Intégration

Pr. L. EZZAKI

Ecole Supérieure de l'Education et de Formation
Université Ibn Zohr - Agadir

16 mars 2020

Chapitre III : Equations différentielles

Défintion 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle équation différentielle d'ordre n et d'inconnue y toute relation de la forme

$$y^{(n)}(x) = f(x; y(x); y'(x); ...; y(n-1)(x)) \tag{1}$$

avec les conditions initiales

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ ...\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{2}$$

où f est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^{n+1}$, $(x_0; y_0; ...; y_{n-1})$ est vecteur fixé dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et l'inconnue est une fonction y de classe C^n définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x_0.

Défintion 2

On appelle solution d'une équation différentielle toute fonction y de classe C^n définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et vérifiant l'équation (1) ainsi que les conditions initiales (2).
La solution est dite maximale si l'intervalle ouvert est maximal.

Example 1 :
$y' = y + x$ avec $y(0) = 0$ est une équation différentielle du premier ordre. Ici, nous avons bien entendu

$$f(x; y(x)) = y(x) + x$$

On peut vérifier que toute fonction de la forme $y(x) = Ke^x - x - 1$, avec K constante arbitraire, est une solution de l'équation et que $y(x) = e^x - x - 1$ est une solution qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$. Il s'agit de la solution maximale qui vérifie la condition initiale donnée car elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Equations à variables séparables

Définition 4

Une équation différentielle du premier ordre

$$y'(x) = f(x; y(x)) \tag{3}$$

est dite à variables séparables si elle peut être ramenée à la forme suivante

$$g(y(x))y'(x) = h(x) \tag{4}$$

où g et h sont deux fonctions définies sur un intervalle ouvert et continues.

Exemple 2 :
L'équation $y'(x) = x^2 y(x) + x^2$ avec $y(0) = 1$ est à variables séparables. En effet, on peut la ramener à la forme

$$\frac{y'(x)}{y(x)+1} = x^2$$

par suite, en passant aux primitives, on a

$$\ln|y+1| = \frac{1}{3}x^3 + K$$

ce qui conduit à

$$y(x) = K_1 e^{\frac{1}{3}x^3} - 1$$

K étant une constante arbitraire non nulle. La condition initiale $y(0) = 1$ entraine $K_1 = 2$.

Exemple 3 :
L'équation $\left(x^2+1\right) y'(x) = y^2 - 1$ est à variables séparables. On a $\frac{y'}{y^2-1} = \frac{1}{x^2+1}$

$$\frac{y}{2(y-1)} - \frac{y}{2(y+1)} = \frac{1}{x+1}$$

En intégrant, les deux membres, et après simplification, on trouve

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = 2\,\mathrm{Arctan}(x) + K$$

et il sera possible d'exprimer y en fonction de x.

Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 5

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation différentielle de la forme

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \tag{5}$$

où a et b sont deux fonctions supposées définies et continues sur un intervalle ouvert donné de $\mathbb{R}$. L'équation $y'(x) = a(x)y(x)$ est dite équation homogène associée ou équation sans second membre. Elle sera souvent notée "ssm".

Théorème 6

Soit y_0 une solution particulière de l'équation avec second membre, alors y est solution de l'équation avec second membre si et seulement si $(y - y_0)$ est solution de l'équation sans second membre.

Preuve :
On a d'une part, y_0 vérifie

$$y_0'(x) = a(x)y_0(x) + b(x)$$

d'autre part, si y est une solution quelconque de l'équation avec second membre, y vérifie

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

ceci équivaut en soustrayant membre à membre les deux équations à

$$(y - y_0)(x) = a(x)[(y - y_0)(x)]$$

Ce qui prouve le théorème.

Remarque : En pratique, pour résoudre l'équation avec second membre, il suffit d'ajouter une solution particulière de l'équation avec second membre à la solution générale de l'équation sans second membre.