Université François Rabelais
Sciences et Techniques

Département de Mathématiques
Licence 3
Projet

Processus de Galton-Watson

Élèves :
MAITAMMAR Adrien
SAUVAGE Baptiste
THAZAR Benjamin

Enseignants:
GOUÉRÉ Jean-Baptiste
HUMBERT Emmanuel

15 mai 2020

Table des matières

1 Introduction

Le processus de Bienaymé-Galton-Watson représente une évolution discrète d'une variable aléatoire permettant de décrire des dynamiques de populations.

Les processus de branchement sont des modèles introduits pour étudier le développement d'une population, dans laquelle les individus se reproduisent indépendamment les uns des autres. Ces modèles sont particulièrement utilisés en biologie (étude de la croissance d'une colonie de bactéries...) et en physique nucléaire, mais ils trouvent leur origine dans l'étude, au 19ème siècle, des probabilités d'extinction des noms de familles illustres en Grande-Bretagne (Francis Galton et Henry Watson, 1874). Le mathématicien français Bienaymé avait déjà étudié un modèle similaire en 1845, il faudrait alors donner à ce modèle le nom de processus Bienaymé-Galton-Watson, mais cette appellation est rarement utilisée. Historiquement, la première question sur ce modèle est la suivante : La probabilité de survie est-elle nulle ?
La réponse dépend de la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire décrivant le nombre de descendant pour un individu.

C'est un processus stochastique que l'on peut appliquer à d'autres caractères de dynamique des populations. Donc son utilisation peut toujours être d'actualité. En effet, nous illustrerons nos propos en appliquant ce processus à la propagation d'un virus dans une population. Nous prendrons comme exemple l'évolution de la pandémie de Covid-19, apparue le 17 novembre 2019 dans la ville de Wuhan, en Chine centrale, qui s'est ensuite propagée dans le monde entier. La propagation de ce virus est souvent ramenée à un indicateur, le taux de reproduction effectif R_t. Il mesure le nombre de personnes moyen qu'un individu infecté à l'instant t contamine d'autres individus, étant donné le contexte de l'instant t.

Nous allons tout d'abord voir la forme de ce processus, ensuite nous traduirons le problème en langage mathématique. Puis nous étudierons la fonction génératrice de la variable aléatoire suivant une loi μ ainsi que quelques propriétés. Ce qui nous amènera au théorème final, nous verrons que pour enrayer l'épidémie, il est nécessaire de ramener ce taux R_t à 1 voir en-dessous. En effet, si $R_t \leq 1$ alors le virus est contenu mais si $R_t > 1$ alors sa propagation est exponentielle. Nous finirons par exposer des modélisations sur Python en lien avec ce processus.

2 Modélisation mathématique

2.1 Modélisation mathématique

Soit X une variable aléatoire suivant la loi μ admettant un moment d'ordre 1 et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$\mathbb{P}(X = k) = p_k \text{ et } m = E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k < \infty$$

Soit $(X_i^j)_{i,j\in\mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de même loi que X et enfin soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$Z_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n = \sum_{i=1}^{\infty} X_i^n \mathbb{1}_{i\leq Z_n}$$

X_i^n est le nombre de personnes que l'individu i de la n-ième génération contamine.
Z_n symbolise le nombre de personnes contaminées au temps $t = n$. De plus, $\mathbb{1}_{i\leq Z_n}$ est une fonction mesurable donc Z_{n+1} est une somme de produits de fonctions mesurables positives et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une famille de variables aléatoires.
Le but est d'étudier (Z_n) et d'essayer de calculer la probabilité qu'un jour, l'épidémie cesse, c'est à dire $\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} : Z_n = 0)$. En particulier, on étudie la propagation du virus avec comme point de départ un seul individu, appelé patient zéro. C'est pour cette raison que l'on initialise (Z_n) à $Z_0 = 1$.
Par la suite, c'est la convexité de la fonction génératrice de X qui nous permettra d'établir des résultats sur la probabilité d'extinction recherchée et d'aboutir au théorème final.

Le nombre de personnes contaminées par un individu i de la n^{eme} génération ne dépend pas du nombre d'individus contaminés de la n^{eme} génération, il est donc clair que les variables Z_n et X_i^n sont **indépendantes** pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2 Notations

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\pi_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ et $\pi_\infty = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}^* : Z_n = 0)$ la probabilité d'extinction.
Il est clair que $Z_n = 0 \Rightarrow Z_{n+1} = 0$, donc la suite d'évènements $\{Z_n = 0\}$ est croissante et $\pi_\infty = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n\to\infty} \pi_n$.

Si $p_0 = 0$, alors $Z_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $\pi_\infty = 0$.
Exemple : si chaque individu transmet le virus à au moins une personne alors l'épidémie ne sera jamais contenue.

Si $p_0 = 1$, alors $Z_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $\pi_\infty = 1$.
Exemple : si chaque individu portant le virus est isolé alors l'épidémie cessera inévitablement.

On considérera donc par la suite que $p_0 \in]0, 1[$.

3 Fonction génératrice de X

Proposition 1. *:*
Soit $G : s \in [0;1] \longmapsto \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ *la fonction génératrice de* X*. Alors :*

1. *G est bien définie et de classe C^1 sur $[0;1]$.*
2. (a) *G est strictement croissante sur $]0;1[$.*
   (b) *G est convexe sur $]0;1[$.*
   (c) *G est strictement convexe sur $]0;1[\Leftrightarrow p_0 + p_1 < 1$.*

Preuve.
Pour tout $s \in [0;1]$, on a : $G(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.
Donc $G(s)$ est une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ et G est de classe C^∞ sur $[0;1[$.

1. Intéressons nous à la régularité de la série sur $[0,1]$:
   On a vu que G était bien définie sur $[0;1]$. Qu'en est-il de G' ?
   La série de fonctions $\sum_{k=0}^{\infty} kp_k s^{k-1}$ converge normalement (car X admet un moment d'ordre 1) donc uniformément sur $[0;1]$.
   Par conséquent, d'après le théorème de dérivation des séries, G est bien définie et est C^1 sur $[0,1]$.
2. Par le théorème de dérivation terme à terme d'une série entière, on a :
$$\forall s \in [0,1[, G'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k s^{k-1} \text{ et } G''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2}$$
   . Comme $p_0 < 1$ alors $\exists k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_{k_0} > 0$ car $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$
   (a) $\forall s \in]0,1[$, $G'(s) \geq k_0 p_{k_0} s^{k_0-1}$ donc G est strictement croissante sur $]0,1[$.
   (b) $\forall s \in]0,1[$, $G''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2} \geq 0$ et G est convexe sur $]0,1[$.
   (c) Si $p_0 + p_1 = 1$, alors G est affine et donc G ne peut pas être strictement convexe.
   Si $p_0 + p_1 < 1$, alors on peut choisir $k_0 \geq 2$ tel que $p_{k_0} > 0$ et donc :
   $\forall s \in]0,1[$, $G''(s) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k s^{k-2} \geq k_0(k_0-1)p_{k_0} s^{k_0-2} > 0$ et donc G est strictement convexe.

Remarque :
On a m $= \mathbb{E}(X) = G'(1)$, en effet : $G'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k 1^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \mathbb{E}(X) = m$

4 Fonction génératrice de Z_n, relation de récurrence

Proposition 2. *:*
Soit $G_n : s \longmapsto \mathbb{E}(s^{Z_n}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)s^k$ *la série génératrice de* Z_n.
De même que pour G, G_n *est bien définie sur* $[0,1]$ *et* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = \underbrace{G \circ G \circ ... \circ G}_{nfois} = G^n$ *sur* $[0,1]$.

Preuve.
On a $G_{n+1}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_{n+1} = k)s^k$. On procède par récurrence.

Initialisation : n=1, $G_1(s) = \mathbb{E}\left(s^{Z_1}\right) = \mathbb{E}\left(s^{X_1^0}\right) = G(s)$

Hérédité : On suppose que la propriété est vrai pour un certain $n \geq 1$ i.e.,
$G_n = \underbrace{G \circ G \circ ... \circ G}_{nfois} = G^n$.
Montrons que la propriété est vrai au rang $n+1$, c'est à dire $G_{n+1} = G^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(s) &= \mathbb{E}\left(s^{Z_{n+1}}\right) = \mathbb{E}\left(s^{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{Z_n} s^{X_i^n}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{k} s^{X_i^n} \mathbb{1}_{Z_n=k}\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{k} s^{X_i^n} \mathbb{1}_{Z_n=k}\right) \text{ par Fubini-Tonelli, car les termes sont positifs} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{Z_n=k}\right) \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{k} s^{X_i^n}\right) \text{ par le lemme des coalitions}^{(1)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{Z_n=k}\right) \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}\left(s^{X_i^n}\right) \text{ car les } X_i^n \text{sont indépendantes} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)\mathbb{E}\left(s^X\right)^k \text{ car les } X_i^n \text{sont de même loi que X} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) G(s)^k \\
&= G_n(G(s)) \\
&= G^n(G(s)) \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&= G^{n+1}(s)
\end{aligned}$$

Conclusion :
D'après le raisonnement par récurrence, tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = G \circ G \circ ... \circ G = G^n$ sur $[0,1]$.

5 Étude de la probabilité d'extinction

Proposition 3. *:*
La probabilité d'extinction π_∞ est le plus petit point fixe de G sur $[0,1]$.

Preuve.
D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in [0,1], G_{n+1}(s) = G(G_n(s))$.
En particulier $G_{n+1}(0) = G(G_n(0)) = G(\pi_n)$ car $G_n(0) = \mathbb{P}(Z_n = 0) = \pi_n$.
Et $G_{n+1}(0) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) = \pi_{n+1}$.
Donc $\pi_{n+1} = G(\pi_n)$.
Comme G est continue sur $[0,1]$, alors on peut passer à la limite et ainsi $G(\pi_\infty) = \pi_\infty$.
Donc π_∞ est un point fixe de G sur $[0,1]$. Il reste à montrer que c'est le plus petit.

Soit u un point fixe de G sur $[0,1]$. Montrons alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \pi_n \leq u$ par récurrence.
• Si $n = 1, \pi_1 = G(\pi_0) = G(\mathbb{P}(Z_0 = 0)) = G(0) \leq G(u)$ car G croissante et $u \geq 0$.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\pi_n \leq u$.
Alors $G(\pi_n) \leq G(u)$ car G croissante.
Et ainsi $\pi_{n+1} \leq u$.
Ce qui achève donc la récurrence.

Par passage à la limite, on obtient donc que $\pi_\infty \leq u$ et donc π_∞ est le plus petit point fixe de G sur $[0,1]$.

Remarque : Le point s = 1 est un point fixe, en effet $G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k 1^k = 1$.

Théorème 1. *:*
• *Si $m \leq 1$, alors $\pi_\infty = 1$ (il y aura extinction presque sûrement).*
• *Si $m > 1$, alors π_∞ est l'unique point fixe de G dans $]0,1[$ (La probabilité d'extinction est le seul point fixe de G dans $]0,1[$).*

Preuve.
On va distinguer deux cas :

1. Si $p_0 + p_1 = 1$, alors $G(s) = p_0 + sp_1$ avec $p_0 > 0$ donc G est une fonction affine telle que $G \neq I_d$. Donc $G(s) = s \Leftrightarrow p_0 + sp_1 = s \Leftrightarrow s = 1$.
Donc si $p_0 + p_1 = 1$, alors $m = \mathbb{E}[X] = p_1 < 1$ et $\pi_\infty = 1$.

2. Si $p_0 + p_1 \neq 1$, alors G est strictement convexe sur $]0,1[$, donc $x \longmapsto G(x) - x$ l'est aussi car leurs dérivées secondes sont les mêmes.
On a $G'(0) = p_1$ et $G'(1) = m$, on distingue les cas $m > 1$ et $m \leq 1$ dans les deux tableaux de variations suivants :

(a) Si $m > 1$, on a $p_1 - 1 < 0$ et $m - 1 > 0$.
Aussi $G - Id$ est strictement convexe sur $]0;1[$ donc $(G - Id)'$ est strictement croissante donc elle s'annule en un point $\alpha \in]0,1[$.
La fonction $G - Id$ est alors décroissante sur $[0,\alpha]$ puis croissante sur $[\alpha, 1]$.
Comme $G(0) - 0 = p_0 > 0$ et $G(1) - 1 = 0$, il existe un point dans l'intervalle $]0,\alpha]$ où $G - Id$ s'annule. Or π_α est le plus petit point fixe sur $[0;1]$.
On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	π_∞	α		1
$G'(x) - 1$	$p_1 - 1$	$-$	0	$+$	$m - 1$
$G(x) - x$	p_0 $\searrow$	0 $\searrow$		$\nearrow$	0

π_∞ est donc l'unique point fixe de G sur $]0;1[$.
En effet, par l'absurde, soit u_1 et u_2 tels que $u_1 < u_2$ deux autres points fixes de G (différents de 1).
Posons $f : x \longmapsto G(x) - x$ alors $f(u_1) = f(u_2) = f(1) = 0$. Donc (Rolle) $\exists c_1 \in]u_1, u_2[$, $c_2 \in]u_2, 1[$, tels que $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. Donc (Rolle) $\exists c_3 \in]c_1, c_2[$ tel que $f''(c_3) = 0$ (donc $c_3 < 1$. Donc $G''(c_3) = 0$. Absurde car G strictement convexe.

(b) Si $m \leq 1$, on a $p_1 - 1 < 0$ et $m - 1 < 0$ donc :

x	0		1
$G'(x) - 1$	$p_1 - 1$	$-$	$m - 1$
$G(x) - x$	p_0	$\searrow$	0

Et ainsi $\pi_\infty = 1$.

On donne pour finir une idée de l'évolution de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.e., de l'évolution de l'épidémie.

Proposition 4. *:*
$\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.

Preuve.
On va raisonner par récurrence.

Initialisation : $Z_0 = 1$ donc $\mathbb{E}(Z_0) = 1 = m^0$

Hérédité : Pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons que $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.
On prouve par une récurrence *rapide*$^{(2)}$ que $\forall n \in \mathbb{N}$ la fonction G_{n+1} est dérivable sur l'intervalle $[0;1]$, et on a :

$$\forall s \in [0,1], G'_{n+1}(s) = G'(s)(G'_n \circ G(s))$$

Donc en 1 :

$$G'_{n+1} = \mathbb{E}(X)(G'_n(G(1)) = mG'_n(1) = m^{n+1}.$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$.

Il est donc clair que si :
- $m < 1$ alors $lim_{n \longrightarrow +\infty}(\mathbb{E}(Z_n)) = 0$ i.e., l'épidémie tendra à disparaître.
- $m > 1$ alors $lim_{n \rightarrow +\infty}(\mathbb{E}(Z_n)) = +\infty$ i.e., l'épidémie se propagera à une vitesse exponentielle.

6 Notes

(1)
Nous allons **tenter** de montrer que $\mathbb{1}_{Z_n=k}$ et $\prod_{i=1}^{k} s^{X_i^n}$ sont indépendantes grâce au lemme des coalitions dans le but d'obtenir un produit d'espérances.

Les variables aléatoires X est Z_n sont indépendantes. En effet, soit $n \in \mathbb{N}^*$; Z_n ne dépend que de Z_{n-1} et de la famille $(X_i^{n-1})_{i \in \mathbb{N}}$.
Ainsi, par une récurrence immédiate, il vient : Z_n ne dépend que de la famille $(X_i^n)_{i \leq 0, j < n}$.
Par indépendance des variables X_i^n, on obtient que $\forall i \in \mathbb{N}$, Z_n et X_i^n sont indépendantes.

Soit $(X_1^n, ..., X_k^n, Z_n)$ une famille de $k+1$ variables aléatoires mutuellement indépendantes où $Z_n = \phi((X_i^j)_{0 \leq i,j < n-1})$.
Soit les fonctions $f : \mathbb{R}^k \longmapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ telles que

$$f(X_1^n, ..., X_k^n) = \prod_{i=1}^{k} s^{X_i^n} \text{ et } g(Z_n) = \mathbb{1}_{Z_n=k}$$

D'après le théorème des coalitions généralisé à une infinité de variables, on obtient $f(X_1^n, ..., X_k^n)$ et $g(Z_n)$ indépendantes.

(2)
Initialisation : G est de classe C^1 sur $[0;1]$.
Hérédité : Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé G_n soit dérivable sur $[0;1]$. On a :

$$\forall s \in [0;1], G'_{n+1}(s) = (G_n(G(s)))' \underset{HR}{=} G'(s)(G'_n \circ G)(s)$$

Donc G_{n+1} est bien dérivable $\forall s \in [0;1]$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, G_n$ est dérivable sur $[0;1]$.

7 Conclusion

Le processus de Galton-Watson est d'abord une illustration supplémentaire de l'utilisation des mathématiques au service de la société.

Nous avons décider d'utiliser un exemple concret tout au long du projet pour faire à notre tour le lien entre mathématiques et vie courante. Ainsi en supposant que le virus suivait une certaine loi, nous avons simulé la transmission du COVID-19 d'un malade aux autres. On peut alors estimer à quelle vitesse l'épidémie pourrait se propager ou s'éteindre. Et avec le 2.2 nous avons également montré qu'idéalement, si le monde entier était confiné pour une durée suffisamment longue alors viendrait un jour ou le nombre de contaminés serait égal à zéro (guérison ou décès) et donc le nombre de contaminés au jour j+1 serait aussi de zéro et ainsi de suite : le virus serait alors éteint (ce fut le cas pour la variole par exemple qui a finie par être considérée comme éradiqué de la planète).

De notre côté, le projet nous a permis d'étudier méthodologiquement une preuve, de fournir un travail d'investigation lorsque certaines parties de la démonstration n'étaient pas claires. Mais cela nous a également permis de revoir certaines définitions ou propriétés, de s'assurer que nous avions bien tous compris et s'entraider lorsque ce n'était pas le cas sur certains points afin de s'assurer d'une compréhension complète.
Ainsi, le modèle de Galton-Watson, nous a permis de plus nous familiariser avec la démarche mathématique qu'il représente bien, avec définition, proposition et conclusion.

8 Bibliographie

Source 1 :
http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~lgay/Agregation/Processus%20de%20Galton%20Watson.pdf

Source 2 :
https://agreg-maths.fr/uploads/versions/1651/Processur%20de%20Galton-Watson.pdf

Source 3 :
http://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/fabrice.grela/dev/galton%20watson.pdf

Annexe

May 4, 2020

Ce notebook propose quelques simulations et programmes illustrant le processus de Galton-Watson. La variable aléatoire X représentant le nombre de déscendant par un individu et suit une loi Poisson de paramètre λ. Pour coller à l'exemple utilisé dans le rapport, on pourra imaginer que l'on parle de population de virus au sein d'un pays.

```
In [6]: import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
        import numpy.random as npr
        from math import *
        %matplotlib inline
```

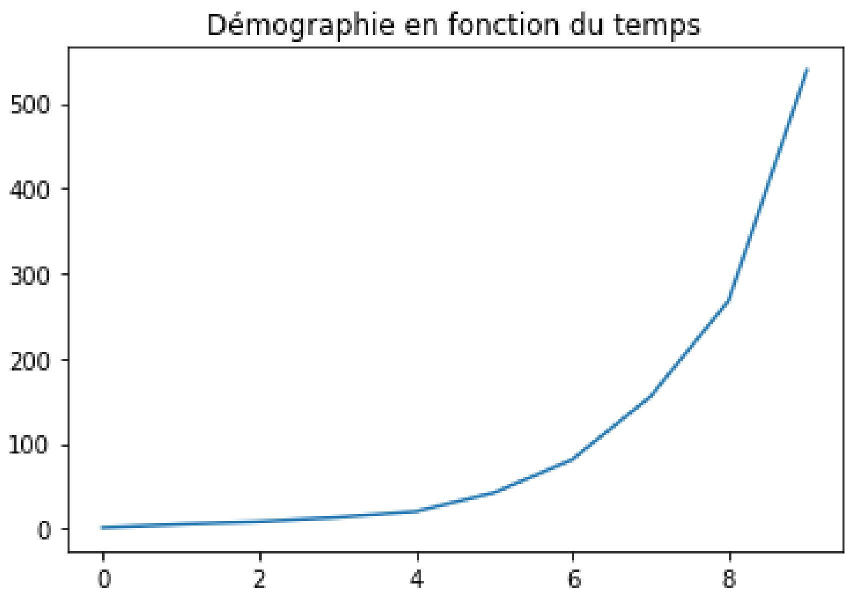
1 Evolution d'une population

Dans cette partie nous allons simplement voir l'évolution d'une population en fonction du paramètre λ.

```
In [7]: def evo(λ, n, m):
            """Prend en entrée le paramètre λ de la loi de Poisson, n le nombre
            de générations à simuler et m le nombre de population à simuler.
            Retourne un booléen égal à True si il y a extinction du virus, i un
            entier (nombre de générations simulées) et un entier contenant la
            démographie de la population à la fin de la simulation."""

            demographie = [1]
            i = 0
            extinction = False

            while demographie[-1] != 0 and demographie[-1] < m and i < n:
                #on considère que Pext=0 quand la population

                zn = 0
                #population à la génération n.

                for j in range(demographie[-1]):
                    zn += npr.poisson(λ)
                demographie.append(zn)
                i += 1
```

```
    if demographie[-1] == 0: extinction = True

    return extinction, i, demographie
```

In [11]:
```
extinction, generation , demographie = evo(2,100,500)

x = [i for i in np.arange(0,generation+1,1)]
y = demographie

plt.plot(demographie)
plt.title("Démographie en fonction du temps");
```



2 Statistiques sur plusieurs populations

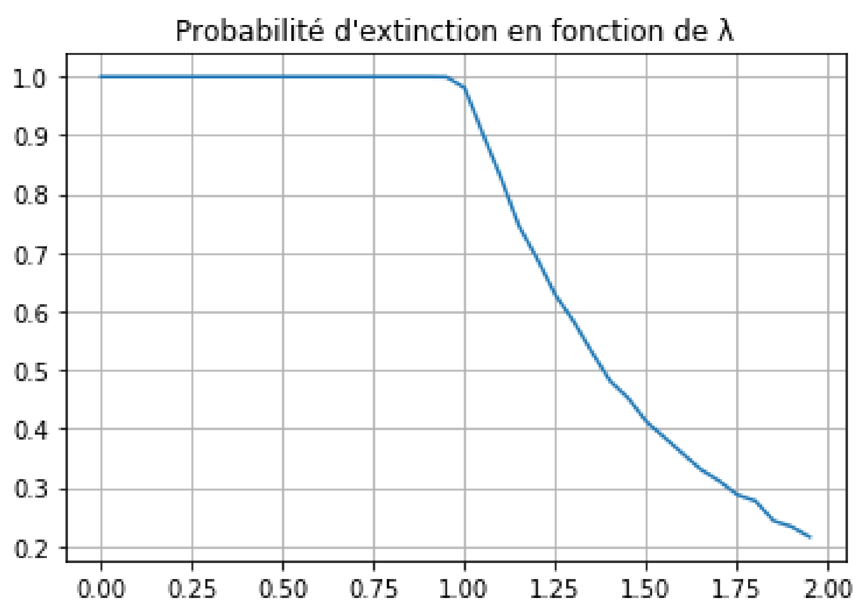
Quelle est la probabilité qu'il y est extinction d'une population en fonction du parmètre λ?

```
In [12]: def Pext_moyenne(λ, n, m, nb_pop):
             """Calcule ici la proportion moyenne des populations éteintes.
             On prend en entrée λ le paramètre de la loi Poisson, n le
             nombre de générations à simuler pour une population, m le
             nombre à partir duquel on considère qu'il n'y aura pas
             extinction et nb_pop le nombre de population à simuler.
             On retourne une variable de type float."""

             pop_eteinte = 0

             for i in range(nb_pop):
                 temp = evo(λ,n,m)[0]
                 if temp:
                     pop_eteinte += 1
             return pop_eteinte / nb_pop
```

```
In [13]: Pext_moyenne(1,500,5000,5000)
```

```
Out[13]: 0.995
```

```
In [14]: x = [i for i in np.arange(0,2,0.05)]
         y = [Pext_moyenne(i,100,500,10000) for i in x]
         plt.plot(x,y)
         plt.grid()
         plt.title("Probabilité d'extinction en fonction de λ");
```



Pour une éxécution plus rapide et un résultat plus proche de la théorie il vaut mieux augmenter le nombre de populations testées que le pas des λ.

3 Extinction de masse

Quelle est la plus grosse démographie atteinte par une population s'étant éteinte?

```
In [15]: def ext_max(λ, n, m, nb_pop):
             """Fonction calculant le nombre maximum d'individus atteint
             par une population éteinte."""
             maximum = -1
             for i in range(nb_pop):

                 max_temp = -1 # JBG : inutile
                 extinction, generation, demographie = evo(λ, n, m)

                 if extinction:
                     max_temp = max(demographie)
                     if max_temp > maximum:
                         maximum = max_temp
             return maximum
```

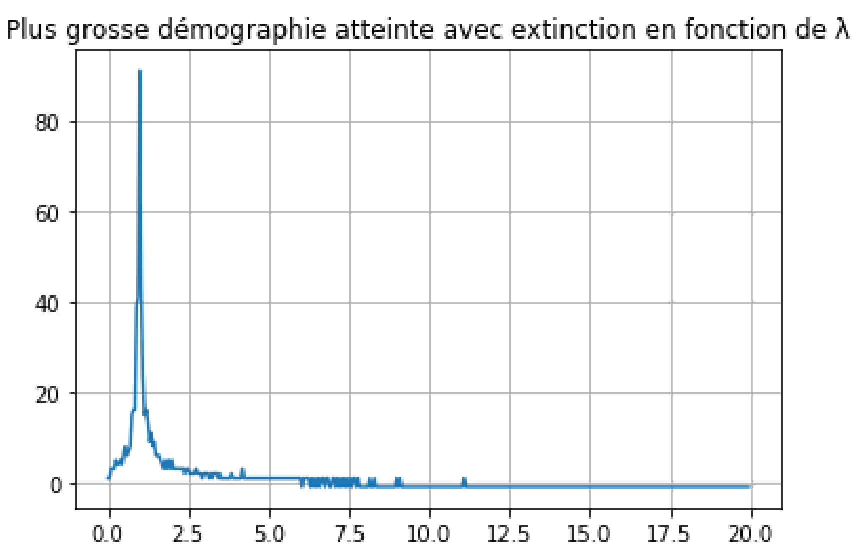
```
In [16]: ext_max(1.1,100,1000,100)
```

```
Out[16]: 17
```

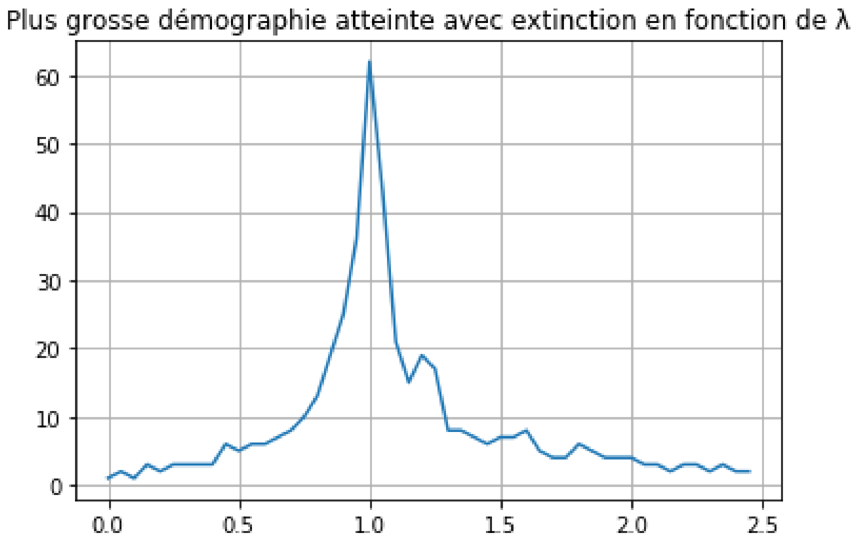
Quelle est la plus grosse démographie atteinte par une population s'étant éteinte en fonction de λ?

```
In [17]: def demographie_λ(n, m, nb_pop, intervalle):
             x = [i for i in np.arange(0,intervalle,0.05)]
             y = [ext_max(i,n,m,nb_pop) for i in x]
             plt.plot(x,y)
             plt.grid()
```

```
In [18]: demographie_λ(150, 500, 1000, 20)
         plt.title("Plus grosse démographie atteinte avec extinction
                 en fonction de λ");
```



```
In [19]: demographie_λ(150, 500, 1000, 2.5)
         plt.title("Plus grosse démographie atteinte avec extinction en fonction de λ");
```



C'est aux alentours de 1 qu'il y a les plus grosses populations subissant une extinction.

Lorsque la valeur de λ est strictement inférieur à 1 les populations n'atteingnent pas un grand nombre d'habitants car elle s'éteingnent relativement vite. Cependant les faibles valeurs à droite du pic s'expliquent par le fait qu'un λ strictement supérieur à 1, et à plus forte raison grand, conduit à une plus faible probabilité d'extinction.

Grâce à cette observation nous avons des informations pour choisir m. En effet, plus λ est proche de 1 plus on doit choisir un m grand et on plus λ est loin de 1 plus on peut se permettre de choisir un m petit.

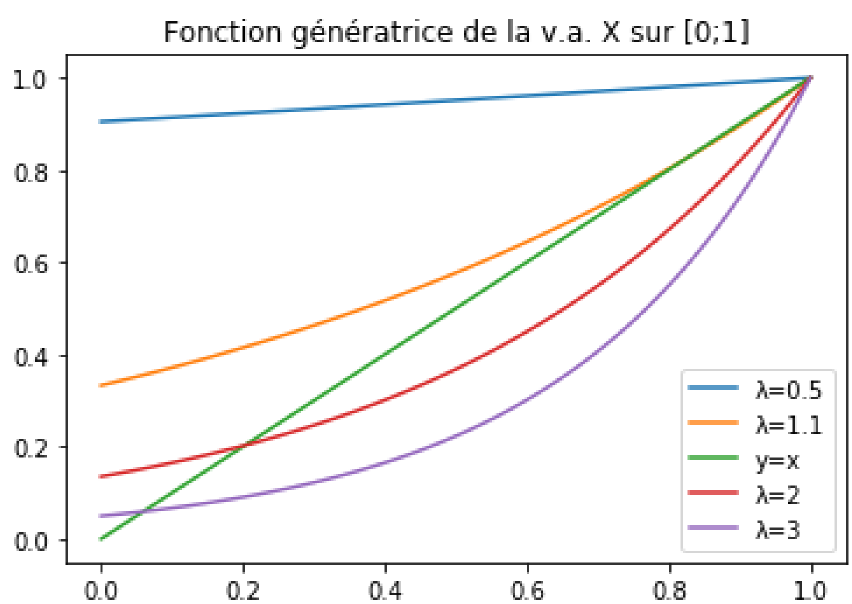
4 Application des résultats de l'étude théorique

Dans cette dernière partie, nous allons mettre en évidence les trois cas du théorème puis nous utiliserons la fonction génératrice pour obtenir la probabilité d'extinction en fonction du paramètre λ avec deux méthodes. Finalement nous comparons la courbe obtenue en simulant la variable X avec la courbe obtenue grace à la fonction génératrice.

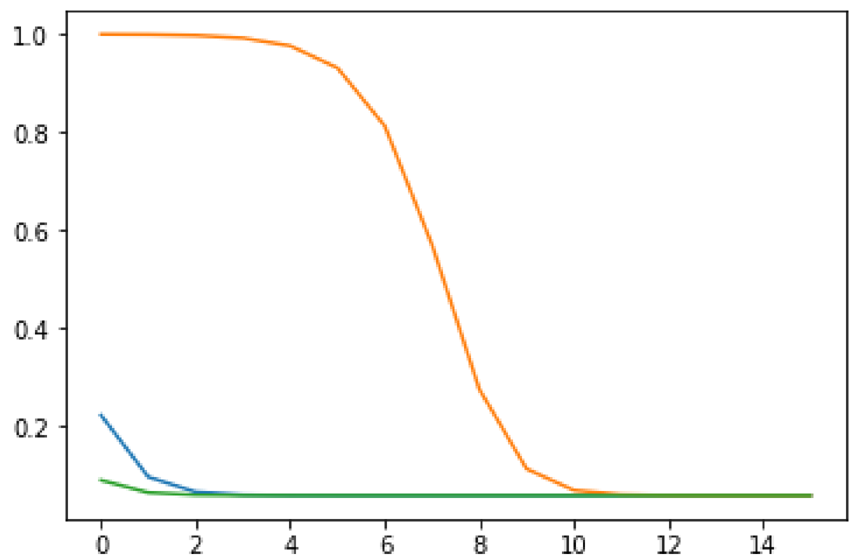
4.1 Cas sous-critique, cas critique, cas sur-critique

```
In [20]: def G0(s, λ):
             """Prend en entrée un réel s compris entre 0 et 1 ainsi qu'un
             lambda strictement positif, paramètre de la loi Poisson.
             Il sort la valeur pour s de la fonction génératrice de la
             variable aléatoire X suivant un loi poisson de paramètre λ."""

             return exp(-λ)*exp(λ*s)
```

```
In [21]: x = [i for i in np.arange(0, 1.01, 0.01)]
         y = [G0(i, 0.1) for i in x]
         plt.plot(x, y, label="λ=0.5")
         y = [G0(i, 1.1) for i in x]
         plt.plot(x, y, label="λ=1.1")
         plt.plot(x, x, label="y=x")
         y = [G0(i, 2) for i in x]
         plt.plot(x, y, label="λ=2")
         y = [G0(i, 3) for i in x]
         plt.plot(x, y, label="λ=3")
         plt.legend()
         plt.title("Fonction génératrice de la v.a. X sur [0;1]");
```



```
In [22]: def vitesse_cv(s,λ):
             """Prend un s entre 0 et 1, un paramètre λ et un entier n.
             Renvoie la vitesse de convergence de la suite définie par
             récurrence avec x0=s et xn+1=G(xn)"""

             xs = [s]

             for i in range(15):
                 xs.append(G0(xs[i],λ))

             valeurs_simples = xs
             x = x = [i for i in np.arange(0, 16, 1)]
             y = [G0(i, λ) for i in xs]
             plt.plot(x,y)

         vitesse_cv(0.5,3)
         vitesse_cv(0.9999,3)
         vitesse_cv(0.2,3)
```



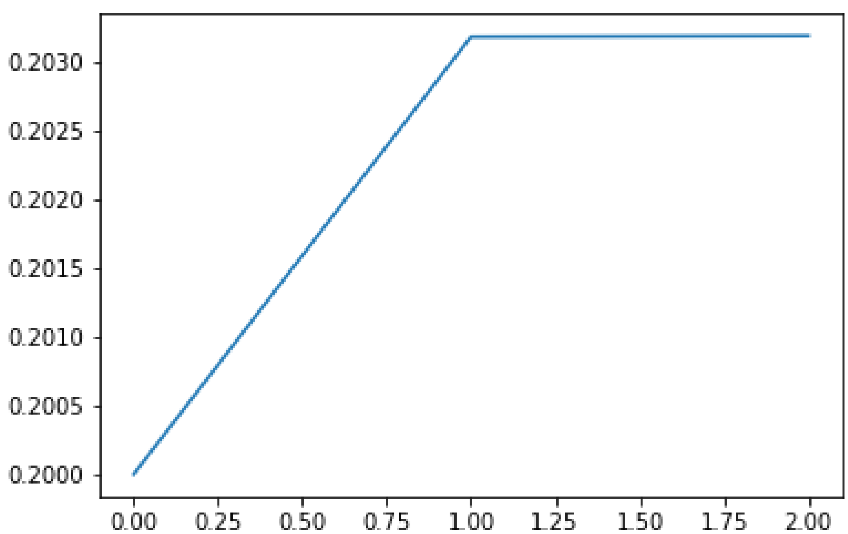
4.2 Probabilité d'extinction : méthode de Newton

```
In [23]: def G(s,λ):
                 """Prend en entrée un réel s compris entre 0 et 1 ainsi
                 qu'un lambda strictement positif, paramètre de la loi Poisson.
                 Il sort la valeur pour s de la fonction génératrice de la
                 variable aléatoire X suivant un loi poisson de paramètre λ."""

                 return exp(-λ) * exp(λ*s) - s
```

Dans un premier temps nous allons utiliser la méthode de newton pour trouver le point fixe correspondant à la probabilité d'extinction.

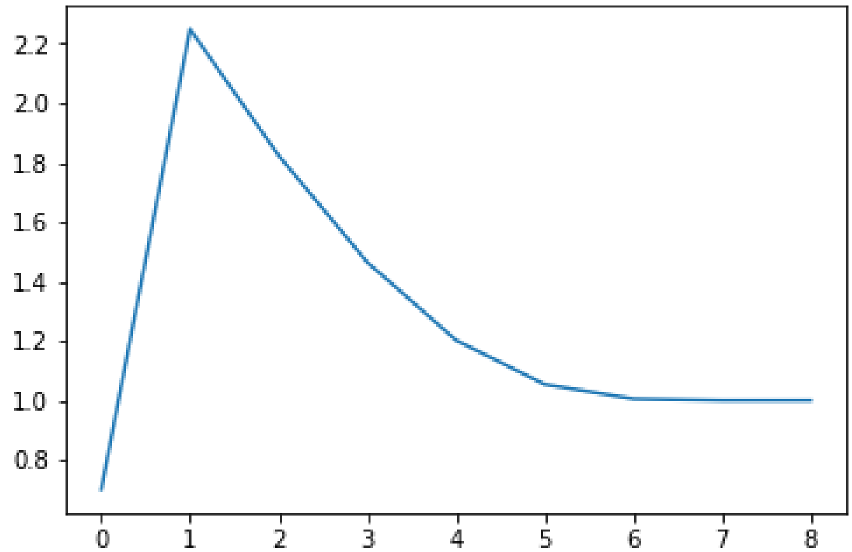
```
In [24]: def Pext_newton(λ, x0, e):
             """Soit G la fonction génératrice d'une variable aléatoire
             suivant une loi Poisson de paramètre λ.
             Ceci est une fonction déterminant la probabilité d'extinction
             d'une population (point fixe de G sur [0;1]).
             On utilise la méthode Newton pour approcher la valeur du point fixe."""

             def dg(x):
                 return (G(x+0.00001, λ)-G(x-0.00001,λ)) / 0.00002

             def h(x):
                 return x - G(x,λ)/dg(x)

             l = [x0]
             L = [x0]

             while L[-1] > e:
                 l.append(h(l[-1]))
                 L.append(abs(l[-2]-l[-1]))

             return l
```

```
In [25]: l=Pext_newton(2, 0.2, 0.0001)
         plt.plot(l);
```



Le point positif de cette méthode est qu'elle converge vite, on s'approche du point fixe plus vite qu'avec la méthode de dichotomie. Cependant, il est nécéssaire d'avoir une idée de la probabilité d'extinction pour pouvoir saisir un x0 pas trop loin du point fixe. Sinon on obtient un résultat faux comme le montre le graphique suivant.

```
In [26]: l = Pext_newton(2, 0.7, 0.0001)
         plt.plot(l);
```



4.3 Probabilité d'extinction : méthode de Dichotomie

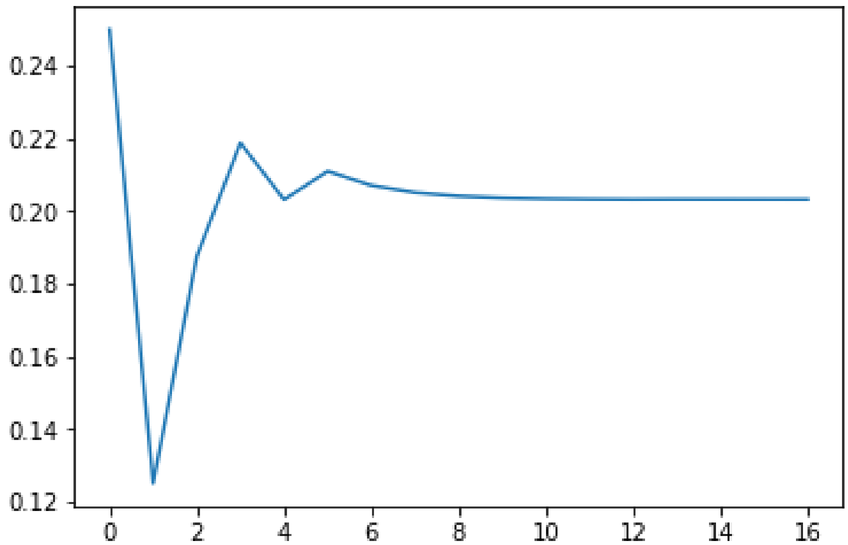
```
In [27]: def Pext_dicho(λ,e):
             """Soit G la fonction génératrice d'une variable aléatoire
             suivant une loi Poisson de paramètre l.
             Ceci est une fonction déterminant la probabilité d'extinction
             d'une population (point fixe de G sur [0;1]).On utilise la méthode
             de dichotomie pour approcher la valeur du point fixe."""

             a = 0
             b = 1
             D = []

             while b-a > e:
                 c = (a+b)/2
                 if G(a,λ)*G(c,λ) < 0:
                     a,b = a,c
                 else:
                     a,b = c,b
                 D.append((b+a)/2)

             return D
```

```
In [28]: print(Pext_dicho(2, 0.001)[-1])
```

```
0.20361328125
```

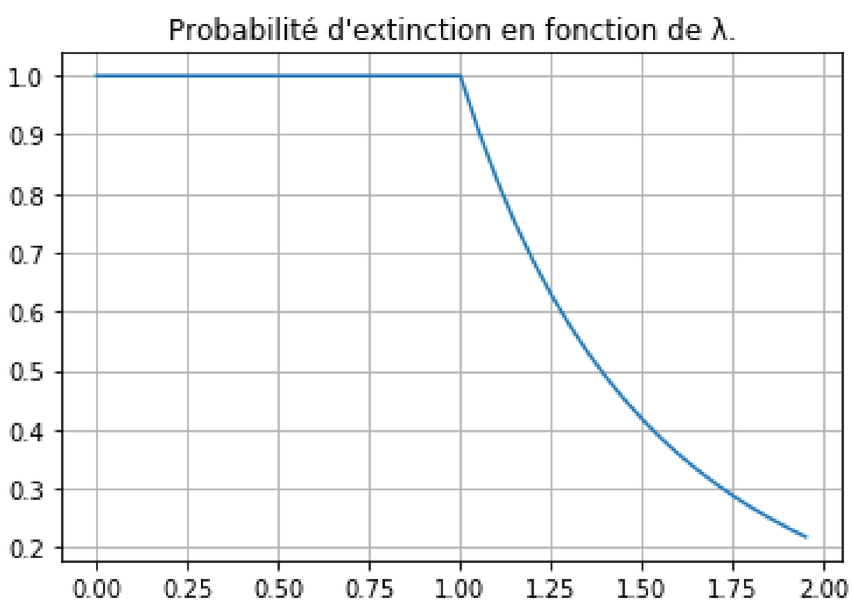
```
In [29]: y = Pext_dicho(2, 0.00001)
         plt.plot(y)
```

```
Out[29]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x1ec53036400>]
```

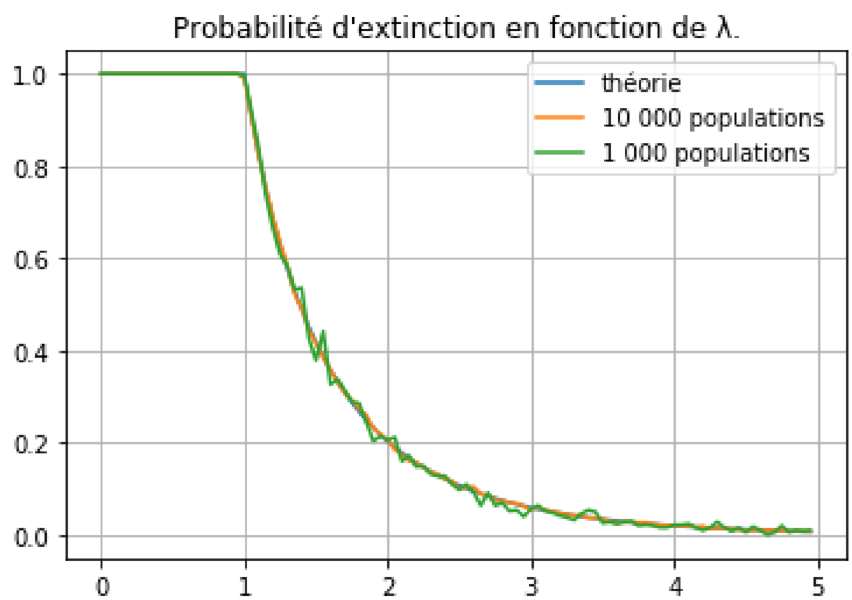


4.4 Probabilité d'extinction en fonction de λ : théorie vs simulation

```
In [30]: x = [i for i in np.arange(0,2,0.05)]
         y = [Pext_dicho(i, 0.0001)[-1] for i in x]
         plt.plot(x,y)
         plt.grid()
         plt.title("Probabilité d'extinction en fonction de λ.");
```



```
In [31]: x = [i for i in np.arange(0, 5, 0.05)]

         y = [Pext_dicho(i, 0.0001)[-1] for i in x]
         plt.plot(x,y, label="théorie")

         y = [Pext_moyenne(i, 500, 100, 10000) for i in x]
         plt.plot(x,y, label="10 000 populations")

         y = [Pext_moyenne(i, 500, 100, 500) for i in x]
         plt.plot(x,y, label="1 000 populations")

         plt.grid()
         plt.legend()
         plt.title("Probabilité d'extinction en fonction de λ.");
```



Lorsque l'échantillon de populations simulé augmente, les résultats obtenus par simulation tendent effectivement vers la théorie.