

Examen d'Algèbre 2
Session de Rattrapage, Janvier 2019
Durée 1H30

Pr. Nough IZEM

NB: (Barème)

Ex1: (1+1+1+[1+1]=5pts)

Ex2: (1+2+2+2=7pts)

Ex3: (1+2+1+1+2+1=8pts)

Exercice 1

Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } x - y - z = 0\}$ deux sous-ensembles de \mathbb{R}^3 . Supposons que F est un sous espaces vectoriel de \mathbb{R}^3

- + 1 Montrer que E est un sous espaces vectoriel de \mathbb{R}^3 .
- + 2 Vérifier que $\{(2, 0, 1), (-1, 1, 0)\}$ est une famille génératrice de E . (Est-elle base de E ?)
- + 3 Trouver un système générateur de F .
- 4 Soient $u_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $u_2 = (-1, 2, 3, 1)$ des vecteurs de \mathbb{R}^4 .
- 1 (a) Déterminer des réels x, y pour que le vecteur $V = (-2, x, y, 3)$ appartienne au s.e.v. engendré dans \mathbb{R}^4 par le système $\{u_1, u_2\}$?
- 1 (b) Former l'équation (ou un système d'équations) cartésienne(s) du sous espaces vectoriel $G = \text{vect}(\{u_1, u_2\})$.

Exercice 2

Soient $P, B \in \mathbb{R}[X]$ définis par:

$$P(X) = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1, \quad B(X) = X^3 + X^2 + X + 1$$

- 1 Montrer que i est une racine multiple de P .
- 2 En remarquant que P est un polynôme pair, donner toutes les racines de P ainsi que leur multiplicité.
- 2 3 Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.
- 2 4 Pour tout entier naturel n , déterminer le reste de la division euclidienne de $A(X) = X^n$ par B (Indication: Utiliser le théorème de la division Euclidienne puis le fait que $-1, i$ et $-i$ sont des racines de B)

Exercice 3

Soient F et G les fractions rationnelles définies par:

$$F(X) = \frac{6X - 2}{X^4 - 1}, \quad G(X) = \frac{X^3 + 1}{(X^2 + X + 1)(X^2 + 1)^2}, \quad H(X) = \frac{20X + 19}{(X^2 + X + 1)^{2019}}$$

- ✓ + 1 Ecrire la forme de la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.
- ✓ + 2 Calculer les coefficients de la décomposition de F dans $\mathbb{C}(X)$. (Indication: $X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$)
- + 3 En déduire sa décomposition dans $\mathbb{R}(X)$.
- ✓ 1 4 Donner la forme de la décomposition en éléments simples de G dans $\mathbb{R}(X)$.
- 2 5 Calculer les coefficients de la décomposition de G dans $\mathbb{R}(X)$.
- 1 6 Donner la décomposition en éléments simples de H dans $\mathbb{R}(X)$.