Structure d'espace vectoriel

1 Définition

On appelle *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) un ensemble E muni de deux lois :

1. une loi interne, notée $+$, telle que $(E, +)$ soit un groupe commutatif.
   L'élément nul est noté 0_E.

2. une loi externe, notée $\cdot$, qui est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E vérifiant :
   - $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$
   - $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \forall (x, y) \in E^2,\ \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$
   - $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E,\ \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x.$
   - $\forall x \in E,\ 1 \cdot x = x.$

2 Famille de vecteurs

Une combinaison linéaire de la famille finie de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ de E est un vecteur $x \in E$ s'écrivant $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ où les α_i sont des scalaires (des éléments de $\mathbb{K}$). ¡li¿Une combinaison linéaire d'une famille quelconque $(x_i)_{i \in I}$ est un vecteur x s'écrivant $x = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ où tous les α_i, sauf un nombre fini, sont nuls. ¡li¿Une famille finie de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ est ¡span class=rougedico¿libre¡/span¿ si, pour tout choix de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \implies \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \alpha_i = 0.$$

¡li¿Une famille quelconque de vecteurs est libre si toute sous-famille finie extraite est libre. ¡li¿Une famille qui n'est pas libre est une ¡span class=rougedico¿famille liée¡/span¿. ¡li¿Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est ¡span class=rougedico¿génératrice¡/span¿ de E si tout vecteur de E est combinaison linéaire des $(x_i)_{i \in I}$. ¡/ul¿ ¡/div¿

¡div class=titrepartie¿Sous-espaces vectoriels¡/div¿ ¡div class=liste¿ ¡ul¿ ¡li¿Une partie F de E est un ¡span class=rougedico¿sous-espace vectoriel¡/span¿ de E si F est non-vide et si F est stable par $+$ et $\cdot$. Dans ce cas, F est lui-même un espace vectoriel. ¡li¿¡div class=theo¿¡span class=grastheo¿Caractérisation des sous-espaces vectoriels :¡/span¿ Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si les 3 propriétés suivantes sont vérifiées : ¡ol¿ ¡li¿$0_E \in F$; ¡li¿Pour tous $(x, y) \in F^2$, $x + y \in F$; ¡li¿Pour tout $x \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x \in F$. ¡/ol¿ ¡li¿L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. ¡li¿Si X est une partie de E, il existe un sous-espace vectoriel de E contenant X qui est le plus petit possible (pour l'inclusion). On l'appelle le ¡span class=rougedico¿sous-espace engendré par X¡/span¿ et on le note $\mathrm{vect}(X)$. ¡li¿Si $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $\mathrm{vect}(X)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$. ¡/ul¿ ¡/div¿

¡div class=titrepartie¿Somme de sous-espaces vectoriels¡/div¿ ¡div class=liste¿ ¡ul¿ ¡li¿Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle ¡span class=rougedico¿somme¡/span¿ de F et G l'espace vectoriel noté $F + G$ défini par

$$F + G = \{x + y;\ x \in F,\ y \in G\}.$$

¡li¿Deux sous-espaces F et G sont en ¡span class=rougedico¿somme directe¡/span¿ si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G est unique. On note alors $F \oplus G$. ¡li¿¡div class=theo¿¡span class=grastheo¿Proposition :¡/span¿ Deux sous-espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.¡/div¿ ¡li¿On dit que F et G sont ¡span class=rougedico¿supplémentaires¡/span¿ dans E s'ils sont en somme directe et si $F \oplus G = E$. ¡li¿Plus généralement, on définit la somme de p sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de E par

$$F_1 + \cdots + F_p = \{x_1 + \cdots + x_p;\ x_1 \in F_1, \dots, x_p \in F_p\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E. ¡li¿La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F_1 + \cdots + F_p$ sous la forme $x_1 + \cdots + x_p$ avec $x_i \in F_i$ est unique. Ceci revient à dire que si $x_1 + \cdots + x_p = 0_E$ avec $x_i \in F_i$, alors $x_i = 0$. ¡li¿Attention! On ne peut pas caractériser le fait que $F_1, \dots, F_p$ soient en somme directe en vérifiant que $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ si $i \neq j$. ¡/ul¿ ¡/div¿

¡div class=titrepartie¿Applications linéaires¡/div¿ ¡div class=liste¿ ¡ul¿ ¡li¿Une application $f : E \to F$ est appelée une ¡span class=rougedico¿application linéaire¡/span¿ si, pour tous $x, y \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, et $\mathcal{L}(E)$ si $E = F$. Une application linéaire de E dans E s'appelle aussi un ¡span class=rougedico¿endomorphisme¡/span¿ de E. ¡li¿Toute combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire. La composée d'applications linéaires est linéaire. ¡li¿On dit qu'une application linéaire $f : E \to F$ est un *isomorphisme* si elle est bijective. La réciproque d'un isomorphisme est linéaire. ¡li¿L'image directe d'un sous-espace vectoriel de E par une application linéaire est un sous-espace vectoriel de F. L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par une application linéaire est un sous-espace vectoriel de E. ¡li¿On appelle ¡span class=rougedico¿noyau¡/span¿ de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ le sous-espace vectoriel de E

$$\ker(f) = \{x \in E;\ f(x) = 0\}.$$

¡li¿¡div class=theo¿¡span class=grastheo¿Théorème :¡/span¿ $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$. ¡li¿On appelle ¡span class=rougedico¿image¡/span¿ de l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ le sous-espace vectoriel de F

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x);\ x \in E\}.$$

¡li¿Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(f(x_i);\ i \in I\}$. ¡/ul¿ ¡/div¿

¡div class=titrepartie¿Symétries et projections¡/div¿ ¡div class=liste¿ ¡ul¿ ¡li¿Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. On appelle ¡span class=rougedico¿projecteur¡/span¿ sur F parallèlement à G l'application linéaire p définie sur E par $p(z) = x$ où $z \in E$ se décompose uniquement en $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$. On a alors $\mathrm{Im}(p) = F$ et $\ker(p) = G$. ¡li¿¡div class=theo¿¡span class=grastheo¿Caractérisation des projecteurs :¡/span¿ Un endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$. L'application p est alors le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$. ¡/div¿ ¡li¿Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E. On appelle ¡span class=rougedico¿symétrie¡/span¿ par rapport à F parallèlement à G l'application linéaire s définie sur E par $s(z) = x - y$ où $z \in E$ se décompose uniquement en $z = x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$. On a alors $\ker(s - Id_E) = F$ et $\ker(s + Id_E) = G$. ¡li¿¡div class=theo¿¡span class=grastheo¿Caractérisation des symétries :¡/span¿ Un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = Id_E$. L'application s est alors la symétrie par rapport à $\ker(s - Id_E)$ parallèlement à $\ker(s + Id_E)$.