Tema 1: Números enteros

PROBLEMAS

1. Probar que los enteros 83521 y 279841 son primos entre sí. ¿Puede expresarse 1 como combinación lineal con coeficientes enteros de dichos números?

2. Hallar el $\mathrm{mcd}(a, b)$ y expresarlo de la forma $\lambda a + \mu b$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ en cada uno de los casos siguientes:

   a) $a = 721$ y $b = 448$,
   b) $a = 180$ y $b = 80$,
   c) $a = 87$ y $b = -25$,
   d) $a = -36$ y $b = -92$.

3. Considérese la ecuación diofántica $12X + 2730Y = 6$. ¿Tiene solución? En caso afirmativo, dígase cuántas soluciones tiene.

4. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones diofánticas:

   a) $3X - 4Y = 22$,
   b) $37X + 23Y = 10$,
   c) $17X - 41Y = 2$,
   d) $28X + 36Y = 44$,
   e) $66X + 550Y = 88$,
   f) $966X + 686Y = 70$.

5. Hallar los valores enteros de X para los que se cumple cada uno de los sistemas de congruencias siguientes:

   a) $5X \equiv 2 \pmod 7$,
   b) $25X + 9 \equiv 29X - 8 \pmod 7$,
   c) $3X - 1 \equiv 9X - 9 \pmod{10}$,
   d) $3X - 1 \equiv 9X - 8 \pmod{10}$,
   e) $\begin{cases} 2X \equiv 3 \pmod 5 \\ 5X \equiv 2 \pmod 6 \end{cases}$,
   f) $\begin{cases} 2X \equiv 1 \pmod 3 \\ 5X \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$,
   g) $\begin{cases} 2X \equiv 2 \pmod 3 \\ 3X \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$,
   h) $\begin{cases} 2X \equiv 1 \pmod 4 \\ 2X \equiv 2 \pmod 6 \end{cases}$,
   i) $\begin{cases} X \equiv 1 \pmod 7 \\ X \equiv 2 \pmod 5 \\ X \equiv 1 \pmod 6 \end{cases}$,
   j) $\begin{cases} 2X \equiv 3 \pmod 5 \\ 5X \equiv 3 \pmod 6 \\ 5X \equiv 2 \pmod 7 \end{cases}$.

6. Hallar los valores enteros de m mayores o iguales que 2 para los que se cumple el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} 9815 \equiv 575 \pmod m \\ 442 \equiv 142 \pmod m \end{cases}.$$

7. ¿Qué números cumplen que tanto al dividirlos entre 2 como al dividirlos entre 3 el resto es 1?

8. Hallar un número de tres cifras que al dividirlo por 12 su resto sea 7 y al dividirlo por 13 su resto sea 4.

9. Encontrar todos los números n tales que $n+1$ es múltiplo de 3, $n+3$ es múltiplo de 4 y $n+5$ es múltiplo de 7.

10. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que $n^2 \equiv 1 \pmod 4$ o bien $n^2 \equiv 0 \pmod 4$.

11. Demostrar que ningún cuadrado perfecto puede ser congruente con 2 módulo 3.

12. Especificar criterios de divisibilidad de números enteros por el primo p en cada uno de los siguientes casos:

    a) $p = 2$, *b*) $p = 3$, *c*) $p = 5$, *d*) $p = 7$, *e*) $p = 11$, *f*) $p = 13$.

13. Hallar las unidades de $\mathbb{Z}_m$ y sus respectivos elementos inversos, en cada uno de los siguientes casos:

    a) $m = 7$, *b*) $m = 9$, *c*) $m = 10$.

14. Resolver en $\mathbb{Z}_{11}$ cada una de las ecuaciones siguientes:

    a) $x^2 + 3x + 4 = 0$, *b*) $x^2 - x + 1 = 0$.

15. Resolver en $\mathbb{Z}_5$ la ecuación $x^4 - 1 = 0$.

16. Demostrar que si 5 no divide a un número natural n, entonces 5 divide a $n^8 - 1$.

17. Usando el teorema de Fermat calcular los restos resultantes de dividir:

    a) 5^{82} entre 44, *b*) 3^{15} entre 17, *c*) 15^{90} entre 13.

18. ¿En qué cifra termina el número 17^{345}?

SOLUCIONES DE ALGUNOS PROBLEMAS

1. Sí.

2. *a*) $\mathrm{mcd}(721, 448) = 7 = 23 \cdot 721 + (-37) \cdot 448$,
   b) $\mathrm{mcd}(180, 80) = 20 = 1 \cdot 180 + (-2) \cdot 80$,
   c) $\mathrm{mcd}(87, -25) = 1 = (-2) \cdot 87 + (-7) \cdot (-25)$,
   d) $\mathrm{mcd}(-36, -92) = 4 = 5 \cdot (-36) + (-2) \cdot (-92)$.

3. Sí. Infinitas soluciones.

4. *a*) $\mathrm{Sol}(3X - 4Y = 22) = \{(-22 + 4t, -22 + 3t) \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$,
   b) $\mathrm{Sol}(37X + 23Y = 10) = \{(50 + 23t, -80 - 37t) \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$,
   c) $\mathrm{Sol}(17X - 41Y = 2) = \{(-24 + 41t, -10 + 17t) \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$,
   d) $\mathrm{Sol}(28X + 36Y = 44) = \{(44 + 9t, -33 - 7t) \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$,
   e) $\mathrm{Sol}(66X + 550Y = 88) = \{(-32 + 25t, 4 - 3t) \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$,
   f) $\mathrm{Sol}(966X + 686Y = 70) = \{(-110 + 49t, 155 - 69t) \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$.

5. *a*) $\{6 + 7t \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$,
   b) $\{6 + 7t \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$,
   c) $\{3 + 5t \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$,
   d) incompatible,
   e) $\{4 + 30t \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$,
   f) incompatible,
   g) $\{10 + 12t \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$,
   h) incompatible,
   i) $\{127 + 210t \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$,
   j) $\{69 + 210t \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$.

6. $m|60$, es decir, $m \in \{2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$.

7. $\{1 + 6t \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$.

8. Hay varias soluciones dentro del conjunto $\{667 + 156t \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$ por ejemplo el 667.

9. $\{65 + 84t \ / \ t \in \mathbb{Z}\}$.

13. *a*) $\mathbb{Z}_7^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$, con $\overline{1}^{-1} = \overline{1}$, $\overline{2}^{-1} = \overline{4}$, $\overline{3}^{-1} = \overline{5}$, $\overline{4}^{-1} = \overline{2}$, $\overline{5}^{-1} = \overline{3}$ y $\overline{6}^{-1} = \overline{6}$.
    b) $\mathbb{Z}_9^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}\}$, con $\overline{1}^{-1} = \overline{1}$, $\overline{2}^{-1} = \overline{5}$, $\overline{4}^{-1} = \overline{7}$, $\overline{5}^{-1} = \overline{2}$, $\overline{7}^{-1} = \overline{4}$ y $\overline{8}^{-1} = \overline{8}$.
    c) $\mathbb{Z}_{10}^* = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{7}, \overline{9}\}$, con $\overline{1}^{-1} = \overline{1}$, $\overline{3}^{-1} = \overline{7}$, $\overline{7}^{-1} = \overline{3}$ y $\overline{9}^{-1} = \overline{9}$.

14. *a*) $x = \overline{3}$ y $x = \overline{5}$, *b*) incompatible.

15. $\mathrm{Sol}(x^4 - 1 = 0) = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$.

17. *a*) 25, *b*) 6, *c*) 12.

18. 7.