A U : 2019/2020

المدرسة العليا للتربية والتكوين - اكادير
ⵜⵉⵏⵎⵍ ⵜⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰⵢⵜ ⵏ ⵜⵓⵙⵙⵏⴰ ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ - ⴰⴳⴰⴷⵉⵔ
ECOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉDUCATION ET DE LA FORMATION - AGADIR

Licence d'Education Enseignement Secondaire : Mathématiques et Informatiques.

Module : **Mécanique du point matériel**

Série I : Rappels mathématiques

<u>Exercice 1 :</u>

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthorhombique directe

$$\vec{A} = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{B} = \vec{j} - \vec{k}, \quad \vec{C} = 2\vec{j} + \vec{k}$$

1. Calculez $\|\vec{A}\|$, $\|\vec{B}\|$ puis $\vec{A}.\vec{B}$
2. Déterminez $cos\theta$ *puis* θ l'angle que fait les vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$
3. Déterminez les composantes du vecteur $\vec{X} = \vec{A} \wedge \vec{B}$
4. Retrouvez θ à partir de la norme $\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|$
5. Calculez $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C}$ puis $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$ puis déduire

<u>Exercice 2</u> :

Un point M de l'espace peut être représenté soit par:

- Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- Les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) de base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$
- Les coordonnées sphériques (r, θ, φ) de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

1. Donner l'expression des bases $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ en fonction de $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
2. Soit le référentiel $R(O, x, y, z)$ de base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Calculer
   a- $\left.\dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}\right|_R$; $\left.\dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\right|_R$ dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. En déduire leurs expressions dans $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$
   b- $\dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}$; $\dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}$; $\dfrac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}$; $\dfrac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\varphi}$; $\dfrac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}$ les exprimer dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$
   c- $\left.\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}\right|_R$; $\left.\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right|_R$; $\left.\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_R$
3. Déterminer, l'expression du vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ dans les trois systèmes de coordonnées. En déduire:
   a) L'élément de surface ds normal à $\vec{e}_z$ et l'élément de volume dV d'un cylindre.
   b) L'élément de surface ds normal à $\vec{e}_\varphi$ et celui de volume dV d'une sphère.
4. a) Exprimer la vitesse d'un point M dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques
   b) Exprimer l'accélération d'un point M dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

Exercice 3 :

$$f(x,y,z) = x^2yz \;\; et \;\; \vec{A} = 3x^2y\vec{\imath} + yz^2\vec{\jmath} - xz\vec{k}$$

1. Calculez $\frac{\partial^2(f\vec{A})}{\partial y \partial z}$ au point (1,-2,1)
2. Calculez df
3. Calculez $\overrightarrow{grad} f$
4. Calculez $div\,\vec{A}$
5. Calculez $\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$

Exercice 4 :

On considère un point matériel M se déplaçant dans un référentiel $R(O,x,y,z)$ muni de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Les coordonnées du point M sont données par :

$$X(t) = 1 + t; \quad Y(t) = 1 + t^2 \;\; ; \;\; Z(t) = 0, \quad t \text{ étant le temps.}$$

1) Donner l'équation de la trajectoire de M dans R. En déduire sa nature.
2) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/R)$ et l'accélération $\overrightarrow{\gamma}(M/R)$ du point M. En déduire leurs normes.
3) Exprimer, dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, les vecteurs de la base de Frenet $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$.
4) Calculer le rayon de courbure R_c.

Exercice 5 :

Une particule se déplace avec une accélération donnée par :

$$\vec{\gamma} = 2e^{-t}\vec{\imath} + 5cost\,\vec{\jmath} - 3sint\,\vec{k}$$

Si au temps t=0 la particule est située à (1,-3,2) et si sa vitesse est alors

$4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ trouver

a- La vitesse

b- Le déplacement de la particule pour un temps t>0

Exercice 6: Facultatif

Un point matériel M se déplace dans le plan (xoy) d'un repère fixe $R(O,x,y,z)$.
La position de M est repérée par les paramètres ρ et θ tels que: $\rho(t) = \rho_0 e^{\theta(t)}$ où t est le temps, ρ_0 est une constante et $\theta(t) = \omega t$ avec $\omega = cte$.
Tous les résultats doivent être exprimés dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1. a. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction de ρ_0, ω et t.
   b. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}(M/R)$ de M et calculer son module.
   c. Déterminer le vecteur unitaire tangent $\vec{e}_t$ à la trajectoire de M.
   d. Calculer l'expression de la composante tangentielle $\vec{\gamma}_t$ de l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ de M par rapport à R.
2. a. Sachant que la base $(\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_z)$ est une base orthonormée et directe, déterminer le vecteur unitaire $\vec{e}_n$ normale à la trajectoire.
   b. Déterminer l'expression du vecteur accélération de M par rapport à R et calculer son module.
3. a. Sachant que $\vec{\gamma}(M/R) = \gamma_t\vec{e}_t + \gamma_n\vec{e}_n$, calculer l'expression de l'accélération normale γ_n.
   b. En déduire le rayon de courbureR_c de la trajectoire de M à l'instant t.
4. Calculer la distance parcourue par M sur sa trajectoire entre les instants $t = 0s$ et $t = \frac{1}{\omega}$.

المدرسة العليا للتربية والتكوين - اكادير
ECOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉDUCATION ET DE LA FORMATION - AGADIR

A U : 2019/2020

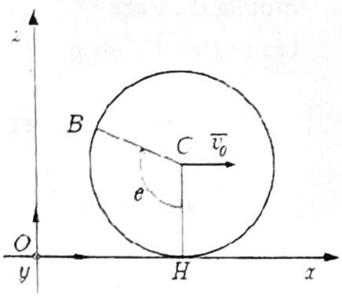
Licence d'Education Enseignement Secondaire : Mathématiques et Informatiques.

Module : **Mécanique du point matériel**

Série II : Cinématique et changement de référentiels.

Exercice 1 :

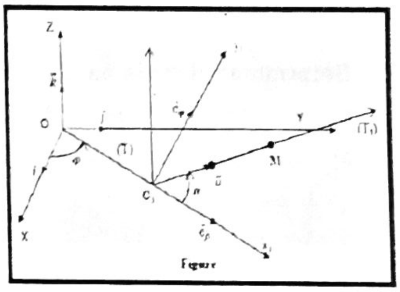
Une roue de rayon R roule sans glisser selon un axe rectiligne $\overrightarrow{O_x}$. Un point B, situé à la périphérie de la roue, coïncide à l'instant initial avec l'origine O du repère. Le centre C de la roue a une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ positive, constante et parallèle à $\overrightarrow{O_x}$.



1. Déterminer les coordonnées $x(t)$ et $z(t)$ du point B. On introduira $\theta(t)$, angle dont la roue a tourné depuis l'instant initial. Donner l'allure générale de la trajectoire.
2. Calculer la vitesse $\vec{v}$ du point B et étudier ses variations.
3. Calculer l'accélération $\vec{a}$ du point B et préciser son orientation.
4. En introduisant un référentiel d'origine C en translation par rapport au précédent, montrer qualitativement comment il est possible de retrouver les résultats de la deuxième question.

Exercice 2 :

Soient $\Re(O,xyz)$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\Re_1(O_1,x_1y_1z_1)$ le référentiel relatif muni de la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k})$. Un point M est assujetti à se déplacer sur une Tige (T_1). La tige (T_1) est solidaire en O_1 avec une Tige (T) en rotation d'angle (t) autour de l'axe (Oz) (voir figure). La tige (T_1) est située dans le plan vertical $(\vec{e_\rho}, \vec{k})$. Le point O_1 est repéré par : $\overrightarrow{OO_1} = \rho\vec{e_\rho}$ et le point M est repéré sur la tige (T_1) par :
$\overrightarrow{O_1M} = V_0t\vec{u}$ ($V_0 = cte$). Le vecteur unitaire $\vec{u}$ fait un angle constant α avec le vecteur $\vec{e_\rho}$.



N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{k})$.

I- Etude de la cinématique de M par calcul direct

1- Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{e_\rho}$, $\vec{k}$ et α.

2- Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

3- Déterminer $\vec{V}(M/R)$ la vitesse de M dans le repère $\Re$.

4- Déterminer $\vec{\gamma}(M/R)$ l'accélération de M dans le repère $\Re$.

II- Etude de la cinématique de M par décomposition de mouvement

1- Vérifier que la vitesse de rotation de $\Re_1$ par rapport à $\Re$ est donnée par $\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\varphi}\,\vec{i}$.

2- Déterminer $\vec{V}(M/R_1)$ la vitesse relative de M.

3- Déterminer $\vec{V}_e(M)$ la vitesse d'entrainement de M.

4- En déduire $\vec{V}(M/R)$ la vitesse absolue de M.

5- Déterminer $\vec{\gamma}(M/R_1)$ l'accélération relative de M.

6- Déterminer $\vec{\gamma}_e(M)$ l'accélération d'entrainement de M.

7- Déterminer $\vec{\gamma}_c(M)$ l'accélération de Coriolis de M.

8- En déduire $\vec{\gamma}_a(M)$ l'accélération absolue de M.

Exercice 3 :

Un système est constitué de deux tiges OO' et O'M , de longueurs respectivement L et D , reliées entre elles par une articulation parfaite en O'.

Soit R(O,X,Y,Z) un repère orthonormé direct de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ lié au point O. Le point O' décrit par rapport à O, une trajectoire circulaire de rayon L, dans le plan XOY, avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$. Dans le méme plan, le point M est en rotation autour de O', avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}$.

Soit R'(O',X',Y',Z') un repère orthonormé direct de base $(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$ lié au point mobile O'. L'axe O'X' est confondu avec la direction OO' (voir figure 2).
Les angles $\theta(t) et\ \varphi(t)$ évoluent de manière quelconque.

1. Exprimer les vecteurs unitaires $\vec{\imath'},\vec{\jmath'}\ et\ \ \vec{k'}$ du repère R' dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$,

   en déduire $\frac{d\vec{\imath'}}{dt}, \frac{d\vec{\jmath'}}{dt}\ et\ \frac{d\vec{k'}}{dt}\ \ en\ fonction\ de\ \dot{\varphi},\vec{\imath'},\vec{\jmath'}\ et\ \vec{k'}$.

2. Exprimer les vecteurs vitesses rotations $\vec{\Omega}(R'/R) et\ \vec{\omega}$ dans la base $(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$.

3. Donner, dans la base relative $(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$, les vecteurs positions $\overrightarrow{O'M}\ et\ \overrightarrow{OM}$.
4. Calculer directement le vecteur vitesse et le vecteur accélération du point M dans le référentiel R(O,X,Y,Z), on les exprimera dans la base $(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$.
5. Déterminer, dans la base $(\vec{\imath'},\vec{\jmath'},\vec{k'})$, les expressions des vecteurs :
   a) Vitesse relative et accélération relative de M.
   b) Vitesse, accélération d'entraînement et accélération de Coriolis.