

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет Компьютерных наук

Кафедра Цифровых технологий

Перевальные оценки для интеграла Бесселя

Курсовая работа

02.03.01 Математика и компьютерные науки

Распределенные системы и искусственный интеллект

Зав. кафедрой \_\_\_\_\_ д-р физ.-мат. наук, проф. С.Д. Кургалин

Студент \_\_\_\_\_ А.А. Махно

Руководитель \_\_\_\_\_ канд. физ.-мат. наук, доц. А.В. Флегель

Воронеж 2016

# Содержание

Введение	3
1 Функции Бесселя	4
2 Описание метода перевала	6
3 Аппроксимация интеграла Бесселя	10
3.1 $\alpha < x$ . . . . .	10
3.2 $\alpha > x$ . . . . .	12
3.3 Сливающиеся точки . . . . .	14
Заключение	19

# Введение

Несмотря на быстрый рост возможностей компьютерного (численного) анализа сложных научных проблем, одним из наиболее предпочтительных способов представления результатов исследований остаются аналитические выражения или формулы, обладающие предсказательной силой. Преимущество аналитических результатов, во-первых, объясняется их, как правило, прозрачным физическим смыслом, и, во-вторых, возможностью быстрого получения результатов и их анализ при варьировании параметров задачи в широкой области значений. С точки зрения численного анализа, существует большое количество задач, решение которых даже на высокопроизводительных суперкомпьютерах или занимает неоправданно большое время, или вообще невозможно. В связи с этим остается актуальным вопрос получения корректных аналитических оценок, сложных с точки зрения численного анализа, математических конструкций. Например, интегралов от быстро осциллирующих функций. Корректность оценки должна определяться логичностью и последовательностью используемого подхода с детальным анализом его области применимости и, соответственно, характера и величины отбрасываемых в результате приближения членов. Другим не менее важным критерием может служить сравнение приближенных результатов с известным точным результатом для точно решаемых примеров или с результатами численного решения для задач, допускающих получение такого результата с контролируемой точностью.

Одним из методов аналитической оценки интегралов от быстро осциллирующих функций являются методы, основанные на идее стационарной фазы, когда основной вклад в интеграл определяется окрестностью точек максимума для фазы подынтегральной функции. Аналогичные идеи лежат в основе метода перевала с его вариациями для различных особенностей поведения подынтегральной функции. В методе перевала контур интегрирования деформируется в комплексной плоскости таким образом, чтобы он проходил через так называемые седловые точки или точки перевала.

Целью данной курсовой работы является рассмотрение возможности использования метода перевала и его вариаций для оценки точно решаемой задачи о нахождении асимптотического поведения, а также равномерного приближения для функции Бесселя первого рода. Путем численного сравнения с точным результатом будут получены границы его применимости для различных интервалов порядка  $\alpha$  и аргумента  $x$  функции Бесселя. Выбор интеграла Бесселя обусловлен тем, что он хорошо известен и может быть легко вычислен в любом математическом пакете.

В первой главе курсовой работы приводится основная информация о функциях Бесселя, включая интегральные представления. Во второй главе рассматривается основное содержание метода перевала, как расширения метода Лапла-

са на комплексную плоскость. В третьей главе приводятся результаты оценки интеграла Бесселя и сравнение с точным результатом для трех областей аргумента  $x$ : 1)  $x > \alpha$ , 2)  $x < \alpha$ , 3)  $x \approx \alpha$  (равномерное приближение), когда  $\alpha \gg 1$ . В заключение приводятся основные результаты работы.

# 1 Функции Бесселя

Функции Бесселя (или цилиндрические функции) являются решением следующего дифференциального уравнения:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0, \quad (1)$$

где  $\alpha$  - произвольное вещественное число (в общем случае комплексное), называемое порядком. Чаще всего речь идет о целых порядках.

Функции Бесселя используются при решении множества задач, где используется переход в цилиндрические и сферические координаты, например:

- электромагнитные волны в цилиндрическом волноводе,
- теплопроводность в цилиндрических объектах,
- формы колебания тонкой круглой мембраны,
- распределение интенсивности света, дифрагированного на круглом отверстии,
- скорость частиц в цилиндре, заполненном жидкостью и вращающемся вокруг своей оси,
- волновые функции в сферически симметричном потенциальном ящике.

Впервые одна из функций Бесселя  $J_0(x)$  была рассмотрена еще в 1732 году Даниилом Бернулли в работе, посвященной колебанию тяжелых цепей. Он нашел выражение функции  $J_0(x)$  в виде степенного ряда и заметил (без доказательства), что уравнение  $J_0(x) = 0$  имеет бесчисленное множество действительных корней.

Следующей работой, в которой встречаются функции Бесселя, была работа Леонарда Эйлера 1738 года, посвященная изучению колебаний круглой мембраны. В этой работе Эйлер нашел для целых  $\alpha$  выражение функции Бесселя  $J_\alpha(x)$  в виде ряда по степеням  $x$ , а в последующих работах распространил это выражение на случай произвольных значений индекса  $\alpha$ . Кроме того, Л. Эйлер доказал, что для  $\alpha$ , равного целому числу с половиной, функции  $J_\alpha(x)$  выражаются через элементарные функции. Он заметил (без доказательства), что при

действительных  $\alpha$  функции  $J_\alpha(x)$  имеют бесчисленное множество действительных нулей и дал интегральное представление для  $J_\alpha(x)$ . Некоторые исследователи считают, что основные результаты, связанные с функциями Бесселя и их приложениями в математической физике, связаны с именем Л. Эйлера. [1]

Функцию  $J_\alpha(x)$  называют *функцией Бесселя первого рода индекса  $\alpha \geq 0$  (порядка  $\alpha$ )*

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$$

Для случая, когда порядок  $\alpha$  функции Бесселя первого рода оказывается целым числом  $n \geq 0$ , то в силу равенства  $\Gamma(n + k + 1) = (n + k)!$  представление функции  $J_\alpha(x)$  принимает следующий вид:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n + k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Получили разложения в *ряд*. С точки зрения моделирования это не очень хорошо, ведь для построения хорошей модели, нужно оценивать погрешность вычислений, то есть ряд должен быть быстро сходящимся, чтобы мы использовали как можно меньше его элементов.

Также есть представление функций через интегралы (для целых  $\alpha$ ), а именно:

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha\tau - x \sin \tau) d\tau$$

Возможно и другое интегральное представление [2]

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\alpha\tau - x \sin \tau)} d\tau \quad (2)$$

С точки зрения численного интегрирования интегралов типа (2), сложность возникает для больших значений  $\alpha$  и  $x$ . Заметим, что подобные задачи приходится решать часто. Высокие “частоты”  $\alpha$  и  $x$  подынтегральной функции приводят к тому, что для суммирования интегральных сумм необходимо выбирать очень маленькие шаги интегрирования. В таком случае большая часть рабочего времени программы будет уходить на расчет этих интегральных сумм. Для аналитической оценки интеграла (2) в области больших  $\alpha$  и  $x$  будем использовать приближение, основанное на методе перевала.

## 2 Описание метода перевала

Метод перевала применяется для оценки при больших значениях параметра  $\lambda$  контурных интегралов вида

$$F(\lambda) = \int_C \phi(z) e^{\lambda f(z)} dz \quad (3)$$

где  $f(z)$  и  $\phi(z)$  функции, аналитические вдоль линии интегрирования  $C$ . Интегралами вида (3) представляются многие специальные функции, решения дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными. Эти интегралы часто встречаются при решении различных задач физики.

Рассмотрим частный случай, а именно - действительные интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_a^b \phi(t) e^{\lambda f(t)} dt \quad (4)$$

Этот случай был рассмотрен в свое время Лапласом. Идея здесь такая.

Предположим, что  $f(t)$  имеет на отрезке  $(a, b)$  один резко выраженный максимум. Чем больше значение параметра  $\lambda$ , тем резче выражается этот максимум, и поэтому ясно, что при больших  $\lambda$  основной вклад в значение интеграла дает окрестность точки максимума.

В основе этого метода лежит лемма:

*Лемма* : Пусть дан интеграл

$$F(\lambda) = \int_0^a \phi(t) e^{-\lambda t^\alpha} dt \quad (0 < a \leq \infty, \alpha > 0)$$

где  $\phi(t)$  при  $|t| < 2h$  представляется сходящимся рядом

$$\phi(t) = t^\beta (c_0 + c_1 t + \dots + c_n t^n + \dots), \quad \beta > -1$$

причем  $\int_0^a |\phi(t)| e^{-\lambda_0 t^\alpha} dt \leq M$  для некоторого  $\lambda_0$ . Тогда имеет место асимптотическое разложение

$$F(\lambda) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\alpha} \Gamma\left(\frac{\beta + n + 1}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{\beta+n+1}{\alpha}} \quad (5)$$

где  $\Gamma$  - гамма-функция Эйлера.

К доказанной лемме сводится оценка интеграла (4)

*Теорема 1.* Пусть интеграл (4) абсолютно сходится для некоторого  $\lambda = \lambda_0$ , т. е.

$$\int_a^b |\phi(t)| e^{\lambda_0 f(t)} dt \leq M,$$

и  $f(t)$  достигает своего наибольшего значения во внутренней точке  $t_0$  отрезка  $(a, b)$ , в окрестности  $|t - t_0| < \delta$  которой  $f(t)$  представляется рядом

$$f(t) = f(t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \dots + a_n(t - t_0)^n + \dots \quad (a_2 < 0),$$

причем существует  $h > 0$  такое, что вне этой окрестности  $f(t_0) - f(t) > h$ . Пусть еще функция  $t = \psi(\tau)$  определяется в окрестности точки  $\tau = 0$  из уравнения  $f(t_0) - f(t) = \tau^2$ , причем в этой окрестности

$$\phi[\psi(\tau)]\psi'(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \tau^n \quad (6)$$

Тогда интеграл (4) имеет асимптотическое разложение

$$F(\lambda) = \int_a^b \phi(t) e^{\lambda f(t)} dt \sim e^{\lambda f(t_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_2 n}{\lambda^n} \frac{(2n)!}{4^n n!}.$$

Эта теорема относится к случаю, когда наибольшее значение  $f(t)$  достигается во внутренней точке отрезка  $(a, b)$ .

*Теорема 2.* Пусть интеграл (4) абсолютно сходится для некоторого  $\lambda = \lambda_0$  (см теорему 1) и  $f(t)$  достигает наибольшего значения в точке  $t = a$ , аналитична в этой точке ( $f'(a) \neq 0$ ), и существует  $h > 0$  такое, что  $f(a) - f(t) > h$  вне некоторой окрестности точки  $a$ . Пусть еще функция  $t = \psi(\tau)$  определяется в окрестности точки  $\tau = 0$  из уравнения  $f(a) - f(t) = \tau$ , причем в этой окрестности имеет место разложение (6). Тогда

$$F(\lambda) = \int_a^b \phi(t) e^{\lambda f(t)} dt \sim \frac{e^{f(a)}}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! c_n}{\lambda^n} \quad (7)$$

Суть метода перевала состоит в том, что при больших значениях параметра  $\lambda$  величина интеграла

$$F(\lambda) = \int_C \phi(z) e^{\lambda f(z)} dz$$

в основном определяется тем участком пути интегрирования  $C$ , на котором  $|e^{\lambda f(z)}| = e^{\lambda \operatorname{Re} f(z)}$ , т. е.  $\operatorname{Re} f(z)$  велика по сравнению со значениями на остальной части  $C$ . При этом интеграл оценивается тем легче, чем меньше этот участок и чем круче падает величина  $\operatorname{Re} f(z)$ . В соответствии со сказанным, при применении метода перевала стараются деформировать путь интегрирования  $C$  в наиболее удобный путь  $\tilde{C}$ , пользуясь тем, что по теореме Коши такая деформация не меняет величины интеграла. [3]

Чтобы уяснить вопрос геометрически, положим  $z = x + iy$  и представим

$$u = \operatorname{Re} f(z)$$

как поверхность  $S$  в пространстве  $(x, y, u)$ . Так как функция  $f(z)$  гармоническая, то  $S$  не может иметь точек максимума и минимума, а точки, в которых  $f'(z) = 0$ , будут для нее точками перевала (седловыми точками, рис. 1).

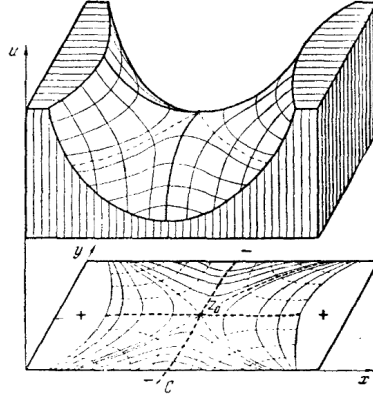


Рис. 1: Седловые точки

Наиболее удобный для оценки путь интегрирования  $\tilde{C}$ , в каждой точке должен проходить в направлении наиболее быстрого изменения  $\operatorname{Re} f(z)$ , а так как функция  $f(z)$  аналитическая, то это направление должно совпадать с линией, на которой  $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{const}$ .

Также, новый контур  $\tilde{C}$  должен содержать точку  $z_0$ , в которой  $\operatorname{Re} f(z)$  достигает наибольшего значения на  $\tilde{C}$ . Покажем для этого случая, что  $f'(z_0) = 0$ , то есть точка линии  $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{const}$ , в которой  $\operatorname{Re} f(z)$  достигает наибольшего значения, является точкой перевала.

Так и есть, ведь в точке  $z_0$ , которая является максимумом для  $\operatorname{Re} f(z)$  производная  $u = 0$  вдоль линии  $\tilde{C}$  должна быть равна 0, т. е.  $\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Re} f(z) = 0$ , а так как  $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{const}$  на  $\tilde{C}$ , то  $\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Im} f(z) \equiv 0$ , а значит и

$$f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Re} f(z) + i \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Im} f(z) = 0.$$

*Подведем итоги. Для метода перевала к интегралу (3) путь интегрирования  $C$  следует деформировать в путь  $\tilde{C}$ , проходящий через точку перевала  $z_0$  и в окрестности этой точки идущий вдоль линии наибольшего ската  $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{const}$  (рис. 1).*

Есть одно важное обстоятельство, обеспечивающее эффективность применения метода перевала: так как вдоль линии  $\tilde{C}$  имеем  $\arg e^{f(z)} = \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{const}$ , то оценка интеграла (3) сводится к оценке интеграла от действительной функции, которая может быть проведена по методу Лапласа для интеграла вида (4).



Именно это позволяет нам пользоваться полученными результатами теорем 1 и 2.

Рассмотрим случай, когда путь интегрирования  $C$  можно деформировать в путь  $\tilde{C}$ , проходящий через точку перевала  $z_0$ , где  $f'(z_0) = 0$ ,  $f''(z_0) \neq 0$ , и в окрестности  $z_0$  совпадающий с линией наибольшего ската  $\text{Im}f(z) = \text{const}$ , причем на  $\tilde{C}$  вне этой окрестности  $\text{Re}f(z) < \text{Re}f(z_0) - h$  ( $h > 0$ ). Кроме того, предположим, что интеграл (3) абсолютно сходится для достаточно больших значений  $\lambda$ . Тогда образом, оценку интеграла можно провести на основании теоремы 1. Пусть  $z = z(t)$  будет уравнение контура  $\tilde{C}$ ; Тогда,

$$F(\lambda) = \int_C \phi(z) e^{\lambda f(z)} dz = e^{\lambda i \text{Im}f[z(t)]} \int_a^b \phi[z(t)] e^{\lambda \text{Re}f[z(t)]} z' dt \quad (8)$$

и задача сводится к оценки интеграла вида 4 действительной области, разложение для которого уже было получено Лапласом, и имеет вид [3]

$$F(\lambda) = \int_a^b \phi(t) e^{\lambda f(t)} dt \sim \frac{e^{f(a)}}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! c_n}{\lambda^n}$$

Выпишем первый член этого разложения. Обозначим  $\phi[z(t)]z' = \tilde{\phi}(t)$ ,  $\text{Re}f[z(t)] = \tilde{f}(t)$  и тогда по формуле (7) получаем:

$$\int_a^b \tilde{\phi}(t) e^{\lambda \tilde{f}(t)} dt \sim e^{\lambda \tilde{f}(t_0)} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \tilde{c}_0 \quad (9)$$

где  $\tilde{c}_0$  - свободный член в разложении функции  $\tilde{\phi}[\tilde{\psi}(\tau)]\tilde{\psi}'(\tau)$ .

Имеем:  $\tilde{\phi}(t_0) = \phi(z_0)z'(t_0)$ , и исходя из того, что  $f[z(t)] = \text{Re}f[z(t)] + i\text{Im}f[z(t)] = \tilde{f}(t) + \text{const}$  вдоль  $\tilde{C}$ , то

$$\tilde{f}''(t_0) = \frac{d^2}{dt^2} f[z(t)]|_{t=t_0} = f''(z_0)z'^2(t_0).$$

Причем  $f'[z(t)]z''(t) = 0$  при  $t = t_0$ . Так как эта величина отрицательна, то представив  $z'(t_0) = ke^{i\theta}$ , можно записать ее в виде  $\tilde{f}'' = -|f''(z_0)|k^2$ . Получаем, что

$$\tilde{c}_0 = \tilde{\phi}(t_0) \sqrt{-\frac{2}{\tilde{f}''(z_0)}} = \phi(z_0) e^{i\theta} \sqrt{\frac{2}{|f''(z_0)|}}$$

подставим найденное значение в (9), а затем в (8), получаем искомую формулу

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda f(z_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(z_0)|}} \phi(z_0) e^{i\theta} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (10)$$

Как уже много раз говорилось, точка  $z_0$  - это точка, где  $\operatorname{Re} f(z)$  достигает своего максимального значения. В то же время совершенно обычная ситуация - когда на искомом контуре  $\tilde{C}$  имеется несколько точек перевала, в которых значения  $\operatorname{Re} f(z)$  находятся вблизи к наибольшему, то следует взять сумму выражений (10) по всем этим точками.

Тот случай, когда контур интегрирования заканчивается в точке перевала  $z_0$ , аналогичным образом приводится к теореме 2.

Итак, мы получили рабочую формулу, подставляя в которую составляющие наших искомых функций  $\phi(z)$  и  $f(z)$ , мы должны получать приближенные значения интеграла, когда  $\lambda \rightarrow \infty$

## 3 Аппроксимация интеграла Бесселя

### 3.1 $\alpha < x$

Попытаемся проверить полученную выше формулу. Возьмем интеграл Бесселя вида

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\alpha\tau - x \sin \tau)} d\tau \quad (11)$$

и найдем его разложение по формуле (10)

Для начала нам необходимо найти точки перевала. Отметим тот факт, что у этого интеграла нет составляющей  $\phi(t)$ , то есть она равна 1, а функция  $f(t)$  будет иметь вид

$$f(\tau) = \alpha\tau - x \sin \tau.$$

Найдем максимум этой функции  $f(\tau)$

$$f'(\tau) = \alpha - x \cos \tau = 0 \quad \rightarrow \quad \cos(\tau) = \frac{\alpha}{x} \quad (12)$$

Получаем, что  $\tau = \pm \arccos\left(\frac{\alpha}{x} + 2\pi k\right)$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Итак, получили много корней, но посмотрев на наш интервал  $(0, 2\pi)$  замечаем, что на нем  $\tau$  представлена двумя точками, но находить корни уравнения, когда они представлены в виде  $\arccos\left(\frac{\alpha}{x} + 2\pi k\right)$  неудобно. Поскольку функция четная, то мы можем перейти от решений уравнения  $\alpha - x \cos \tau = 0$  на отрезке  $(0, 2\pi)$  к решениям этого же уравнения на отрезке  $(-\pi, \pi)$

Получили две перевальные точки

$$\tau_{1,2} = \pm \arccos\left(\frac{\alpha}{x}\right)$$

Ранее было замечание о том, что если мы имеем несколько перевальных точек одного и того же уровня (находящихся достаточно близко), то для нахождения приближенного значения методом Лапласа нужно учитывать вклады всех этих точек, суммируя их.

Введем замену

$$\frac{\alpha}{x} = \vartheta$$

Найдем необходимые элементы для подстановки в формулу (10). Для точки  $\tau_1 = \arccos \vartheta$ :

$$f(\tau_1) = \alpha \arccos \vartheta - x \sin \arccos \vartheta = \alpha \arccos \vartheta - x \sqrt{1 - \vartheta^2}$$

$$\phi(z) \equiv 1$$

$$f''(\tau_1) = \sqrt{1 - \vartheta^2}$$

Аналогично находятся составляющие для точки  $\tau_2 = -\arccos \vartheta$ . Получили формулу вида

$$J_\alpha(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi x \sqrt{1 - \vartheta^2}}} \left[ e^{i(\alpha \arccos \vartheta - x \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\alpha \arccos \vartheta - x \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{\pi}{4})} \right]$$

Можем свернуть полученное выражение по формуле Эйлера:

$$J_\alpha(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x \sqrt{1 - \vartheta^2}}} \cos \left[ \alpha \arccos \vartheta - x \sqrt{1 - \vartheta^2} + \frac{\pi}{4} \right]$$

Теперь сравним полученное приближение с известной функцией Бесселя. Для этого воспользуемся программным пакетом Maple:

Зафиксируем  $\alpha = 2$  и построим графики для  $x$  на отрезке  $(0, 30)$  (рис. 2)

Ранее говорилось, что этот метод применим для случая, когда значение параметров стремится к бесконечности, поэтому можно предположить, что этот пик в районе  $x = 2$  связан с тем, что мы еще "недостаточно близки" к бесконечности. Однако, если мы зафиксируем  $\alpha$  равным 15, то построенные на интервале  $(0, 30)$  функции (рис. 3) дают нам понять, что дело не в удаленности от начала координат. Вычтем функцию Бесселя из полученного приближения, чтобы увидеть абсолютную погрешность (рис. 4).

Можно заметить, что этот скачок наблюдается в том месте, где  $\alpha \sim x$ , а также то, что значения полученного приближения для случая, когда  $\alpha > x$

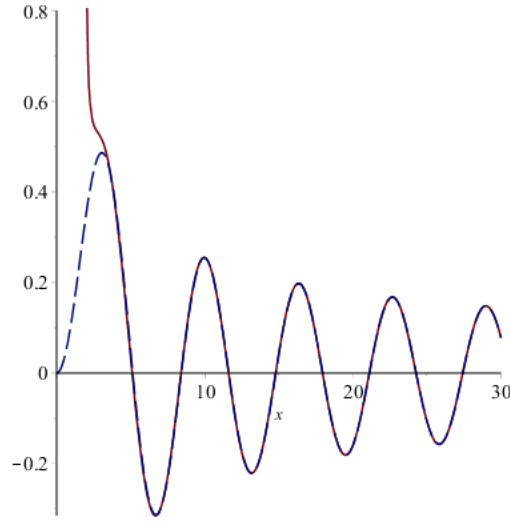


Рис. 2: Зависимость от  $x$  (при  $\alpha = 2$ ). Пунктирная линия - функция Бесселя, обычная - полученное приближение

совершенно не совпадают с искомой функцией. Но мы имеем очень хороший результат для случая  $\alpha > x$ .

Аналогичную картину дает нам построение зависимостей от  $\alpha$  при фиксированном  $x$

Это отклонение от функции связано с выбором перевальных точек. Когда мы решали уравнение (12), то получили решение в виде арккосинуса для

$$\cos(\tau) = \frac{\alpha}{x},$$

но в случае если  $\alpha > x$  мы получаем, что косинус больше единицы. Это возможно только в комплексной области, поэтому имеет смысл изменить решение этого уравнения. [4]

## 3.2 $\alpha > x$

Посмотрим еще раз на уравнение (10) Ранее было сказано, что в наше случае порядок и аргумент больше 0, а значит,

$$\cos(\tau) \in (0; +\infty)$$

Случай, когда косинус  $\in (0; 1)$  был рассмотрен ранее, теперь посмотрим на остальной участок интегрирования. Косинус больше 1 только в том случае, если он имеет мнимую часть и не имеет действительную, исходя из этого можно сделать замену

$$\tau = it;$$

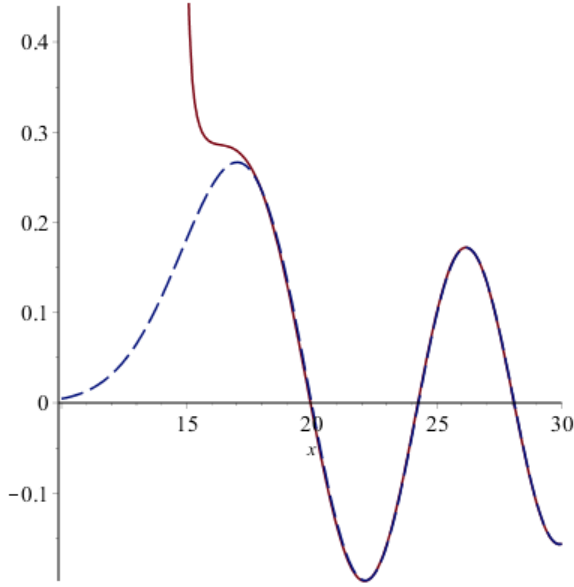


Рис. 3: Сравнение приближения (обычная линия) с функцией Бесселя (пунктирная)

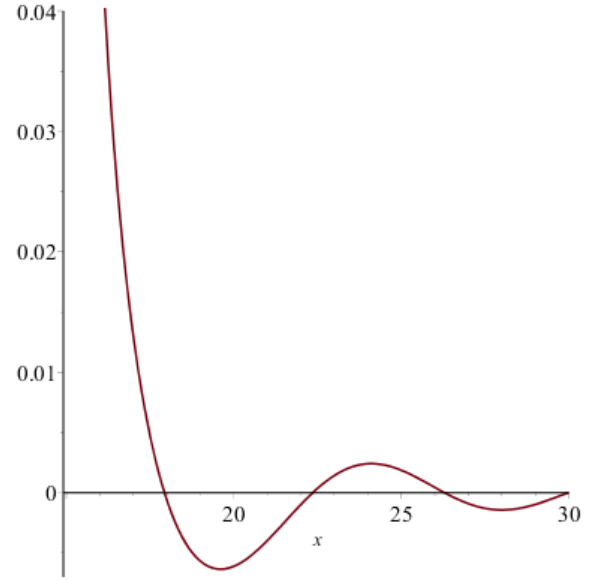


Рис. 4: Разность результатов на рисунке 3

Теперь уравнение принимает вид

$$\cosh(\tau) = \frac{\alpha}{x}$$

Выполняя обратную замену, получаем две точки

$$\tau_{\pm} = \pm it_0$$

где  $t_0 = \operatorname{arccosh}\left(\frac{\alpha}{x}\right)$

Подставим полученные данные в  $f(t)$

$$\begin{aligned} f(\pm it_0) &= i(\alpha\tau - x \sin \tau)|_{\tau=\pm it_0} = i(\alpha(\pm it_0) - x \sin(\pm it_0)) = \\ &= -(\pm \alpha t_0 \mp x \sinh(t_0)) = \mp(\alpha t_0 - x \sinh(t_0)) = \mp\alpha(t_0 - \tanh(t_0)) \end{aligned}$$

Найдем  $f''(\pm it_0)$ :

$$f''(\pm it_0) = ix \sin(\pm it_0) = \mp x \sinh(t_0) = \mp \alpha \tanh(t_0)$$

Получили 2 перевальные точки. На оси  $\tau$  функция

$$f(it_0) = \mp\alpha(t_0 - \tanh(t_0))$$

в этих точках функция достигает максимума в  $\tau_0$  и минимума в  $-\tau_0$ . Легко видеть, что максимум на этом контуре интегрирования единственный (вытекает

из рассмотрения производной). Исходя из полученных ранее замечаний следует, что основной вклад в значение функции несет перевальная точка, в которой  $\text{Ref}(t)$  максимальна, или близка к максимуму. Исходя из этих соображений, мы будем учитывать только точку  $\tau_0$ , пренебрегая вкладом  $-\tau_0$ .

Подставим полученные значения в (10).

$$J_\alpha(x) \sim \sqrt{\frac{1}{\alpha \tanh(t_0) 2\pi}} e^{-\alpha(t_0 - \tanh(t_0))}, \quad (13)$$

где  $t_0 = \text{arccosh}(\frac{\alpha}{x})$

Отобразим полученное приближение на графике (рис. 5), а также вычтем из приближения функцию Бесселя, чтобы увидеть абсолютную погрешность (рис. 6).

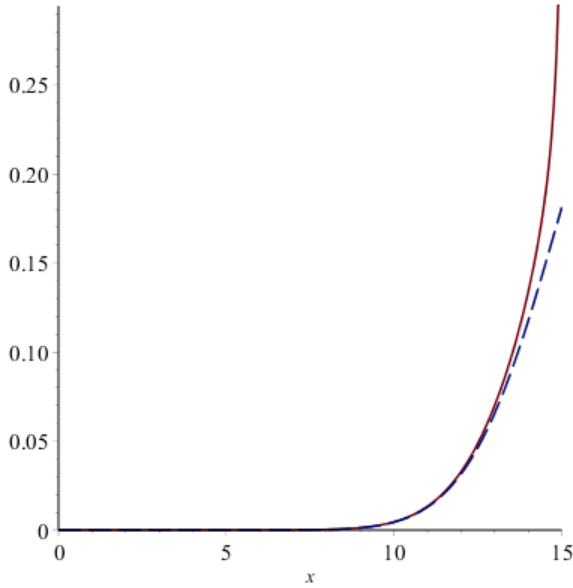


Рис. 5: Сравнение приближения (обычная линия) с функцией Бесселя (пунктирная) на отрезке  $x = (0, 15)$ ,  $\alpha = 15$

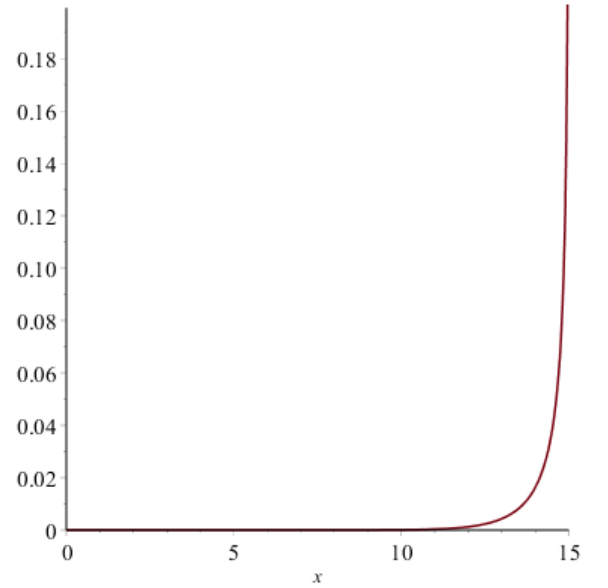


Рис. 6: Разность результатов на рисунке 7

Из графиков (рис. 5) и (рис. 3) видно, что в окрестности точки  $\alpha = x$  возникает быстро-растущая погрешность, хоть на остальных участках был получен хороший результат.

### 3.3 Сливающиеся точки

Итак, мы получили очень хорошее приближение для случаев  $\alpha < x$  и  $\alpha > x$ , но остается большая погрешность в той самой точке  $\alpha = x$ . Это связано

с близостью перевальных точек. [2] Для того же уравнения  $\cos(\tau) = \alpha/x$ , в случае, если  $\frac{\alpha}{x}$  близка к 1, получается два решения, отображенные на графике (рис. 7). Причем, чем ближе  $\alpha$  к  $x$ , тем ближе получаемые решения.

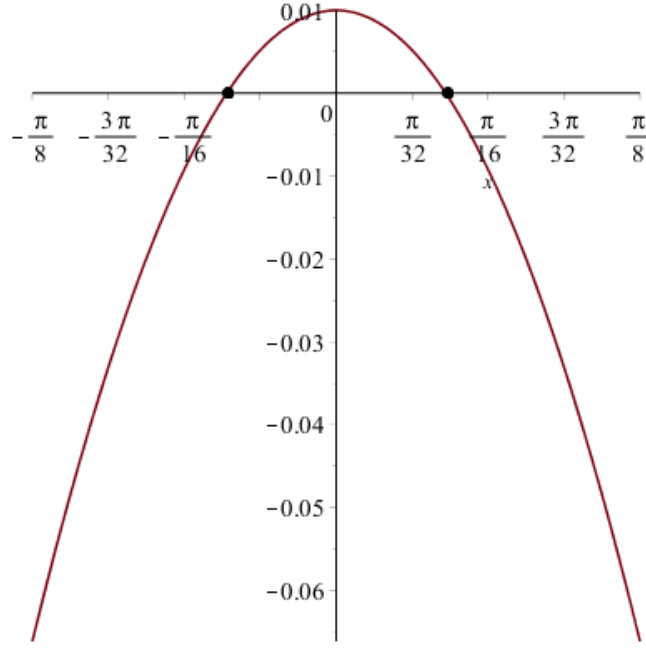


Рис. 7: Решения уравнения  $\cos(\tau) = \alpha/x$  (сливающиеся)

В таком случае суммируя их вклады мы не получаем ничего хорошего, потому что вместо двух точек мы по факту получим одну. Поэтому стоит взять в качестве перевальной эту самую точку. Однако в наших рассуждения было несколько важных допущений, как например то, что  $f' = 0$ , в то время как в той точке между ними (в нуле) производная не равна нулю. Именно поэтому мы должны изменить наше приближение.

Разложим функцию  $f(t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $a$ . Можно заметить, что в нашем случае  $f''(t) = 0$

До этого мы использовали аналогичное разложение, но для хорошего порядка точности брали приближение до второй производной, теперь, т.к.  $f''(t) = 0$  мы столкнулись с тем, что нужно вернуть потерянную точность, поэтому будем использовать разложение вида:

$$f(t) \sim f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(t-a) + \frac{f'''(a)}{3!}(t-a)^3 \quad (14)$$

Заменяем:

$$a_1 = \frac{f'(a)}{1!} \quad a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

Получаем:

$$f(t) \sim f(a) + a_1(t-a) + a_3(t-a)^3 \quad (15)$$

Теперь разложение интеграла (11) будет иметь вид

$$J_\alpha(x) \sim \frac{1}{2\pi} e^{f(t_0)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{a_1(t-t_0)+a_3(t-t_0)^3} dt$$

где  $t_0$  - середина между перевальными точками.

В нашем случае,  $t_0 = 0$  (см. рис. 7), что заметно упрощает наш интеграл:

$$J_\alpha(x) \sim \frac{1}{2\pi} f(t_0) \int_{-\pi}^{\pi} e^{a_1 t + a_3 t^3} dt$$

Преобразуем его, заменив  $a_3 t^3 = \frac{t^3}{3} \rightarrow t = \left(\frac{1}{3a_3}\right)^{1/3} x$ . Получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(a_1 t + a_3 t^3)} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\left(\frac{a_1}{(3a_3)^{1/3}} x + \frac{x^3}{3}\right)} dx$$

Заметим, что полученный интеграл почти полностью совпадает с функцией Эйри, имеющей вид:

$$Ai(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\alpha x + \frac{x^3}{3}\right)} dx$$

Но различаются пределы интегрирования. Как уже говорилось, при больших значениях  $\lambda$  основной вклад в интеграл вносят перевальные точки, остальными же элементами можно пренебрегать. Поскольку наша точка находится в нуле, то пределы интегрирования могут быть растянуты от  $(-\pi, \pi)$  до  $(-\infty, \infty)$  без каких-либо последствий. Теперь можем заменить интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\left(\frac{a_1}{(3a_3)^{1/3}} x + \frac{x^3}{3}\right)} dx = 2\pi Ai\left(\frac{a_1}{(3a_3)^{1/3}}\right) \frac{1}{(3a_3)^{1/3}}$$

В итоге получаем готовое приближение интеграла Бесселя ( $f(0) = 0$ )

$$J_\alpha(x) = Ai\left(\frac{(a_1)}{(3a_3)^{1/3}}\right) \frac{1}{(3a_3)^{1/3}}, \quad (16)$$

где  $a_1 = n - x \cos(0)$ ,  $a_2 = \frac{x \cos(0)}{6}$

Сравним его с исходной функцией (рис 8).

Итак, это приближение должно использоваться для случая, когда  $\frac{\alpha}{x} \approx 1$ . На графике видно, что при достаточных отклонениях от точки  $\frac{\alpha}{x} = 1$  начинают появляться погрешности приближения. Построим график разности этих функций (рис. 9), для получения абсолютной погрешности приближения.



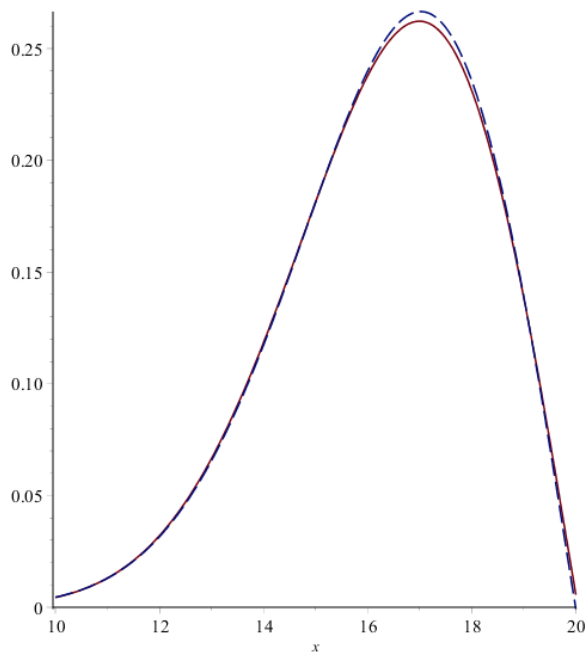


Рис. 8: Приближение функцией Эйри (*обычная линия*) с функцией Бесселя (*пунктирная линия*).  $\alpha = 15, x \in (10, 20)$

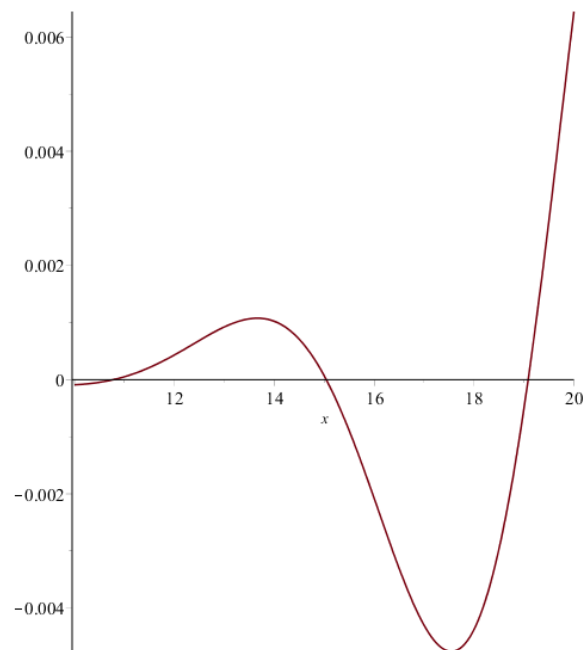


Рис. 9: Разность результатов на рисунке 8

На графике видно, что действительно, между перевальными точками ( $x = 15$ ) приближение полностью совпадает с искомой функцией. Чтобы избавиться от погрешностей около этой точки необходимо использовать полученные ранее формулы для случаев  $\alpha > x$  и  $\alpha < x$ . Но важно заметить, что нужно брать функцию для сливающихся точек в очень маленькой окрестности, то есть необходимо следить за точностью. Если возьмем ее на чуть большем интервале, то могут возникнуть серьезные отклонения.

Попробуем теперь объединить три полученных формулы приближения и сравнить их с функцией Бесселя (рис 10).

Для этого я построил 4 графика, 3 из которых - мои приближения на разных участках, выраженные кусочно-непрерывными функциями, а четвертый (синий) - есть функция Бесселя порядка 15. Заметим, что полученный график очень близок к искомой функции, и почти на всей оси достигается приемлемая точность, но на пике  $x = 17$  все равно осталась ощутимая погрешность, от которой в рамках перевальных оценок уйти нельзя.

Построим график абсолютной погрешности, вычтя из итогового приближения функцию Бесселя (рис 11). Несмотря на то, что график выглядит "плохо" на самом же деле полученные отклонения оказались крайне малы. Разрывы на графике абсолютной погрешности связаны с выбором различных функций

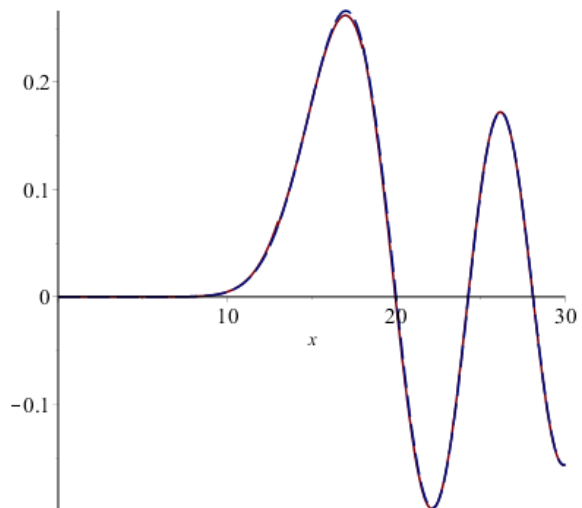


Рис. 10: Итоговое приближение (обычная линия) и функция Бесселя (пунктирная линия).  $\alpha = 15, x \in (0, 30)$

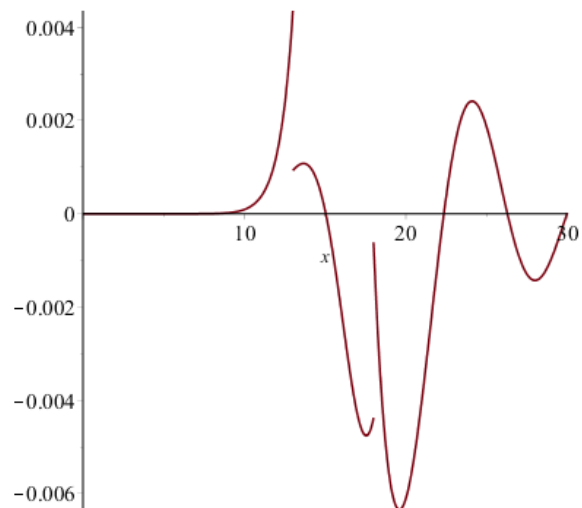


Рис. 11: Разность результатов на рисунке 10

для оценок интеграла Бесселя.

## Заключение

В данной работе были получены асимптотические оценки для интеграла Бесселя на основе метода перевала, а также границы их применимости. Полученные оценки оказались достаточно точными.

Для получения приближенных результатов рассматривались интегралы на различных интервалах параметров, в следствие чего получены различные аппроксимирующие формулы для этих интервалов. В частности, для области сливающихся перевальных точек получена аппроксимация через функцию Эйри. Как результат, аналитическая оценка интеграла Бесселя представлена в виде кусочно-непрерывной функции, представляющей достаточно точное приближение для функции Бесселя.

Точность полученных приближений, а также границы их применимости проанализированы сравнением приближенных результатов с точными для функции Бесселя. Для численного сравнения использовалась среда Maple.

Аналогичными способами можно приближать большое количество интегралов вида (3), которые, как уже говорилось ранее, могут появиться при описании (исследовании) разнообразных явлений природы. Но, нужно аккуратно оценивать функции на возможность возникновения особенностей в точках перехода. Заметим, что важным является выбор интервалов параметров, для которых использования различных приближений является корректным.

## Список литературы

- [1] Араманович И.Г. Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969. 288 с.
- [2] М.В. Федорюк. Метод перевала. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1977. 368 с.
- [3] Лаврентьев М.А Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973. 736 с.
- [4] Wong R. Asymptotic Approximations of Integrals. NY.: SIAM, 2001. 543 p.