Chapitre 2: Développements limités et applications
Séance de la semaine 17-23 mars

Prof. Mouna HADDADI

Ecole Supérieure de l'Education et de la Formation
Université Ibn Zohr Agadir

2019-2020

Objectif de ce Chapitre

Les développements limités sont l'outil principal d'approximation locale des fonctions. L'objectif de ce chapitre est de vous apprendre à les calculer. Vous aurez essentiellement besoin de savoir manipuler des polynômes, ainsi que d'avoir assimilé les limites, la comparaison des fonctions et la dérivation.

Développements limités

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \backslash \{x_0\} \rightarrow R$ une fonction, où $x_0 \in I$.

Définition

On dit que f admet un développement limité (en abrégé DL) d'ordre n au voisinage de x_0, s'il existe un polynôme P_n de degré n tels que :

$$f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

Développements limités

En d'autre termes f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe des coefficients $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

On dira que le polynôme $Pn(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$ est la partie régulière du DL d'ordre n de f en x_0.
Par définition de la relation o cela revient à dire qu'il existe une fonction ε définie sur un voisinage de 0, telle que $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$ et:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0)$$

Développements limités

En point $x_0 = 0$, la définition devient:
f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, s'il existe des réels $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \varepsilon(x), \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0 \end{aligned}$$

Développements limités

Exemple :

Calculer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4 de la fonction f définie par:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

On a $f(0) = 1$;

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2}; \quad f'(0) = 0; \\
f''(x) &= \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}; \quad f''(0) = -2; \\
f^{(3)}(x) &= \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}; \quad f^{(3)}(0) = 0; \\
f^{(4)}(x) &= \frac{24(5x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5}; \quad f^{(4)}(0) = 24.
\end{aligned}$$

Ainsi le développement limité de f est : $f(x) = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$.

Développements limités

Remarque :

- Le développement limité est une notion locale: L'égalité du développement limité de f à l'ordre n, au voisinage de x_0 n'est vraie que dans un voisinage de x_0.
- Dans la pratique, on utilise surtout les développement limité en 0, en fait si f admet un développement limité d'ordre n en x_0 de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),$$

alors,

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n)$$

ainsi, par changement de variable on s'est ramené à un développement limité en 0.

Propriétés des développements limités

Unicité du développement limité

Proposition :

Si f admet un DL d'ordre n au voisinage de x_0, alors ce DL est unique.

Démonstration

Nous Considérons que la fonction f admet deux DL. Nous montrons que leurs parties polynomiales sont égales. Soit donc

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x - x_0),$$
$$avec \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + ... + b_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon'(x - x_0),$$
$$avec \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon'(x - x_0) = 0.$$

Deux DL de f , à l'ordre n au voisinage de $x_0 \in I$. En effectuant la différence de ces deux égalités

$$\begin{aligned} 0 = (b_0 - a_0) + (b_1 - a_1)(x - x_0) + \dots + (b_n - a_n)(x - x_0)^n + \\ +(x - x_0)^n \left(\varepsilon(x - x_0) - \varepsilon'(x - x_0)\right) \end{aligned} \quad (1)$$

Nous passons à la limite lorsque x tend vers x_0, nous obtenons alors

$$b_0 - a_0 = 0.$$

Ensuite, on divise (1) par $x - x_0$,

$$\begin{aligned} 0 = (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2)(x - x_0) + \dots + (b_{n-1} - a_{n-1})(x - x_0)^{n-1} + \\ +(x - x_0)^{n-1} \left(\varepsilon(x - x_0) - \varepsilon'(x - x_0)\right) \end{aligned}$$

De la même façons, nous passons à la limite lorsque x tend vers x_0, nous obtenons cette fois

$$b_1 - a_1 = 0.$$

On poursuivant cette opération plusieurs fois, nous obtenons à la fin

$$b_0 - a_0 = b_1 - a_1 = \dots = b_n - a_n = 0.$$

Les parties polynomiales sont donc égales et donc $\varepsilon(x - x_0) = \varepsilon'(x - x_0)$ dans un voisinage de x_0. Ceci termine la preuve de la Proposition. $\square$

Propriétés des développements limités

Remarque :

- La proposition précédente affirme l'éventuel unicité d'un développement limité mais n'affirme pas que ce développement limité existe.
- Cette unicité ne signifie pas que deux fonctions ayant la même partie régulière sont égales.
  Par exemple les fonctions

$$f(x) = 1 + x + x^5 \;\; avec \;\; o(x) = x.x^4 = x^5$$

  et

$$g(x) = 1 + x + x^2 \;\; avec \;\; o(x) = x.x = x^2$$

  f et g ont la même partie régulière dans le développement limité en 0 à l'ordre 1 mais ne sont pas égales.
  On a aussi

$$sin(x) = x + x\varepsilon(x), \; avec \; \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0,$$

$$tan(x) = x + x\varepsilon'(x), \; avec \; \lim_{x\to 0} \varepsilon'(x) = 0$$

  mais on n'a pas sin(x) = tan(x).

Propriétés des développements limités

Corollaire

Soit f une fonction définie au voisinage de 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet un développement limité en 0 de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

- Si f est paire, alors pour tout indice $k \leq n$ impair, $a_k = 0$.
- Si f est impair, alors pour tout indice $k \leq n$ impair, $a_k = 0$.

Démonstration :
Supposons que f est paire et que pour tout $x \in I \backslash \{0\}$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + o(x^n) \tag{2}$$

et

$$f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + ... + (-1)^n a_n x^n + o(x^n) \tag{3}$$

puisque on a $f(x) = f(-x)$, donc la somme de l'équation (2) et (3) implique que

$$2f(x) = 2a_0 + 2a_2 x^2 + ... + (a_n + (-1)^n a_n) x^n + o(x^n)$$

Ainsi, le résultat s'ensuit d'après l'unicité des DL. De la même façon on peut montrer le corollaire pour le cas des fonctions impaires.$\square$

Propriétés des développements limités

Proposition

Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0, alors f admet un développement limité d'ordre p en 0, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $0 \leq p \leq n$

Exemple :

On cherche le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction f définie par:

$$f(x) = (1+x)^4 + x^3 sin(2x).$$

On a $f(x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 + x^3 sin(2x)$, d'où

$$f(x) = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^3 \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) = x + sin(2x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$,

Développement limité et continuité

Théorème

i) Si une fonction f admet un développement limité d'ordre n en x_0 alors f est continue en x_0.

ii) Si f est continue en x_0 alors f admet un développement limité d'ordre 0 en x_0

En particulier : Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 en x_0 et dans ce cas $f(x) = f(x_0) + o(1)$.

Démonstration :

i) Si f admet un développement limité d'ordre n en x_0, alors

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Par suite $\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = a_0$.

ii) Si f est continue en x_0, alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ et alors $f(x) = f(x_0) + o(1)$ donc f admet un développement limité d'ordre 0 en x_0 .

Développement limité et dérivabilité

Théorème

Si f est une fonction définie en x_0 , alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0, et dans ce cas

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0))$$

Démonstration :

Si f est définie et dérivable en x_0, alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

On en déduit que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)).$$

Réciproquement, si f admet un développement limité d'ordre 0 en x_0 , alors

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o((x - x_0))$$

Par conséquent $a_0 = f(x_0)$ et $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1$. Par suite f est dérivable en x_0.$\square$

Théorème :

Si f est de classe C^n au voisinage de x_0, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 de la forme

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le théorème de Taylor-Young.□

Développements limités usuels à l'origine

Les Développements limités suivants, au voisinage de 0, proviennent directement de la formule de Taylor-Young.

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
shx &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
chx &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})
\end{aligned}
$$

Développements limités usuels à l'origine

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{\alpha} &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^{2}}{2!}+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{n}}{n!}+o(x^{n})\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^{2}+...+x^{n}+o(x^{n})\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^{2}+...+(-1)^{n}x^{n}+o(x^{n})\\
\ln(x+1) &= x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}+...+(-1)^{n}\frac{x^{n}}{(n)}+o(x^{n})
\end{aligned}
$$