VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

§ 1. — Loi exponentielle

Rappels de cours

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ,

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{et} \quad \mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exercice 1.1. On modélise la durée de vie des galaxies par des lois exponentielles. On estime qu'une galaxie a probabilité de disparaître d'ici à un million d'année égale à 0,000 002 %.

(*a*) Déterminer la valeur du paramètre λ de la loi exponentielle X mesurant la durée de vie de la galaxie.

(*b*) Quelle est l'espérance de vie de la galaxie ?

(*c*) Quelle est la probabilité que la galaxie ait disparu d'ici à 3 millions d'années ?

(*d*) Quelle est la probabilité que la galaxie soit toujours là dans 10 millions d'année ?

Corrigé de l'exercice 1.1.

(*a*) On sait que la fonction de répartition de X est donnée par $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. On a (en n'oubliant pas de convertir les pourcentages en nombre) :

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - e^{-\lambda} = 0{,}000\,000\,02.$$

Trouvons la valeur de λ :

$$1 - e^{-\lambda} = 0{,}000\,000\,02 \iff 1 - 0{,}000\,000\,02 = e^{-\lambda}$$

$$\begin{aligned}
&\iff 0{,}999\,999\,98 = e^{-\lambda}\\
&\iff \ln(0{,}999\,999\,98) = -\lambda\\
&\iff \lambda = -\ln(0{,}999\,999\,98)\\
&\iff \lambda \simeq 2\cdot 10^{-8} = 0{,}000\,000\,02.
\end{aligned}$$

(*b*) L'espérance de vie de la galaxie est égale à l'espérance de la variable X :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\cdot 10^{-8}} = 5\cdot 10^{7} = 50\,000\,000.$$

La galaxie a donc une espérance de vie de 50 millions d'années.

(*c*) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 3000000) &= F(3\cdot 10^{6}) = 1 - e^{-2\cdot 10^{-8}\times 3\cdot 10^{6}} = 1 - e^{-6\cdot 10^{-2}} = 1 - e^{-0{,}06}\\
&\simeq 5{,}82\,\%.
\end{aligned}$$

La probabilité que la galaxie ait disparu d'ici à 3 millions d'année est de 5,82 %.

(*d*) On a

$$\mathbb{P}(X \geq 10000000) = 1 - F(10^{7}) = e^{-2\cdot 10^{-8}\times s 10^{7}} = e^{-2\cdot 10^{-1}} = e^{-0{,}1} \simeq 90{,}48\,\%.$$

La probabilité que la galaxie soit toujours là dans 10 millions d'année est de 90,48 %.

Exercice 1.2. On modélise le temps entre deux clics d'un compteur Geiger par une loi exponentielle. Le nombre moyens de clics par minutes égal à 50.

(*a*) Calculer le paramètre λ de la loi exponentielle.

(*b*) Quelle est la probabilité qu'on attende plus d'une seconde entre deux clics ?

(*c*) On approche un minéral légèrement radioactif du compteur et le nombre de clics passe à 100 par seconde. Quelle est la probabilité d'attendre moins d'un centième de seconde entre deux clics ?

Corrigé de l'exercice 1.2.

(*a*) Soit X le temps en minutes entre deux clics. Puisqu'il y a 50 clics par minutes, le temps moyen entre deux clics est de $1/50$. Puisque X suit une loi exponentielle de paramètre λ, on a

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{50} \quad \text{d'où} \quad \lambda = 50.$$

(*b*) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 1 \text{ seconde}) &= \mathbb{P}(X \geq \tfrac{1}{60} \text{ minutes})\\
&= 1 - F(\tfrac{1}{60})\\
&= e^{-50\times\frac{1}{60}}\\
&= e^{-\frac{5}{6}}\\
&\simeq 43{,}45\,\%.
\end{aligned}$$

La probabilité d'attendre plus d'une second entre deux clics est donc de 56,54 %.

(*c*) Exprimons cette fois-ci X en secondes. Puisqu'il y a 100 clics par seconde, le paramètre est $\lambda = 100$ (même raisonnement que dans la première question). La probabilité d'attendre moins d'un centième de second entre deux clics est donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 1\text{centième de secondes}) &= \mathbb{P}(X \leq \tfrac{1}{100} \text{ secondes}) \\
&= F(\tfrac{1}{100}) \\
&= 1 - e^{-100 \times \frac{1}{100}} \\
&= 1 - e^{-1} \\
&\simeq 63{,}21\,\%.
\end{aligned}$$

La probabilité d'attendre moins d'un centième de secondes entre deux clics est donc de 63,21 %.

§ 2. — Lois quelconques

Rappels de cours

Si X est une variable aléatoire de densité f, la fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2.1. On considère une variable aléatoire X de densité

$$f(t) = \frac{c}{1 + t^2}.$$

(*a*) Pour quelle(s) valeur(s) de c la fonction f est-elle bien une densité ?
(*b*) Calculer la fonction de répartition de X.
(*c*) Déterminer $\mathbb{P}(X < 0)$ et $\mathbb{P}(-1 < X < 1)$.

On rappelle que $\arctan 0 = 0$, $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(-x) = -\arctan x$.

Corrigé de l'exercice 2.1.

(*a*) Une fonction de densité vérifie $f \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Il faut donc que $c \geq 0$ et choisir la valeur de c de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
c \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = 1 &\iff c\,[\arctan t]_{-\infty}^{+\infty} = 1 \\
&\iff c\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 \\
&\iff c\pi = 1 \\
&\iff c = \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}$$

La fonction f est donc une densité si et seulement si $c = \frac{1}{\pi}$.

(*b*) Calculons la fonction de répartition :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\arctan t\right]_{-\infty}^{x} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\arctan x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(*c*) On a :

$$\mathbb{P}(X<0) = 1-\mathbb{P}(X\leq 0) = 1-F(0) = 1-\left(\tfrac{1}{\pi}\arctan 0+\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2},$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-1<X<1) = F(1)-F(-1) &= \left(\frac{1}{\pi}\arctan(1)+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{\pi}\arctan(-1)+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\arctan(1) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 2.2. On considère une variable aléatoire réelle de densité donnée par

$$f(t) = \begin{cases} at+b & \text{si } t\in[0\,;1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(*a*) Pour quelle(s) valeur(s) de a et b la fonction f est-elle bien une densité ?
(*b*) Déterminer la fonction de répartition F de la variable X.
(*c*) Calculer $\mathbb{P}(X\geq\frac{1}{2})$, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

Corrigé de l'exercice 2.2.

(*a*) Il faut que $f\geq 0$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. La première condition donne $at+b\geq 0$ pour tout $t\in\,]0\,;1[$. Puisque la fonction $t\mapsto at+b$ est monotone (croissante ou décroissante selon le signe de a), elle est positive si et seulement si ses valeurs lorsque $t=0$ et $t=1$ le sont, c'est-à-dire lorsque $b\geq 0$ et $a+b\geq 0$.
La condition $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 \iff \int_0^1 (at+b)\,\mathrm{d}t = 1 \iff \frac{a}{2}+b = 1 \iff a = 2(1-b) = 2-2b.$$

Écrivons les conditions qu'on a obtenu :

$$\begin{cases} a = 2-2b \\ b\geq 0 \\ a+b\geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2-2b \\ b\geq 0 \\ 2-b\geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2-2b \\ b\geq 0 \\ b\leq 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2-2b \\ 0\leq b\leq 2 \end{cases}$$

La fonction f est donc une densité si et seulement si $a = 2(1-b)$ et $b\in[0\,;2]$.

(*b*) La fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque $f(t)$ est donné par une formule différente selon que $t \leq 0$ ou $t > 1$, on distingue trois cas.

Premier cas : $t \leq 0$. On a

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Deuxième cas : $0 < t \leq 1$. On a

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(0) + \int_{0}^{x} (2(1-b)t + b)\,\mathrm{d}t = 0 + \left[2(1-b)\frac{t^2}{2} + bt\right]_0^x$$
$$= (1-b)x^2 + bx.$$

Troisième cas : $t > 1$. On a

$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(1) + \int_{1}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 1 + 0 = 1.$$

Conclusion :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ (1-b)x^2 + bx & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(*c*) On a

$$\mathbb{P}(X \geq \tfrac{1}{2}) = 1 - F(\tfrac{1}{2}) = 1 - [\tfrac{1}{4}(1-b) + \tfrac{1}{2}b] = \frac{3-b}{4}.$$

Sous réserve d'existence, l'espérance est donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} (2(1-b)t^2 + bt)\,\mathrm{d}t = \left[2(1-b)\frac{t^3}{3} + b\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{4-b}{6}.$$

Sous réserve d'existence de $\mathbb{E}(X^2)$, la variance est $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$, avec

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} (2(1-b)t^3 + bt^2)\,\mathrm{d}t = \left[2(1-b)\frac{t^4}{4} + b\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3-b}{6}.$$

Par suite,

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \frac{3-b}{6} - \left(\frac{4-b}{6}\right)^2 = \frac{2+2b-b^2}{36}.$$

§ 3. — Image d'une variable aléatoire réelle

Rappels de cours : Image d'une variable aléatoire réelle

Pour déterminer la loi de $Y = g(X)$, on détermine $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \le t)$ en fonction de F_X puis on calcule la densité f_Y en dérivant F_Y sur chaque intervalle où elle est donnée par une formule différente.

Exercice 3.1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de densité

$$f(t) = \begin{cases} 2 - 2t & \text{si } t \in [0\,;1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer les lois suivies par $Y = X^2$.

Corrigé de l'exercice 3.1. Première étape : ***fonction de répartition de X.*** On l'a déjà calculée dans l'exercice 2.2 :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0, \\ 2x - x^2 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$$

Deuxième étape : ***fonction de répartition de Y.*** Pour déterminer la loi suivie par Y, on calcule

$$\mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(X^2 \le t).$$

Si $t \le 0$, on a donc $\mathbb{P}(Y \le t) = 0$. Supposons désormais $t > 0$:

$$\mathbb{P}(Y \le t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} \le X \le \sqrt{t}) = F(\sqrt{t}) - F(-\sqrt{t}).$$

Calculons $F(\sqrt{t})$ puis $F(-\sqrt{t})$. Puisque $t > 0$, on a $-\sqrt{t} < 0$ et donc $F(-\sqrt{t}) = 0$. Pour le calcul de $F(\sqrt{t})$, posons $x = \sqrt{t}$; puisque $t > 0$ on a $x > 0$ et donc il y a deux cas à distinguer.

Premier cas : $0 < x \le 1$. On a alors $F(x) = 2x - x^2 = 2\sqrt{t} - t$. Traduisons la condition $0 \le x \le 1$ en terme de la variable t :

$$0 \le x \le 1 \iff 0 \le \sqrt{t} \le 1 \iff 0 \le t \le 1.$$

Deuxième cas : $x \ge 1$. On a alors $F(x) = 1$. Traduisons la condition $x \ge 1$ en terme de la variable t :

$$x \ge 1 \iff \sqrt{t} \ge 1 \iff t \ge 1.$$

Conclusion. On a donc :

$$\mathbb{P}(Y \le t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0, \\ 2\sqrt{t} - t & \text{si } 0 \le t \le 1, \\ 1 & \text{si } t \ge 1. \end{cases}$$

Troisième étape : ***Fonction de densité de Y.*** Pour déterminer la densité de Y, on dérive la fonction de répartition sur chacun des trois intervalles précédents :

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

(Bien noter que les intervalles doivent être disjoints dans la formule pour f_Y ; il n'ont pas à l'être pour F_Y car F_Y est toujours continue, alors que f_Y ne l'est pas en général.)

Exercice 3.2. Soit X une variable aléatoire de densité donnée par

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer la loi de $Y = |X|$.

Corrigé de l'exercice 3.2. Première étape : ***fonction de répartition de X.*** La fonction f est donnée en trois morceaux :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1, \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

donc le calcul de la fonction de répartition F de X se fait en distinguant trois cas distincts.

Premier cas : $t \leq -1$. On a alors :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

En particulier, $F(-1) = 0$.

Deuxième cas : $-1 < t \leq 1$. On a alors :

$$\begin{aligned} F(x) &= F(-1) + \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \int_{-1}^{x} (\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2})\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{4}t^2 + \tfrac{1}{2}t\right]_{-1}^{x} = \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}) \\ &= \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

En particulier, $F(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$.

Troisième cas : $t > 1$. On a alors :

$$F(x) = F(1) + \int_{1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_{1}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 1.$$

Conclusion. On a donc

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

Deuxième étape : ***fonction de répartition de Y.*** Pour déterminer la loi suivie par Y, on calcule

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(|X| \leq t).$$

Si $t \leq 0$, on a donc $\mathbb{P}(Y \leq t) = 0$. Supposons désormais $t > 0$:

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(-t \leq X \leq t) = F(t) - F(-t).$$

On doit calculer $F(t)$ et $F(-t)$. Puisque $t > 0$, on a

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

et, en posant $x = -t$, (donc $x < 0$) :

$$F(-t) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1, \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leq x < 0. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 1, \\ \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} & \text{si } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ (\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}) - (\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}) & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 - 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ t & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

Troisième étape : ***Fonction de densité de Y.*** Pour déterminer la densité de Y, on dérive la fonction de répartition sur chacun des trois intervalles précédents :

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

(Bien noter que les intervalles doivent être disjoints dans la formule pour f_Y ; il n'ont pas à l'être pour F_Y car F_Y est toujours continue, alors que f_Y ne l'est pas en général.)

On est en présence de la densité d'une loi uniforme donc Y suit une loi uniforme.