# تمارين خاصة بمستوى الثانية من سلك البكالوريا
## شعبة العلوم الرياضية (من اقتراح المنسقية المركزية للرياضيات)
## البنيات الجبرية

نزود $IR^2$ بقانون تركيب الداخلي المعرف بما يلي: $\forall(x,y,a,b)\in IR^4 \quad (x,y)*(a,b)=(x+a, ye^a+be^{-x})$

1) احسب: $(2,1)*(1,0)$ ثم $(1,0)*(2,1)$ . ماذا تستنتج ؟
2) أثبت أن القانون $*$ تجميعي في $IR^2$ .
3) أثبت أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا في $IR^2$ .
4) بين أن جميع عناصر $IR^2$ تقبل مماثلا في $(IR^2,*)$
5) استنتج بنية $(IR^2,*)$ .

---

نذكر أن $(M_2(IR),+,\times)$ حلقة واحدية .

نضع : $E=\left\{M_a=\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ ae^a & e^a \end{pmatrix}, a\in\mathbb{Z}\right\}$ ونعتبر التطبيق $f$ من $\mathbb{Z}$ نحو $E$ المعرف بما يلي : $\forall a\in\mathbb{Z}, f(a)=M_a$

1.أ. بين أن $E$ جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$.

ب. بين أن $f$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z},+)$ نحو $(E,\times)$ .

ج. استنتج بنية $(E,\times)$ .

2. نضع $(M_a)^0=I$ و $(M_a)^1=M_a$ و $\forall n\in\mathbb{N}, (M_a)^{n+1}={M_a}^n\times M_a$ و $\forall p\in\mathbb{Z}_*^-, (M_a)^p=\left({M_a}^{-1}\right)^{-p}$

أ. بين أن: $\forall p\in\mathbb{Z}, (M_a)^p=M_{ap}$

ب. ناقش حسب قيم $n$ حلو ل المعادلة : $(M_x)^n\times M_5=M_{5n}$ (حيث $x\in\mathbb{Z}$ هو المجهول) .

---

نعتبر المصفوفة: $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ و المصفوفة $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) أحسب $A^2-3A+2I$ ثم استنتج أن $A$ تقبل مقلوبا في $(M_2(IR),\times)$ يتم تحديده.

2) نعتبر $E$ مجموعة المصفوفات من نوع: $M_a=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+\frac{1}{a} & a-\frac{1}{a} \\ a-\frac{1}{a} & a+\frac{1}{a} \end{pmatrix}$ حيث $a\in IR^*$ .

نضع $J=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ; $K=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

أ) أحسب $J^2$ ; $K^2$ , $JK$ , $KJ$.

ب) أحسب $M_a$ بدلالة $J$ و $K$

ج) بين أن $E$ جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$.

3) نعتبر التطبيق $f$ من $IR^*$ نحو $E$ المعرف بما يلي : $f(a)=M_a$

أ) بين أن $f$ تشاكل تقابلي من $(IR^*;\times)$ نحو $(E;\times)$

ب) استنتج بنية $(E;\times)$ ثم حدد مقلوب $M_a$ في $(E;\times)$

---

لكل زوج $(x,y)$ من المجموعة $\mathbb{R}^2$ نضع: $x\perp y=x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}$

1- أ) تحقق من أن $\perp$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}$ .

ب) تحقق من أن لكل زوج $(x,y)$ من المجموعة $\mathbb{R}^2$: $\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}+xy=\sqrt{1+(x\perp y)^2}$

2) أ)بين أن التطبيق $u$ المعرف من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي : $u(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ وحدد $u^{-1}$.

ب)باستعمال التطبيق $u$ أو $u^{-1}$ بين أن: $(\mathbb{R};\perp)$ زمرة تبادلية.

ج)حدد العنصر المحايد للزمرة $(\mathbb{R};\perp)$ ومماثل عنصر $x$ من المجموعة $\mathbb{R}$ بالنسب للقانون $\perp$.

3) نضع لكل $x\in\mathbb{R}$ و لكل عدد عدد صحيح طبيعي $n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$: $x^{[0]}=0$ و $x^{[1]}=x$ و

$$x^{[n]}=\underbrace{x\perp x\perp\cdots\perp x}_{\text{مرة } N}$$

احسب $x^{[n]}$ بدلالة $x$ و $n$ .

---

نذكر أن $(M_3(IR),+,x)$ حلقة واحدية .

نعتبر المجموعة $G=\left\{M_\theta=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}/\theta\in IR\right\}$ .

1) بين أن G جزء مستقر بالنسبة لضرب المصفوفات في $M_3(IR)$ .

2) نعتبر المجموعة : $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$ .

بين أن (U,x) زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{C}^*,\times)$.

3) نعتبرالتطبيق $\phi$ المعرف من U نحو G بحيث : $\phi(e^{i\theta})=M_\theta$ .

أ) بين أن $\phi$ تشاكل تقابلي من (U,x) نحو (G,x) .

ب)استنتج أن (G ,x) زمرة تبادلية .

4) أحسب $(M_\theta)^{-1}$ و $(M_\theta)^n$ حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

---

A- نعتبر المجموعة $G=\mathbb{R}-\{\sqrt{3}\}$.

لكل a و b من G تضع : $a*b=a+b-\dfrac{ab}{\sqrt{3}}$.

1) تحقق من أن $\forall(a,b)\in G^2\ a*b=\sqrt{3}-\sqrt{3}(\dfrac{a}{\sqrt{3}}-1)(\dfrac{b}{\sqrt{3}}-1)$.

2) بين أ ن $(G,*)$ زمرة تبا دلية .

B -نعتبر المجموعة $\Gamma=\left\{M(a)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}-a&a\\a&2\sqrt{3}-a\end{pmatrix}/a\in G\right\}$,

و المصفو فتين $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$

1) أ- تحقق من أ ن $J^2=-2J$ و أن $\forall a\in G, M(a)=I+\dfrac{a}{2\sqrt{3}}J$.

ب- بين أ ن المجموعة $\Gamma$ جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

2) نعتبر التطبيق $\begin{array}{l}f:G\to\Gamma\\ a\mapsto M(a)\end{array}$ .

أ- بين أن f تشا كل تقابلي من $(G,*)$نحو $(\Gamma,\times)$. ب- استنتج بنية $(\Gamma,\times)$.

---

نعتبر المصفوفات الآتية : $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\2&-3&2\\-1&2&0\end{pmatrix}$

1) أ) تحقق أن : $(A+3I)\times(A-I)=0$

ب) استنتج $A^2$ بدلالة $I$ و $A$

2) نعتبر المجموعة $E=\{M(a,b)\in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})/ M(a,b)=aI+bA, a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\}$

أ) بين أن : $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي

ب) بين أن الأسرة $(I,A)$ أساس للفضاء المتجهي $(E,+,.)$

3 ) أ) بين أن $E$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$

ب) بين أن : $(E,+,\times)$ حلقة واحدية وتبادلية . هل هي كاملة؟

4) حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في $(E,\times)$ محددا مقلوبها.

---

نعتبر في $M_2(IR)$ المصفوفتين : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \frac{3\sqrt{2}}{2}&\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

و المجموعة : E= $\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a+\frac{\sqrt{2}}{2}b&\frac{-\sqrt{2}}{2}b\\ \frac{3\sqrt{2}}{2}b&a-\frac{\sqrt{2}}{2}b\end{pmatrix}/(a,b)\in IR^2\right\}$

1 - ا - بين ان $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

ب - بين ان الأسرة (I,J) اساس في الفضاء المتجهي $(E,+,.)$

2 - نعتبر التطبيق : $h \quad : \quad \mathbb{C}^*\to E^*$ حيث: $E^*=E-\{M(a,b)\}$

$$a+ib \quad \mapsto \quad M(a,b)$$

ا - تحقق من ان $J^2=-I$

ب - استنتج ان E جزء مستقر في $(M_2(IR),\times)$

ج - بين ان $h$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

د - أستنتج بنية $(E^*,\times)$

3 - حدد في E المصفوفة X حيث $X^3=J$

---

نعتبر المصفوفتين : $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

1) احسب $J^2$ بدلالة $I$ و $J$

2) بين أن $(I,J)$ أسرة حرة في $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$

3) نعتبر المجموعة : $F=\left\{\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

أ ) بين أن $F$ فضاء متجهي جزئي من $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$

ب ) تحقق أن $I\in F$ و $J\in F$

ج ) استنتج أساسا للفضاء المتجهي $(F,+,.)$

4) أ ) بين أن $(F,+,\times)$ حلقة واحدية.

ب) بين أن $J$ تقبل مقلوبا في $F$ ثم حدد $J^{-1}$ ( يمكنك استعمال السؤال 1) )

---

نذكر أن $(M_2(IR),+,\times)$ حلقة واحدية و $(M_2(IR),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي و $(C,+,\times)$ جسم تبادلي .

rahmounimaths

نضع : $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a+2b \end{pmatrix} / (a,b)\in IR^2\right\}$ و $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

1 ) أ ـ بين أن $(E,+,.)$فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(IR),+,.)$ .

ب ـ بين أن الأسرة $(I,J)$ أساس في الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,.)$ .

2 ) نعتبر التطبيق : $f:\mathbb{C}\to E$

$\text{a+ib}\mapsto M(a-b,b)$

أ ـ بين أن $E$ جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$

ب ـ بين أن $f$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(E,\times)$.

3 ) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية .

4 ) أ ـ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3=2-2i$ واكتب حلولها على الشكل الجبري .

ب ـ استنتج في المجموعة $E$ حلول المعادلة : $M^3-4I+2J=0$

---

لتكن $E$ مجموعة الدوال العددية $f_{(a,b)}$ بحيث $\forall x\in IR: f_{(a,b)}(x)=(ax+b)e^{2x}$

1) $a-$بين أن $(E,+,\cdot)$فضاء متجهي حقيقي.

$b-$نضع $B=(f_{(1,0)},f_{(0,1)})$ بحيث $f_{(1,0)}(x)=xe^{2x}$ و $f_{(0,1)}(x)=e^{2x}$ .

بين أن $B$ أساس للفضاء المتجهي $E$ .

2) نزود المجموعة $E$ بقانون تركيب داخلي معرف كما يلي: $f_{(a,b)}Tf_{(c,d)}=f_{(ac-bd,bc+ad)}$ لكل $f_{(a,b)}$ و $f_{(c,d)}$ من $E$

نعتبر التطبيق $\phi:\mathbb{C}^*\to E^*$ بحيث $\varphi(z)=f_{(a,b)}$ مع $z=a+ib$ مع $(a,b)\in IR^2$

$a-$بين أن $\varphi$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,T)$

$b-$ استنتج بنية $(E^*,T)$.

$c-$بين أن $(E,+,T)$ جسم تبادلي.

$d-$حل في $E$ المعادلة $\underbrace{f_{(a,b)}Tf_{(a,b)}T....Tf_{(a,b)}}_{\text{n مرة}}=f_2$

---

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 3 .

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$فضاء متجهي حقيقي .

لتكن $E$ مجموعة المصفوفات $M(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$ حيث $a$ و $b$ و $c$ أعداد حقيقية

ونعتبر المصفوفتين $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $K=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2) بين أن $(I,J,K)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$

3) أ – تحقق أن $J^2=I+K$ وأن $K^2=I$ وأن $JK=KJ=J$

ب – استنتج أن $E$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$

ج – بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية

4) هل $(E,+,\times)$ جسم ؟ ( يمكنك استعمال 3) أ – )

5) نضع $X=\frac{1}{\sqrt{2}}J$

أ – بين أن $X^2=\frac{1}{2}(I+K)$ ثم أن $X^3=X$

ب – استنتج أن لكل $n$ من $\mathbb{N}^*$ $X^{2n-1}=X$

---

نعتبر المجموعة : $\mathrm{E}=\left\{\mathrm{M}(a,b,c)=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix} / (a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$ .

**1)- أ-** بين أن $(\mathrm{E},+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

**ب-** نضع : $I=\mathrm{M}(1,0,0)$ و $J=\mathrm{M}(0,1,0)$ و $K=\mathrm{M}(0,0,1)$ .

← بين أن الأسرة $\mathrm{B}=(I,J,K)$ أساس للفضاء المتجهي $\mathrm{E}$ و حدد $\dim(\mathrm{E})$ .

**2)- أ-** أحسب $J^2$ و $K^2$ و $J\times K$ و $K\times J$ .

**ب-** بين أن $\mathrm{E}$ جزء مستقر في $(\mathrm{IM}_3(\mathbb{R}),\times)$ .

**3)-** بين أن $(\mathrm{E},+,\times)$ حلقة واحدية ، هل هي تبادلية ؟ هل هي حلقة كاملة ؟

**4)-** نعتبر المصفوفة $\mathrm{P}=\mathrm{M}(1,0,-3)$ .

**أ-** أحسب $\mathrm{P}^2$ و حدد علاقة بين $\mathrm{P}^2$ و $\mathrm{P}$ و $\mathrm{I}$ ( حيث $\mathrm{I}$ هي المصفوفة الوحدة ) .

**ب-** بين أن المصفوفة $\mathrm{P}$ تقبل مقلوبا $\mathrm{P}^{-1}$ ينبغي تحديده .

---

نذكر بأن $(\mathrm{M}_3(IR);+;\times)$ حلقة واحديه.

نعتبر المصفوفتين $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

°1) أ- تحقق من أن: $A^2=A+2I$

ب- استنتج أن $A$ تقبل مقلوبا في $\mathrm{M}_3(IR)$ ثم حدد $A^{-1}$

°2) لتكن $E$ مجموعة المصفوفات $M(a;b)$ حيث: $M(a;b)=aI+bA$ و $(a;b)\in IR^2$

أ- بين أن $E$ جزء مستقر في $(\mathrm{M}_3(IR);+;\times)$

ب- بين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية و واحديه.

°3) نعرّف في $IR^2$ قانوني التركيب الداخليين + و $*$ كالتالي:

$\forall(a;b)\in IR^2 \;;\; \forall(c;d)\in IR^2 \qquad (a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$

$(a;b)*(c;d)=(ac+2bd;ad+bc+bd)$

أ- احسب: $(1;1)*(2;-1)$

ب- نعتبر التطبيق: $h:\begin{cases} E\to\mathbb{R}^2 \\ M(a,b)\to(a,b) \end{cases}$

بين أن $h$ تشاكل تقابلي من $(E;+)$ نحو $(M_3(IR);+)$ و من $(E;\times)$ نحو $(IR^2;*)$

ج- بين أن القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون **+** في $IR^2$ ثم استنتج بنية $(IR^2;+;*)$

د- هل $(IR^2;+;*)$ جسم ؟ علل جوابك

---

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي و $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$. $O_2$ هي المصفوفة المنعدمة في $M_2(\mathbb{R})$

نعتبر في $M_2(\mathbb{R})$ المصفوفة التالية: $A=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}$ ولتكن $E$ المجموعة التالية:

$$E=\left\{\, x\,I+y\,A/(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\right\}$$

1) أ- تحقق أن: $A^2=-A-I$ .

ب- بين أن $A$ تقبل مقلوبا $A^{-1}$ في $M_2(\mathbb{R})$ و حدده.

2) أثبت أن $(A,I)$ أسرة حرة في $(M_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$.

3) بين أن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي من $M_2(\mathbb{R})$ و حدد بعده.

4) نعتبر التطبيق $f$ المعرف من $\mathbb{C}$ نحو $E$ بمايلي:

$$\left(\; j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\;\right)\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\quad f(x+jy)=xI+yA$$

أ- بين أن $f$ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(E,\times)$.

ب- بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

ج- حل في $E$ المعادلة: $X^2-(A+2I)X+2A=O_2$ .

---

لكل $(a,b)$ من $\mathbb{R}^2$ نعتبر المصفوفة $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b\\-b&a-b\end{pmatrix}$ من $M_2(\mathbb{R})$

نعتبر المجموعة : $E=\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$

1-بين أن E جزء مستقر من. $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

2- بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

3-أ -بين أن لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $x^2-xy+y^2=0\Leftrightarrow x=y=0$

ب-حدد العناصر $M(a,b)$ من E التي تقبل مقلوبا في الحلقة . $(E,+,\times)$

ج-استنتج أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

4- -بين أن $(E,+,\times)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 2.

---

نذكر أن $(M_2(IR),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $(M_2(IR),+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي .

نعتبر المصفوفة $A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}\\\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{7}{4}\end{pmatrix}$

1) بين أن: $A^2-3A+2I_2=\mathrm{O}$ حيث: $\mathrm{O}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

2) لتكن $E$ المجموعة : $E=\left\{xA+yI_2/(x,y)\in IR^2\right\}$

أ) بين أن $E$ زمرة جزئية من $(M_2(IR),+)$

ب) بين أن $E$ جزء مستقر من $(M_2(IR),\times)$

ج) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية وتبادلية

د) احسب $\det(A-I_2)$

3) هل $(E,+,\times)$ جسم ؟ علل جوابك

4) أ) بين أن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

ب) بين أن $B=(I_2,A)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\bullet)$

ج) حدد زوج إحداثيتي $A^{-1}$ بالنسبة للأساس $B$ ثم استنتج أن $B'=(A,A^{-1})$ أساسا للفضاء المتجهي $(E,+,\bullet)$

5) حدد زوج إحداثيتي $I_2$ بالنسبة للأساس $B'$

---

## تمارين حول الأعداد العقدية

نعتبر المعادلة : $(E_n)\quad z^n=(iz+2i)^n \ , n\in\mathbb{N}^* \ , z\in\mathbb{C}$

1)أ- حدد الشكل المثلثي للعددين $z_1$ و $z_2$ حلي المعادلة $(E_2)$ $(\operatorname{Im} z_1>0)$

ب- نضع : $u_p=z_1{}^p+z_2{}^p \ , \ \forall p\in\mathbb{N}$ بين أن: $u_p=2\sqrt{2}^p\cos\frac{3p\pi}{4}$

ج- استنتج قيم $p$ التي من أجلها يكون: $u_p=\left(\sqrt{2}\right)^{p+1}$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م. $(O,\vec{u},\vec{v})$.نعتبر النقطتين $A_{(-2)}$ و $M_{(z)}$ حيث $z\in\mathbb{C}$ .

أ- بين أنه إذا كان $z$ حلا للمعادلة $(E_n)$ فإن $OM=AM$ .

ب- استنتج أن كل حلول المعادلة $(E_n)$ تكتب على شكل $-1+\lambda i \ , \ \lambda\in\mathbb{R}$

3) أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E_n)$ .

ب- بين أن حلول $(E_n)$ تكتب على شكل $k\in\{0,1,...,n-1\}$ $z_k=-1+i\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{4}\right)$

---

نعتبر في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد العقدية المعادلة التالية : $(E)\quad :\frac{1}{2}z^3-(1+i)z^2+2(1+i)z-4i=0$.

1) أ) بين أن المعادلة $(E)$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0$ يجب حديده.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط التالية:

$A(1+i\sqrt{3}) \ , \ B(1-i\sqrt{3}) \ , \ C(2i)$

أ) بين أن: $OA=OB$

ب) حدد لحق النقطة $D$ منتصف القطعة $[AC]$ وحدد قياسا للزاوية $(\vec{u};\vec{OD})$

ج) استنتج القيم المضبوطة للعددين : $\cos(\frac{5\pi}{12}) \ , \ \sin(\frac{5\pi}{12})$

د) لتكن $O'$ صورة $O$ بالدوران $R_1$ الذي مركزه $A$ وزاويته $\frac{-\pi}{2}$ و $B'$ صورة $B$ بالدوران $R_2$ الذي مركزه $A$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$. حدد لحقي $O'$ , $B'$

ه) لتكن $I$ منتصف القطعة $[OB]$ بين أن $(AI)$ ارتفاع في المثلث $AO'B'$

---

ليكن $a$ عددا عقدياً حيث $a\neq i$ ؛نعتبر $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , و $\bar{j}$ مرافقه

نعتبر الحدودية $P$ المعرفة بما يلي : $(\forall z\in C): P(z)=z^2+(a-i)z+(a-i)^2$

1) أ- تحقق أن : $P(z)=\left[z-(a-i)j\right]\times\left[z-(a-i)\bar{j}\right]$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$

2) في المستوى العقدي المنسوب إلى م,م,م نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها $z_A=i-a$ و $z_B=(a-i)j$ و $z_C=(a-i)\bar{j}$ على التوالي . نعتبر الدوران الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى C .

أ- حدد زاوية هذا الدوران r .

ب- إعط الكتابة العقدية للدوران r .

3) نفترض أن $a=1$

أ- حدد الشكل المثلثي للأعداد العقدية $z_A$ , $z_B$ , $z_C$ .

ب- حدد $d$ لحق النقطة $D$ بحيث يكون الرباعي $ABDC$ متوازي الأضلاع

ج- بين أن $(AD)\perp(BC)$ واستنتج طبيعة الرباعي $ABDC$

---

نعتبر المعادلة التالية في $\mathbb{C}$ , $(E);2z^2(1-\cos(2\theta))-2z\sin(2\theta)+1=0$ . حيث $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ .

1) حدد $z_1$ و $z_2$ حلي المعادلة /(E)

2) أكتب على الشكل المثلثي العد دين $z_1$ و $z_2$ ( ناقش حسب قيم $\theta$).

3) نعتبر النقط $A(\frac{e^{-i\theta}}{2\sin\theta}),B(\frac{e^{i\theta}}{2\sin\theta}),I(\frac{1}{2\sin\theta})$ .

أ- حد د المجموعة $\Sigma$ للأعد اد الحقيقية $\theta$من $\left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$بحيث يكو ن المثلث OAB متساوي الساقين و قائم الزاوية في O .

ب- أعط التمثيل العقدي للد وران الذي مركزه I و يحول A الى B .

---

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ الحدودية : $P(z)=z^3-z^2-(5+4i)z+21-12i$

1 ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ علما أن لها حلا حقيقيا .

2 ) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ .

لتكن $A$ و $B$ و $I$ النقط التي ألحاقها على التوالي : $z_A=3+2i$ و $z_B=-3$ و $z_I=1-2i$

أ - احسب : $Z=\frac{z_I-z_A}{z_I-z_B}$ واستنتج طبيعة المثلث $IAB$ .

ب - $z_c$ لحق النقطة $C$ صورة النقطة $I$ بالتحاكي التي مركزه $A$ ونسبته 2 .

ج - لتكن النقطة $D$ مرجح النظمة المتزنة $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$ . حدد لحق النقطة $D$ .

د - بين أن الرباعي $ABCD$ مربع .

3 ) حدد $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ التي لحقها $z$ بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$ وأنشئها .

4 ) حدد $(C)$ مجموعة النقط $M$ التي لحقها $z$ بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$ وأنشئها .

---

A)نعتبرفي المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3-(i\sqrt{2})z^2+z(-1+i\sqrt{3})+\sqrt{6}+(\sqrt{2})i=0$ $(E)$

1) بين أن المعادلة $E$ تقبل حلا تحليليا صرفا تحدده و أن : $(E)\Leftrightarrow(z-z_0)(z^2-1+i\sqrt{3})=0$

2 )حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $E$.

3 )بين أن النقط $M_0$ و $M_1$ و $M_2$ صور الحلول $z_0$ و $z_1$ و $z_2$ للمعادلة $(E)$،

في المستوى العقدي ، هي رؤوس مثلث قائم الزاوية ، و تنتمي إلى دائرة مركزها أصل المعلم.

B)1-أ.حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3=1$

ب.نعتبر العدد العقدي: $j=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

ج) تحقق أن : $1+j+j^2=0$ و أن $-j^2=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

2) -نعتبر الدوران $R$ الذي مركزه النقط $C$ ذات اللحق $c$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و الذي يربط كل نقطة $M$ لحقها $z$ بالنقطة $M'$ التي لحقها $z'$.

أ-بين أن $z'=-j^2z-jc$

ب-لتكن $A$ و $B$ نقطتين من المستوى العقدي لحقاهما على التوالي $a$ و $b$.بين أن المثلث $ABC$ متساوي الأضلاع إذا و فقط إذا كان: $a+bj+cj^2=0$ أو $a+bj^2+cj=0$

3)حدد مجموعة النقط $M$ التي لحقها $z$ ،من المستوى العقدي، بحيث تكون النقط $M(z)$ و $P(z-1)$ و $Q(z^2)$ مستقيمية.

---

المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ و $m$ عدد عقدي.

1) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E):z^2-(m-i\overline{m}+1-i)z-i|m-i|^2=0$

أ- تحقق أن مميز المعادلة هو : $\Delta=(m+i\overline{m}-1-i)^2$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$.

ج- بين أن $m$ ليس حلا للمعادلة $(E)$

2) في كل مايلي نفترض أن $m\neq i$ ونضع: $z_1=m-i$ و $z_2=1-i\overline{m}$

نعتبر في المستوى العقدي النقطتين $A(z_1)$ و $B(z_2)$

أ- بين أن $A\neq O$ و $B\neq O$ وأن $OB=OA$

ب- حدد مجموعة النقط $M(m)$ بحيث يكون $(OA)\perp(OB)$

ج- حدد مجموعة النقط $M(m)$ تكون النقط $O$ و $A$ و $B$ مستقيمية.

د- حدد القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ في الحالة $m=e^{i\frac{\pi}{3}}$

---

المستوى العقدي منسوب الى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ .

نعتبر التطبيق g المعرف من - $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ الى $\mathbb{C}$ بحيث : $g(z)=\frac{iz}{z-i}$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $g(z)=\frac{i}{z}$ .

2) أ- بين أن : $(\forall z\in IC-\{i\})\left(g(z)\in iIR\Leftrightarrow |z|^2=\mathrm{Im}(z)\right)$

ب- استنتج مجموعة النقط M(z) بحيث g(z) تخيلي صرف.

3) أ- بين أن المجموعة $C=\{M(z):|g(z)-i|=2\}$ هي دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها .

ب-بين أن المجموعة $D=\left\{M(z):\arg\left(g(z)-i\right)\equiv\frac{\pi}{3}\right\}$ هي نصف مستقيم محروم من النقطة A(i) .

ج- حدد تقاطع المجموعتين C و D .

4) نضع $z=e^{i\theta}$ حيث : $\theta\in[0,\pi[$ . حدد بدلالة $\theta$ معيار و عمدة العدد العقدي g(z) .

---

المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ .

نضع : $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و نعتبر النقط $A$ و $B$ و $C$ التي ألحاقها على التوالي $a=8$ و $b=6j$ و $c=8j^2$.

لتكن $A'$ صورة $B$ بالدوران $r_1$ الذي مركزه $C$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و $B'$ صورة $C$ بالدوران $r_2$ الذي مركزه $A$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$

و $C'$ صورة $A$ بالدوران $r_3$ الذي مركزه $B$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$ .

**1)-** أنشىء النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $A'$ ، $B'$ و $C'$ في المعلم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ .

**2)-** نضع : $a'$ و $b'$ و $c'$ ألحاق $A'$ ، $B'$ و $C'$ على التوالي .

**أ-** بين أن $a'$ عددا حقيقيا .

**ب-** بين أن : $b'=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ و إستنتج أن $O\in\left(BB'\right)$ .

**ج-** بين أن : $c'=7+7i\sqrt{3}$ .

**د-** بين أن المستقيمات $\left(AA'\right)$ و $\left(BB'\right)$ و $\left(CC'\right)$ تتلاقى في النقطة $O$ .

**3)-** **أ-** أحسب المسافة $OA+OB+OC$ .

**ب-** بين أن : $j^3=1$ و $1+j+j^2=0$ .

**ج-** نعتبر نقطة $M$ لحقها $z$ في المستوى العقدي $\left(\mathrm{P}\right)$ .

إستنتج أن : $\left|\left(a-z\right)+\left(b-z\right)j^2+\left(c-z\right)j\right|=\left|a+bj^2+cj\right|=22$ .

**د-** أثبت أن المسافة $MA+MB+MC$ دنوية عندما يكون $M=O$ .

---

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم \ $(o,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ الحدودية : $P(z)=z^3-z^2-(5+4i)z+21-12i$

1 ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ علما أن لها حلا حقيقيا .

2 ) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ .

لتكن $A$ و $B$ و $I$ النقط التي ألحاقها على التوالي : $z_A=3+2i$ و $z_B=-3$ و $z_I=1-2i$

أ ـ احسب : $Z=\frac{z_I-z_A}{z_I-z_B}$ واستنتج طبيعة المثلث $IAB$ .

ب ـ $z_c$ لحق النقطة $C$ صورة النقطة $I$ بالتحاكي التي مركزه $A$ ونسبته 2 .

ج ـ لتكن النقطة $D$ مرجح النظمة المتزنة $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$ . حدد لحق النقطة $D$ .

د – بين أن الرباعي $ABCD$ مربع .

3 ) حدد $(\Gamma)$ مجموعة النقط $M$ التي لحقها $z$ بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$ وأنشئها .

4 ) حدد $(C)$ مجموعة النقط $M$ التي لحقها $z$ بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$ وأنشئها .

---

ليكن $a$ عددا عقديا غير منعدم.

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(E_a):\quad z^3+\left(3-a^2\right)z+2i\left(1+a^2\right)=0$

°1) أ- تحقق من أن العدد $z_0=2i$ حل للمعادلة $\left(E_a\right)$

ب- حدد الحلين الآخرين $z_1$ و $z_2$ بحيث $z_1-z_2=2a$

°2) نعتبر فيما يلي النقط $M_0\left(z_0\right)$ ؛ $M_1\left(z_1\right)$ و $M_2\left(z_2\right)$

نفترض في هذه الفقرة أن: $|a|=1$ وليكن $I$ منتصف القطعة $\left[M_1M_2\right]$

أ- بين أن المسافة $M_1M_2$ والنقطة $I$ غير مرتبطان بالعدد $a$

ب- استنتج أن $M_1$ و $M_2$ تنتميان إلى دائرة ثابتة $(C)$ عندما يتغير $a$ في $\mathbb{C}^*$

ج- لتكن $A$ النقطة التي لحقها $a$. حدد قيم $a$ التي تكون من أجلها النقط $A$ ؛ $M_1$ و $M_2$ مستقيمية.

3°) أ- بين أن: $a \in IR \quad \Leftrightarrow \quad M_1M_0 = M_0M_2$

ب- حدد قيمة العدد $a$ علماً أن $M_2$ هي صورة $M_1$ بالدوران $R$ الذي مركزه $M_0$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

---

$I$- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E_a): 2z^2 + a(1-i)z + a^2(1-i) = 0$ حيث $a$ عدد عقدي غير منعدم.

1) أحسب $(a+3ia)^2$ .

2) حدد $z_1$ و $z_2$ حلي المعادلة $(E_a)$.

3)حدد معيارو عمدة كل من $z_1$ و $z_2$ بدلالة معيار و عمدة $a$ .

$II$- في المستوى العقدي $(P)$المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ،

نعتبر النقطتين $A$ و $B$ اللتيين لحقيهما على التوالي $a$ و $ia$ .

1) بين أن المثلث $OAB$ قائم الزاوية و متساوي الساقين.

2) ليكن $F$ التطبيق الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث: $z' = (1+i)z - ia$

أ- نفترض أن $M \neq A$ . بين أن $AM' = \sqrt{2}AM$ وحدد قياسا للزاوية الموجهة$(\overline{AM}, \overline{AM'})$.

ب- لتكن $(C)$ الدائرة التي مركزها $A$ و شعاعها $\sqrt{2}$.

بين أن صورة$(C)$ بالتطبيق $F$ هي دائرة $(C')$ محددا مركزها و شعاعها.

ج- نعتبر الدوران $r$ الذي مركزه $A$ و زاويته $-\frac{\pi}{4}$ و التطبيق $h = r \circ F$ .

حدد الصيغة العقدية للتطبيق $h$ و استنتج طبيعته و عناصره المميزة.

---

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - z(9+i\sqrt{3}) + 26 + 6i\sqrt{3} = 0 \quad : (E)$

1-أ- احسب : $(1-3i\sqrt{3})^2$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$

2-المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر $(o,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقطة A التي لحقها : $a = 5 - i\sqrt{3}$ و النقطة B بحيث OAB مثلث متساوي الأضلاع و $\overline{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

أ- بين أن لحق النقطة B هو: $b = 4 + 2i\sqrt{3}$

ب-استنتج لحق النقطة. I منتصف القطعة $[OB]$ .

ج-حدد $z_k$ لحق النقطة K بحيث يكون ABIK متوازي أضلاع .

3-أ-بين أن $\frac{z_k - a}{z_k}$ عدد تخيلي صرف. ماذا تستنتج بالنسبة للمثلث OAK ؟

ب-بين أن OAIK متوازي أضلاع .

ج-لتكن النقطة C التي لحقها $c = \frac{2a}{3}$ بين أن النقط B وC وK مستقيمية.

---

1) نعتبرفي مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة (e) التالية: $(e): 2z^2 + (3\sqrt{3}+i)z + 3 + i\sqrt{3} = 0$

ونسمي $z_1$ و $z_2$ حَلـَّي المعادلة (e) حيث $|z_1| < |z_2|$.

أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (e). (لاحظ أن $(\sqrt{3}-i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$)

ب) اكتب $z_1$ و $z_2$ على شكلهما المثلثي ثم تحقق أن $z_1$ هو جذر من الرتبة 12 للوحدة.

2) المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$ و $B(-i)$ و $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)$ و $D\left(-\sqrt{3}\right)$، ونسمي r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

أ) اكتب الصيغة العقدية للدوران r.

ب) أوجد لحق النقطة E صورة B بالدوران r.

ج) تأكد أن النقطة C هي صورة D بالدوران r.

3) بين أن النقطة E هي مرجح النظمة المتزنة $\{(A,2),(B,2),(C,-3)\}$.

---

ليكن $a$ عددا عقديا غير منعدم .

$\boxed{I}$ (1) أنشر العدد $\left[(1+a)i-a\right]^2$

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E):\ z^2+\left[(1-a)i-a\right]z+a+a^2i=0$

(2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(E)$

(3) بين أن المعادلة $(E)$تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{C}$ إذا وفقط إذا كان: $a=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$\boxed{II}$ نفترض أن $a\neq -1$ و $a\neq -i$ و $a\neq \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(o,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ ،

نعتبر النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ التي ألحاقها على التوالي هي: $a$ و $ai$ و $a-i$ و $-i$

(1) بين أن النقط $A$ و $B$ و $C$ مستقيمية إذا وفقط إذا كان $\arg(a)\equiv\frac{3\pi}{4}[\pi]$

(2) نفترض أن : $a=e^{i\theta}$ حيث $\theta\in]-\pi,\pi[$ و $\theta\neq\frac{3\pi}{4}$ و $\theta\neq-\frac{\pi}{2}$

(أ) أكتب العدد $a+1$ على الشكل المثلثي

(ب) نضع $u=\frac{z_C-z_D}{z_B-z_D}\div\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ استنتج العدد $u$ على الشكل المثلثي

(ج) أستنتج أن النقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ متداورة إذا وفقط إذا $\arg(a)\equiv\frac{\pi}{6}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$

(3) نفترض أن $a=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

(أ) ليكن $R$ الدوران الذي مركزه $D$ ويربط النقطة $C$ بالنقطة $B$ . حدد قياس زاوية الدوران $R$

(ب) أكتب الصيغة العقدية للدوران $R$

(ج) حدد لحق $A'$ صورة النقطة $A$ بالدوران $R$

---

## <u>الحسابيات في $\mathbb{Z}$</u>

في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$، نعتبر المعادلة: $11x-24y=1$ (E)

1) أ) بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

ب) باستعمال خوارزمية إقليدس، أوجد حلا خاصا للمعادلة (E).

ج) استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

2) أ) ليكن s عددا صحيحا طبيعيا. أثبت أن $10^s-1$ مضاعف للعدد 9.

ب) ليكن الزوج $(m,n)$ حلا للمعادلة (E). بين أن $\left(10^{11m}-1\right)-10\left(10^{24n}-1\right)=9$.

3) أ) بين أن $10^{11}-1$ يقسم $10^{11k}-1$ مهما يكن العدد الطبيعي k.

ب) استنتج وجود عددين صحيحين M و N بحيث $\left(10^{11}-1\right)M-\left(10^{24}-1\right)N=9$.

4) أ) بين أن كل قاسم مشترك للعددين $10^{24}-1$ و $10^{11}-1$ هو قاسم للعدد 9.

rahmounimaths

ب) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين $10^{24}-1$ و $10^{11}-1$.

---

ليكن $a$ و $b$ عددين نسبيين وغير منعدمين ، $a \wedge b$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين $a$ و $b$

(1) بين أنه إذا كان $a \wedge b = 1$ فإن $a \wedge \left[b\left(a+b\right)\right] = 1$

(2) نعتبر في $\mathbb{N}^{*2}$ المعادلة التالية : $\left(E\right): x^2+y^2+xy-31x=0$

وليكن $\left(x,y\right)$ حلا للمعادلة $\left(E\right)$ ، نضع $d = x \wedge y$

(أ) بين أنه يوجد زوج $\left(a,b\right)$ من $\mathbb{N}^{*2}$ و $a \wedge b = 1$ بحيث : $a\left(31-da\right) = bd\left(a+b\right)$

(ب) استنتج أن : $a$ يقسم $d$

(3) (أ) بين أنه يوجد عدد طبيعي $c$ غير منعدم بحيث : $c\left(a^2+b^2+ab\right) = 31$

(ب) استنتج $c = 1$

(4) استنتج حلول المعادلة $\left(E\right)$

---

نعتبر المعادلة: $\mathbf{2x-9y=17}$ $\quad (x,y)\in\mathbb{Z}^2$ $\quad \left(E\right)$

1) ليكن $(x,y)$ حلا للمعادلة $\left(E\right)$

بين أن: $\begin{cases} x \equiv 4 & [9] \\ y \equiv -1 & [2] \end{cases}$

2) استنتج حلول المعادلة $\left(E\right)$

3) نضع $d = x \wedge y$ حيث $(x,y)$ حل للمعادلة $\left(E\right)$

أ) بين أن: $(9k+4)\wedge(2k-1) = (k+8)\wedge 17$

ب) بين أن: $d = 1$ أو $d = 17$

ج) استنتج حلول النظمة: $\begin{cases} 2x-9y=17 \\ x \wedge y = 17 \end{cases}$

---

ليكن $p$ عددا أوليا بحيث: $p \geq 5$

نعتبر في المجموعة $IN^* \times IN^*$ المعادلة التالية: $\left(E\right): \quad px + y^{p-1} = 2011$

°1) تحقق من أن العدد 2011 أولي

°2) نفترض أن $\left(x;y\right)$ حل للمعادلة $\left(E\right)$

أ- بين أن العدد $p$ لا يقسم العدد $y$

ب- استنتج أن $p$ يقسم العدد 2010 ثم حدد قيم $p$

ج- حدد الزوج $\left(x;y\right)$ في الحالة $p = 67$ ( نأخذ: $\sqrt[66]{2011} \approx 1{,}12$ )

°3) حل المعادلة $\left(E\right)$ في الحالة $p = 5$

---

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $\left(F\right): 23x - 48y = 1$.

أ- بين أن المعادلة $\left(F\right)$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- باستعمال خوارزمية أقليدس ، حدد حلا خاصا للمعادلة $\left(F\right)$.

ج- بين أن مجموعة حلول المعادلة $\left(F\right)$ هي: $\left\{\left(-25+48k, -12+23k\right) / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2) ليكن $a$ و $b$ عدديين صحيحين طبيعيين .

أ- تحقق أن: $(23)^2 \equiv 1[48]$.

ب- بين أنه إذا كان $a^{23} \equiv b[91]$ و أن $a^{48} \equiv 1[91]$ فإن $b^{23} \equiv a[91]$.

3) نعتبر في $\mathbb{N}$ النظمة التالية: $(S):\begin{cases} n \equiv 8\,[23] \\ n \equiv 9\,[48] \end{cases}$.

بين أن: $n \equiv 537\,[1104]$ $\Leftrightarrow$ $n$ حل للنظمة $(S)$

4) حدد باستعمال مبرهنة فيرما باقي قسمة العدد $3^{48}$ على 91 .

---

نعتبر المعادلة $(E)\quad 289x-455y=13 \quad (x,y)\in\mathbb{Z}^2$

1- أ-بين أن $(x,y)$ حل للمعادلة $(E)$ يستلزم أن x مضاعف ل 13.

ب-نضع x=13k و $k\in\mathbb{Z}$. حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $289k\equiv 1[35]$ و $k\in\mathbb{Z}$

ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة $(E)$.

ج- حل المعادلة $(E)$ في $\mathbb{Z}^2$.

2-نضع $d=x\wedge y$ حيث $(x,y)$ حل للمعادلة $(E)$

أ- حدد القيم الممكنة للعدد d .

ب- حدد الحلول $(x,y)$ للمعادلة:$(E)$ بحيث x و y أوليان فيما بينها.

---

**1)** بين أن 163 عدد أولي

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $13x-162y=1$

3) نعتبر النظمة : $S:\begin{cases} x\equiv a\ [13] \\ x\equiv b\,[162] \end{cases}$ حيث $a$ و $b$ عددان من $\mathbb{Z}$

ا- تحقق أن العدد $x_0=325b-324a$ حل للنظمة $(S)$

ب- بين أن: $(S)\Leftrightarrow x\equiv x_0[2106]$

ت- حل في $\mathbb{Z}$ النظمة $(S)$ في الحالة $a=2$ و $b=3$

4) ليكن $x$ عددا من $\mathbb{Z}$ ونفترض أن : $x^{25}\equiv 3[163]$

أ- بين أن $x\wedge 163=1$ ثم أن : $x=3^{13}[163]$

ب- استنتج أن $x=3^{13}[163] \Leftrightarrow x^{25}\equiv 3[163]$

5) حدد العدد $x$ من $IN$ بحيث: $x^{25}\equiv 3[163]$ و $x\le 162$

---

نعتبـر المجموعة $A$ بحيث $A=\{n\in\mathbb{N}\setminus 1\le n\le 36\}$

1 - أ- حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة: $18x+37y=1$

ب- بين أنه يوجد عنصر وحيد $\alpha$ من $A$ بحيث : $18\times\alpha\equiv 1[37]$

2- بين أن : $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2 ......ab\equiv 0[37]\Rightarrow a\equiv 0[37]$ أو $b\equiv 0[37]$

3 -حدد مجموعة الأعداد $p$ من $A$ بحيث : $p^2\equiv 1[37]$

4 -أ- بين أن : $(\forall p\in A)(\exists\ q\in\mathbb{Z})......p\times q\equiv 1[37]$

ب – استنتج أن : $(\forall p\in A)(\exists! q\in A)......p\times q\equiv 1[37]$

5 - بين أن : $36!\equiv -1[37]$

---

نعبر في المجموعة $Z^2$ المعادلة التالية : $13x-30y=1$ $(E)$

1 ) تحقق أن الزوج $(-23;-10)$ حل للمعادلة $(E)$ .

2 ) حدد مجموعة حلول المعادلة $(E)$ في $Z^2$ .

3 ) استنتج أنه يوجد عدد وحيد $x_0$ من المجموعة $IN$ أصغر من 20 بحيث $13x_0 \equiv 1[30]$ .

4 ) ليكن $n$ من $IN$ . بين أنه إذا كان $n^{13} \equiv p[33]$ و $n^{30} \equiv 1[33]$ فإن $p^7 \equiv n[33]$

---

نعتبر النظمة : $(S):\begin{cases} n \equiv 13\ [19] \\ n \equiv 6\ [12] \end{cases}$ .

**1)- أ-** بين أنه يوجد زوج وحيد $(u,v)$ في $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $19u+12v=1$ ( تحديد $(u,v)$ غير مطلوب ) .

**ب-** تحقق أنه من أجل هذا الزوج $(u,v)$ العدد $N=13\times 19u+6\times 12v$ حل للنظمة $(S)$ .

**2)-** ليكن $n_0$ حلا للنظمة $(S)$ .

← تحقق أن : $(S)\Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0\ \ [19] \\ n \equiv n_0\ \ [12] \end{cases} \Leftrightarrow n \equiv n_0[12\times 19]$ .

**3)- أ-** حدد زوجا $(u,v)$ حل للمعادلة : $19u+12v=1$ و أحسب العدد $N$ المرتبط به .

**ب-** حدد مجموعة حلول النظمة $(S)$ ( باستعمال **2)-** ) .

**4)-** $n$ عدد صحيح طبيعي بحيث $6$ هو باقي القسمة الأقليدية ل $n$ على $12$ و $13$ هو باقي القسمة الأقليدية ل $n$ على $19$ .

← ما هو باقي القسمة الأقليدية ل $n$ على $12\times 19=228$ ؟

---

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلتين : $2x+5y=1000$ (E) و $2x^2+5y^2=1000$ (F)

1) حدد مجموعة حلول المعادلة (E) .

2) ليكن $(x_o,y_o)$ حلا للمعادلة (F) في $IN^2$ .

أ- بين أن : $x_o \equiv 0[5]$ و $y_o \equiv 0[2]$ .

ب- استنتج أن المعادلة : $5x^2+2y^2=100$ $(F_1)$ تقبل حلا $(x_1,y_1)$ في $IN^2$ .

ج- بين أن : $x_1 \equiv 0[2]$ و $y_1 \equiv 0[5]$

د- استنتج أن المعادلة : $2x^2+5y^2=10$ $(F_2)$ تقبل حلا في $IN^2$ .

ه- استنتج أن المعادلة $5x^2+2y^2=1$ تقبل حلا في $IN^2$ .

3) ما هي مجموعة حلول المعادلة (F) ؟

---

ليكن p عددا صحيحا طبيعيا أوليا يخالف 2 .

1) أثبت وجود عدد n من $IN^*$ بحيث : $4^n \equiv 1[p]$

2) نرمز ب q لأصغر عدد من $IN^*$ بحيث : $4^q \equiv 1[p]$ وليكن r باقي القسمة الاقليدية للعدد n على q .

أ- بين أن : $4^r \equiv 1[p]$

ب- استنتج أن r = 0 ثم أن q يقسم n . 3) حدد أصغر عدد صحيح طبيعي غير منعدم q يحقق $4^q \equiv 1[29]$

---

نعتبر $p$ عددا صحيحا أوليا حيث $p\geq 5$ .

1) أ) برهن أن $3|(2p-1)(p-1)$

ب) استنتج أن $6|(2p-1)(p-1)$

2) ليكن $x\in\mathbb{Z}$ حيث : $1\leq x\leq p-1$

أ)برهن أن : $x^2 \equiv 1[p] \Rightarrow (x=1)$ أو $(x=p-1)$

ب)نفترض أن: $x\neq 1$ و $x\neq p-1$ .بين أنه يوجد $y$ من $\mathbb{Z}$ حيث : $x \not\equiv y[p]$ و $xy\equiv 1[p]$

ج)استنتج أن : $(p-1)! \equiv -1[p]$

3) أ) برهن بالترجع أن: $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ب) نضع: $S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{(p-1)^2}=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{k^2}$ .

تحقق من أن : $((p-1)!)^2\times S\in\mathbb{N}$ ثم أثبت أن $p\,|\,((p-1)!)^2\times S$

---

نعبر في المجموعة $Z^2$ المعادلة التالية : $13x-30y=1$ $(E)$

1 ) تحقق أن الزوج $(-23;-10)$ حل للمعادلة $(E)$ .

2 ) حدد مجموعة حلول المعادلة $(E)$ في $Z^2$ .

3 ) استنتج أنه يوجد عدد وحيد $x_0$ من المجموعة $IN$ أصغر من 20 بحيث $13x_0\equiv1[30]$ .

4 ) ليكن $n$ من $IN$ . بين أنه إذا كان $n^{13}\equiv p[33]$ و $n^{30}\equiv1[33]$ فإن $p^7\equiv n[33]$

---

1) نعتبر المعادلة : $109x-226y=1$ : (E) بحيث $x$ و $y$ عددين صحيحين نسبيين.

أ) حدد pgcd(109,226) القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 و 226. ماذا تستنتج بالنسبة للمعادلة (E)؟

ب) بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي مجموعة الأزواج $(141+226k\ ;\ 68+109k)$ بحيث $k$ عدد صحيح نسبي.

ج) استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي وحيد غير منعدم $d$ أصغر من أو يساوي 226 وعدد صحيح طبيعي وحيد وغير منعدم $e$ بحيث : $109d=1+226e$ ، مع تحديد قيمتي كل من $e$ و $d$.

2) بين أن 227 عدد أولي.

3) نضع $A=\{a\in\mathbb{N}\,/\,a\le226\}$ ، ونعتبر التطبيقين $f$ و $g$ من A نحو A المعرفين بما يلي :

لكل $a$ من A، $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية لـ $a^{109}$ على 227.

لكل $a$ من A، $g(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية لـ $a^{141}$ على 227.

أ ) تحقق من أن : $g(f(0))=0$ .

ب) بين أنه لكل عنصر غير منعدم $a$ من A، لدينا $a^{226}\equiv1\ [227]$ .

ج) باستعمال السؤال 1) ب)، استنتج أنه لكل عنصر غير منعدم $a$ من A، لدينا : $g(f(a))=a$.

---

ليكن $p$ عددا أوليا بحيث $p\ge3$ .

نضع : $A_p=\{1;2;3;4;5;........;p-1\}$ وليكن $a$ عنصرا من $A_p$

1 - ا - تحقق من ان $a^{p-2}$ حل للمعادلة : $ax\equiv1[p]$ في $\mathbb{Z}$

ب - ليكن $r$ باقي القسمة الأقليدية لـ $a^{p-2}$ على $p$ . بين ان $r$ هو الحل الوحيد للمعادلة $ax\equiv1[p]$ في $A_p$

2 - حل في المجموعة $A_{29}$ المعادلتين $2x\equiv1[29]$ و $3x\equiv1[29]$

3 - برهن على ان : $y\equiv0[p]$ او $x\equiv0[p]$ $\Leftrightarrow xy\equiv0[p]$ لكل $x$ و $y$ من $\mathbb{Z}$

4 - حل في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $6x^2-5x+1\equiv0[29]$

---

ليكن $n\in IN^*$ نضع $a_n=4\times10^n-1$ ; $b_n=2\times10^n-1$ ; $c_n=2\times10^n+1$

1) أ) بين أن $a_n$ ; $c_n$ يقبلان القسمة على 3

ب) بين أن $b_3$ عدد أولي

ج) بين أن: $b_n\times c_n=a_{2n}$ ; $\forall n\in IN^*$

د) استنتج تفكيكا إلى جدا ء عوامل أولية لعدد $a_6$

2) بين أن : $b_n\wedge c_n=c_n\wedge2$ ; $\forall n\in IN^*$ ثم استنتج أن: $b_n\wedge c_n=1$ $\forall n\in IN^*$

3) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية : $b_3x+c_3y=1$ : $(E)$

أ) بين أن المعادلة $(E)$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{Z}^2$.

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E)$

---

ليكن $n$ عدداً طبيعيا بحيث $n \geq 9$ نعتبر العددين $a = \overline{1680}^{(n)}$ و $b = \overline{252}^{(n)}$

1) بين أن $n+2/a$ ; $n+2/b$

2) نضع $\alpha = \overline{21}^{(n)}$ و $\beta = \overline{14}^{(n)}$ و $d = \alpha \wedge \beta$

أ- بين أن $d/7$

ب- بين : $7/\beta$و $7/\alpha \Leftrightarrow 7/n-3$

3) بين أن $(2n+1) \wedge n = 1$

4) حدد $a \wedge b$ حسب قيم $n$

---

**حساب الاحتمالات**

نوزع بطريقة عشوائية أربع كرات غير قابلة للتمييز باللمس و مرقمة 1 و 2 و 3 و 4 على ستة أشخاص $A$ و $B$ و $C$ و $D$ و $E$ و $F$ .

( كل شخص يمكنه أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات )

1) ما هو عدد إمكانيات توزيع الكرات على الأشخاص الستة ؟

2) أحسب احتمال أن يحصل الشخص $A$ على كرة واحدة على الأقل ؟

3) ما هو احتمال أن يحصل $A$ على كرة واحدة بالضبط و أن يحصل الشخصين $B$ و $C$ معا على كرة واحدة بالضبط .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا أكبر أو يساوي 3 .

لدينا n صندوقا مرقما من 1 إلى n . الصندوق رقم k $(1 \leq k \leq n)$ يحتوي على k كرة بيضاء و $n-k$ كرة سوداء .

نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق ثم نسحب منه كرة واحدة.

1-احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء .

2- احسب احتمال أن يتم السحب من صندوق رقمه فردي.

3- احسب احتمال الحصول على كرة بيضاء ، علما أن السحب تم من صندوق رقمه فردي.

---

يحتوي صندوق على أربع كرات:كرة بيضاء و ثلاث كرات حمراء غير قابلة للتمييز باللمس .

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق ,نسجل لونها ,ثم نعيدها إلى الصندوق.

نجري نفس التجربة لمرات متتابعة إلى أن نحصل لأول مرة على كرتين متتابعتين من نفس اللون و نوقف التجربة . ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة السحبة التي توقفت فيها التجربة.

1) احسب احتمال كل حدث من الحدثين التاليين : $[X=2]$ و $[X=3]$

2) ليكن k عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

أ)بين أن احتمال الحدث $[X=2k]$ هو $p_{2k} = \frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$

ب)بين أن احتمال الحدث $[X=2k+1]$ هو $p_{2k+1} = \left(\frac{3}{16}\right)^{k}$

---

n عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 4 .

لدينا ثلاث صناديق $U_1$ و $U_2$ و $U_3$ .

الصندوق $U_1$ يحتوي على كرة حمراء واحدة و $(n-1)$ كرة سوداء.

الصندوق $U_2$ يحتوي على كرتين حمراوين و $(n-2)$ كرة سوداء.

الصندوق $U_3$ يحتوي على ثلاث كرات حمراء و $(n-3)$ كرة سوداء.

نعتبر التجربة العشوائية التالية: نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة ثم نسحب تآنيا كرتين من الصندوق الذي وقع عليه الاختيار.

ليكن X المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1-حدد قيم المتغير العشوائي X

2- أ) بين أن احتمال الحدث $\left(X=2\right)$ يساوي $\frac{8}{3n\left(n-1\right)}$

ب) بين أن احتمال الحدث $\left(X=1\right)$ يساوي $\frac{4\left(3n-7\right)}{3n\left(n-1\right)}$

ج) استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X

3-علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما هو احتمال أن يكون السحب قد تم من الصندوق $U_3$ ؟

---

## <u>التحليل</u>

**الجزء الأول:**

نعتبر الدالة $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة ب: $f\left(x\right)=\frac{1}{2\left(xe^{x}+1\right)}$

1- أ. بين أن $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ x+e^{-x}\geq 1$ ،ثم إستنتج $D$ حيز تعريف الدالة $f$ .

ب. أحسب نهايتي $f$ عند محدي $D$ .

2- أ. أحسب $f'\left(x\right)$ ثم إعط جدول تغيرات $f$ .

ب. أثبت أن المعادلة $f\left(x\right)=x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]0,1\right[$ .

ج. بين أن $\forall x\geq 0, e^{x}\left(4x^{2}e^{x}+5x-3\right)+4$ ،واستنتج أن : $\forall x\geq 0,\left|f'(x)\right|\leq\frac{2}{3}$

د. أنشئ $C$ ،منحنى $f$ في المستوى المنسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

**الجزء الثاني**

نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بمايلي: $\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=f\left(u_n\right)\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),0\leq u_n\leq 1$

2- أثبت أن $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),u_n\neq\alpha$

3- بين أن $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست رتيبة .

4- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن: $\forall n\in\mathbb{N},\left|u_{n+1}-\alpha\right|\leq\frac{2}{3}\left|u_n-\alpha\right|$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

**الجزء الثالث**

لتكن $F$ الدالة العددية المعرفة بمايلي: $F\left(x\right)=\int_{x}^{2x}f\left(t\right)dt$

1- أ. تحقق أن $F$ معرفة على $\mathbb{R}$ . و بين أن $\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ 0<f\left(t\right)<\frac{1}{2}e^{-t}$

ب. استنتج أن : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[\ ,\ 0\leq F\left(x\right)\leq\frac{1}{2}xe^{-x}$ و أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F\left(x\right)$ .

2- أ. بين أن: $\forall x\in\left]-\infty,-1\right[\ ,F\left(x\right)\leq\frac{1}{2}x$ و أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}F\left(x\right)$ .

ب. بين أن: $\forall t \in ]-\infty,-1[ \ ,0 < \dfrac{-te^t}{2(1+te^t)} < -te^t$

ج. استنتج أن: $\lim_{x\to-\infty}\left(F(x)-\frac{1}{2}x\right)$ و أول هندسيا النتيجة .

د. بين أن $F$ قابلة للإ شتقاق على $\mathbb{R}$ و أحسب $F'(x)$ .

---

نعتبر الدالة العددية $g_n$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي: $g_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$

حيث $n$ عدد صحيح طبيعي و $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة $g_n$ في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ .

**الجزء الأول:**

1) أ) احسب نهاية $g_n$ عند يؤول $x$ إلى $-\infty$.

ب) بين أن: $\lim_{x\to+\infty} x^k e^{-2x} = 0$ لكل عدد صحيح طبيعي $k$ و استنتج أن: $\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0$

2) درس تغيرات الدالة $g_n$ على $\mathbb{R}$ ثم أعط جدول تغيراتها.( ينبغي دراسة حالتي $n$ زوجي و$n$ فردي.)

3) أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_n)$ و $(\mathcal{C}_{n+1})$ .

ب) بين أن المنحنيات $(\mathcal{C}_n)$ تمر من نقطتين ثابتتين ينبغي تحديدهما.

ج) بين أن محور الأفاصيل مماس لجميع المنحنيات $(\mathcal{C}_n)$ .

4) ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$ بجوار $-\infty$. ( يمكن كتابة $\left(\frac{1-x}{x}\right)^n$ $\frac{g_n(x)}{x} = x^{n-1}e^{-2x} \times$ )

5) أنشئ في نفس المعلم المنحنيات $(\mathcal{C}_0)$ و$(\mathcal{C}_1)$ و $(\mathcal{C}_2)$.

**الجزء الثاني:**

لكل $n$ من $\mathbb{N}$ نعتبر التكامل المعرف بما يلي: $I_n = \int_0^1 g_n(x)\,dx$

1) احسب $I_0$ .

2) ادرس رتابة المتتالية العددية $(I_n)_n$.

3) ادرس إشارة $I_n$ ثم استنتج أن المتتالية $(I_n)_n$ متقاربة.

4) باستعمال الدالة $x \mapsto e^{-2x}$ بين أن لكل $n \in \mathbb{N}$ : $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ واستنتج $\lim_{n\to+\infty} I_n$ .

5) أ)باستعمال مكاملة بالأجزاء بين العلاقة: $2\,I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ .

ب) استنتج طريقة ثانية لتحديد: $\lim_{n\to+\infty} I_n$ .

ج) احسب النهايتين: $\lim_{n\to+\infty}(n+1)I_n$ و $\lim_{n\to\infty}(n+2)[1-(n+1)I_n]$ .

6) حدد مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنيين$(\mathcal{C}_0)$ و $(\mathcal{C}_2)$ والمستقيم ذو المعادلة : $x = 2$

---

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = 3x^2 + 1 - 2x^2.\ln x$

1) أحسب $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

2) أدرس تغيرات الدالة g .

3) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a في المجال $]0,+\infty[$

ب- تحقق أن : $4 < a < 5$ .

4) حدد اشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$ .

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{-1+\ln(x)}{1+x^2}$

1) أحسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ- بين أن : $(\forall x \in ]0,+\infty[);\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

ب- استنتج تغيرات الدالة f .

3) بين أن : $f(a)=\frac{1}{2a^2}$ واعط تأطيرا للعدد f(a) .

4) أنشئ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

III) نعتبر الدالة F المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $F(x)=\int_1^{\frac{1}{x}} f(t)dt$

1) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ .

ب- بين أن : $F'(x)=\frac{1+\ln x}{1+x^2}$

ج- استنتج تغيرات الدالة F .

2) باستعمال تغيير مناسب للمتغير بين أن : $(\forall x\in ]0,+\infty[);F(x)=F\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{2}+2Arc\tan x$

IV) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 3}$ المعرفة كما يلي : $u_n=\int_e^n f(t)dt=\int_e^n \frac{-1+\ln t}{1+t^2}dt$

1) بين أن المتتالية $(u_n)$ تزايدية .

2) بين أن : $(\forall n\geq 3);0\leq u_n\leq \frac{n-e}{2a^2}$ ( حيث a هو العدد المعرف في السؤال I)3)أ- )

3) أحسب : $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^2}$

---

لتكن $f_n$ الدالة المعرفة $]0 , +\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=x-n-n\frac{\ln x}{x}$ ، $n\in\mathbb{N}^*$ .

$(C_n)$ المنحنى الممثل للدالة $f_n$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، (الوحدة 2cm).

A) 1) احسب $f_n'(x)$ ، وبين أن إشارة $f_n'(x)$ هي إشارة $g_n(x)=x^2-n+n\ln x$ .

2) أ ) ادرس تغيرات $g_n$ وحدد نهايتها عند $+\infty$ وفي 0 ، واستنتج أن المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha_n$ في المجال $]0 , +\infty[$ .

ب) حدد إشارة $g_n(x)$ على $]0 , +\infty[$، واستنتج تغيرات $f_n$ .

3) ادرس نهايات $f_n$ عند محدات $]0 , +\infty[$.

4) بين أن المستقيم $(\Delta_n)$ ذا المعادلة $y=x-n$ مقارب مائل لـ $(C_n)$ وحدد الوضع النسبي لِـ $(C_n)$ و $(\Delta_n)$.

B) نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $]0 , +\infty[$ بما يلي : $h(x)=1+\frac{\ln x}{x}$.

1) أ ) ادرس تغيرات $h$ وحدد نهايتها عند $+\infty$ وفي 0 ، واستنتج أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ بحيث $\frac{1}{e}\leq\beta\leq 1$ .

ب) بين أن : $f_n(\beta)=\beta \;,\; \forall n\in\mathbb{N}^*$ .

ج) استنتج الوضع النسبي لـ $(C_{n+1})$ و $(C_n)$.

2) أنشئ في نفس العلم $(C_1)$ و $(C_2)$. (نأخذ $\alpha_1=1$ و $1,2<\alpha_2<1,3$ و $-1,24\leq f(\alpha_2)\leq -1,10$ ).

3) أ ) بين أن $h(x)=0 \Leftrightarrow x=e^{-x}$ .

ب) بين أن المعادلة $e^{-x}=x$ تقبل حلا وحيدا هو $\beta$ .

4) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} v_1=1 \\ v_{n+1}=e^{-v_n} \;,\; n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$.

أ ) بين أن : $\frac{1}{e}\leq v_n\leq 1 \;,\; \forall n\in\mathbb{N}^*$ .

ب) بين أن : $|v_{n+1}-\beta|\leq e^{-\frac{1}{e}}|v_n-\beta| \;,\; \forall n\in\mathbb{N}^*$ .

ج) استنتج أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربة محددا نهايتها.

---

**I)** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x}{x+e^x}$ , $\forall x\in\mathbb{R}^+$

و $(C_f)$ منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات $f$ على $\mathbb{R}^+$

2) حدد الفروع اللانهائية للمنحنى $(C_f)$

3) ارسم المنحنى $(C_f)$ في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$

**II)** ليكن $n$ من $\mathbb{N}^*$

1) بين أن المنحنى $(C_f)$ يقطع المستقيم $(\Delta): y=n(x-1)$ في نقطة وحيدة أفصولها $\alpha_n$ حيث: $\alpha_n \succ 1$

2) بين أن $(\alpha_n)$ تناقصية.

3) احسب: $\lim\alpha_n$

**III)** نعتبر الدالة $F$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $F(x)=\int_x^{2x} f(t)\,dt$

1) بين أن : $\forall t\in[0,1]$ , $1-t\le\dfrac{1}{1+t}\le 1-\dfrac{1}{2}t$

2) استنتج أن : $\forall t\ge 0$ , $1-\dfrac{t}{e^t}\le f(t)\le 1-\dfrac{1}{2}\dfrac{t}{e^t}$

3) أ) استنتج أنه توجد دالة $\varphi$ معرفة على $\mathbb{R}^+$ حيث : $\forall x\ge 0$ , $x-\varphi(x)\le F(x)\le x-\dfrac{1}{2}\varphi(x)$

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء , حدد $\varphi(x)$ بدلالة $x$

ج) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$

4) حدد الفرع اللانهائي لمنحنى $F$ بجوار $+\infty$

5) بين أن : $\forall x\ge 0$ , $F(x)\prec x$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة

6) احسب $F'(x)$ , $\forall x\ge 0$ ثم أعط جدول تغيرات $F$

7) ارسم منحنى $F$ في معلم متعامد ممنظم.

---

<u>الجزء الأول :</u>

نعتبر الدالة g المعرفة بـما يلي : $g(x)=\ln x-2(1-\dfrac{1}{x})$

1- أعط جدول تغيرات الدالة g على المجال $]0,+\infty[$

2- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]4,5[$

( نأخذ $0,6<\ln 2<0,7$ و $1,6<\ln 5<1,7$ )

3- احسب **$g(1)$** ثم ادرس إشارة **$g(x)$** على المجال **$]0,+\infty[$**

4- n عدد من **IN**

- بين أن المعادلة $g(x)=2e^{-\frac{2n}{n+1}}$ تقبل حلا وحيدا $u_n$ في المجال $]\alpha,+\infty[$

5- أ- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\ge 0}$ متتالية تناقصية قطعا

ب- بين أن D متتالية متقاربة ثم أن $\lim u_n=e^2$

## الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]0,+\infty\right[-\{1\}$ بما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{(\ln x)^2} \quad ; \quad x\in\left]0,+\infty\right[-\{1\} \\ f(0)=0 \end{cases}$$

و نرمز بـ (C) لمنحناها في معلم متعامد ممنظم .

1- أحسب : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- أ- بين أن f متصلة على اليمين في 0

ب - بين أن $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ و اعط تأويلا هندسيا

3- أ- بين أن إشارة $f'(x)$ على $\left]0,+\infty\right[-\{1\}$ هي إشارة $g(x)\ln x$

ب – اعط جدول تغيرات الدالة f

4- ارسم المنحنى $(C)$ نأخذ $\alpha\simeq4.5$ و $f(\alpha)\simeq1.5$ ) (تحديد نقط الانعطاف غير مطلوب )

## الجزء الثالث :

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $\left[0,+\infty\right[$ بـما يلي :

$$(\forall x\in\left]0,+\infty\right[):\ F(x)=\int_{e^x}^{e^{2x}}\frac{f(t)}{t}dt \quad \text{و} \quad F(0)=\ln 2$$

1- أ- بين أن : $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[):\ \displaystyle\int_{e^x}^{e^{2x}}\frac{dt}{t\ln t}=\ln 2$

ب- تحقق أن : $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[)(\forall t\in\left[e^x,e^{2x}\right]):\ \dfrac{e^x}{t\ln t}\le\dfrac{1}{\ln t}\le\dfrac{e^{2x}}{t\ln t}$

ج- استنتج أن : $\lim\limits_{x\to0^+}\displaystyle\int_{e^x}^{e^{2x}}\frac{dt}{\ln t}=\ln 2$

2- أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[):\ F(x)=\dfrac{e^x-1}{x}-\dfrac{e^{2x}-1}{2x}+\displaystyle\int_{e^x}^{e^{2x}}\frac{dt}{\ln t}$

ب- استنتج أن F متصلة على اليمين في 0

3- بين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $\left]0,+\infty\right[$ و أن :

$$(\forall x\in\left]0,+\infty\right[):\ F'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$$

4- أ- بين أن : $(\forall x\in\left[0,+\infty\right[):\ x+1\le e^x\le xe^x+1$

ب- استنتج أن : $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[):\dfrac{1}{2}\le F'(x)\le\dfrac{1}{2}e^{2x}$

ج- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[):\dfrac{1}{2}\le\dfrac{F(x)-F(0)}{x}\le\dfrac{1}{2}e^{2x}$

د- استنتج أن F قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أن $F'_d(0)=\dfrac{1}{2}$

5- أ- بين أن : $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[):\ \displaystyle\int_{e^x}^{e^{2x}}\frac{dt}{t(\ln t)^2}=\frac{1}{2x}$

ب- استنتج أن : $(\forall x\in\left]0,+\infty\right[):\ F(x)\ge\dfrac{e^x-1}{2x}$

ج- بين أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=+\infty$ 6 - ارسم منحنى الدالة F في معلم متعامد ممنظم.

---

المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة ب:
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{(\ln x-1)^2} \ ; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$\boxed{I}$ 1) بين أن مجموعة تعريف الدالة $f$ هي $[0;e[\cup]e;+\infty[$

2) بين أن الدالة $f$ متصلة في0 على اليمين

3) حدد $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ و أعط تأويلا هندسيا لذالك

4) بين أن $f$ قابلة للاشتقاق على $[0;e]$ و على $]e;+\infty[$ ثم بين أن:

$$\left(\forall x\in[0;e[\cup]e;+\infty[\right) \qquad f'(x)=\frac{(\ln x-1)(\ln x-2)}{(\ln x-1)^4}$$

5 ) أنشئ جدول تغيرات الدالة $f$

6) بين أن: $f([0e[)=f([0,1[)$

7) ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ مع المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ ثم أنشئ $(C_f)$

$\boxed{II}$

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي:
$$\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{e} \\ (\forall n\in IN) \quad u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$$

1) بين أن: $(\forall n\in IN) \ \ u_n\in]0;1[$

2) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ تناقصية

3) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in IN}$ متقاربة وحدد نهايتها

$\boxed{III}$

لكل $x$ من $[1,e[$ نضع: $F(x)=\int_1^x\frac{1}{(1-\ln t)^2}dt$ و $I(x)=\int_1^x\frac{1}{1-\ln t}dt$

1) بين أن: $(\forall x\infty[1;e[) \quad F(x)\geq I(x)$

2) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن: $I(x)=\frac{x^2}{2(1-\ln x)}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}F(x) \quad (\forall x\infty[1;e[)$

3) استنتج أن: $F(x)\geq\frac{x^2}{3(1-\ln x)}-\frac{1}{3} \quad (\forall x\infty[1;e[)$

4) استنتج النهاية: $\lim_{x\to e^-}F(x)$

---

نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{1}{t}e^{-t^2}dt \ ; x\neq0 \\ f(0)=\ln(2) \end{cases}$$

1-بين أن الدالة $f$ زوجية .

2-أ)بين أن $f$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و أن : $f'(x)=\dfrac{e^{-4x^2}}{x}(1-e^{3x^2})$

ب)استنتج منحى تغيرات الدالة $f$ على المجال $]0,+\infty[$ .

3-أ)بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\ e^x\geq x+1$

ب)استنتج أن : $\left(\forall t>0\right)\ \dfrac{1}{t}-t\leq\dfrac{1}{t}e^{-t^2}\leq\dfrac{1}{t}$

ج)بين أن : $\left(\forall x>0\right)\ \ln 2-\dfrac{3}{2}x^2\leq f(x)\leq\ln 2$

د)بين أن $f$ متصلة و قابلة للإشتقاق في 0 .

4-أ) بين أن : $\left(\forall x\geq 1\right)\ 0\leq f(x)\leq\dfrac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}$

ب)استنتج نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$.

5-أ)أعط جدول تغيرات الدالة $f$ على $\mathbb{R}$.

ب)ارسم المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم .

---

في كل التمرين $n$ يرمز لعدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 2 .

نعتبر $f_n$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n\left(x\right)=\dfrac{x}{n}-e^{-nx}$ .

ليكن $\left(C_n\right)$ التمثيل المبياني للدالة $f_n$ في معلم متعامد ممنظم $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ .

1) أ ـ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n\left(x\right)$ .

ب ـ أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $\left(C_n\right)$ .

2) أحسب $f'_n\left(x\right)$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة $f_n$ .

3) أ ـ بين أن المعادلة $f_n\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha_n$ .

ب ـ بين أن $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)<0$ .

ج ـ بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)\ e^x\geq x+1$ . استنتج أن : $f_n\left(1\right)>0$ .

د ـ بين أن : $\dfrac{1}{n}<\alpha_n<1$ .

4) أنشئ المنحنى $\left(C_2\right)$ . ( نأخذ $\alpha_2\approx 0{,}6$ )

5) أ ـ بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي $n$ أكبر أو يساوي 2 ، لدينا : $f_{n+1}\left(\alpha_n\right)=\dfrac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)}\left(e^{\alpha_n}-\dfrac{1}{n}-1\right)$

ب ـ استنتج أن : $f_{n+1}\left(\alpha_n\right)\geq 0$ $\quad\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right)$ .

ج ـ بين أن المتتالية $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 2}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .

6) أ ـ باستعمال السؤال 3) د- ، بين أن : $\dfrac{1}{n^2}<e^{-n\alpha_n}<\dfrac{1}{n}$ $\quad\left(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\right)$.

ب - استنتج أن : $\frac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < \frac{2\ln(n)}{n}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\right)$ .

ج - حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$ .

---

I/ نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\mathbf{g(x)} = 1 + \mathbf{(x-1)e^x}$

1- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ : $\mathbf{g(x)} \geq 0$

2- بين أن x=0 هو الحل الوحيد للمعادلة g(x)=0

II/ لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \ ; \ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}; \vec{j})$

1- احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) + x\right)$ .

2- بين أن الدالة f متصلة في 0 .

3- أ) احسب $f'(x)$ من اجل كل عنصر x من $\mathbb{R}^*$ .

ب) استنتج تغيرات الدالة f .

4- نعتبر التكامل $J(x) = \int_0^x te^{-t}dt$ حيث x عدد حقيقي.

أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $J(x) = e^{-x}(e^x - 1 - x)$

ب) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$ : $\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}$

ج) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$ : $\frac{1}{2} e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\frac{x+|x|}{2}}$

د) استنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق في 0 و أن $f'(0) = -\frac{1}{2}$

5 – أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$ : $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}\left(e^x(x-2) + 2 + x\right)$ .

ب) ادرس إشارة $e^x(x-2) + 2 + x$ لكل x من $\mathbb{R}$ .

ج) استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}^*$ : $f''(x) > 0$

د) أنشئ (C) .

III/ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و لكل n من $\mathbb{N}$ : $u_{n+1} = f(u_n)$

1- بين أن x=ln2 هو الحل الوحيد للمعادلة : f(x)=x .

2-أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^+$ : $\left|f'(x)\right| \leq \frac{1}{2}$.

ب) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ : $\left|u_{n+1} - \ln 2\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_n - \ln 2\right|$

ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وحدد نهايتها .

IV/ لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$$\begin{cases} F(x)=\int_x^{2x}\frac{t}{e^t-1}\,dt\ ;\ x\neq 0 \\ F(0)=0 \end{cases}$$

1- أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$ : $\frac{2x^2}{e^{2x}-1}\leq F(x)\leq\frac{x^2}{e^x-1}$

ب) بين أن الدالة F متصلة في 0 .

ج) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق في 0 وأن : $F'(0)=1$

2 -أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ وأن لكل x من $\mathbb{R}^*$ : $F'(x)=\frac{3-e^x}{e^x+1}f(x)$ .

ب)ادرس تغيرات الدالة F .

---

I /1- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x)=1+x-e^{-x}$

أ) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$ .

ب) احسب $\lim_{x\to-\infty}g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ وضع جدول تغيرات g .

ج) استنتج أن $x_0=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة g(x)=0 .

2- لتكن f الدالة العددية المعرفة على *$\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\frac{1}{1+x-e^{-x}}$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ) احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)$ و $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)$

ب) احسب $f'(x)$ لكل x من *$\mathbb{R}$ .

ج) ضع جدول تغيرات الدالة f .

د) أنشئ (C) .

3- أ) ليكن n من *$\mathbb{N}$ . بين أن المعادلة : $f(x)=n$ تقبل حلا وحيدا $x_n$ في المجال $]0;+\infty[$ .

ب) بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq1}$ تناقصية وأنها متقاربة .

ج) أثبت أن : $\lim_{n\to+\infty}x_n=0$

II/ 1- أ) بين أن المعادلة $\mathbf{f(x)=1}$ تكافئ المعادلة $e^{-x}=x$

ب) بين أن المعادلة $e^{-x}=x$ تقبل حلا وحيدا هو $\alpha=x_1$ وأن : $\frac{1}{e}\leq\alpha\leq1$

2- نعتبر المتتالية $(y_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي : $y_1=1$ و $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ y_{n+1}=e^{-y_n}$

أ) بين أن لكل n من*$\mathbb{N}$ : $\frac{1}{e}\leq y_n\leq1$

ب) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ |y_{n+1}-\alpha|\leq e^{-\frac{1}{e}}|y_n-\alpha|$

ج) استنتج أن $(y_n)_{n\geq1}$ متقاربة محددا نهايتها.

III/ لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $F(0)=\frac{1}{2}\ell n2$ و $\forall x>0\ ;\ F(x)=\int_x^{2x}f(t)\,dt$

1- أ) بين أن : $\forall t>0\ ;\ \frac{1}{1+t}\leq f(t)\leq\frac{1}{t}$

ب) استنتج $\lim_{x\to+\infty}F(x)$

2-أ) بين أن : $1-t \le e^{-t} \le 1-t+\frac{t^2}{2} \qquad (\forall t \ge 0)$

ب) بين أن لكل t من المجال $]0;4[$ : $\frac{1}{2t} \le f(t) \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{4-t}\right)$

ج) استنتج أن F متصلة على اليمين في 0 .

3-أ) بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ واحسب $F'(x)$ من أجل $x>0$

ب) ادرس تغيرات F على $\mathbb{R}_+$ .

---

I – لتكن $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $f(x)=2x-e^{-x^2}$

و ليكن $(C)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ .

1) أ) احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

ب)احسب $f'(x)$ لكل $x$ من $\mathbb{R}_+$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة $f$

ج) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}_+$ و أن $0<\alpha<1$

د) ادرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0,1]$

2) أنشئ المنحنى $(C)$. (نأخذ : $\alpha \approx 0,4$ )

II – نعتبر الدالتين العدديتين $\varphi$ و $g$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفتين على $\mathbb{R}_+$ بما يلي :

$$\begin{cases}\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt \;;\; x>0\\ \varphi(0)=1\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=x^2-\int_0^x e^{-t^2}dt$$

1) أ)بين أن : $\frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-c^2}$ : $\left(\exists c\in]0,x[\right)\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$

ب) استنتج أن : $\int_0^1 e^{-t^2}dt<1$

2) أ) بين أن: $g(\alpha)=\int_0^\alpha f(t)dt$

ب)بين أن الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ و أن: $g'(x)=f(x) \;;\; \left(\forall x\in\mathbb{R}_+\right)$

ج) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ في المجال $]\alpha,1[$

3) أ)بين أن الدالة $\varphi$ متصلة على اليمين في الصفر.

ب)باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $\varphi(x)=e^{-x^2}+\frac{2}{x}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt \;;\; \left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$

ج) بين أن الدالة $\varphi$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و أن: $\varphi'(x)=-\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2e^{-t^2}dt \;;\; \left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$

د) بين أن : $\varphi\left([0,1]\right)\subset[0,1]$

4) أ) بين أنه لكل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}_+$ لدينا : $\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\le\frac{x^3}{3}$

ب) بين أن : $\left|\varphi'(x)\right|\le\frac{2}{3} \;;\; \left(\forall x\in]0,1[\right)$

ج) بين أن : $\varphi(x)=x \Leftrightarrow g(x)=0 \;;\; \left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$

5) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_0=\frac{2}{3}$ و $u_{n+1}=\varphi(u_n)$ ; $(\forall n\in\mathbb{N})$

أ)بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 0\leq u_n\leq 1$

ب) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ |u_n-\beta|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ج) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة و حدد نهايتها.

---

I

I- نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $I=\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ بما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x}\ ;\ x\neq 0\\ f(0)=2\end{cases}$

ليكن $(C)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) بين أن الدالة $f$ متصلة في الصفر .

2) لكل عدد حقيقي غير منعدم $a$ من المجال $I$ نعتبر الدالة العددية $h_a$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $I$ بما يلي: $h_a(x)=(\ln(1+2a)-2a)x^2-(\ln(1+2x)-2x)a^2$

أ)احسب $h_a(a)$ و $h_a(0)$ ثم استنتج أنه يوجد عدد حقيقي $b$ محصور بين 0 و $a$ بحيث:

$$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$

ب)استنتج أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق في الصفر و أن : $f'(0)=-2$ .

3) أ)بين أن الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $I\setminus\{0\}$

و أن: $(\forall x\in I\setminus\{0\})\ ;\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(1+2x)}$ حيث: $g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$

ب)بين أن : $(\forall x\in I\setminus\{0\})\ ;\ g(x)<0$

ج)استنتج تغيرات الدالة $f$ على المجال $I$ .

4) أ)احسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to -\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما.

ب)بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ من المجال $[1,2]$ بحيث : $f(\alpha)=1$

ج)أنشئ المنحنى $(C)$ (نأخذ : $\alpha\approx 1,3$ )

II- 1) نضع : $J=[1,\alpha]$ و $\varphi(x)=\ln(1+2x)$ $(\forall x\in I)$ .

أ) بين الدالة $\varphi$ قابلة للاشتقاق على المجال $I$ و أن : $0<\varphi'(x)\leq\frac{2}{3}$ ; $(\forall x\geq 1)$

ب) تحقق أن : $\varphi(\alpha)=\alpha$ و أن : $\varphi(J)\subset J$

2) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=\ln(1+2u_n)$ ; $(\forall n\geq 0)$

أ)بين أن : $(\forall n\geq 0)\ ;\ u_n\in J$

ب)بين أن : $(\forall n\geq 0)\ ;\ |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$

ج)استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها.

III-نعتبر الدالة العددية $F$ المعرفة على المجال $I$ بما يلي: $F(x)=\int_0^x f(t)dt$

1) أ)بين أن الدالة $F$ قابلة للاشتقاق على المجال $I$ ثم أحسب $F'(x)$
ب)استنتج منحى تغيرات الدالة $F$ على المجال $I$ .
2) أ) بين أن : $(\forall x \geq 1)\ ;\ F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}dt$
ب) استنتج أن : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$
3) نفترض أن الدالة $F$ تقبل نهاية منتهية $\ell$ على اليمين في $-\frac{1}{2}$

ونعتبر الدالة $F$ المعرفة على المجال $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ بما يلي:
$$\begin{cases} F(x) = F(x)\ ;\ x \in I \\ F\left(-\frac{1}{2}\right) = \ell \end{cases}$$

أ) باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $(\forall x \in I)\ ;\ F(x) - \ell \geq f(x)\left(x + \frac{1}{2}\right)$
ب) استنتج أن الدالة $F$ غير قابلة للاشتقاق على اليمين في $-\frac{1}{2}$

---

$n$ عدد صحيح طبيعي غير منعدم.
نعتبر الدالة العددية $f_n$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي:
$$f_n(0) = 0 \quad \text{و} \quad f_n(x) = x(1-\ln x)^n \quad \text{من أجل } x > 0$$
ليكن $(C_n)$ المنحنى الممثل للدالة $f_n$ في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**الجزء الأول**

1- أ) بين أن الدالة $f_n$ متصلة على اليمين في 0 .(يمكنك وضع $x = t^n$ )
ب)ادرس قابلية اشتقاق الدالة $f_n$ على اليمين في 0
ج) حدد النهايات: $\lim_{x\to+\infty} f_1(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ و $\lim_{x\to+\infty} f_2(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x}$

2- أ) ادرس تغيرات الدالة $f_1$
ب) ادرس تغيرات الدالة $f_2$

3- أ) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(C_1)$ و $(C_2)$
ب) أنشئ المنحنيين $(C_1)$ و $(C_2)$ .(نقبل أن $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى $(C_2)$ )
(نأخذ : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ )

**الجزء الثاني**

نعتبر الدالة العددية $F$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $]-\infty,0]$ بما يلي : $F(x) = \int_{e^x}^{1} \frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

1- أ) بين أن الدالة $F$ قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty,0[$ و أن : $(\forall x < 0) \quad F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$
ب) استنتج منحى تغيرات الدالة $F$ على المجال $]-\infty,0]$

2- أ) بين أن: $\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt \leq F(x) \leq \frac{1}{2}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt \quad (\forall x < 0)$

ب) تحقق أن الدالة $x \to x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{\ln x}{2}\right)$ هي دالة أصلية للدالة $f_1$ على المجال $]0,+\infty[$

ج) بين أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{e^x}^{1} f_1(t)dt=\frac{3}{4}$

3- نفترض أن الدالة $F$ تقبل نهاية منتهية $\ell$ عندما يؤول $x$ إلى $-\infty$. بين أن: $\frac{3}{8}\le\ell\le\frac{3}{4}$

## الجزء الثالث

لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم $n$ نضع : $u_n=\int_1^e f_n(x)dx$

1- أ) بين أن : $u_n\ge 0 \quad (\forall n\ge 1)$

ب) حدد إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $[1,e]$

ج) بين أن: $u_{n+1}\le u_n \quad (\forall n\ge 1)$

د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة

2- أ) بين أن: $u_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}u_n \quad (\forall n\ge 1)$

ب) استنتج بالسنتمتر المربع $(cm^2)$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنيين $(C_1)$ و $(C_2)$ والمستقيمين الذين معادلتيهما على التوالي $x=1$ و $x=e$

3- أ) بين أن: $\frac{1}{n+1}\le u_n\le\frac{1}{n-1} \quad (\forall n\ge 2)$ (يمكنك استعمال الأسئلة: 1-أ) و1- ج) و 2- أ) )

ب) حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}nu_n$

4- $a$ عدد حقيقي مخالف للعدد $u_1$ .

نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ المعرفة بما يلي: $v_1=a$ و $v_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}v_n \quad (\forall n\ge 1)$

و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم $n$ نضع: $d_n=|v_n-u_n|$

أ) بين أن: $d_n=\frac{n!}{2^{n-1}}d_1 \quad (\forall n\ge 1)$

ب) بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}d_n=+\infty$

ج) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\ge1}$ متباعدة .

---

I- نعتبر الدالة العددية $g$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $g(x)=2(1-e^{-x})-x$

1) أ ـ ادرس تغيرات الدالة $g$

ب ـ ضع جدول تغيرات الدالة $g$

2) أ ـ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]\ln 4,\ln 6[$

( نأخذ $\ln 2\approx 0,7$ و $\ln 3\approx 1,1$ )

ب ـ ادرس إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^+$

3)نعتبر المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=2(1-e^{-u_n})$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

أ- بين أن $1\le u_n<\alpha$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

ب - بين أن $u_{n+1}-u_n=g(u_n)$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$

ج - بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا .

د- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

II - نعتبر الدالة العددية $f$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{1-e^x}{x^2}$

ليكن $(C)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

2) أ - تحقق أن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$

ب - بين أن $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{x^3}$ لكل $x$ من $\mathbb{R}_+^*$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة $f$

3) أنشئ $(C)$ ( نأخذ $\alpha\approx 1,5$ )

III - نعتبر الدالة العددية $F$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(0)=-\ln 2 \quad \text{و} \quad F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^t}{t^2}dt \quad (\forall x>0)$$

1) أ - باستعمال مكاملة بالأجزاء , بين أن: $F(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2x}-\dfrac{e^x-1}{x}-\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt \quad (\forall x>0)$

ب - بين أن لكل $x$ من $]0,+\infty[$ : $e^x\ln 2\leq \displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^{2x}\ln 2$

ج - احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$ ثم استنتج أن الدالة $F$ متصلة على اليمين في الصفر .

2) أ - بين أن لكل $x$ من $]0,+\infty[$ : $F(x)\leq\dfrac{1-e^x}{2x}$

بـ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

3) بين أن $F$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و أن : $F'(x)=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^2 \quad (\forall x>0)$

4) أ- ليكن $x$ من المجال $]0,+\infty[$ .

بين أنه يوجد c من المجال $]0,x[$ بحيث: $F(x)-F(0)=-\dfrac{1}{2}xe^{2c}$

(يمكنك استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية مرتين)

ب - أثبت أن لكل $x$ من $]0,+\infty[$ : $-\dfrac{1}{2}e^{2x}\leq\dfrac{F(x)-F(0)}{x}\leq-\dfrac{1}{2}$

ج- استنتج أن $F$ قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر و أن $F_d'(0)=-\dfrac{1}{2}$

---