Année Universitaire: 2019/2020

جامعة ابن زهر
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵉⴱⵏⵓ ⵣⵓⵀⵔ
UNIVERSITÉ IBN ZOHR

Examen d'Algèbre 2

Session Normale, Janvier 2020

Durée 2H

Ecole Supérieure de l'Education & de la Formation

Pr. Nouh IZEM

NB: (Barème)

Ex1:(1+1+1+[0.5+0.5]+1+1+1=7pts) **Ex2**:([1.5+1.5]+[1.5+1.5]=6pts) **Ex3**:(1+2+1+2+1+1=8pts)

Exercice 1

Soient $E = \{(x, y, z) \in / x+y-2z = 0 \text{ et } 2x-y-z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x+y-z = 0\}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$. On admettra que F est un sous espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Soient $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$ et $u_4 = (1, 1, 0)$.

1. Montrer que E est un sous espaces vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une famille génératrice de E et montrer que c'est une base.
3. Montrer que la famille $\{u_2, u_3\}$ est une base de F.
4. Dire et justifier si la famille suivante:
   (a)- $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
   (b)- $\{u_1, u_2\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$. Conclure
6. Exprimer le vecteur $U = (1, 2, 3)$ en fonction de u_1, u_2 et u_3.
7. Former l'équation cartésienne du sous espaces vectoriel $G = vect(\{u_3, u_4\})$.

Exercice 2

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ défini par: $P(X) = 2X^3 + 3X^2 + 6X + 1 - 3j$
   (a) Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine multiple de P.
   (b) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Mettre en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants:
   (a) $X^4 + 2X^2 - 3$; (b) $X^4 + 1$;

Exercice 3

Soient les fractions rationnelles suivantes définies par:

$$F_1(X) = \frac{X-1}{X^2(X^2+1)}, \quad F_2(X) = \frac{X^2+1}{X^2(X^3-1)}, \quad F_3(X) = \frac{X}{(X^2+1)^{2020}}$$

1. Ecrire la forme de la décomposition en éléments simples de F_1 dans $\mathbb{R}(X)$.
2. Calculer les coefficients de la décomposition en éléments simples de F_1 dans $\mathbb{R}(X)$.
3. Ecrire la forme de la décomposition en éléments simples de F_2 dans $\mathbb{C}(X)$.
4. Calculer les coefficients de la décomposition en éléments simples de F_2 dans $\mathbb{C}(X)$.
5. En déduire la décomposition en éléments simples de F_2 dans $\mathbb{R}(X)$.
6. Donner (sans calcul !) la décomposition en éléments simples de F_3 dans $\mathbb{R}(X)$. Justifier?

★ ★ ★ ★ **Bonne Chance** ★ ★ ★ ★

Filière LEMI-ES