Tema 2: Polinomios

PROBLEMAS

19. Calcular $f(X)+g(X)$ y $f(X)\cdot g(X)$ en cada uno de los casos siguientes:

    a) $f(X)=4X-5$ y $g(X)=2X^2-4X+2$ en $\mathbb{Z}_8[X]$,

    b) $f(X)=X+1$ y $g(X)=X+1$ en $\mathbb{Z}_2[X]$,

    c) $f(X)=2X^2+3X+4$ y $g(X)=3X^2+2X+3$ en $\mathbb{Z}_6[X]$.

20. Realizar en cada caso las siguientes divisiones euclídeas en $\mathbb{Q}[X]$:

    a) $3X^5+2X^4-X^2+1$ entre X^3+X+2,

    b) X^4-2X^3+X-2 entre X^2-2X+4.

21. Calcular en cada caso el $\mathrm{mcd}(p(X),q(X))$ en $\mathbb{Q}[X]$:

    a) $p(X)=X^5+3X^4+X^3+X^2+3X+1$ y $q(X)=X^4+2X^3+X+2$,

    b) $p(X)=X^{35}+1$ y $q(X)=X^{15}+1$.

22. Calcular en cada caso el polinomio $d(X)=\mathrm{mcd}(p(X),q(X))$ en $\mathbb{Q}[X]$, y polinomios $\lambda(X)$ y $\mu(X)$ en $\mathbb{Q}[X]$ cumpliendo $\lambda(X)p(X)+\mu(X)q(X)=d(X)$:

    a) $p(X)=X^5-5X^3+4X$ y $q(X)=X^3-2X^2-5X+6$,

    b) $p(X)=X^3-2X+1$ y $q(X)=2X^2-1$.

23. Dados los polinomios $p(X)=X^4+X^3+X^2+3X+2$ y $q(X)=X^3+3X^2+3X+2$ con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$ se pide:

    a) Justificar que el polinomio $(X+1)^2$ divide a $p(X)$ y factorizar $p(X)$.

    b) Calcular el máximo común divisor de $p(X)$ y $q(X)$.

24. Hallar k para que el resto de dividir $2X^2-kX+2$ entre $X-2$ sea 4.

25. Hallar las raíces de cada uno de los polinomios siguientes. ¿Cuáles de ellos son irreducibles?

    a) $X^2+1\in\mathbb{Z}_3[X]$,

    b) $X^2+1\in\mathbb{Z}_5[X]$,

    c) $X^3+X+2\in\mathbb{Z}_3[X]$,

    d) $X^3+X+2\in\mathbb{Z}_5[X]$,

    e) $X^3+X+1\in\mathbb{Z}_3[X]$,

    f) $X^3+X+1\in\mathbb{Z}_5[X]$.

26. Hallar las raíces comunes en $\mathbb{Q}$ de los polinomios X^3-3X-2 y $X^4+3X^3-2X^2-12X-8$. ¿Cuál es su máximo común divisor?

27. Determinar un polinomio $p(X) \in \mathbb{Q}[X]$ de grado 5 tal que $p(0) = p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = 1$.

28. Hallar todos los polinomios irreducibles de grado 2 en $\mathbb{Z}_3[X]$.

29. Factorizar como producto de polinomios irreducibles:

    a) $X^6 - 1 \in \mathbb{R}[X]$,

    b) $X^6 - 1 \in \mathbb{C}[X]$,

    c) $X^4 + 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$,

    d) $X^4 + X^3 + X + 2 \in \mathbb{Z}_3[X]$.

30. Factorizar el polinomio $3X^4 - 8X^3 + 6X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ como producto de irreducibles y calcular su conjunto de divisores. ¿Cuántos divisores tiene? ¿Cuántos de ellos son mónicos?

31. Comprobar que en $\mathbb{Z}_{12}$ la ecuación de segundo grado $X^2 + 11 = 0$ tiene más de dos soluciones. Usar los datos para dar dos factorizaciones distintas de $X^2 + 11 \in \mathbb{Z}_{12}[X]$.

32. Probar que el polinomio $X^2 + X + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}_2[X]$. Utilizar dicho polinomio para construir un cuerpo finito con 4 elementos. Calcular el inverso de la clase de X en dicho cuerpo.

33. Probar que el polinomio $X^2 + X + 2$ es irreducible en $\mathbb{Z}_3[X]$. Utilizar dicho polinomio para construir un cuerpo finito con 9 elementos. Calcular el inverso de la clase de X en dicho cuerpo.

34. Probar que el polinomio $X^3 + X + 1$ es irreducible en $\mathbb{Z}_2[X]$. Utilizar dicho polinomio para construir un cuerpo finito con 8 elementos. Comprobar que la clase de X genera el grupo multiplicativo de las unidades de $\mathbb{Z}_2[X]/(X^3 + X + 1)$.

35. Se consideran los polinomios $p(X) = X^3 + 2X + 1$ y $q(X) = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Z}_3[X]$.

    a) Calcular $d(X) = \text{mcd}(p(X), q(X))$ y polinomios $\lambda(X)$ y $\mu(X)$ para los que se cumpla la igualdad $\lambda(X) \cdot p(X) + \mu(X) \cdot q(X) = d(X)$.

    b) Demostrar que el anillo cociente $\mathbb{Z}_3[X]/(p(X))$ es un cuerpo y calcular el inverso de la clase de $q(X)$ en dicho cuerpo.

36. Se consideran los polinomios $p(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ y $q(X) = X^2 + 5$ en $\mathbb{Z}_7[X]$.

    a) Factorizar los polinomios $p(X)$ y $q(X)$ como producto de irreducibles.

    b) Calcular $d(X) = \text{mcd}(p(X), q(X))$ y polinomios $\lambda(X)$ y $\mu(X)$ para los que se cumpla la igualdad $\lambda(X) \cdot p(X) + \mu(X) \cdot q(X) = d(X)$.

    c) Calcular el inverso de la clase de $p(X)$ en $\mathbb{Z}_7[X]/(q(X))$ y el de la clase de $q(X)$ en $\mathbb{Z}_7[X]/(p(X))$, si es que existen.

SOLUCIONES DE ALGUNOS PROBLEMAS

19. *a*) $f(X)+g(X)=2X^2+5, \quad f(X)\cdot g(X)=6X^2+4X+6,$
    b) $f(X)+g(X)=0, \quad f(X)\cdot g(X)=X^2+1,$
    c) $f(X)+g(X)=5X^2+5X+1, \quad f(X)\cdot g(X)=X^3+5X.$

20. *a*) Cociente: $3X^2+2X-3$, resto: $-9X^2-X+7$,
    b) Cociente: X^2-4, resto: $-7X+14$.

21. *a*) X^3+1, *b*) X^5+1.

22. *a*) $d(X)=X^2+X-2, \quad \lambda(X)=1/12, \quad \mu(X)=-X^2/12-X/6-1/3.$
    b) $d(X)=1, \quad \lambda(X)=-12X-8, \quad \mu(X)=6X^2+4X-9.$

23. Factorización: $p(X)=(X+1)^2\cdot(X^2+4X+2)$; el mcd es 1.

24. $k=3$.

25. *a*) Sin raíces; irreducible, *b*) 2 y 3; compuesto, *c*) 2; compuesto, *d*) 4; compuesto, *e*) 1; compuesto, *f*) Sin raíces; irreducible.

26. -1 y 2. El mcd es $(X+1)\cdot(X-2)$.

27. $X(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)+1$.

28. X^2+1, X^2+X+2, X^2+2X+2, $2X^2+2$, $2X^2+2X+1$, $2X^2+X+1$.

29. *a*) $(X+1)(X-1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)$,
    b) $(X+1)(X-1)\left(X-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(X-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)\left(X-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(X-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$,
    c) $(X^2+X+2)\cdot(X^2+2X+2)$,
    d) $(X^2+X+2)\cdot(X^2+1)$.

30. Factorización: $3\cdot(X-1)^3\cdot(X+1/3)$.
    $\mathrm{Div}(3X^4-8X^3+6X^2-1)=\{k\cdot(X-1)^a\cdot(X+1/3)^b \ / \ k\in\mathbb{R}^*, 0\le a\le 3, 0\le b\le 1\}$.
    Infinitos divisores. De ellos 8 son mónicos.

31. Soluciones: 1, 5, 7 y 11.
    Factorizaciones: $X^2+11=(X-1)(X-11)=(X-5)(X-7)$.

32. $\overline{X}^{-1}=\overline{X+1}$. 33. $\overline{X}^{-1}=\overline{X+1}$.

35. $d(X)=1, \quad \lambda(X)=1, \quad \mu(X)=X, \quad \overline{q(X)}^{-1}=\overline{X}.$

36. $p(X)=(X+1)(X^2+1), \quad q(X)=(X+6)(X+3), \quad d(X)=1, \quad \lambda(X)=5X+2,$
    $\mu(X)=2X^2+3X+3, \quad \overline{p(X)}^{-1}=\overline{5X+2}, \quad \overline{q(X)}^{-1}=\overline{2X^2+3X+3}.$