Université Ibn Zohr
Faculté des sciences
Département de Mathématiques

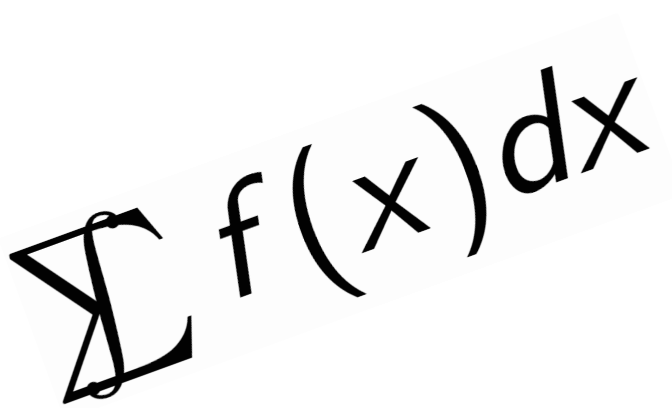
Année universitaire
2018 - 2019
F. MARAGH

Cours de Mathématiques 2

Module Analyse 2 - Intégration

Semestre 2

Filières SMA - Sciences Mathématiques et Applications

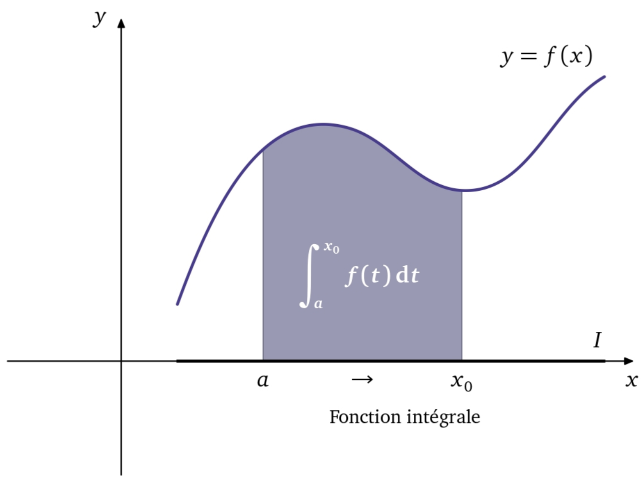


Professeur. Fouad Maragh

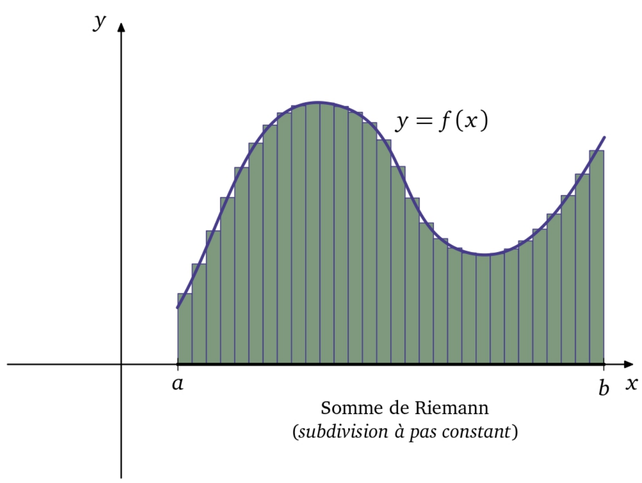
Table des matières

1 Intégrale de Riemann.

En analyse réelle, l'intégrale de Riemann est une façon assez simple de définir l'intégrale, sur un segment, d'une fonction réelle bornée et presque partout continue. En termes géométriques, cette intégrale s'interprète comme l'aire du domaine sous la courbe représentative de la fonction, comptée algébriquement.



Le procédé général utilisé pour définir l'intégrale de Riemann est l'approximation par des fonctions en escalier, pour lesquelles la définition de l'aire sous la courbe est aisée.



Les fonctions (définies sur un segment) pour lesquelles cette définition est possible sont dites intégrables au sens de Riemann. C'est le cas notamment des fonctions monotones, continues ou continues par morceaux...

1.1 Intégrales de fonctions en escalier.

1.1.1 Subdivisions.

Définition 1.1. Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ avec a et b deux éléments de $\mathbb{R}$ $(a < b)$. On appelle subdivision de $[a, b]$ toute ensemble fini

$$\sigma = \{x_0; x_1; \cdots; x_n\}$$

tel que : $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_k < \cdots < x_n = b$.
Le nombre $\delta = \max\limits_{0 \leq i \leq n-1} \{(x_{i+1} - x_i)\}$ s'appelle le pas de la subdivision .

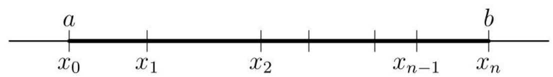


Fig. 1.1: Subdivision de $[a, b]$

Exemple.

1. Prenons le cas de $I = [0, 1]$.
   (a) $\sigma = \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$ est une subdivision de I et il est claire que son pas est égale à $\delta = \frac{1}{2}$.
   (b) $\sigma' = \left\{0; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1\right\}$ est une autre subdivision du même intervalle I mais cette fois le pas est $\delta = \frac{1}{3}$.
   (c) $\sigma_n = \left\{0; \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \frac{3}{n}; \cdots; 1\right\}$ est une subdivision (uniforme) de I avec le pas $\delta = \frac{1}{n}$.
2. Dans le cas où $I = [a, b]$, on peut considérer la subdivision uniforme suivante :

$$x_0 = a < x_1 = a + \frac{b-a}{n} < x_2 = a + 2\frac{b-a}{n} < \cdots < x_n = a + n\frac{b-a}{n} = b,$$

   c'est une subdivision uniforme de I avec le pas $\delta = \frac{b-a}{n}$.

Définition 1.2. Soient σ et σ' deux subdivisions de l'intervalle $[a, b]$. On dit qu'une subdivision σ est plus fine qu'une subdivision σ' si tous les points de σ' appartiennent à σ et en note $\sigma' \subset \sigma$.

Exemple. Dans le cas de $I = [0, 1]$, on a $\sigma' = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ est une subdivision plus fine que $\sigma = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Remarque. En d'autres termes, σ s'obtient de σ' en ajoutant d'autres points de l'intervalle $I = [a, b]$ et en ordonnant la nouvelle famille de points obtenue. De plus, à partir de deux subdivisions σ et σ', on peut définir une nouvelle subdivision $\sigma \cup \sigma'$ qui est la réunion de σ et σ' en prenant tous les points apparaissant dans σ ou dans σ' puis en les rangeant dans un ordre strictement croissant.

1.1.2 Fonction en escalier.

Définition 1.3. On appelle fonction en escalier sur $I = [a, b]$ toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que il existe une subdivision $\sigma = \{x_0; x_1; \cdots; x_k; \cdots; x_n\}$ de $[a, b]$ avec : $f_{/]x_{i-1},x_i[} = \lambda_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On dit alors que la subdivision σ est associée ou adaptée à f.

Exemple. Le graphe ci-dessous est le graphe d'une fonction en escalier définie sur l'intervalle $[a, b]$.

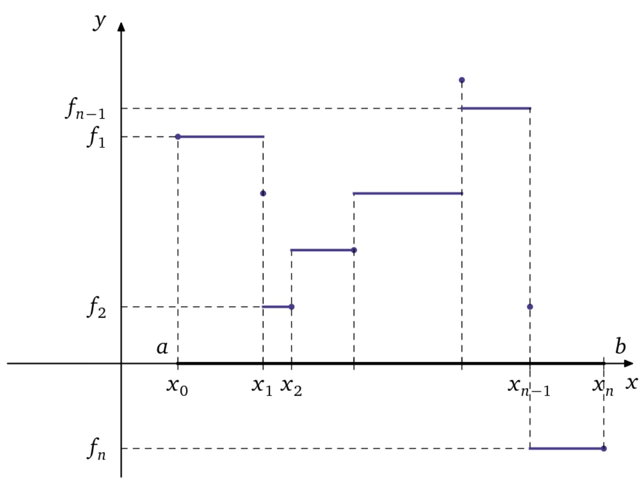


Fig. 1.2: Fonction en escalier

Remarque.

1. Il n'y a pas de conditions portant sur les valeurs que prend la fonction f aux différents points x_i pour $0 \leq i \leq n$.
2. Si f est en escalier alors f ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
3. Si σ est une subdivision associée à f alors toute subdivision σ' plus fine que σ est également associée à f.

Exemple. La fonction f définie par $f(x) = E[x]$, partie entière de x, est une fonction en escalier sur tout intervalle fermé borné.

Notation On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.4. Soit $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, alors on définie l'intégrale de f sur $[a, b]$ par :

$$I(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1})$$

avec $\sigma = \{x_0; x_1; \cdots; x_k; \cdots; x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ associée à f.

Proposition 1.5. *$I(f,\sigma)$ ne dépend pas de la subdivision associée σ.*

Démonstration. Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$.

— Supposons que σ' une subdivision plus fine que $\sigma = \{x_0; x_1; \cdots; x_n\}$ et dans le premier cas soit $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$ avec $c \in [a,b]$. Si c coïncide avec l'un des éléments de σ alors on a $\sigma' = \sigma$ et donc

$$I(f,\sigma) = I(f,\sigma') = I(f).$$

Sinon c'est-à-dire $c \notin \sigma$, il existe $k \in \{1; \cdots; n\}$ tel que $c \in]x_{k-1}, x_k[$ et dans ce cas on a

$$\sigma' = \{x_0; x_1; \cdots; x_{k-1}; c; x_k; \cdots x_n\}.$$

En prenant $f_{/]x_{i-1},x_i[} = \lambda_i$, On a

$$\begin{aligned} I(f,\sigma') &= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) + \lambda_k (c - x_{k-1}) + \lambda_k (x_k - c) + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) + \lambda_k (x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= I(f,\sigma). \end{aligned}$$

Dans le cas général, si $\sigma' = \sigma \cup \{c_1; c_2; \cdots; c_m\}$ on raisonne par récurrence sur m en utilisant le premier cas.

— Ensuite si σ et σ' sont deux subdivisions quelconques de $[a,b]$, alors en considérant $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$ (σ'' est à la fois plus fine que σ et σ') et en utilisant ce qui précède, on obtient $I(f,\sigma) = I(f,\sigma'')$ et $I(f,\sigma') = I(f,\sigma'')$ par suite $I(f,\sigma) = I(f,\sigma')$.

□

Notation On note l'intégrale de f sur $[a,b]$ par $\int_a^b f(x)\,dx$.

Remarque. L'intégrale d'une fonction en escalier f ne dépend pas des valeurs prises par f aux points de la subdivision.

Exemple.

1. Si f est la fonction constante égale à 1 sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = b - a.$$

2. Si f est la fonction identiquement nulle sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

3. Si f et g sont deux fonctions en escalier égales sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Proposition 1.6. *Muni des lois usuelles, l'ensemble $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$, et*

l'application $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$ de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est linéaire.

Démonstration. Soient α, β deux scalaires et f, g deux éléments de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$. Soient σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$ associées respectivement à f et à g.
Alors, la subdivision $\sigma \cup \sigma'$ est associée à la fois à f et à g, et $\alpha f + \beta g$ est constante sur chaque intervalle ouvert de $\sigma \cup \sigma'$, donc $\alpha f + \beta g$ est en escalier sur $[a,b]$. En calculant l'intégrale de $\alpha f + \beta g$ au moyen de $\sigma \cup \sigma'$, on obtient facilement

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

□

Proposition 1.7 (Relation de Chasles). *Soient $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et c est un élément de $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. Il suffit de partir d'une subdivision $\sigma = \{x_0; x_1; \cdots; x_n\}$ associée à f et de considérer la subdivision $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$. Si $c \in \sigma$, alors $\exists k \in \{1;2;\cdots;n-1\}$ tel que $c = x_k$, donc $\sigma' = \sigma$. Et prenant $\forall i \in \{1;2;\cdots;n\}$; $f_{/]x_{i-1},x_i[} = \lambda_i$, $f_1 := f\restriction_{[a,c]}$ et $f_2 := f\restriction_{[c,b]}$ alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = I(f,\sigma) &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i (x_i - x_{i-1}) \\ &= \int_a^c f_1(x)\,dx + \int_c^b f_2(x)\,dx.\end{aligned}$$

Si $c \notin \sigma$, alors $\exists k \in \{1;2;\cdots;n-1\}$ tel que $c \in]x_{k-1}, x_k[$, σ' est plus fine que σ et aussi associée à

f.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = I(f,\sigma') &= \left(\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i(x_i - x_{i-1}) + \lambda_k(c - x_{k-1})\right)\\&\quad+\left(\lambda_k(x_k - c) + \sum_{i=k+1}^{n}\lambda_i(x_i - x_{i-1})\right)\\&= \int_a^c f_1(x)\,dx + \int_c^b f_2(x)\,dx,\end{aligned}$$

car $\{x_0; x_1; \cdots; x_{k-1}; c\}$ est une subdivision associée à f_1 et $\{c; x_k; x_{k+1} \cdots; x_n\}$ est une subdivision associée à f_2. □

Remarque.

1. Si f est une fonction en escalier positive alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
2. Si f et g sont deux fonctions en escalier sur $I = [a,b]$ vérifiant $f \geq g$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.
3. Si $f$est en escalier sur I alors $|f|$ est en escalier sur I et on a $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.
4. Si f est en escalier sur I et si k est un réel positif vérifiant $|f(x)| \leq k$ sur I alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq k(b-a)$.
   (On remarquera que si σ est associée à f alors la même subdivision σ est associée à $|f|$.)

Démonstration. Simple exercice à faire. □

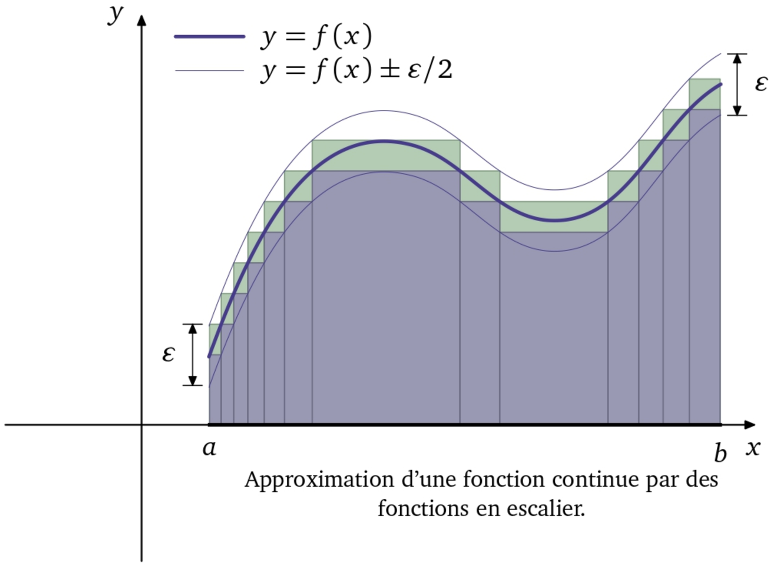
1.2 Intégrale au sens de Riemann.

Dans ce qui suit, f désigne une fonction définie sur un intervalle fermé borné $I = [a,b]$ et à valeurs réelles.

Définition 1.8. On dit que f est intégrable au sens de Riemann si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier g et h sur I vérifiant :

(i) $g \leq f \leq h$,

(ii) $\int_a^b (h-g)(x)\,dx \leq \varepsilon$.



Approximation d'une fonction continue par des fonctions en escalier.

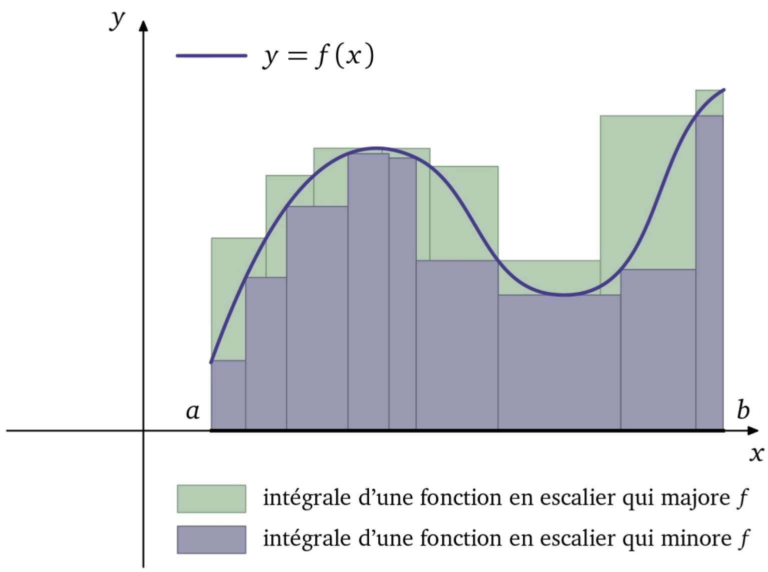
Remarque. De cette définition il résulte que toute fonction intégrable (au sens de Riemann) sur $[a,b]$ est nécessairement bornée sur ce segment puisque les fonctions en escalier sont elles-mêmes bornées.

Dans la suite à chaque fonction f définie sur $[a,b]$, associons les deux ensembles suivants :

$\mathcal{E}_-(f) = \{g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})\ ;\ g \leq f$ sur $[a,b]\}$ et $\mathcal{E}_+(f) = \{h \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})\ ;\ f \leq h$ sur $[a,b]\}$

Posons

$A_-(f) = \left\{\int_a^b g(x)\,dx\ ;\ g \in \mathcal{E}_-(f)\right\}$ et $A_+(f) = \left\{\int_a^b h(x)\,dx\ ;\ h \in \mathcal{E}_+(f)\right\}$



f étant bornée, les parties $A_+(f)$ et $A_-(f)$ sont non vides. De plus, tout élément de $A_+(f)$ est un majorant de $A_-(f)$ et tout élément de $A_-(f)$ est un minorant de $A_+(f)$.

Donc :

$A_+(f)$ possède une borne inférieure finie, que nous notons $I_-(f)$.

$A_-(f)$ possède une borne supérieure finie, que nous notons $I_+(f)$.

C'est-à-dire

$$I_{+}(f)=\sup\left\{\int_a^b g(x)\,dx\ ;\ g\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})\ ;\ g\leq f \text{ sur } [a,b]\right\} \tag{1.1}$$

$$I_{-}(f)=\inf\left\{\int_a^b h(x)\,dx\ ;\ h\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})\ ;\ f\leq h \text{ sur } [a,b]\right\} \tag{1.2}$$

On a alors pour tout $u\in A_{-}(f)$ et pour tout $v\in A_{+}(f)$

$$u\leq I_{+}(f)\leq I_{-}(f)\leq v.$$

Soit $\varepsilon>0$, si f est intégrable, alors il existe des éléments

$$u=\int_a^b g(x)\,dx\in A_{-}(f) \text{ et } v=\int_a^b h(x)\,dx\in A_{+}(f)$$

vérifiant $v-u<\varepsilon$; on a donc l'égalité

$$I_{+}(f)=I_{-}(f)\,.$$

Réciproquement, si on a $I_{+}(f)=I_{-}(f)$, les propriétés des bornes supérieure et inférieure entrainent pour tout $\varepsilon>0$ l'existence d'un élément $u\in A_{-}(f)$ et d'un élément $v\in A_{+}(f)$ vérifiant :

$$u>I_{+}(f)-\frac{\varepsilon}{2} \text{ et } v<I_{-}(f)+\frac{\varepsilon}{2},$$

d'où $v-u<\varepsilon$, ce qui prouve que f est intégrable. On a donc établi le résultat suivant.

Théorème 1.9. *Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction bornée, $I_{-}(f)$ et $I_{+}(f)$ étant définies comme précédemment, f est intégrable si et seulement si $I_{+}(f)=I_{-}(f)$.*

Remarque. Si f est en escalier, les ensembles $\mathcal{E}_{-}(f)$ et $\mathcal{E}_{+}(f)$ ont en commun l'élément f. On a alors

$$I_{+}(f)=I_{-}(f)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Définition 1.10. L'intégrale d'une fonction intégrable f sur $[a,b]$ est le nombre réel $I_{+}(f)=I_{-}(f)$. On le note $\int_a^b f(x)\,dx$.

À partir de la définition, nous allons déduire très facilement une première propriété fondamentale de l'intégrale.

Proposition 1.11 (Positivité). *Si f est une fonction positive et intégrable sur l'intervalle $[a,b]$, son intégrale est positive.*

Démonstration. Puisque f est positive sur $[a,b]$, la fonction nulle appartient à l'ensemble $\mathcal{E}_-(f)$, donc $0 \in A_-(f)$, et on a

$$I_+(f) := \sup A_-(f) \geq 0,$$

d'où le résultat. □

Proposition 1.12. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier φ et μ sur $[a,b]$ telles que :*

$$\forall x \in [a,b]; \quad 0 \leq |f(x) - \varphi(x)| \leq \mu(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu(x)\,dx \leq \varepsilon.$$

Démonstration. f est intégrable au sens de Riemann si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier g et h sur I vérifiant $g \leq f \leq h$ et $\int_a^b (h-g)(x)\,dx \leq \varepsilon$. Il suffit de prendre $\forall x \in [a,b]; \quad \varphi(x) = \frac{g(x)+h(x)}{2}$ et $\mu(x) = \frac{h(x)-g(x)}{2}$, on a :

$$\forall x \in [a,b]; \quad 0 \leq |f(x) - \varphi(x)| \leq \mu(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b \mu(x)\,dx \leq \varepsilon.$$

Réciproquement, on prend $\forall x \in [a,b]; \quad g(x) = \varphi(x) - \mu(x)$ et $h(x) = \varphi(x) + \mu(x)$. □

Proposition 1.13. *Les fonctions monotones sur $I = [a,b]$ sont intégrables.*

Démonstration. Soit f une fonction monotone sur I. On suppose par exemple que f est décroissante et on choisit la subdivision uniforme suivante : $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ avec $0 \leq i \leq n$. On considère les deux fonctions en escalier g et h définies par :

$$g(x) = f(x_{i+1}) \text{ et } h(x) = f(x_i), x \in [x_i, x_{i+1}[\quad 0 \leq i \leq n-1,$$

et

$$g(b) = h(b) = f(b).$$

On rappelle que les valeurs prises par g et celles prises par h aux points x_i de la subdivision n'ont pas d'importance pour la suite. On a alors $g \leq f \leq h$ et

$$\int_a^b g(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_{i+1}) \text{ et } \int_a^b h(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_i)$$

et par suite on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b (h-g)(x)\,dx &\leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_i) - f(x_{i+1})) \\ &\leq \frac{b-a}{n} (f(a) - f(b)),\end{aligned}$$

et pour chaque $\varepsilon > 0$ donné, on peut choisir n assez grand de manière à avoir

$$\frac{b-a}{n}\left(f\left(a\right)-f\left(b\right)\right)<\varepsilon,$$

d'où le résultat désiré. □

Proposition 1.14. *Les fonctions continues sur un intervalle fermé borné $I=[a,b]$ sont intégrables sur I.*

Démonstration. On rappelle d'après le Théorème de Heine que toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné $[a,b]$ est uniformément continue sur $[a,b]$. En d'autres termes

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\ \forall\left(x,x'\right)\in[a,b]^2\quad |x-x'|<\eta\implies\left|f\left(x\right)-f\left(x'\right)\right|<\varepsilon$$

On précise que η ne dépend ni de x ni de x'.

Considérons la subdivision uniforme ($x_i=a+i\frac{b-a}{n}$) de $[a,b]$ de pas $\delta=\frac{b-a}{n}$ inférieure à η. On définit sur $]x_{i-1},x_i[$ pour $1\leq i\leq n$, les deux fonctions en escalier h et g suivantes :

$$g(x)=f(x_i)-\varepsilon \text{ et } h(x)=f(x_i)+\varepsilon,$$

et

$$g\left(x_i\right)=h\left(x_i\right)=f\left(x_i\right)\ \text{ pour } 0\leq i\leq n.$$

Or la subdivision uniforme a été choisie de manière que l'on ait

$$\left|f\left(x\right)-f\left(x_i\right)\right|<\varepsilon$$

pour tout x élément de $[x_{i-1},x_i]$. On a donc, pour tout $x\in[a,b]$:

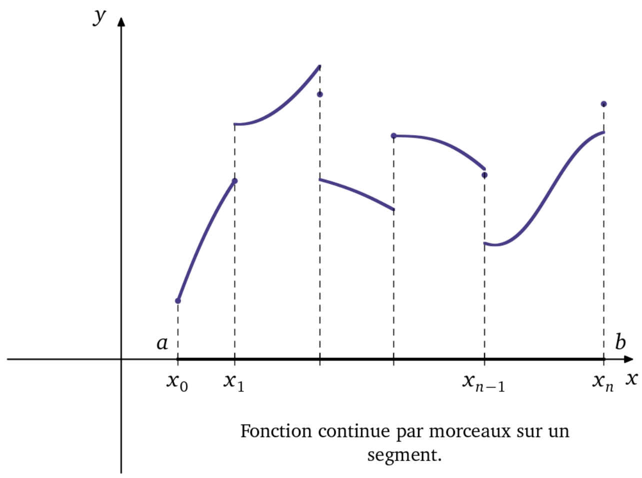
$$g\left(x\right)\leq f\left(x\right)\leq h\left(x\right)$$

et

$$\int_a^b\left(h-g\right)\left(x\right)dx=\int_a^b 2\varepsilon dx=2\varepsilon\left(b-a\right).$$

Le nombre $\varepsilon>0$ étant arbitraire, on conclut que la fonction f est intégrable sur $[a,b]$. □

Définition 1.15. Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $x_i=a+i\frac{b-a}{n}$ avec $0\leq i\leq n$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $0\leq i\leq n-1$, f est continue sur $]x_i,x_{i+1}[$ et admet une limite finie à droite au point x_i, et une limite finie à gauche au point x_{i+1}.



Fonction continue par morceaux sur un segment.

Corollaire 1.16. *Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est intégrable.*

Il est temps de donner un exemple d'une fonction bornée sur un intervalle fermé et borné non intégrable (au sens de Riemann).

Exemple. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction de Dirichlet "indicatrice des rationnels" définit par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Désignons par (g, h) un couple quelconque de fonctions en escalier sur $[a, b]$, vérifiant $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in [a, b]$; et soit σ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à la fois à g et à h. Chaque intervalle de σ contient à son intérieur des valeurs rationnelles et des valeurs irrationnelles. À l'intérieur de tout intervalle de σ on a donc $g(x) \leq 0$ et $h(x) \geq 1$, d'où

$$\int_a^b (h(x) - g(x))\, dx \geq b - a,$$

La fonction f n'est donc pas intégrable.

Désormais, il y a un autre approche similaire à l'approximation par des fonctions en escaliers pour définir les fonctions intégrables au sens de Riemann, cet approche se base sur les sommes de Darboux.

1.3 Sommes de Darboux.

Soit f une fonction bornée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $\sigma = \{x_0; x_1; \ldots; x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$, Soient m_i et M_i tels que $m_i = \inf\limits_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$ et $M_i = \sup\limits_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$. La somme de Darboux inférieure associée à la subdivision σ c'est la quantité

$$s(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, m_i.$$

La somme de Darboux supérieure associée à la subdivision σ c'est la quantité

$$S(f,\sigma)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\,M_i.$$

Et puisque $m_i \leq M_i$, $i=1,2,\ldots,n$ alors on a

$$s(f,\sigma)\leq S(f,\sigma)$$

Définition 1.17. Une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si pour tout $\varepsilon>0$, il existe une subdivision σ telle que ses sommes de Darboux vérifient : $S(f,\sigma)-s(f,\sigma)\leq\varepsilon$.

Proposition 1.18. *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée et σ_1 et σ_2 deux subdivisions de $[a,b]$ tel que $\sigma_1\subset\sigma_2$ alors :*

1. $s(f,\sigma_1)\leq s(f,\sigma_2)$.
2. $S(f,\sigma_2)\leq S(f,\sigma_1)$.

Démonstration. Il suffit de partir d'une subdivision $\sigma_1=\{x_0;x_1;\ldots;x_n\}$ et de considérer la subdivision $\sigma_2=\sigma_1\cup\{c\}$. Si $c\in\sigma_1$ alors $\sigma_1=\sigma_2$ on a rien à montrer. Pour $c\notin\sigma_1$ alors il existe $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ tel que $c\in\,]x_{k-1},x_k[$ et on $\sigma_2=\{x_0;x_1;\ldots x_{k-1};c;x_k;\ldots;x_n\}$.

$$s(f,\sigma_2)=\sum_{i=1}^{k-1}(x_i-x_{i-1})\,m_i+(c-x_{k-1})\,m'+(x_k-c)\,m''+\sum_{i=1}^{k+1}(x_i-x_{i-1})\,m_i$$

tels que $m'=\inf\limits_{x_{k-1}\leq x\leq c}f(x)$ et $m''=\inf\limits_{c\leq x\leq x_k}f(x)$, on sait que $m_k\leq m'$ et $m_k\leq m''$. Donc

$$\begin{aligned}(c-x_{k-1})\,m'+(x_k-c)\,m''&\geq(c-x_{k-1})\,m_k+(x_k-c)\,m_k\\&\geq(x_k-x_{k-1})\,m_k.\end{aligned}$$

Donc

$$s(f,\sigma_2)\geq s(f,\sigma_1)\,.$$

Dans le cas où $\sigma_2=\sigma_1\cup\{c_1,c_2,\ldots,c_m\}$, on procède par récurrence sur m en utilisant le résultat démontré pour le cas d'un seul élément. Et de la même manière pour le deuxième point de la Proposition.

□

Proposition 1.19. *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée et σ_1 et σ_2 deux subdivisions quelconques de $[a,b]$ alors on a :*

$$s(f,\sigma_1)\leq S(f,\sigma_2)\,.$$

Démonstration. $\sigma_1\cup\sigma_2$ est une subdivision à la fois plus fine que σ_1 et que σ_2 alors :

$$s(f,\sigma_1)\leq s(f,\sigma_1\cup\sigma_2)\leq S(f,\sigma_1\cup\sigma_2)\leq S(f,\sigma_2)\,.$$

□

À partir du résultat de cette dernière Proposition on peut confirmer

$$I^*(f) \leq I_*(f),$$

tels que :

$$I^*(f) = \sup\{s(f,\sigma)\ ;\ \sigma \text{ une subdivision de } [a,b]\},$$
$$I_*(f) = \inf\{s(f,\sigma)\ ;\ \sigma \text{ une subdivision de } [a,b]\}.$$

Proposition 1.20. $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}) \iff I^*(f) = I_*(f) = \int_a^b f(x)dx.$

Démonstration. Si $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ alors pour tout $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\sigma$ telle que : $S(f,\sigma) - s(f,\sigma) \leq \varepsilon$, en plus on a

$$s(f,\sigma) \leq I^*(f) \leq I_*(f) \leq S(f,\sigma),$$

Donc

$$I^*(f) = I_*(f).$$

Réciproquement, supposons $I^*(f) = I_*(f)$, les propriétés des bornes supérieure et inférieure, entrainent $\forall\varepsilon > 0$ l'existence de deux subdivisions σ_1 et σ_2 de $[a,b]$ vérifiant :

$$s(f,\sigma_1) > I^*(f) - \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } S(f,\sigma_2) < I_*(f) + \frac{\varepsilon}{2},$$

et puisque

$$s(f,\sigma_1\cup\sigma_2) \geq s(f,\sigma_1) \text{ et } S(f,\sigma_1\cup\sigma_2) \leq S(f,\sigma_2),$$

alors

$$S(f,\sigma_1\cup\sigma_2) - s(f,\sigma_1\cup\sigma_2) \leq \varepsilon.$$

Donc $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$. □

1.4 Propriétés de l'intégrale de Riemann.

Les trois principales propriétés de l'intégrale sont la relation de Chasles, la linéarité et la positivité.

Proposition (Relation de Chasles). *Si f est une fonction intégrable sur $[a,b]$ et si c est un point dans $]a,b[$, alors f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$, et on a :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. Nous avons besoin ici d'intégrer sur des intervalles différents, nous allons donc commencer par préciser quelques notations.

$$\begin{cases} I_+\left(f,[a,b]\right) = \sup\left\{\int_a^b g\left(x\right)dx \ ; \ g \in \mathcal{E}\left([a,b],\mathbb{R}\right) \ ; \ g \leq f \text{ sur } [a,b]\right\} \\ I_-\left(f,[a,b]\right) = \inf\left\{\int_a^b h\left(x\right)dx \ ; \ h \in \mathcal{E}\left([a,b],\mathbb{R}\right) \ ; \ f \leq h \text{ sur } [a,b]\right\} \end{cases}$$

Posons également : $f_1 = f_{/[a,c]}$ et $f_2 = f_{/[c,b]}$. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{E}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$; et soient $\varphi_1 = \varphi_{/[a,c]}$, $\varphi_2 = \varphi_{/[c,b]}$, $\psi_1 = \psi_{/[a,c]}$ et $\psi_2 = \psi_{/[c,b]}$. On a :

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi\left(x\right)dx &= \int_a^c \varphi_1\left(x\right)dx + \int_c^b \varphi_2\left(x\right)dx \\ &\leq I_+\left(f_1,[a,c]\right) + I_+\left(f_2,[c,b]\right) \end{aligned}$$

Donc

$$I_+\left(f,[a,b]\right) \leq I_+\left(f_1,[a,c]\right) + I_+\left(f_2,[c,b]\right)$$

De même, on obtient

$$I_-\left(f,[a,b]\right) \geq I_-\left(f_1,[a,c]\right) + I_-\left(f_2,[c,b]\right)$$

Et puisque f est intégrable sur $[a,b]$, on a :

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = I_-\left(f,[a,b]\right) = I_+\left(f,[a,b]\right)$$

Donc

$$I_-\left(f_1,[a,c]\right) + I_-\left(f_2,[c,b]\right) \leq \int_a^b f\left(x\right)dx \leq I_+\left(f_1,[a,c]\right) + I_+\left(f_2,[c,b]\right)$$

De plus on sait que

$$I_+\left(f_1,[a,c]\right) \leq I_-\left(f_1,[a,c]\right) \quad \text{et} \quad I_+\left(f_2,[c,b]\right) \leq I_-\left(f_2,[c,b]\right)$$

Alors on peut conclure que

$$I_-\left(f_1,[a,c]\right) = I_+\left(f_1,[a,c]\right) \quad \text{et} \quad I_-\left(f_2,[c,b]\right) = I_+\left(f_2,[c,b]\right)$$

Donc f_1 est intégrable sur $[a,c]$ et f_2 est intégrable sur $[c,b]$ et on a :

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \int_a^c f_1\left(x\right)dx + \int_c^b f_2\left(x\right)dx.$$

□

Proposition 1.21 (Linéarité). *Soient f et g deux fonctions intégrables sur un même intervalle fermé* *borné* $[a,b]$*. Alors, quels que soient les scalaires* $\alpha,\ \beta$*, la fonction* $\alpha f+\beta g$ *est intégrable sur* $[a,b]$ *et on a*

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g)(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f et g deux sont intégrables sur $[a,b]$, on peut trouver dans $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ et $\psi_2 \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telles que

$$\varphi_1 \leq f \leq \psi_1 \text{ et } \varphi_2 \leq g \leq \psi_2$$

et

$$\int_a^b (\psi_1-\varphi_1)(x)\,dx \leq \varepsilon \text{ et } \int_a^b (\psi_2-\varphi_2)(x)\,dx \leq \varepsilon$$

Or $\varphi_1+\varphi_2$ et $\psi_1+\psi_2$ sont des fonctions en escalier sur $[a,b]$ et vérifient ; $\varphi_1+\varphi_2 \leq f+g \leq \psi_1+\psi_2$ ainsi que

$$\int_a^b ((\psi_1+\psi_2)-(\varphi_1+\varphi_2))(x)\,dx \leq 2\varepsilon,$$

ce qui montre que $f+g$ est intégrable sur $[a,b]$. Et on sait que

$$\int_a^b (\varphi_1+\varphi_2)(x)\,dx = \int_a^b \varphi_1(x)\,dx + \int_a^b \varphi_2(x)\,dx,$$

ce qui implique que

$$\int_a^b (\varphi_1+\varphi_2)(x)\,dx \leq I_+(f)+I_+(g).$$

De plus on a $\varphi_1+\varphi_2 \leq f+g$, et en passant au $\sup$ sur $\varphi_1+\varphi_2$ on trouve

$$I_+(f+g) \leq I_+(f)+I_+(g),$$

de même, on obtient

$$I_-(f+g) \geq I_-(f)+I_-(g),$$

et puisque $I_-(f)=I_+(f)=\int_a^b f(x)\,dx$ et $I_-(g)=I_+(g)=\int_a^b g(x)\,dx$ alors on obtient

$$I_+(f+g) \leq \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \leq I_-(f+g),$$

et on prenant en considération que $f+g$ est intégrable, on conclu que

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Maintenant montrons que, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, la fonction λf est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ telles que

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \int_a^b (\psi - \varphi)(x)\, dx \leq \varepsilon.$$

Supposons que $\lambda > 0$ on a $\lambda\varphi \leq \lambda f \leq \lambda\psi$ et

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda\psi - \lambda\varphi)(x)\, dx &= \int_a^b \lambda(\psi - \varphi)(x)\, dx \\ &= \lambda \int_a^b (\psi - \varphi)(x)\, dx \\ &\leq \lambda\varepsilon.\end{aligned}$$

Donc λf est intégrable sur $[a,b]$. D'autre part, on a

$$\int_a^b \lambda\varphi(x)\, dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)\, dx \leq \lambda I_-(f),$$

et en passant au $\sup$ sur $\lambda\varphi$ il vient :

$$I_-(\lambda f) \leq \lambda I_-(f),$$

En procédant de même avec ψ, on obtient aussitôt :

$$I_+(\lambda f) \geq \lambda I_+(f).$$

Donc $\text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}^+$

$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx.$$

Si $\lambda \in \mathbb{R}^-, \text{ on a}$

$$\int_a^b (-\lambda) f(x)\, dx = (-\lambda) \int_a^b f(x)\, dx.$$

donc

$$-\int_a^b (-\lambda) f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx.$$

La preuve s'achève si on montre que pour toute fonction g intégrable sur $[a,b]$ on a $-g$ est intégrable sur $[a,b]$ et

$$\int_a^b (-g)(x)\, dx = -\int_a^b g(x)\, dx.$$

En effet :

Si g est intégrable sur $[a,b]$, soit $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ telles que

$$\varphi \leq g \leq \psi \text{ et } \int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,dx \leq \varepsilon$$

alors

$$-\psi \leq -g \leq -\varphi \text{ et } \int_a^b ((-\varphi) - (-\psi))(x)\,dx \leq \varepsilon$$

donc $-g$ est intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b ((-g)+g)(x)\,dx = \int_a^b (-g)(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = 0$.

Donc

$$\int_a^b (-g)(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\,dx.$$

D'où le résultat

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Proposition 1.22 (Croissance). *Soient f et g deux fonctions intégrables sur* $[a,b]$*, vérifiant* $f(x) \leq g(x)$ *pour tout* $x \in [a,b]$.

Alors on a

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Démonstration. On a $(g-f)(x) \geq 0$ alors $\int_a^b (g-f)(x)\,dx \geq 0$. Donc

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

□

Remarque 1.23. Si f et g sont deux fonctions numériques intégrables sur $[a,b]$, et si leurs valeurs ne diffèrent qu'en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors leurs intégrales sont égales ; en effet, leur différence est une fonction en escalier nulle sauf en un nombre fini de points, son intégrale est donc nulle.

Cette remarque montre que l'inégalité $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ peut se réduire à une égalité sans que l'on ait $f = g$. Le théorème fondamental suivant montre cependant que ce n'est pas possible si f et g sont continues.

Théorème 1.24. *L'intégrale d'une fonction f positive et continue sur $[a,b]$ ne peut être nulle que si cette fonction est partout nulle.*

Démonstration. Si f n'est pas la fonction nulle, il existe un point $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Par continuité de f, il existe des réels $h > 0$ tel que

$$|x - x_0| \leq h \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{f(x_0)}{2}$$

et soit $\alpha = \max\{a, x_0 - h\}$ et $\beta = \min\{b, x_0 + h\}$ alors pour tout $x \in [\alpha, \beta]$ on a $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$. Considérons alors la fonction en escalier φ sur $[a, b]$ donnée par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2} & \text{Si } x \in]\alpha, \beta[\,; \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases}$$

On a évidemment $f \geq \varphi$ sur $[a, b]$ par construction, d'où

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b \varphi(x)\,dx \geq (\beta - \alpha)\frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

D'où le théorème. □

Théorème 1.25. *Si f est une fonction numérique intégrable sur $[a, b]$, alors la fonction $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Démonstration. On a $|f| = f^+ + f^-$ où f^+ et f^- sont les fonctions positives définies sur $[a, b]$ par :

$$f^+ = \sup(f; 0) \text{ et } f^- = \sup(-f; 0),$$

Il suffit donc de montrer que f^+ et f^- sont intégrables sur $[a, b]$. f est intégrable sur $[a, b]$, soit $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ telles que

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,dx \leq \varepsilon,$$

en prenant $\varphi^+, \varphi^-, \psi^+$ et ψ^- qui sont des éléments $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, on a

$$\varphi^+ \leq f^+ \leq \psi^+ \text{ et } \psi^- \leq f^- \leq \varphi^-,$$

ainsi on a

$$\begin{aligned} \int_a^b (\psi - \varphi)(x)\,dx &= \int_a^b \left[\left(\psi^+ - \psi^-\right)(x) - \left(\varphi^+ - \varphi^-\right)\right](x)\,dx \\ &= \int_a^b \left(\psi^+ - \varphi^+\right)(x)\,dx + \int \left(\varphi^- - \psi^-\right)(x)\,dx \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Donc
$$\int_a^b \left(\psi^+ - \varphi^+\right)(x)\,dx \leq \varepsilon \text{ et } \int_a^b \left(\varphi^- - \psi^-\right)(x)\,dx \leq \varepsilon,$$
Alors f^+ et f^-sont intégrables sur $[a,b]$, donc $|f| = f^+ + f^-$ est intégrable sur $[a,b]$.

On a $\forall x \in [a,b]$
$$\begin{cases} f(x) \leq |f|(x) \\ -f(x) \leq |f|(x) \end{cases} \implies \begin{cases} \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f|(x)\,dx \\ -\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f|(x)\,dx \end{cases}$$
D'où le résultat désiré. □

Une application directe de ce théorème donne le résultat élémentaire mais très utile suivant.

Corollaire 1.26. *Soit f une fonction numérique intégrable sur $[a,b]$ vérifiant, pour tout $x \in [a,b]$, l'inégalité $|f(x)| \leq M$ où M est une constante. On a alors*
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq M(b-a).$$

Proposition 1.27. *Si f et g sont deux fonctions numériques intégrables sur $[a,b]$, leur produit fg est intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration. Supposons d'abord f et g positives sur $[a,b]$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2$ et $\psi_2 \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ vérifiant :
$$0 \leq \varphi_1 \leq f \leq \psi_1 \leq M \text{ et } \int_a^b (\psi_1 - \varphi_1)(x)\,dx \leq \varepsilon,$$
et
$$0 \leq \varphi_2 \leq g \leq \psi_2 \leq M \text{ et } \int_a^b (\psi_2 - \varphi_2)(x)\,dx \leq \varepsilon.$$
Où M est un majorant commun de f et g. On a
$$\varphi_1\varphi_2 \leq fg \leq \psi_1\psi_2$$

où $\varphi_1\varphi_2$ et $\psi_1\psi_2$sont en escalier sur $[a,b]$ et vérifient :

$$\begin{aligned}\int_a^b (\psi_1\psi_2-\varphi_1\varphi_2)(x)\,dx &= \int_a^b (\psi_1(\psi_2-\varphi_2)+(\psi_1-\varphi_1)\varphi_2)(x)\,dx\\ &\le \int_a^b (M(\psi_2-\varphi_2)+M(\psi_1-\varphi_1))(x)\,dx\\ &\le M\left[\int_a^b (\psi_2-\varphi_2)(x)\,dx+\int_a^b(\psi_1-\varphi_1)(x)\,dx\right]\\ &\le 2M\varepsilon.\end{aligned}$$

On a donc établi la proposition dans le cas où f et g sont positives.

Si f et g sont quelconques alors, en écrivant $f=f^+-f^-$ et $g=g^+-g^-$, on obtient

$$fg=f^+g^+-f^+g^--f^-g^++f^-g^-.$$

Et comme f et g sont intégrables alors f^+, f^-, g^+ et g^- sont des fonctions positives et intégrables et d'après ce qui précède on déduit que f^+g^+, f^+g^-, f^-g^+ et f^-g^- sont intégrables. D'où fg est intégrable comme somme de fonctions intégrables. □

Théorème 1.28 (Inégalités de Schwarz et de Minkowski)**.** *Si f et g sont des fonctions numériques intégrables sur $[a,b]$, alors on a :*

— *l'inégalité de Schwarz :*

$$\left|\int_a^b fg(x)\,dx\right| \le \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right)^{\frac12}$$

— *l'inégalité de Minkowski :*

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx\right)^{\frac12} \le \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)^{\frac12}+\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right)^{\frac12}$$

Démonstration. Les fonctions f et g étant intégrables sur $[a,b]$, la fonction fg l'est aussi et en plus on a

$$\left|\int_a^b fg(x)\,dx\right| \le \int_a^b |fg|(x)\,dx.$$

Donc il suffit d'établir l'inégalité de Schwarz dans le cas f et g sont positives. Pour tout réel λ, on peut écrire :

$$\int_a^b (f(x)+\lambda g(x))^2\,dx=\lambda^2\int_a^b (g(x))^2\,dx+2\lambda\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx+\int_a^b (f(x))^2\,dx\ge 0.$$

On reconnait une expression du second degré qui garde un signe constant. Par conséquent, le discriminant doit être négatif ou nul, ce qui conduit à l'inégalité de Schwarz. La seconde inégalité se déduit de la première :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx &= \int_a^b (g(x))^2\,dx + 2\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b (f(x))^2\,dx \\ &\leq \int_a^b (g(x))^2\,dx + 2\left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \int_a^b (f(x))^2\,dx \\ &\leq \left[\left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b (g(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\end{aligned}$$

□

Remarque 1.29. Ces inégalités deviennent des égalités lorsque f (ou g) est nulle ou bien lorsque f et g sont proportionnelles.

Formule de la moyenne.

Théorème 1.30 (Formule de la moyenne). *Soient f et g deux fonctions numériques intégrables sur $[a,b]$. Si g est positive sur $[a,b]$ et si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, alors*

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{1.3}$$

Si de plus f est continue sur $[a,b]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{1.4}$$

Démonstration. On a $m \leq f(x) \leq M \implies mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, on déduit (1.3) par linéarité et croissance de l'intégrale. Supposons maintenant f continue sur $[a,b]$.

— Si $\int_a^b g(x)\,dx = 0$, les inégalités (1.3) donnent $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$, et l'égalité (1.4) est vraie pour tout $c \in [a,b]$.

— Si $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$, alors

$$m \leq \frac{1}{\int_a^b g(x)\,dx}\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right) \leq M,$$

et comme f est continue sur $[a,b]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un point $c \in [a,b]$ tel que (1.4) soit satisfaite.

□

En appliquant le théorème précédent à la fonction g constante égale à 1 sur $[a,b]$, on obtient aussitôt :

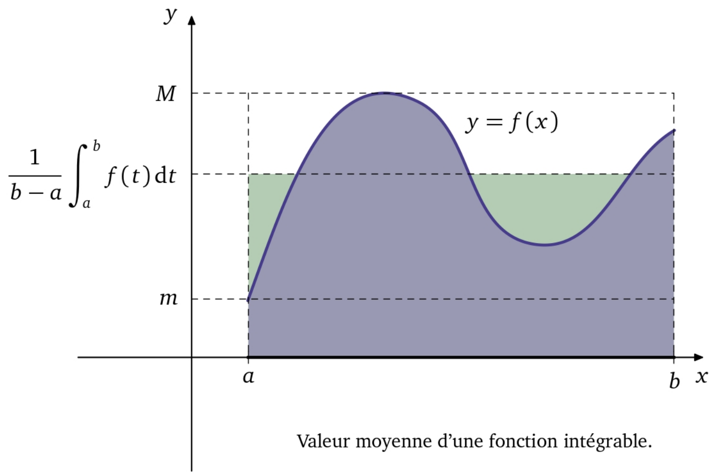
Corollaire 1.31. *Si f est une fonction intégrable sur $[a,b]$ et si on a $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, alors*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \in [m,M]\,,$$

Si de plus f est continue sur $[a,b]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,.$$

Définition 1.32. Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est appelé la valeur moyenne de f sur le segment $[a,b]$.

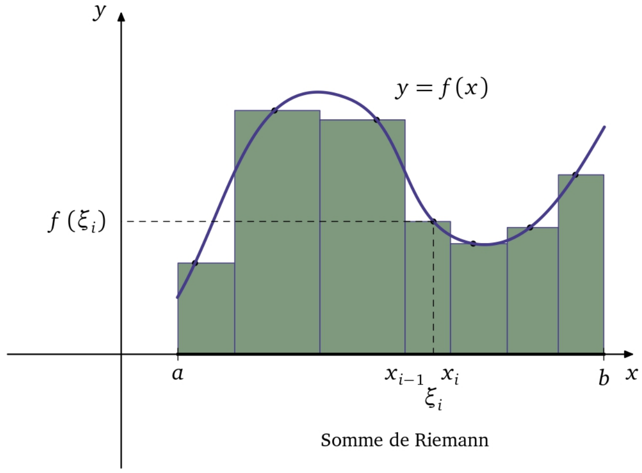


Valeur moyenne d'une fonction intégrable.

1.5 Somme de Riemann.

Définition. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction, $\sigma = \{x_0; x_1; \ldots; x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$ et $\zeta = \{\zeta_1; \zeta_2; \ldots; \zeta_n\}$. Dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ on choisit un élément ζ_i pour tout $1 \leq i \leq n$. On appelle somme de Riemann de f relative à (σ, ζ) le nombre $S(f,\sigma,\zeta)$ défini par :

$$S(f,\sigma,\zeta) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(\zeta_i)$$



Somme de Riemann

Remarque. Lorsque f est une fonction en escalier sur $[a,b]$ et que σ est une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, on a exactement, avec $\zeta_i \in]x_{i-1};x_i[$

$$S(f,\sigma,\zeta) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Théorème 1.33. *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $\sigma=\{x_0;x_1;\dots;x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$ dont le pas est δ et $\zeta=\{\zeta_1;\zeta_2;\dots;\zeta_n\}$ une famille de points tels que $\zeta_i\in]x_{i-1};x_i[$ pour tout $1\le i\le n$. Alors*

$$\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\,f(\zeta_i)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

En particulier dans le cas d'une subdivision uniforme on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. f est uniformément continue sur $[a,b]$. Donc

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\quad |x-y|<\eta \implies |f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

On suppose que le pas δ de la subdivision est tel que $0<\delta<\eta$. On a alors

$$\forall x\in[x_{i-1};x_i]\,;\quad |x-\zeta_i|\le x_i-x_{i-1}\le\eta,$$

donc

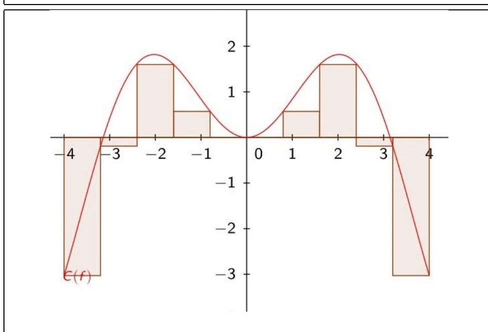
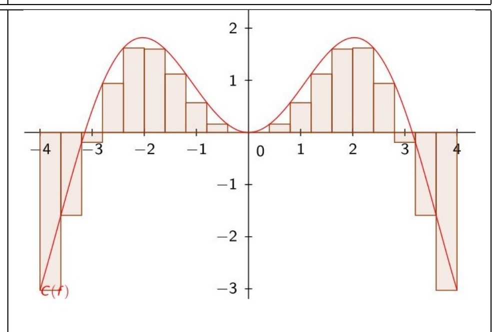
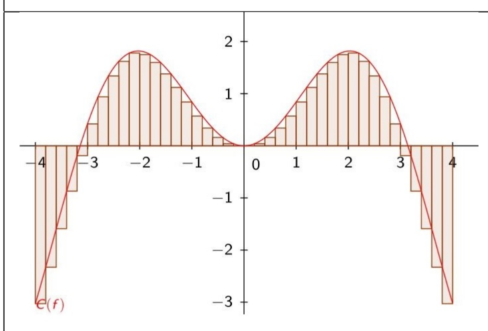
$$|f(x)-f(\zeta_i)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx-\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\,f(\zeta_i)\right| &\leq \left|\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx-(x_i-x_{i-1})\,f(\zeta_i)\right]\right|\\ &\leq \left|\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-f(\zeta_i))\,dx\right]\right|\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-f(\zeta_i)|\,dx\right]\\ &\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_i-x_{i-1})\leq\varepsilon\end{aligned}$$

ce qui établit le résultat. □

Exemple (Interprétation géométrique). Soit f la fonction définie par $f(x)=x\sin(x)$.

Pour $n=10$	Pour $n=20$
	
Pour $n=40$	...
	...

Remarque 1.34. Le théorème ci-dessus est encore vrai si on remplace f continue sur $[a,b]$ par f continue par morceaux sur $[a,b]$. En pratique, il permet notamment le calcul de la limite de certaines suites.

Exemple.

1. Calculons la limite de la suite de terme général :

$$u_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i};\quad n\geq 1.$$

L'idée consiste à exprimer u_n sous forme d'une somme de Riemann. En effet,

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

Où f est la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\
&= \int_0^1 f(x)dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.
\end{aligned}$$

2. Calculons la limite de la suite de terme général :

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{i\pi}{n}\right); \quad n \geq 1.$$

Il suffit de prendre la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$. On a alors

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} v_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx \\
&= \int_0^1 f(x)dx \\
&= \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Exercice.

1. Calculer la limite de la suite suivante :

$$u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

Solution. Il est claire qu'on a pas a faire a une suite ordinaire, et on doit penser (la somme de Riemann), c'est à dire a l'écrire sous la forme suivante $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$.

En effet :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}
\end{aligned}$$

Dans ce cas, on voit que $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{x}$ une fonction continue, donc

$$\lim u_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

2. Calculer la limite de la suite suivante :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$$

Solution. De la même manière que précédemment cette suite est une somme de Riemann car

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ une fonction continue, donc

$$\lim v_n = \frac{1}{1-0}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1.$$

1.6 Primitives et intégrales.

Convention : On pose si $a \geq b$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

1.6.1 Intégrale indéfinie et primitive.

Si f est une fonction intégrable sur l'intervalle compact $[a, b]$, on sait que, pour tout $t \in [a, b]$ fixé, f est intégrable sur l'intervalle $[a, t]$.

Définition. Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ et soit t_0 un point de $[a, b]$. On appelle intégrale indéfinie de f, la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \int_{t_0}^{t} f(x)\,dx. \end{array}$$

Remarque. Deux intégrales indéfinies de f diffèrent d'une constante additive puisque, d'après la relation de Chasles, on a

$$\int_{t_0}^{t} f(x)\,dx - \int_{t_1}^{t} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f(x)\,dx.$$

Définition 1.35. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point, et soit k un nombre réel strictement positif. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne de rapport k (ou k-

lipschitzienne) si

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(x)| \leq k|x - y|.$$

Exemple. La fonction $x \mapsto \sin x$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, car elle est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$; $|f'(x)| \leq 1$.

Proposition 1.36. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors la fonction*

$$\begin{array}{rccc} F: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

est lipschitzienne, de rapport $k = \sup\limits_{a<x<b} |f(x)|$, donc uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration. Soient $x, y \in [a, b]$ on a :

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^y f(t)\,dt \right| \\ &= \left| \int_y^x f(t)\,dt \right| \\ &\leq \left| \int_y^x |f(t)|\,dt \right| \\ &\leq k|x - y|. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Proposition 1.37. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, Alors la fonction*

$$\begin{array}{rccc} F: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

admet une dérivée à droite(resp. une dérivée à gauche) en tout point où f admet une limite à droite (resp. une limite à gauche).

Démonstration. On suppose f admet une limite l à droite en x_0 :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0;\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in [a, b],\quad 0 < x - x_0 < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On a

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-l\right| &= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - l\right| \\ &= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} (f(t)-l)\,dt\right| \\ &\leq \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} |f(t)-l|\,dt.\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l \implies \lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=l.$$

De la même façon on montre que

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l' \implies \lim_{x\to x_0^-}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=l'.$$

□

Corollaire 1.38. *Si f est continue sur $[a,b]$ alors F est dérivable en tout point de $[a,b]$, et pour tout $x\in[a,b]$ on a :*

$$F'(x)=f(x).$$

Définition 1.39. On appelle primitive de f sur $[a,b]$ toute fonction F définie sur $[a,b]$ et vérifiant $F'(x)=f(x)$ pour tout $x\in[a,b]$.

Remarque 1.40. Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors la fonction $G=F+C$ avec C une constante réel est aussi un primitive de f sur $[a,b]$. Et inversement si F et G deux primitives de f sur $[a,b]$ alors il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que $G=F+C$.

Théorème 1.41 (Théorème fondamental du calcul intégral). *Toute fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, admet une primitive. De plus si F est une primitive arbitraire de f alors on a :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a).$$

Démonstration. Soit F la fonction définie par $F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$ avec $c\in[a,b]$, on a F dérivable sur $[a,b]$ et $F'(x)=f(x)$, alors F est une primitive de f et en plus on a

$$F(b)-F(a)=\int_c^b f(t)\,dt-\int_c^a f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt.$$

□

Remarque 1.42. Dans le théorème ci-dessus, l'hypothèse de continuité est cruciale. Considérons en effet la fonction f définie sur $[-1,1]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ;\ x \in [-1,0[, \\ 0 & ;\ x = 0 \\ 1 & ;\ x \in]0,1]. \end{cases}$$

On a alors

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} -x & ;\ x \in [-1,0[, \\ 0 & ;\ x = 0 \\ x & ;\ x \in]0,1]. \end{cases}$$

Donc $F(x) = |x|$ sur $[-1,1]$. Comme F n'est pas dérivable en 0, elle ne peut être une primitive de f sur $[-1,1]$.

Théorème 1.43. *Soit f une fonction de $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, on a :*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt,$$

de plus s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $|f'(x)| \leq k$ alors

$$|f(x) - f(x)| \leq k|x-y|.$$

Démonstration. On pose $F = f$, on a F est une primitive de f' (continue). Donc le reste est évident. □

Dans la suite de ce cours, on utilise les notations suivantes :

— Une primitive de f sera notée$\int f(x)dx$, et elle est définie à une constante additive près.

— La valeur $F(b) - F(a)$ sera notée $[F(x)]_a^b$.

Tableau de quelques primitives :

Fonction f	Fonction primitive F	Intervalle
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x^n}=x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$	$\dfrac{x^{-n+1}}{1-n}=\dfrac{1}{(1-n)x^{n-1}}$	$]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$
x^α, $\alpha \in \mathbb{Q}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0,+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$1-\tanh^2(x)=\dfrac{1}{\cosh^2(x)}$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1,1[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

Exemple.

- $\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}+C$, C une constante réelle.
- $\int_0^1 3x^2dx = [x^3]_0^1 = 1.$

1.6.2 Intégration par parties et Changement de variable.

Théorème 1.44 (Intégration par parties). *Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. On a :

$$(fg)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

donc

$$\begin{aligned}\int_a^b (fg)'(x)\,dx &= \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx \\ &= [f(x)\,g(x)]_a^b\,.\end{aligned}$$

□

Exemple.

1. $I = \int_1^2 \ln(x)\,dx = \int_1^2 (x)' \ln(x)\,dx = [x\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 x\,(\ln(x))'\,dx = [x\ln(x) - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1.$
2. Pour calculer des intégrales, par fois on a besoin de faire intégrations par parties plusieurs fois :

$$\begin{aligned}J = \int_0^\pi e^x \sin(x)\,dx &= \int_0^\pi (e^x)' \sin(x)\,dx \\ &= [e^x \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi e^x\,(\sin(x))'\,dx \\ &= [e^x \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos(x)\,dx \\ &= [e^x \sin(x)]_0^\pi - \int_0^\pi (e^x)' \cos(x)\,dx \\ &= [e^x \sin(x)]_0^\pi - \left([e^x \cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi e^x\,(\cos(x))'\,dx\right) \\ &= [e^x\,(\sin(x) - \cos(x))]_0^\pi - J.\end{aligned}$$

Donc

$$J = \frac{1}{2}[e^x\,(\sin(x) - \cos(x))]_0^\pi = \frac{1}{2}\,(e^\pi + 1)\,.$$

Théorème 1.45 (Changement de variable). *Soit φ une fonction de $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, alors $\varphi(I)$ est un intervalle fermé borné et pour toute fonction f définie et continue sur $\varphi(I)$ on a :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f définie par :

$$\begin{array}{rccl} F: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_c^x f(t)dt \end{array}$$

On a

$$F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx,$$

d'autre part la fonction $G = F \circ \varphi$ est dérivable sur $[a,b]$ et pour tout $t \in [a,b]$ on a $G'(t) =$

$f(\varphi(t))\varphi'(t)$ donc

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = G(b) - G(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

$\square$

Exemple. Pour calculer

$$I = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t))dt,$$

on pose $\varphi(t) = \ln(t)$ on a $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$ donc

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{e^\pi} t\sin(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_1^{e^\pi} e^{\varphi(t)}\sin(\varphi(t))\varphi'(t)dt \\ &= \int_{\varphi(1)}^{\varphi(e^\pi)} \sin(x)e^x dx = \int_0^\pi \sin(x)e^x dx = \frac{1}{2}\left(e^\pi + 1\right). \end{aligned}$$

1.7 Quelques méthodes de recherche de primitives.

1.7.1 Intégration des fractions rationnelles.

Soit F une fraction rationnelle à une indéterminée, tel que $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec P et Q polynômes à coefficients réels. Pour calculer une primitive de F on décompose la fraction rationnelle en éléments simples sur $\mathbb{R}$:

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{\mu_k}\frac{\lambda_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j}\right) + \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{\nu_k}\frac{\theta_{k,j}X + \tau_{k,j}}{(X^2+\beta_k X+\gamma_k)^j}\right),$$

avec $\beta_k^2 - 4\gamma_k < 0$. Par suit, pour calculer la primitive d'une fraction rationnelle il suffit de déterminer les primitives suivantes :

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^n}dx \quad \text{et} \quad \int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2+bx+c)^n}dx \ ; \ (b^2 - 4c < 0).$$

Le premier type d'intégrale ne pose aucun problème. Pour le second, nous allons d'abord détailler la méthode dans le cas $n = 1$ puis nous le ferons dans le cas général. La fraction $\frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{AY+B}{Y^2+1}$ en utilisant la forme canonique de $x^2 + bx + c$ et un changement de variable conforme, puis on a

$$\frac{AY+B}{Y^2+1} = \frac{A}{2}\frac{2Y}{Y^2+1} + B\frac{1}{Y^2+1}.$$

Donc

$$\int \frac{AY+B}{Y^2+1}dY = \frac{A}{2}\ln\left(Y^2+1\right) + B\arctan Y + C.$$

Si $n > 1$, la fraction $\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^n}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{AY+B}{(Y^2+1)^n}$, et on a

$$\frac{AY+B}{(Y^2+1)^n} = \frac{A}{2}\frac{2Y}{(Y^2+1)^n} + B\frac{1}{(Y^2+1)^n}.$$

Le premier intégrale est faisable. Le second nous avons besoin d'établir grâce à la formule d'intégration par parties une relation de récurrence entre les termes de la suite $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx$. En effet :

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1}{(x^2+1)^n}dx \\ &= \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right] + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}dx \\ &= \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right] + 2n\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}dx \\ &= \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right] + 2n\left(I_n - I_{n+1}\right), \end{aligned}$$

donc

$$2nI_{n+1} = (2n-1)\,I_n + \frac{x}{(x^2+1)^n} + C.$$

Exemple. On détermine des primitives de la fraction $\mathsf{F}(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)^2}$. On a :

$$\begin{aligned} F(x) = \frac{x+1}{(x^2+1)^2} &= \frac{1}{2}\frac{2x+2}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right) + \frac{1}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int F(x)dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{2}{(x^2+1)^2}\right)dx = \frac{1}{2}\frac{-1}{x^2+1} + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx + C.$$

On calcul $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$:

— 1er méthode : Utilisant la récurrence précédente on a : $I_2 = \frac{1}{2}\left(I_1 + \frac{x}{x^2+1}\right) + C$, avec $I_1 = \int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x + C$. Donc

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\right) + C$$

— 2ieme méthode : Par changement de variable $x = \tan t$ on a

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}dx &= \int \frac{1+\tan^2 t}{\left(1+\tan^2 t\right)^2}dt \\
&= \int \frac{1}{1+\tan^2 t}dt \\
&= \int \cos^2 t dt \\
&= \int \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(2t\right)\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin\left(2t\right)\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\left(t+\frac{\tan\left(t\right)}{1+\tan^2 t}\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\left(\arctan x+\frac{x}{1+x^2}\right)+C.
\end{aligned}$$

Donc

$$\int F(x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x^2+1}+\arctan x+\frac{x}{1+x^2}\right)+C.$$

1.7.2 Quelques intégrales transformées en intégrales de fractions rationnelles.

Fractions rationnelles trigonométriques $F\left(\sin x, \cos x\right)$: Il s'agit des primitives de la forme $\int F\left(\sin x, \cos x\right)dx$, où F est une fraction rationnelle à deux variables. Dans ce cas, le changement de variable $t = \tan\left({}^{x}/_{2}\right)$ permet de ramener la recherche d'une primitive d'une fraction rationnelle trigonométrique à une primitive d'une fraction rationnelle. Notons que si $t = \tan\left({}^{x}/_{2}\right)$, alors on a les relations suivantes :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ;\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ;\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Exemple. Déterminons des primitives de $\frac{1}{1-\sin x}$. On pose $t = \tan\left({}^{x}/_{2}\right)$ on a :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{1}{1-\sin x}dx \\
&= \int \frac{1}{1-\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int \frac{2}{\left(t-1\right)^2}dt \\
&= -\frac{2}{t-1}+C \\
&= -\frac{2}{\tan\left({}^{x}/_{2}\right)-1}+C.
\end{aligned}$$

Remarque. Les règles de Bioche sont des règles qui nous aide à choisir un changement de variable autre que $t = \tan\left({}^{x}/_{2}\right)$ pour intégrer des fractions rationnelles trigonométrique.

Règles de Bioche : Choisir un changement de variable pour calculer $\int F\left(\sin x, \cos x\right) dx$, on pose $\omega(x) = F\left(\sin x, \cos x\right) dx$:
- si $\omega(-x) = \omega(x)$, on pose $t = \cos x$.
- si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$, on pose $t = \sin x$.
- si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$, on pose $t = \tan x$.

Exemple. Déterminons la primitive $\displaystyle\int \frac{\tan x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$, on pose $\omega(x) = \dfrac{\tan x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$ on a $\omega(-x) = \omega(x)$ alors d'après les règles de Bioche on pose $t = \cos x \iff dt = -\sin x\, dx$. Donc :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\tan x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x\left(1+\cos x\right)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{-1}{t\left(1+t\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \ln\left|\frac{1+t}{t}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{1+\cos x}{\cos x}\right| + C
\end{aligned}$$

Fractions rationnelles $F\left(\cosh x, \sinh x\right)$ **:** Pour ce genre de fraction en fait le changement de variable $t = e^x$ ou $t = \tanh\left({}^{x}/_{2}\right)$, en utilisant les relations suivantes :

$$\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}\ ;\ \sinh x = \frac{2t}{1-t^2}\ ;\ dx = \frac{2}{1-t^2}dt.$$

Exemple. Déterminons des primitives de la fraction $F(x) = \dfrac{1+\sinh x}{1+\cosh x}$.
- On pose $t = e^x$ on a :

$$\begin{aligned}
\int F(x)dx &= \int \frac{1+\sinh x}{1+\cosh x}dx \\
&= \int \frac{t^2+2t-1}{\left(t+1\right)^2}\frac{dt}{t} \\
&= \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{2}{t+1} + \frac{2}{\left(t+1\right)^2}\right) dt \\
&= -\ln|t| + 2\ln|t+1| - \frac{2}{t+1} + C \\
&= x + 2\ln|e^x+1| - \frac{2}{e^x+1} + C.
\end{aligned}$$

— On pose $t = \tanh\left(x/2\right)$ on a :

$$\begin{aligned}\int F(x)dx &= \int \frac{1+\sinh x}{1+\cosh x}dx \\ &= \int \frac{1+\frac{2t}{1-t^2}}{1+\frac{1+t^2}{1-t^2}}\frac{2}{1-t^2}dt \\ &= \int \frac{1-t^2+2t}{1-t^2}dt \\ &= \int \left(1-\frac{-2t}{1-t^2}\right)dt \\ &= t-\ln\left|1-t^2\right|+C \\ &= \tanh\left(x/2\right)-\ln\left|1-\tanh^2\left(x/2\right)\right|+C.\end{aligned}$$

Fractions rationnelles $F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ **:** on transforme l'expression ax^2+bx+c sous la forme $\alpha\left(X^2+A^2\right)$, $\alpha\left(X^2-A^2\right)$ ou $\alpha\left(A^2-X^2\right)$ (avec $\alpha > 0$) selon le signe de b^2-4ac. On utilise alors pour changement de variable la fonction $\sinh$, $\cosh$, $\sin$ ou $\cos$ selon le cas. Bien évidemment, les relations $\sin^2 x+\cos^2 x = 1$, $\cosh^2 x-\sinh^2 x = 1$ permettront de se débarrasser de la racine carrée et de ramener la question à la recherche de primitive d'une fraction rationnelle.

Exemple. Déterminons des primitives de la fraction $F(t) = t^2\sqrt{1-t^2}$, $t \in \left]-1, 1\right[$.

Prenant $t = \sin x$ on a :

$$\begin{aligned}\int F(t)dt = \int t^2\sqrt{1-t^2}dt &= \int \sin^2 x\sqrt{1-\sin^2 x}\cos x dx \\ &= \int \sin^2 x\cos^2 x dx.\end{aligned}$$

Par linéarisation on a :

$$\begin{aligned}\sin^2 x\cos^2 x &= \frac{\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)^2}{-16} \\ &= \frac{\left(e^{i2x}-e^{-i2x}\right)^2}{-16} = \frac{2\cos\left(4x\right)-2}{-16} \\ &= \frac{1}{8}\left(1-\cos\left(4x\right)\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int F(t)dt &= \frac{1}{8}\int\left(1-\cos\left(4x\right)\right)dx \\ &= \frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin(4x)\right)+C,\end{aligned}$$

d'autre part on a :

$$\begin{aligned}\sin(4x) &= 2\sin(2x)\cos(2x)\\ &= 4\sin(x)\cos(x)\left(1-2\sin^2(x)\right)\\ &= 4\sqrt{1-\sin^2(x)}\left(\sin(x)-2\sin^3(x)\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\int F(t)dt = \frac{1}{8}\left(\arcsin(t) - \sqrt{1-t^2}\left(t-2t^3\right)\right) + C.$$

Fractions rationnelles $F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ **,** $n \geq 2$ **et** $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ **:** On fait le changement de variable $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ et on se ramène à calculer une primitive de fraction rationnelle.

Exemple. Déterminons des primitives de $F(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \dfrac{1}{1-x}$, $x \in]-1, 1[$.

On pose $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \iff t^2 = \frac{1-x}{1+x} \iff x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $x - 1 = \frac{2t^2}{1+t^2}$ et $dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$. Donc

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{1}{1-x}dx &= \int t \cdot \frac{1+t^2}{2t^2} \cdot \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt\\ &= -2\int \frac{1}{1+t^2}dt\\ &= -2\arctan(t) + C\\ &- 2\arctan(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}) + C.\end{aligned}$$

2 Intégrales généralisées.

2.1 Définitions et exemples.

Dans le chapitre précédent, on a défini et étudié la notion d'intégrale de Riemann d'une fonction bornée et définie sur un intervalle fermé borné. Dans ce chapitre, on cherche à étendre la notion d'intégrale aux fonctions non nécessairement bornée et définies sur des intervalles I de la forme $[a, b[$ avec $a < b \leq +\infty$ ou $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b$ ou $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Définition 2.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle quelconque I. f est dite localement intégrable sur I si sa restriction à tout intervalle fermé borné est intégrable.

Dans la suite on va noter l'ensemble des fonctions localement intégrable sur I par $\mathcal{R}_{\mathsf{loc}}(I)$.

Exemple.

1. Toute fonction continue ou continue par morceaux sur I est localement intégrable sur I.
2. Toute fonction monotone sur I est localement intégrable sur I.

Définition 2.2.

1. Soit $f \in \mathcal{R}_{\mathsf{loc}}([a, b[)$ avec $a < b \leq +\infty$. On dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si la fonction $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b^-. On note
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$
Dans le cas où la limite n'existe pas ou n'est pas finie on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge.

2. Soit $f \in \mathcal{R}_{\mathsf{loc}}(]a, b])$ avec $-\infty \leq a < b$. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si la fonction $\displaystyle\int_x^b f(t)dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers a^+. On note
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt.$$
Dans le cas où la limite n'existe pas ou n'est pas finie on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge.

3. Soit $f \in \mathcal{R}_{\mathsf{loc}}(]a, b[)$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. On dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si pour un certain $\alpha \in]a, b[$, les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^\alpha f(t)dt$ et $\displaystyle\int_\alpha^b f(t)dt$

sont convergentes. alors en dit que intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et on écrit :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^\alpha f(t)dt + \int_\alpha^b f(t)dt.$$

L'existence et la valeur de $\int_a^b f(t)dt$ ne dépend pas de α. Si l'une des deux intégrales $\int_a^\alpha f(t)dt$ ou $\int_\alpha^b f(t)dt$ diverge, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Exemple. Étudiant les intégrales suivantes : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ et $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

1. Soit $x > 1$ on a $\int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln x$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}dt = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty,$$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ diverge.

2. Soit $x > 1$ on a $\int_1^x \frac{1}{t^2}dt = 1 - \frac{1}{x}$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1,$$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge.

3. On détermine d'abord la convergence des deux intégrales suivantes : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ et $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.
   - $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \lim_{x\to1^-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \lim_{x\to1^-} \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$, donc $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge.
   - $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \lim_{x\to-1^+} \int_x^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \lim_{x\to-1^+} -\arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$, donc $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge.

   On peut conclure que $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge et

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \pi.$$

Remarque 2.3.

1. Il se peut que $\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^x f(t)\,dt$ soit finie sans que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ soit convergente. En effet, il

suffit de considérer par exemple une fonction impaire continue. On a

$$\int_{-x}^{x} tdt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-x}^{x} = 0,$$

par contre

$$\int_{0}^{+\infty} tdt = \lim_{x\to+\infty}\int_{0}^{x} tdt = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^2 = +\infty.$$

2. Si f est une fonction définie, localement intégrable et bornée sur $]a,b[$, on peut affirmer directement que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente. En effet on peut prolonger f en a et en b par n'importe quelles valeurs, l'existence de l'intégrale sera assurée car, la fonction prolongée est $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$. Par exemple $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right)dt$ converge, car la fonction $\tilde{f}:[0,1]\to\mathbb{R}\,;\, t\mapsto \begin{cases}\sin(1/t) & t\neq 0,\\ 2/5 & ; t=0.\end{cases}$ est Riemann intégrable sur $[0,1]$.

Exemple (Exemples de Références).

1. **Intégrales de Riemann :** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}dt$ et $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^\alpha}dt.$

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

   (b) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si et seulement si $\alpha<1$.

   En effet pour $x>0$ on a :

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt = \begin{cases}[\ln t]_1^x & ;\alpha=1,\\ \left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_1^x & ;\alpha\neq 1.\end{cases}$$

2. **Intégrales de Bertrand** : $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{t(\ln t)^\beta}dt.$

$\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{t(\ln t)^\beta}dt$ converge si et seulement si $\beta>1$. En effet pour $x>0$ on a :

$$\int_e^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta}dt = \begin{cases}[\ln|\ln(t)|]_e^x & ;\beta=1,\\ \left[\frac{1}{1-\beta}(\ln t)^{1-\beta}\right]_e^x & ;\beta\neq 1.\end{cases}$$

Théorème 2.4 (Convergence d'une intégrale et primitives). *Soit f une fonction continue sur $]a,b[$, et F une primitive de f définie par*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt;\ c\in\left]a,b\right[.$$

Alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \text{ converge } \iff \lim_{x\to a^+} F(x) \text{ et } \lim_{x\to b^-} F(x) \text{ existent et sont finies.}$$

Et on a

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt &= \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt \\ &= \int_c^b f(t)\,dt - \int_c^a f(t)\,dt \\ &= \lim_{x\to b^-}\int_c^x f(t)\,dt - \lim_{x\to a^+}\int_c^x f(t)\,dt \\ &= \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).\end{aligned}$$

□

Proposition 2.5. *Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ soit convergente. Alors*

$$\left[\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell\right] \implies [\ell = 0].$$

Démonstration. Raisonnement par l'absurde, supposons que $\ell \neq 0$; $\forall\varepsilon > 0$; $\exists A > 0\ \forall x > A$ on a $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. On sait que

$$\int_a^t f(x)\,dx = \int_a^A f(x)\,dx + \int_A^t f(x)\,dx.$$

Et on a pour $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$

$$\int_A^t f(x)\,dx > \int_A^t \frac{\ell}{2}dx = \frac{\ell}{2}(t-A)$$

Donc

$$\int_A^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_A^t f(x)\,dx = +\infty,$$

ce qui contredit le fait que l'intégrale de f sur $[a,+\infty[$ soit convergente. □

2.2 Critères généraux de convergence.

2.2.1 Les fonctions positives localement intégrables.

On considère dans ce paragraphe le cas particulier des fonctions $f : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ localement intégrables.

Théorème 2.6. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ localement intégrable. $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si la fonction F définie pour tout $x \in [a, b[$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est majorée. Et on a*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sup_{x\in[a,b[} F(x).$$

Démonstration. Si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge alors $F(x) \leq \int_a^b f(t)\,dt = M$. Réciproquement supposons que pour tout $x \in [a, b[$; $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est majorée. On a F est majorée et croissante, car $x \leq y \implies F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,dt \geq 0$, donc elle converge vers $\sup_{x\in[a,b[} F(x)$. En effet l'ensemble $F([a, b[)$ est non vide et majoré donc il admet une borne supérieure $\ell := \sup_{x\in[a,b[} F(x)$. La caractérisation de la borne supérieure confirme que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c \in [a, b[$ tel que $\ell - \varepsilon < F(c) \leq \ell$, puisque F est croissante alors $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in [c, b[$ on a $\ell - \varepsilon < F(x) \leq \ell$, donc $\lim_{x\to b^-} F(x) = \ell$. Dans le cas où F n'est pas majorée, i.e. $\forall A > 0$, $\exists c \in]a, b]$; $F(c) > A$ et puisque F est croissante on a $\forall x \in [c, b[$; $F(x) > A$. Donc $\lim_{x\to b^-} F(x) = +\infty$. □

Proposition 2.7 (Critère de comparaison). *Soient f, $g : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ deux fonctions localement intégrables vérifiant $f \leq g$ sur $[a, b[$. Alors*

(i) $\int_a^b g(t)\,dt$ *converge* $\implies$ $\int_a^b f(t)\,dt$ *converge et on a* $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$.

(ii) $\int_a^b f(t)\,dt$ *diverge* $\implies$ $\int_a^b g(t)\,dt$ *diverge.*

Démonstration. Supposons que $\int_a^b g(t)\,dt$ converge. On définit F, G par $\forall x \in [a, b[$; $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t)dt$, on a

$$\forall x \in [a, b[;\ F(x) \leq G(x) \leq \sup_{x\in[a,b[} G(x) = \int_a^b g(t)\,dt.$$

F est croissante et majorée sur $[a, b[$, donc F converge quand $x \to b^-$, c'est à dire que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge

$$\lim_{x\to b^-} F(x) \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

Donc $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$. Pour (ii) de la proposition c'est la contraposée de (i). □

Exemple.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge, car $\forall t \in [1, +\infty[\,;\ e^{-t^2} \le e^{-t}$ et

$$\int_1^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_1^x = \frac{1}{e}.$$

2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin t}dt$ diverge, car $\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]\,;\ 0 < \sin t < t \implies \dfrac{1}{t} < \dfrac{1}{\sin t}$ et

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{t}dt = \lim_{x\to0^+}\int_x^{\pi/2}\frac{1}{t}dt = \lim_{x\to0^+}[\ln t]_x^{\pi/2} = +\infty.$$

Définition 2.8. Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a, b[$. On dit que $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature si elles sont toutes les deux divergentes ou toutes les deux convergentes.

Proposition 2.9. *Soient $f,\ g : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ deux fonctions localement intégrables ($b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$).*

1. *Si $f \sim g$ (sont équivalentes) à gauche de b, alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.*
2. *Si $\displaystyle\lim_{t\to b^-}\frac{f(t)}{g(t)} = 0$, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge $\implies \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.*
3. *Si $\displaystyle\lim_{t\to b^-}\frac{f(t)}{g(t)} = +\infty$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge $\implies \displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge.*

Démonstration.

1. $f \sim g$ en b^-, donc $f(t) = (1 + \theta(t))g(t)$ au voisinage de b à gauche avec $\displaystyle\lim_{t\to b^-}\theta(t) = 0$ (i.e. $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall t \in [a, b[\,;\ 0 < b - t < \eta \implies |\theta(t)| < \varepsilon$). Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists\eta > 0$ tel que :

$$0 < b - t < \eta \implies -\frac{1}{2} < \theta(t) < \frac{1}{2} \implies \frac{1}{2}g(t) < f(t) < \frac{3}{2}g(t).$$

Si $\int_a^b f(t)dt$ converge alors $\int_{b-\eta}^b f(t)dt$ converge, donc $\frac{1}{2}\int_{b-\eta}^b g(t)dt$ converge et par suite $\int_a^b g(t)dt$ converge. De même Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_{b-\eta}^b f(t)dt$ diverge, donc $\frac{3}{2}\int_{b-\eta}^b g(t)dt$ diverge et par suite $\int_a^b g(t)dt$ diverge. Alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

2. $\displaystyle\lim_{t\to b^-}\frac{f(t)}{g(t)} = 0$ i.e. $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall t \in [a, b[\,;\ 0 < b - t < \eta \implies \frac{f(t)}{g(t)} < \varepsilon$. Pour $\varepsilon = 1$, $\exists\eta > 0$ tel que :

$$0 < b - t < \eta \implies f(t) < g(t).$$

Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_{b-\eta}^b g(t)dt$ converge, donc $\int_{b-\eta}^b f(t)dt$ converge et par suite $\int_a^b f(t)dt$ converge.

3. $\displaystyle\lim_{t\to b^-}\frac{f(t)}{g(t)} = +\infty$ i.e. $\forall A > 0,\ \exists\eta > 0,\ \forall t \in [a, b[\,;\ 0 < b - t < \eta \implies \frac{f(t)}{g(t)} > A$. Pour $A = 1$, $\exists\eta > 0$ tel que :

$$0 < b - t < \eta \implies g(t) < f(t).$$

Si $\int_a^b f(t)dt$ converge alors $\int_{b-\eta}^b f(t)dt$ converge, donc $\int_{b-\eta}^b g(t)dt$ converge et par suite $\int_a^b g(t)dt$ converge.

$\square$

Développements limités usuels.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$
$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$
$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n).$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n).$
$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}).$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5).$

Exemple.

1. La nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin(t)} dt$.

   On a $\sin(t) \overset{0}{\sim} t \iff \frac{1}{\sin(t)} \overset{0}{\sim} \frac{1}{t}$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin(t)} dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ sont de même nature, et puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sin(t)} dt$ diverge.

2. La nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{1 + t\sinh t - \cosh t}{(1-\cos(t))^{5/4}} dt$.

   On a $1 + t\sinh t - \cosh t \overset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ et $(1-\cos(t))^{5/4} \overset{0}{\sim} \left(\frac{t^2}{2}\right)^{5/4} \Longrightarrow \dfrac{1 + t\sinh t - \cosh t}{(1-\cos(t))^{5/4}} \overset{0}{\sim} \dfrac{2^{1/4}}{t^{1/2}}$.

   Donc
   $$\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}} dt \text{ converge } \Longrightarrow \int_0^1 \frac{1 + t\sinh t - \cosh t}{(1-\cos(t))^{5/4}} dt \text{ converge.}$$

Exercice. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x}}{\sqrt[p]{x}} dx;\ (n,p) \in \mathbb{N}^2 \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (x+1)^\beta} dx;\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Le Corollaire suivant est une conséquence immédiate de la proposition précédente en utilisant les intégrales généralisées de Riemann.

Corollaire 2.10 (Les règles de Riemann). *Soit f une fonction positive localement intégrable sur $[a, +\infty[$, $a > 0$.*

1. *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = \ell$ *et* $\ell \neq 0$, *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *et* $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dx$ *sont de même nature.*
2. *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$ *et* $\alpha > 1$ *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *converge.*
3. *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ *et* $\alpha \leq 1$ *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *diverge.*

Exemple. Étudier la nature des intégrales suivantes : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln(t))^\alpha}dt$.

— On a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-\sqrt{t}} = 0$, donc pour tout $a > 0$ on a $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ converge $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$ est convergente.

— On a $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{(\ln(t))^\alpha} = +\infty$, donc pour tout $a > 0$ on a $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{(\ln(t))^\alpha}dt$ diverge $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\ln(t))^\alpha}dt$ est divergente.

Exercice. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$.

Corollaire 2.11. *Soit f une fonction positive localement intégrable sur $[a, b[$.*

1. *Si* $\lim\limits_{x\to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = \ell$ *et* $\ell \neq 0$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *et* $\displaystyle\int_0^{b-a} \frac{1}{t^\alpha}dx$ *sont de même nature.*
2. *Si* $\lim\limits_{x\to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = 0$ *et* $\alpha < 1$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *converge.*
3. *Si* $\lim\limits_{x\to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = +\infty$ *et* $\alpha \geq 1$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *diverge.*

Exercice. Pour quelles valeurs de α l'intégrale généralisée suivante est convergente :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha}dx.$$

Si f n'est pas positive on a deux cas, soit f est négative et dans ce cas $-f$ est positive et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b -f(x)dx$ sont de même nature, soit f change de signe et dans ce cas on considère $|f|$ qui est positive, pour cela on a besoin de définir la convergence absolue.

2.2.2 Convergence absolue.

Définition 2.12. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ localement intégrable. On dit qu'une fonction f est absolument intégrable sur $[a, b[$ si $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\, dx$ converge, dans ce cas l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est dite absolument convergente.

Exemple. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$, car $\left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| < \frac{1}{t^\alpha}$ pour tout $t \in [1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si $\alpha > 1$(Intégrale généralisée de Riemann).

Proposition 2.13. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ localement intégrable.*

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ converge.}$$

Autrement dit : Toute intégrale absolument convergente est convergente.

Démonstration. On a pour $t \in [a, b[$:

$$-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)| \iff 0 \leq f(t) + |f(t)| \leq 2\,|f(t)|\,.$$

On pose $g : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $g(t) = f(t) + |f(t)|$. On a $0 \leq g(t) \leq 2\,|f(t)|$, puisque $\int_a^b |f(x)|\, dx$ converge alors $\int_a^b g(x)dx$ est convergente. Donc $\int_a^b f(x)dx$ est convergente, car $f(t) = g(t) - |f|\,(t)$ pour tout $t \in [a, b[$, i.e. f est la différence de deux fonctions intégrables sur $[a, b[$. □

Proposition 2.14 (Intégration par partie). *Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$ ($a < b \leq +\infty$). Si $f \times g$ admet une limite lorsque x tend vers b^- alors les intégrales $\int_a^b f'(x)g(x)dx$ et $\int_a^b f(x)g'(x)dx$ sont de même nature. De plus si les deux intégrales convergent on a :*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \lim_{x \to b^-} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Démonstration. Soit $t \in [a, b[$ on a

$$\int_a^t f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^t - \int_a^t f(x)g'(x)dx,$$

par passage à la limite quand $t \to b^-$ (si elles existent), on obtient le résultat voulu. □

Remarque. Une intégrale peut très bien être convergente sans être absolument convergente, une telle intégrale est dite semi-convergente.

Exemple. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente.

— L'intégrale est convergente :
  On a $\lim_{t \to +\infty} \frac{-\cos t}{t} = 0$, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ sont de même nature. Et puisque $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge alors $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ converge. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

— L'intégrale n'est pas absolument convergente :
Puisque $|\sin t| \leq 1$ alors $\left|\frac{\sin t}{t}\right| \geq \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - \frac{\cos 2t}{t}\right)$, on peut confirmer de la même manière (par intégration par partie) que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$ est convergente, en plus $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge. Donc $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ est divergente.

Un autre outil pour démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente est d'appliquer le Théorème d'Abel.

Théorème 2.15 (Théorème d'Abel). *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, positive, décroissante, ayant une limite nulle en $+\infty$. Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$, telle que la primitive $\int_a^x g(t)dt$ soit bornée. Alors l'intégrale*

$$\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$$

est convergente.

Démonstration. Pour tout $x \geq a$, posons $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. G est bornée, $\exists M > 0\,;\, |G(x)| \leq M$. Par intégration par parties on a :

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = [f(t)G(t)]_a^x - \int_a^x f'(t)G(t)dt,$$

Puisque G est bornée et f tend vers 0, $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(t)G(t)]_a^x = f(a)G(a) = 0$. Il reste juste à montrer que $\int_a^{+\infty} f'(t)G(t)dt$ converge, on a

$$|f'(t)G(t)| \leq -Mf'(t) \implies \int_a^x |f'(t)G(t)|\, dt \leq -M \int_a^x f'(t)dt,$$

et $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f'(t)dt = -f(a)$, ce qui ce traduit par $\int_a^{+\infty} f'(t)G(t)dt$ est absolument convergente. $\square$

Exemple. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente, appliquant le théorème on posant $f(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = \sin t$.

Proposition 2.16 (Changement de variable). *Soient f une fonction continue sur $[a, b[$ $(a < b \leq +\infty)$ et φ une bijection de $[c, d[$ $(c < d \leq +\infty)$ sur $[a, b[$ telle que et φ et φ^{-1} soient de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[c, d[$ et $[a, b[$ respectivement. Alors les intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature. De plus si les deux intégrales convergent on a :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\, dt.$$

Démonstration. La preuve découle du théorème de changement de variable usuel. On a pour $t \in [a, b[$

$$\int_a^t f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(t)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

— Si φ est croissante on a $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ et

$$\int_a^t f(x)dx = \int_c^{\varphi^{-1}(t)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

— Si φ est décroissante on a $\varphi(c) = b$, $\varphi(d) = a$ et

$$\int_a^t f(x)dx = -\int_d^{\varphi^{-1}(t)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(t)}^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

par passage à la limite dans le cas de la convergence des intégrales, on trouve le résultat. □

Exemple. Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^x)\, dx$. On pose $e^x = t \iff x = \ln(t) := \varphi(t)$ cette fonction ainsi que sa réciproque sont bien monotones de classe $\mathcal{C}^1$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^x)\, dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ sont de même nature, de ce qui précède on a vu que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^x)\, dx$ est convergente.

Remarque. Un changement de variables peut transformer une intégrale généralisée en intégrale de Riemann, ce qui montre la convergence de l'intégrale généralisée. Par exemple,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cos x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 dx = \pi.$$

3 Équations différentielles.

C'est au début du XVII ième siècle, avec le calcul différentiel et intégral de Newton et Leibniz, qu'apparut la notion d'équations différentielles. Elles sont issues de problèmes de géométrie et de mécanique. Au début du XVIII ième siècle les méthodes classiques de résolution de certaines équations (linéaires et de Bernoulli notamment) furent découvertes. Avec le développement de la mécanique, la résolution des équations différentielles devient une branche importante des mathématiques (grâce à Euler, Lagrange, Laplace ...). Une **équation différentielle** est une équation où **l'inconnue est une fonction**, et qui se présente sous la forme d'une relation entre **cette fonction et ses dérivées**.

3.1 Définitions et vocabulaire.

Définition 3.1. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, on appelle équation différentielle d'ordre n et d'inconnue la fonction y toute relation de la forme

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right) \tag{3.1}$$

avec les conditions initiales

$$y\left(x_0\right) = y_0, y'\left(x_0\right) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_{n-1}, \tag{3.2}$$

où f est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^{n+1}, \left(x_0, y_0, \ldots, y_{n-1}\right)$ est un vecteur fixé dans $\mathbb{R}^{n+1}$, et l'inconnue est une fonction y de classe $\mathcal{C}^n$ définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x_0.
On appelle solution de cette équation toute fonction y de classe $\mathcal{C}^n$ définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et vérifiant l'équation (3.1) ainsi que les conditions initiales (3.2).
La solution est dite maximale si l'intervalle ouvert est maximal. Autrement dit, on ne peut pas trouver une autre solution qui prolonge y.

Exemple.

1. $y' = y + x$ est une équation différentielle du premier ordre, qui s'écrit sous la forme de

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

avec $f(x, y(x)) = y(x) + x$. On peut vérifier que toute fonction qui s'écrit sous la forme $y(x) = Ke^x - x - 1$, avec K constante arbitraire est une solution de l'équation. Si on ajoute une condition initiale $y(0) = 0$, la solution de cette équation est $y(x) = e^x - x - 1$, Il s'agit bien de la solution maximale, car elle est définit sur $\mathbb{R}$.

2. $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec $y(0) = 1, y'(0) = 3$ est une équation différentielle du second ordre et $y(x) = -e^x + 2e^{2x}$ est une solution qui vérifie la condition initiale et elle est maximale.

3.2 Équations différentielles du premier ordre.

3.2.1 Équations à variables séparables.

Définition 3.2. Une équation différentielle du premier ordre $y'(x) = f(x, y(x))$ est dite à variables séparables si elle peut être ramenée à la forme suivante $g(y(x))y'(x) = h(x)$, où g et h sont deux fonctions définies sur un intervalle ouvert et continues. En pratique, cela signifie qu'on peut séparer x et y. Dans ce cas on a

$$\int g(y(x))y'(x)dx = \int h(x)dx$$

et par suite si G et H désignent respectivement une primitive de g et de h, on aura $G(y) = H(x) + K$. On pourra ensuite essayer d'exprimer y en fonction de x.

Exemple. $y'(x) = x^2y(x) + x^2$ avec $y(0) = 1$ est à variables séparables. En effet, on a

$$\frac{y'(x)}{y(x)+1} = x^2 \implies \ln|y+1| = \frac{1}{3}x^3 + K,$$

Donc

$$y(x) = K_1 e^{\frac{1}{3}x^3} - 1.$$

La condition initiale $y(0) = 1$ entraine $K_1 = 2$.

Exercice 3.3. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\left(x^2+1\right) y'(x) = y^2 - 1.$$

3.2.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre.

Définition 3.4. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation différentielle de la forme

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x),$$

où a et b sont deux fonctions données et continues sur un intervalle ouvert donné de $\mathbb{R}$. L'équation $y'(x) = a(x)y(x)$ est dite équation homogène associée ou équation sans second membre. Elle sera souvent notée "**SSM**".

Exemple. $y'(x) + y(x) = \sin(x)$ est une équation linéaire du premier ordre où le second membre est la fonction $x \longmapsto \sin(x)$ et $y'(x) + y(x) = 0$ est l'équation homogène associée.

Pour résoudre l'équation linéaire **SSM**

$$y'(x) = a(x)y(x),$$

soit y_1 une solution quelconque. On pose

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx} y_1(x).$$

On a

$$y'(x) = e^{-\int a(x)dx} \left(-a\,(x)\, y_1(x) + y_1'(x)\right) = 0,$$

donc on peut conclure que :

$$y_1(x) = Ke^{\int a(x)dx}, \text{ où } K \text{ est une constante arbitraire.}$$

Cette solution est définie sur l'intervalle ouvert sur lequel la fonction a est définie et continue.

Remarque. Si y est une solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre **SSM**, alors ou bien y est la solution identiquement nulle ou bien y ne s'annule en aucun point.

Théorème 3.5. *Soit y_p une solution particulière de l'équation avec second membre, alors y est solution de l'équation avec second membre si et seulement si $y_{SSM} = y - y_p$ est solution de l'équation sans second membre.*

Démonstration. Soit y_p une solution particulière, alors

$$y_p'(x) = a(x)y_p(x) + b(x)$$

d'autre part, si y est une solution quelconque de l'équation avec second membre, y vérifie

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x),$$

en soustrayant membre à membre les deux équations précédentes, on obtient :

$$\left(y - y_p\right)'(x) = a(x)\left[\left(y - y_p\right)(x)\right].$$

□

Remarque 3.6. En pratique, pour résoudre l'équation avec second membre, il suffit d'ajouter une solution particulière de l'équation avec second membre à la solution générale de l'équation sans second membre $y = y_p + y_{SSM}$ (Principe de superposition).

Pour déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre, on applique une méthode due à Lagrange appelée méthode de la variation de la constante .

— **Méthode de la variation de la constante :**

À partir de la solution générale de l'équation **SSM**, on a $y(x) = Ke^{\int a(x)dx}$ la méthode de la variation de la constante consiste à considérer la constante K comme étant une fonction de x et remplacer cette solution dans l'équation avec second membre. On aura

$$y'(x) = K'(x)e^{\int a(x)dx} + a(x)K(x)e^{\int a(x)dx}.$$

En remplaçant dans l'équation avec second membre, on obtient

$$K'(x) = b(x)e^{-\int a(x)dx}.$$

Par suite

$$K(x) = \int b(x)e^{-\int a(x)dx},$$

il suffit de trouver une seule fonction K pour déduire une solution particulière de l'équation avec second membre.

Exemple. On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = \sin(x).$$

La solution générale de l'équation **SSM** est $y(x) = Ke^{-x}$, et la méthode de la variation de la constante donne $K'(x) = \sin(x)e^x$, on en déduit $K(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x))e^x$. Par conséquent, la solution générale de l'équation est donnée par :

$$y(x) = Ke^{-x} + \frac{1}{2}(\sin(x) + \cos(x)).$$

3.2.3 Équations homogènes du premier ordre.

Définition 3.7. Ce sont les équations du type

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right).$$

Pour résoudre ce genre d'équations, le changement de variable $y(x) = x\alpha(x)$, où α est une fonction à déterminer, permet de transformer l'équation initiale en une équation du premier ordre à variables séparables.

Exemple. L'équation $x^2y'(x) = y^2(x) + xy(x) + x^2$ est homogène. En effet, elle peut être écrite sous la forme :

$$y'(x) = \frac{y^2(x)}{x^2} + \frac{y(x)}{x} + 1.$$

En prenant en charge le changement de variable précédent, on obtient :

$$\frac{\alpha'(x)}{\alpha^2(x) + 1} = \frac{1}{x},$$

d'où $\alpha(x) = \tan(\ln|x| + K)$, et par suite, $y(x) = x\tan(\ln|x| + K)$.

3.2.4 Équations de Bernoulli.

Ce sont les équations différentielles du premier ordre de la forme

$$y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y^n(x) = 0, \text{ avec } n \geq 2,$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et supposées continues. La méthode de résolution consiste à diviser par y^n ce qui conduit, via un changement de variable, à une équation différentielle linéaire du premier ordre. En effet, on a

$$\frac{y'(x)}{y^n(x)} + \frac{a(x)}{y^{n-1}(x)} + b(x) = 0,$$

en posant $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}(x)}$, on déduit

$$\frac{1}{1-n}z'(x) + a(x)z(x) + b(x) = 0.$$

Exemple. $y'(x) + x^2y(x) + x^5y^2(x) = 0$ avec $y(0) = 1$ est de Bernoulli, on pose $z(x) = \frac{1}{y(x)}$ et on obtient l'équation

$$-z'(x) + x^2z(x) + x^5 = 0.$$

La résolution de l'équation **SSM** donne $z(x) = Ke^{x^3/3}$, et la variation de la constante donne $K'(x) = x^5e^{-x^3/3}$. À l'aide d'une intégration par parties, on obtient $K(x) = (-x^3 - 3)\,e^{-x^3/3}$, par suite $z(x) = Ke^{x^3/3} - x^3 - 3$, et finalement $y(x) = \frac{1}{Ke^{x^3/3} - x^3 - 3}$, où la constante K est à déterminer selon la condition initiale. Dans notre cas, on obtient :

$$y(x) = \frac{1}{4e^{x^3/3} - x^3 - 3}.$$

3.2.5 Équations de Riccati.

Ce sont les équations différentielles du premier ordre de la forme

$$y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c\,(x)\,,$$

où a, b et c sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et supposées continues. Quand on connait une solution particulière y_0 de cette équation, on fait le changement de variable $z = y - y_0$, pour obtenir une équation qui est de Bernoulli en z.

$$z'(x) = a(x)z^2(x) + [2a(x)y_0(x) + b(x)]\,z(x).$$

Exemple. Résoudre $y' + \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{1}{x^2}$ sachant que $\frac{1}{x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle. Posons $z = y - \frac{1}{x}$. D'où $y = z + \frac{1}{x}$ et $y' = z' - \frac{1}{x^2}$. En remplaçant dans l'équation on a : $z' - \frac{z}{x} - z^2 = 0$ i.e. $z' = \frac{z}{x} + z^2$ qui est une équation de Bernoulli, on pose alors $u = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$ ($z = 0$ est solution de $z' = \frac{z}{x} + z^2$). On obtient $u' = -\frac{1}{x}u - 1$. D'où $u = \frac{k}{x} - \frac{x}{2} \Longrightarrow z = \frac{2x}{C - x^2} \Longrightarrow$ $y = \frac{1}{x} + \frac{2x}{C - x^2}$; $C \in \mathbb{R}$.

3.3 Équations différentielles linéaires du second ordre.

3.3.1 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

Définition 3.8. Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est une équation qui peut se mettre sous la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x), \qquad (E)$$

où a, b et c sont des réels vérifiant $a \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

L'équation sans second membre (SSM) associée à (E) est

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (E_0)$$

Proposition 3.9 (Admise). *Si l'équation (E_0) admet une solution non nulle, alors (S) l'ensemble des solutions de (E_0) est un espace vectoriel de dimension 2.*

Ainsi, la connaissance de deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2 de l'équation (E_0) ; fournit la solution générale de (E_0) :

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2,$$

où α et β sont des constantes réelles.

Cherchons les solutions du type $y = e^{rx}$; $(r \in \mathbb{R})$, on a $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2 e^{rx}$. $y = e^{rx}$ est solution de (E_0) si et seulement si $ar^2 + br + c = 0$. Cette équation est dite équation caractéristique de l'équation (SSM). On a trois cas à étudier :

1^{er} cas : Si $b^2 - 4ac > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2 ce qui donne deux solutions de l'équation (E_0) sont $y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$. Les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes. On en déduit que $\{y_1, y_2\}$ est une base de (S) et par suite toute solution y de (S) s'écrit sous la forme $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, où α et β sont des constantes réelles.

$2^{éme}$ cas : Si $b^2 - 4ac = 0$ alors l'équation caractéristique admet une racine double réelle r_0. On a $y_1 = e^{r_0 x}$ est une solution de (E_0). On cherche la solution générale de (E_0) sous la forme $y = zy_1$. D'où $y' = z'y_1 + zy_1'$ et $y'' = z"y_1 + 2z'y_1' + zy_1''$, y est une solution de (E_0) si et seulement si

$$z''(ay_1) + z'(2ay_1' + by_1) + z(ay_1'' + by_1' + cy_1) = 0$$

Or $ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0$ (car y_1 est une solution) et $2ay_1' + by_1 = 0$ (car $r_0 = \frac{-b}{2a}$). D'où $z''ay_1 = 0 \implies z'' = 0$ ce qui implique que $z = \alpha x + \beta$ où α et β sont des constantes réelles et par suite $y = (\alpha x + \beta)e^{rx}$, où α et β sont des constantes réelles.

<u>$3^{éme}$ cas</u> : Si $b^2 - 4ac < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ et $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ et $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ sont deux solutions de (E_0) linéairement indépendantes. En effet on a $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_1' = \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x$ et $y_1'' = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos\beta x - 2\alpha\beta e^{\alpha x}\sin\beta x - \beta^2 e^{\alpha x}\cos\beta x$, donc

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x\left[a\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + b\alpha + c\right] + e^{\alpha x}\sin\beta x[-2a\alpha\beta - b\beta],$$

Or $\alpha + i\beta$ est solution de l'équation caractéristique. Ce qui implique

$$\left[a\left(\alpha^2 - \beta^2\right) + b\alpha + c\right] + i\left[2a\alpha\beta + b\beta\right] = 0.$$

On en déduit que $a(\alpha^2 - \beta^2) + b\alpha + c = 0$ et $2a\alpha\beta + b\beta = 0$ et par suite $ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0$. De même on montre que $ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0$. Montrons que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes. Supposons que $\lambda y_1 + \gamma y_2 = 0$ i.e.

$$\lambda e^{\alpha x}\cos\beta x + \gamma e^{\alpha x}\sin\beta x = 0,$$

et ceci $\forall x \in \mathbb{R}$, en particulier pour $x = 0$ on obtient $\lambda = 0$ et pour $x = \frac{\Pi}{2\beta}$ on obtient $\gamma = 0$.

Proposition 3.10. *Soit (E_0) l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, où a, b et c sont des réels vérifiant $a \neq 0$. Alors :*

— Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admet deux racines réelles r_1 et r_2 et la solution générale de (E_0) est :

$$y = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x},$$

où α et β sont des constantes réelles.

— Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une racine double r_0 et la solution générale de (E_0) est :

$$y = (\alpha x + \beta)\, e^{r_0 x},$$

où α et β sont des constantes réelles.

— Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$

et $r_2 = \alpha - i\beta$ et la solution générale de (E_0) est :

$$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x),$$

où A et B sont des constantes réelles.

Exemple. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. (E_1) : $y'' + y' - 6y = 0.$
2. (E_2) : $4y'' + 12y' + 9y = 0.$
3. (E_3) : $y'' + 2y' + 2y = 0.$

Proposition 3.11. *Soit (E) l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(x)$ où a, b et c sont des réels vérifiant $a \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle I. La solution générale de (E) est*

$$y = y_{\mathsf{SSM}} + y_{\mathsf{p}},$$

où y_{SSM} est la solution générale de l'équation (SSM) associée à (E) et y_{p} est une solution particulière de l'équation (E).

Démonstration. Évidente. (Très bon exercice à faire.) □

D'après la proposition précédente, il reste à déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Méthodes pour déterminer une solution particulière de (E).

1^{er} cas : Si $f(x) = e^{\alpha x}P(x)$ où P est un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors on cherche une solution particulière de la forme :
- $y_{\mathsf{p}} = e^{\alpha x}Q(x)$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ de (E_0).
- $y_{\mathsf{p}} = xe^{\alpha x}Q(x)$ si α est une racine simple de l'équation caractéristique de (E_0).
- $y_{\mathsf{p}} = x^2e^{\alpha x}Q(x)$ si α est une racine double de l'équation caractéristique de (E_0).

avec Q est un polynôme de même degré que P.

$2^{éme}$ cas : Si $f(x) = e^{\alpha x}P(x)\cos\beta x$ ou $f(x) = e^{\alpha x}P(x)\sin\beta x$ où P est un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$; $\beta \in \mathbb{R}^*$, alors on cherche une solution particulière de la forme :
- $y_{\mathsf{p}} = e^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right)$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de l'équation caractéristique de (E_0).
- $y_{\mathsf{p}} = xe^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right)$ si $\alpha+i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique de (E_0).

avec Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de même degré que P.

$3^{éme}$ cas : Si f est quelconque, alors on cherche une solution particulière en utilisant la méthode de variation des constantes dite méthode de *Lagrange*. On a vu que $y_{\mathsf{SSM}} = Ay_1 + By_2$ où y_1 et y_2 sont linéairement indépendants. On cherche y_{p} de la forme $y_{\mathsf{p}} = A(x)y_1 + B(x)y_2$. On a $y'_{\mathsf{p}} = A'(x)y_1 + B'(x)y_2 + A(x)y'_1 + B(x)y'_2$ et on impose la condition dite condition de Lagrange

$$A'(x)y_1 + B'(x)y_2 = 0.$$

D'où

$$\begin{cases} y'_{\mathsf{p}} = A(x)y'_1 + B(x)y'_2 \\ y''_{\mathsf{p}} = A'(x)y'_1 + B'(x)y'_2 + A(x)y''_1 + B(x)y''_2. \end{cases}$$

Donc

$$ay''_{\mathsf{p}} + by'_{\mathsf{p}} + cy_{\mathsf{p}} = A(x)\left[ay''_1 + by'_1 + cy_1\right] + B(x)\left[ay''_2 + by'_2 + cy_2\right] + aA'(x)y'_1 + aB'(x)y'_2.$$

Alors

$$ay''_{\mathsf{p}} + by'_{\mathsf{p}} + cy_{\mathsf{p}} = f(x) \iff \begin{cases} A'(x)y_1 + B'(x)y_2 = 0. \\ A'(x)y'_1 + B'(x)y'_2 = \frac{f(x)}{a}. \end{cases}$$

Comme y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes. On a

$$\frac{y_2}{y_1} \neq \text{Cste} \implies \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \neq 0 \implies y'_2y_1 - y_2y'_1 \neq 0.$$

Or

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y'_2y_1 - y_2y'_1 \neq 0 \quad \text{(Wronskien de l'équation.)}$$

$$\Delta_{A'} = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{f(x)}{a} & y'_2 \end{vmatrix} \text{ et } \Delta_{B'} = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & \frac{f(x)}{a} \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\begin{cases} A' = -\frac{f(x)y_2}{a\left(y'_2y_1 - y_2y'_1\right)}, \\ B' = \frac{y_1f(x)}{a\left(y'_2y_1 - y_2y'_1\right)}. \end{cases}$$

Soient A une primitive de A' et B une primitive de B' alors $y_{\mathsf{p}} = Ay_1 + By_2$.

Proposition 3.12 (Superposition des solutions). *Soit (E) l'équation : $ay" + by' + cy = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, où a, b et c sont des constantes réelles et f_k une fonction continue sur un intervalle I. Et soit (E_k) l'équation : $ay'' + by' + cy = f_k(x)$. Si y_k est une solution de (E_k) alors $\sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution de (E).*

Démonstration. On a : $ay_k''+by_k'+cy_k = f_k(x)$, donc $a\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)'' + b\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)' + c\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. □

Exemple.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y''+y'-2y = xe^x+\cos x$.
   — l'équation (SSM) est $y''+y'-2y=0$ son équation caractéristique est $r^2+r-2=0$, on a $\Delta = 9 > 0$ et les racines sont $r_1=-2$ et $r_2=1$. D'où $y_{SSM} = Ae^{-2x}+Be^x \quad (A,B)\in\mathbb{R}^2$.
   — Cherchons la solution particulière de l'équation différentielle $y''+y'-2y = xe^x$. Comme 1 est une racine simple de l'équation caractéristique on va chercher une solution particulière sous la forme :
   $$\begin{aligned} y_{p_1} &= x(ax+b)e^x = \left(ax^2+bx\right)e^x, \\ y_{p_1}' &= \left(ax^2+bx+2ax+b\right)e^x, \\ y_{p_1}'' &= \left(ax^2+bx+4ax+2b+2a\right)e^x. \end{aligned}$$
   Donc
   $$\begin{aligned} y_{p_1}''+y_{p_1}'-2y_{p_1} \quad &= \quad x^2e^x[a+a-2a]+xe^x[b+4a+b+2a-2b] \\ &\quad +e^x[2b+2a+b] = xe^x. \end{aligned}$$
   Alors
   $$\begin{cases} 6a=1 \\ 3b+2a=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=\frac{-1}{9} \end{cases}.$$
   Donc la solution particulière est : $y_{p_1} = \left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{9}x\right)e^x$.
   — Cherchons la solution particulière de l'équation différentielle $y''+y'-2y=\cos x$. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique on va chercher une solution particulière sous la forme
   $$\begin{aligned} y_{p_2} &= \alpha\cos x+\beta\sin x, \\ y_{p_2}' &= -\alpha\sin x+\beta\cos x, \\ y_{p_2}'' &= -\alpha\cos x+\beta\sin x. \end{aligned}$$
   Donc
   $$y_{p_2}''+y_{p_2}'-2y_{p_2} = \cos x[-\alpha+\beta-2\alpha]+\sin x[-\beta-\alpha-2\beta] = \cos x$$
   Alors
   $$\begin{cases} \beta-3\alpha=1 \\ -3\beta-\alpha=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha=-\frac{3}{10} \\ \beta=\frac{1}{10} \end{cases}.$$
   Donc la solution particulière est : $y_{p_2} = -\frac{3}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x$. D'après la proposition de superposition des solutions, la solution particulière de (E) est $y_p = y_{p_1}+y_{p_2}$et la solution

générale de (E) est $y = y_{SSM} + y_p$. Donc

$$y = Ae^{-2x} + Be^{x} + \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x\right)e^{x} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + y = \tan x$.
   — L'équation (SSM) associée à (E) est $y'' + y = 0$, son équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$ et elle a comme racines $r = \pm i$. D'où $y_{SMM} = A\cos x + \beta \sin x$.
   — Pour chercher une solution particulière de l'équation (E) on va utiliser la méthode de variation des constantes, on pose $y_p = A(x)\cos x + B(x)\sin x$. Le système de Lagrange associé est :

$$\begin{cases} A'\cos x + B'\sin x = 0 \\ -A'\sin x + B'\cos x = \tan x \end{cases} \implies \begin{cases} A' = \frac{-\sin^2 x}{\cos x}, \\ B' = \sin x. \end{cases}$$

Alors $B = -\cos x$ et

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x}\cos x dx \\ &= \int \frac{-\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\cos x dx, \end{aligned}$$

on change le variable $u = \sin x$, on obtient :

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{-u^2}{1-u^2}du = \int \frac{u^2}{u^2-1}du \\ &= \int \left(1 + \frac{1/2}{u-1} - \frac{1/2}{u+1}\right)du \\ &= u + \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u+1| \\ &= \sin x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y_p &= \sin x\cos x + \frac{1}{2}\cos x \ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) - \sin x \cos x \\ &= \frac{1}{2}\cos x \ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right), \end{aligned}$$

et la solution générale de (E) est $y = y_{SSM} + y_p$. Donc

$$y = A\cos x + \beta\sin x + \frac{1}{2}\cos x \ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right).$$

Proposition 3.13. *Soit (E) l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(x)$ où a, b et c sont des constantes réelles et f une fonction continue sur un intervalle I. Pour chaque $x_0 \in I$ et chaque couple $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe* ***une seule*** *solution y de (E) vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$.*

3.3.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients non constants.

Définition 3.14. Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants est une équation de la forme :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \quad (E)$$

où $a(x), b(x)$ et $c(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,et $a(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Il n' y a pas de méthode générale pour résoudre l'équation (E) lorsque $a(x), b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions quelconques continues sur I, mais il y a une méthode dans le cas particulier des équations d'Euler.

Définition 3.15. Une équation différentielle d'ordre 2 est dite d'Euler si elle est de la forme :

$$\alpha x^2 y'' + \beta x y' + \gamma y = f(x),$$

où α, β et γ sont des constantes réelles, $\alpha \neq 0$ et f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Proposition 3.16. *L'équation (E) : $\alpha x^2 y'' + \beta x y' + \gamma y = f(x)$, est ramenée à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants en posant sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ le changement de variable $t = \log|x|$ et $y(x) = z(\log|x|)$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\log|x|) \\ y'(x) &= \frac{1}{x} z'(\log|x|) \\ y''(x) &= -\frac{1}{x^2} z'(\log|x|) + \frac{1}{x^2} z''(\log|x|), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{gathered} \alpha x^2 y'' + \beta x y' + \gamma y = f(x) \\ \Updownarrow \\ -\alpha z'(\log|x|) + \alpha z''(\log|x|) + \beta z'(\log|x|) + \gamma z(\log|x|) = f(x) \end{gathered}$$

ce qui se traduit par :

$$\alpha z''(t) + (\beta - \alpha) z'(t) + \gamma z(t) = f\left(\pm e^t\right),$$

si $x > 0$ alors $x = e^t$ et si $x < 0$ alors $x = -e^t$. □

Exemple. Résoudre l'équation différentielle (E) : $x^2 y'' + x y' + y = \ln|xe|$.

En posant	$y(x) = z(\log|x|)$
on a	$y'(x) = \frac{1}{x} z'(\log|x|)$
et	$y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\log|x|) + \frac{1}{x^2} z''(\log|x|)$

On a

$$x^2y'' + xy' + y = f(x) \iff -z' + z'' + z' + z = t + 1 \iff z'' + z = t + 1.$$

Il est facile de montrer que

$$z_{SSM} = A\cos t + B\sin t,$$

et on voit de toute évidence que $z_p = t + 1$ est une solution particulière. Donc

$$z = z_{SSM} + z_p \implies z(t) = A\cos t + B\sin t + t + 1,$$

d'où

$$y(x) = z(\log|x|) = A\cos(\log|x|) + B\sin(\log|x|) + \log|x| + 1.$$

Proposition 3.17. *L'équation différentielle $F(x, y', y'') = 0$ est ramenée à une équation différentielle du 1^{er} ordre en posant $z = y'$.*

Exemple. Résoudre l'équation (E) : $y''x^2 = y'^2$. Posons $z = y'$. On obtient une équation différentielle du 1^{er} ordre (E) : $z'x^2 = z^2$ qui est une équation à variables séparables.

— $z = 0$ est solution de l'équation (E), ce qui correspond à $y = \lambda (\lambda \in \mathbb{R})$.

— Si $z \neq 0$ on a $\dfrac{dz}{z^2} = \dfrac{dx}{x^2} \implies \dfrac{-1}{z} = \dfrac{-1}{x} + C$, On obtient $z = \dfrac{x}{1 - Cx}$.

  — Si $C = 0$ alors $z = x$ et $y = \dfrac{x^2}{2} + \gamma;\ \gamma \in \mathbb{R}$.

  — Si $C \neq 0$ alors $y = \displaystyle\int \frac{x}{1 - Cx} = -\frac{1}{C}x - \frac{1}{C^2}\ln|1 - Cx| + K$.

D'où l'ensemble des solutions est :

$$\begin{array}{ll} y = \lambda & \\ y = \frac{x^2}{2} + \gamma & \gamma \in \mathbb{R}. \\ y = -\frac{1}{C}x - \frac{1}{C^2}\ln|1 - Cx| + K; & C \in \mathbb{R}^* \text{ et } K \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Exercice 3.18. Résoudre l'équation (E) : $y'' - \frac{y'}{x} = x^2$.