Arithmétiques dans Z

Ayoub Abraich

Exercices à rendre pour le 29/03/2020

التمرين الثالث : (3,0 ن)

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

① (أ) تحقق أن a_n عدد زوجي لكل n من $\mathbb{N}^*$.	0,25 ن
(ب) حدد قيم n التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0[3]$.	0,50 ن
② ليكن p عددا أوليا بحيث $p > 3$.	
(أ) بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$.	0,75 ن
(ب) بين أن p يقسم a_{p-2} .	0,75 ن
(ج) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث $a_n \wedge q = q$.	0,50 ن
($a_n \wedge q$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و q .)	

التمرين الثالث:(3 نقط)

1) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية m بحيث: $m^2+1\equiv 0 \quad [5]$	1
2) ليكن p عددا أوليا بحيث : $p=3+4k$ مع k عدد صحيح طبيعي.	
و ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث: $n^2+1\equiv 0\,[p]$	
أ- تحقق أن: $\left(n^2\right)^{1+2k} \equiv -1\,[p]$	0.25
ب- بين أن n و p أوليان فيما بينهما.	0.5
ج- استنتج أن: $\left(n^2\right)^{1+2k} \equiv 1\,[p]$	0.75
د- استنتج مما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n يحقق: $n^2+1\equiv 0\,[p]$	0.5

Problème : Optionnel

Partie 1 :

1. (Formule de LEGENDRE) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et p un nombre premier. Etablir que l'exposant de p dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers est

$$E\left(\frac{n}{p}\right)+E\left(\frac{n}{p^2}\right)+E\left(\frac{n}{p^3}\right)+\ldots$$

2. Par combien de 0 se termine l'écriture en base 10 de $1000!$?

Partie 2 :

On veut résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation $x^2+y^2=z^2$ (de tels triplets d'entiers relatifs sont appelés triplets pythagoriciens, comme par exemple $(3,4,5)$).

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où $x \wedge y \wedge z = 1$. Montrer alors que dans ce cas, x, y et z sont de plus deux à deux premiers entre eux.
2. On suppose que x, y et z sont deux à deux premiers entre eux. Montrer que deux des trois nombres x, y et z sont impairs le troisième étant pair puis que z est impair.

   On suppose dorénavant que x et z sont impairs et y est pair. On pose $y=2y'$, $X=\frac{z+x}{2}$ et $Z=\frac{z-x}{2}$.
3. Montrer que $X \wedge Z = 1$ et que X et Z sont des carrés parfaits.
4. En déduire que l'ensemble des triplets pythagoriciens est l'ensemble des triplets de la forme

$$(d(u^2-v^2),\ 2duv,\ d(u^2+v^2))$$

   où $d \in \mathbb{N}$, $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$, à une permutation près des deux premières composantes.

NB : Les deux parties sont indépendantes . Copier-coller des solution du web ne sert vraiment à rien !

Bon courage !