciones que ocupa en los instantes de tiempo 1, 3 y 5.



(a) *Movimiento rectilíneo de velocidad constante*



(b) *Movimiento rectilíneo de velocidad no constante*



(c) *Movimiento parabólico*

Las siguientes tablas describen las coordenadas aproximadas de las posiciones representadas:

t	(x, y)		
	Figura (a)	Figura (b)	Figura (c)
1	$(2, 1)$	$(2, 1)$	$(0.7, 2.3)$
3	$(4, 1)$	$(3, 1)$	$(1.4, 4.0)$
5	$(6, 1)$	$(6, 1)$	$(3.5, 1.6)$

Modelizar los movimientos descritos usando interpolación paramétrica.

Problemas de examen

Problema 22 ★

(a) Calcular el polinomio paramétrico P en $\mathbb{R}^2$ de menor grado verificando

$$P(-1) = (1, 1), \; P(2) = (7, 7) \text{ y } P(1) = (-1, -3).$$

(b) Utilizando el resultado del apartado anterior, calcular Q, el polinomio paramétrico interpolador asociado a los datos

t	(x, y)
-1	$(1, 1)$
2	$(7, 7)$
1	$(-1, -3)$
3	$(21, 25)$

Responder a los dos siguientes apartados sin realizar ningún cálculo adicional:

(c) Determinar R, el polinomio interpolador en los puntos

$$(-1, 1), (2, 7), (1, -3) \text{ y } (3, 25).$$

(d) Considerar la familia de polinomios S verificando

$$S(-1) = 1,\ S(2) = 7,\ S(1) = -3 \text{ y } S(3) = 25.$$

¿Cuántos polinomos de dicha familia son de grado 2? ¿y de grado 3?

Problema 23 ★

(a) Calcular el polinomio paramétrico $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de menor grado verificando

$$P(0) = (10, 10),\ P(1) = (-1, 1),\ P(3) = (1, 1) \text{ y } P(4) = (2, -2).$$

(b) Sin realizar ningún cálculo adicional, determinar Q, el polinomio interpolador en $(0, 10)$, $(1, -1)$, $(3, 1)$ y $(4, 2)$.

(c) A partir del resultado del apartado anterior, calcular R, el polinomio de menor grado cuya gráfica pasa por los puntos $(1, -1)$, $(3, 1)$ y $(4, 2)$.

(d) Considerar la familia de polinomios S verificando

$$S(1) = -1,\ S(3) = 1 \text{ y } S(4) = 2.$$

En dicha familia ¿cuántos polinomios son de grado 1? ¿cuántos son de grado 2? ¿cuántos son de grado 4?

Bibliografía

Para ampliar conocimientos de este tema puedes consultar el Capítulo 18 de [1] y el Capítulo 3 de [2].

[1] Steven C. Chapra y Raymond P. Canale. *Métodos numéricos para ingenieros*. 5.ª ed. México [etc.]: McGraw-Hill, 2007, pág. 977. ISBN: 978-970-10-6114-5.

[2] J. Douglas Faires y Richard Burden. *Métodos numéricos*. Madrid: Thomson, 2004, pág. 660. ISBN: 84-9732-280-0 (Libro y CD-ROM).