Nom : ……………………………… **; Prénom :** ……………………………… **Filières : LEM, LEI** **; N° Apogée :** ………………………………	**Note :** 20/20

ELECTRICITE

SOLUTION CONTRÔLE N° : 3

Une distribution volumique de charges **constante ρ** est comprise entre deux sphères S_1 et S_2 concentrique de centre O, de rayon respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$).

1. Calculer le champ électrique $\vec{E}$ crée par cette distribution en tout point de l'espace :

On a $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ et $\overrightarrow{dS} = dS\,\vec{n}$

$\vec{n}$: vecteur normal à la sphère ➔ $\vec{n} \,//\, \vec{e}_r$

⇨ $\vec{E}.\overrightarrow{dS} = E(r).dS$

⇨ Sg : Surface de Gauss = Sphère de rayon r et de centre O.

Théorème de Gauss :

⇨ $\emptyset = \iint_{Sg} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

⇨ Q_{int} = la charge à l'intérieur de S_g

a. Calculer le flux ϕ qui traverse la surface de Gauss :

⇨ $\emptyset = \iint_{Sg} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint_{Sg} E(r).dS$

E est constant sur Sg ➔ $\emptyset = E(r)\iint_{Sg} dS$

En coordonnées sphérique : $dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

⇨ $\emptyset = E(r) r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

===> $\boxed{\emptyset = 4\pi\, r^2 E(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$

b. Le champ $\vec{E}(M)$ en tout point pour r < R_1 :

$Q_{int} = 0$ ➔ $4\pi r^2 E(r) = 0$

⇨ $E(r) = 0$ ➔ $\boxed{\vec{E}(r) = \vec{0}}$

c. Le champ $\vec{E}(M)$ en tout point pour R1< r < R2 :

On a $dq = \rho\, dV$

⇨ $Q = Q_{int} = \iiint \rho dV = \rho \iiint dV$

En coordonnées sphérique : $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

⇨ $Q_{int} = \rho \int_{R_1}^{r} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

⇨ $Q_{int} = \rho \int_{R_1}^{r} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho.4\pi\left(\frac{r^3}{3} - \frac{R_1^3}{3}\right)$

⇨ $\emptyset = 4\pi\, r^2 E(r) = \dfrac{\rho.4\pi\left(\frac{r^3}{3}-\frac{R_1^3}{3}\right)}{\varepsilon_0}$ ➔ $\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3} - \frac{R_1^3}{3r^2}\right)\vec{e}_r}$

d. Le champ $\vec{E}(M)$ en tout point pour r > R2 :

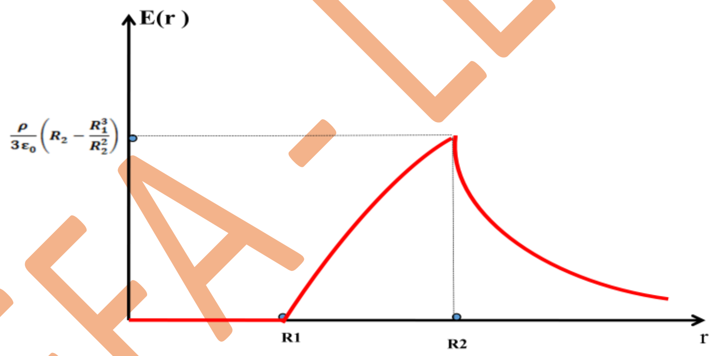
⇨ $Q_{int} = \rho \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi$

⇨ $Q_{int} = \rho \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho.4\pi\left(\frac{R_2^3}{3} - \frac{R_1^3}{3}\right)$

$\emptyset = 4\pi\, r^2 E(r) = \dfrac{\rho.4\pi\left(\frac{R_2^3}{3}-\frac{R_1^3}{3}\right)}{\varepsilon_0}$ ➔ $\boxed{E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}(R_2^3 - R_1^3)\vec{e}_r}$

e. La courbe de E(r) :

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R1 \\ \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{r}{3} - \dfrac{R_1^3}{3r^2}\right) & R1 < r < R2 \\ \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}(R_2^3 - R_1^3) & r > R2 \end{cases}$$



2. Le potentiel électrique V(r) crée par cette distribution en tout point de l'espace :

On a $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r$

⇨ $V = -\int E(r).dr$

a. Pour r > R2 :

$$V = -\int E(r).dr = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}(R_2^3 - R_1^3)dr$$

$$V = -\int E(r).dr = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}(R_2^3 - R_1^3)\int \frac{dr}{r^2}$$

$$V(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r}(R_2^3 - R_1^3) + k_1$$

Or $V(\infty) = 0 \Rightarrow k_1 = 0$

Donc $\boxed{V(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0\, r}(R_2^3 - R_1^3)}$

b. Pour $R_1 < r < R_2$:

$$V(r) = -\int E(r).dr = -\int \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)dr$$

$$V(r) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\int r dr - \int \frac{R_1^3}{r^2}dr\right]$$

$$= -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}\right] + k_2$$

Continuité du potentiel $\Rightarrow V(R_2^+) = V(R_2^-) \Rightarrow V(r > R_2) = V(R_1 < r < R_2)$

avec $r = R_2$

⇨ $-\frac{\rho}{3\varepsilon_0 R_2}(R_2^3 - R_1^3) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2}\right] + k_2$

⇨ $k_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R_2^3}{R_2} - \cancel{\frac{R_1^3}{R_2}} + \frac{R_2^2}{2} + \cancel{\frac{R_1^3}{R_2}}\right] = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[R_2^2 + \frac{R_2^2}{2}\right] = \frac{\rho 3R_2^2}{3\varepsilon_0 2} = \frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0}$

===> $\boxed{V(r) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}\right] + \frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0}}$

c. Pour $r < R_1$:

$E(r) = 0 \Rightarrow dV(r) = 0 \Rightarrow V(r) = k_3$

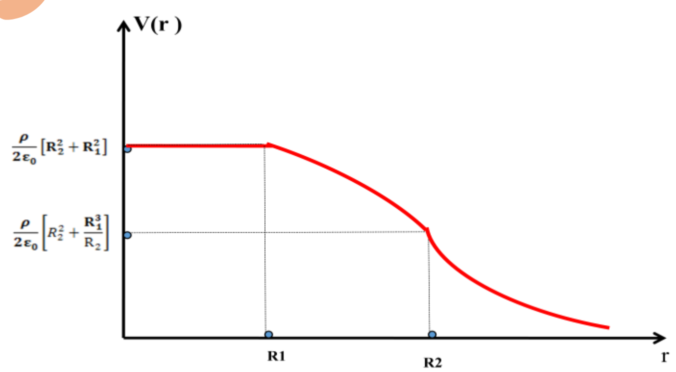
$V(r) = k_3 = V(R_1^+) = V(R_1^-) \Rightarrow V(r < R_1) = V(R_1 < r < R_2)$

avec $r = R_1$

⇨ $k_3 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_1}\right] + \frac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[R_2^2 + R_1^2\right]$

===> $\boxed{V(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left[R_2^2 + R_1^2\right]}$

d. La courbe de V(r) :



3. Si l'on fait tendre R_1 vers R_2, la charge totale se trouve alors répartie sur la surface d'une sphère de rayon R_2.

a. L'expression de ρ en fonction de R_1, R_2 et σ /

Lorsque $R_1 \rightarrow R_2$ ===> Q(entre les deux sphères) = Q' (Sphère S_2)

La charge ===> $\rho.V = \sigma.S$ ===> $\rho = \frac{\sigma.S}{V}$

On a : $Q = \rho \iiint dV = \boldsymbol{\rho} \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)$

$Q' = \sigma \iint dS = \sigma 4\pi R_2^2$

===> $\boxed{\boldsymbol{\rho = \frac{3\sigma R_2^2}{(R_2^3 - R_1^3)}}}$

b. L'expression du champ électrique crée par cette distribution :

- **E(r) si $\mathbf{r > R_2 = R_2}$**

$$\mathbf{E(r)} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0\, r^2}(R_2^3 - R_1^3) = \frac{3\sigma R_2^2}{(R_2^3 - R_1^3)} \cdot \frac{1}{3\varepsilon_0\, r^2}(R_2^3 - R_1^3)$$

===> $\boxed{\mathbf{E(r)} = \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0\, r^2}}$

- **E(r) si $\mathbf{r < R_2 = R_2}$**

===> $\boxed{\mathrm{E(r) = 0}}$

c. L'expression du potentiel électrique crée par cette distribution :

- **V(r) si $\mathbf{r > R_2 = R_2}$**

$$\mathbf{V(r)} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0\, r}(R_2^3 - R_1^3) = \frac{3\sigma R_2^2}{(R_2^3 - R_1^3)} \cdot \frac{1}{3\varepsilon_0\, r^2}(R_2^3 - R_1^3)$$

===> $\boxed{\mathbf{V(r)} = \frac{\sigma R_2^2}{\varepsilon_0\, r}}$

- **V(r) si $\mathbf{r < R_2 = R_2}$**

$$\mathbf{V(r)} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2) = \frac{3\sigma R_2^2}{(R_2^3 - R_1^3)} \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0}(R_2^2 - R_1^2)$$

===> $\mathbf{V(r)} = \frac{3\sigma R_2^2}{2\varepsilon_0} \frac{R_1 + R_2}{R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2}$

Or $R_1 = R_2$ ===> $\boxed{\mathbf{V(r)} = \frac{\sigma R_2}{\varepsilon_0}}$