Travaux dirigés (Corrigés)
Série n°2

Exercice 1 :

Déterminer la nature (convergente ou divergente) et la valeur éventuelle des intégrales

1°) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})dt;$ 2°) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})}{t^2\sqrt{\sin(\frac{1}{t})}}dt;$ 3°) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt.$

Solution :

1°) La fonction $f : t \mapsto \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $[1,+\infty[$. Déterminons l'une de ses primitives à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t &= t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) + \int \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ &= t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) + 2\mathrm{Arctan}t\end{aligned}$$

Notons F la primitive obtenue. Comme l'éuivalence de la fonction $t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de l'infinie est $\frac{1}{t}$, alors on a $\lim\limits_{+\infty} F = \pi$; par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t$ converge et l'on a :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t = \lim_{+\infty} F - F(1) = \pi - \ln 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \ln 2$$

2°) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}$ est continue sur $[\frac{2}{\pi},+\infty[$, comme composée de fonctions continues, car $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur ce même intervalle et à valeurs dans $]0,\frac{\pi}{2}]$.

Pour $x \in [\frac{2}{\pi},+\infty[$, le changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$ donne :

$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{x} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{\sqrt{\sin u}}\mathrm{d}u = [2\sqrt{\sin u}]_{\frac{1}{x}}^{\frac{\pi}{2}}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} [2\sqrt{\sin u}]_{\frac{1}{x}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}\mathrm{d}t$ converge et l'on a :

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\sqrt{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}}\mathrm{d}t = 2$$

3°) On a

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 \times t^3 e^{-t} = 0$$

alors, d'après la cinquième proposition du chapitre II, on a $t^\alpha f(t) \to 0$ en $+\infty$ avec $\alpha > 1$ ce qui montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt$ converge.
En intégrant par parties $\displaystyle\int_0^x t^3 e^{-t} dt$, on obtient

$$\int_0^x t^3 e^{-t} dt = \left[\left(-t^3 - 3t^2 - 6t - 6\right) e^{-t}\right]_0^x = \left(-x^3 - 3x^2 - 6x - 6\right) e^{-x} + 6$$

D'où

$$\int_0^x t^3 e^{-t} dt = \lim_{+\infty} \int_0^x t^3 e^{-t} dt = 6$$

Exercice 2 :

1°) Pour quels $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ existe-t-elle ?

2°) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_{n+1} à l'aide de I_n, lorsque ces deux intégrales existent.

3°) Calculer I_n.

Solution :

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)^n}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
Comme $f_0 = 1$, l'intégrale I_0 n'existe pas.
Pour $n \geqslant 1$, on a l'équivalence de la fonction $f_n(t)$ est $\dfrac{1}{t^{2n}}$. On en déduit, par comparaison, l'existence de I_n.
En conclusion, I_n existe si, et seulement si, $n \geqslant 1$.

2. Pour $n \geqslant 1$, on écrit :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t)dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}} \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

puis on intègre par parties l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} \mathrm{d}t$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f_{n+1}(t)dt &= \int_0^{+\infty} f_n(t)dt + \left[\frac{t}{2n\,(1+t^2)^n}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2n} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt \\
&= \frac{2n-1}{2n} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n$$

3. On a $I_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et l'on déduit de la question précédente, par une récurrence facile :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)2k}{(2k)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \pi$$

Le dernier résultat étant encore valable pour $n = 0$, on a établi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2} \pi$$

Exercice 3 :

1°) A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t^2+1}$, calculer

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$$

2°) Montrer que l'intégrale suivante

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$$

Converge.

3°) Calculer la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}$$

Exercice 4 :

Soient a et b deux paramètres réels. Discuter selon leurs valeurs de la convergence de

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a(\ln(t))^b}$$

On pourra :

1°) Lorsque $a \neq 1$, utiliser les règles de Riemann (voir la cinquième Proposition du chapitre II).

2°) Lorsque $a = 1$, calculer explicitement $\displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t(\ln(t))^b}$ pour n réel destiné à tendre vers $+\infty$.