A) APPLICATIONS LINÉAIRES

REM : dans ce cours, E,F et G désignent des K-espaces vectoriels.

I) GÉNÉRALITÉS.

1) Définition.

DEF : Soit f une application de E dans F ; on dit que f est K-*linéaire* (ou que c'est un *morphisme* de K-espaces vectoriels) si f est un morphisme pour les deux lois définies sur E et F, c'est-à-dire si

1. $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E \;\; f(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y})$
2. $\forall \overrightarrow{x} \in E \;\; \forall \lambda \in K \;\; f(\lambda \overrightarrow{x}) = \lambda f(\overrightarrow{x})$

REM 1: on peut regrouper 1. et 2. en un seul énoncé :

$$3. \; \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in E \;\; \forall \lambda \in K \;\; f(\overrightarrow{x}+\lambda\overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}) + \lambda f(\overrightarrow{y})$$

REM 2 : 1. signifie que f est un morphisme du groupe $(E,+)$ vers le groupe $(F,+)$: mais ceci ne suffit pas pour que f soit linéaire ; par exemple, $z \mapsto \overline{z}$ est un morphisme additif de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, mais elle n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire (par contre, elle est $\mathbb{R}$-linéaire).

Premières propriétés : f est linéaire si et seulement si pour tous $(\overrightarrow{x_i}) \in E$ et $(\lambda_i) \in \mathbb{R}$ on a:

$$f\left(\overrightarrow{0}_E\right) = \overrightarrow{0}_F$$

et f$(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{x_i}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\overrightarrow{x_i})$

2) Exemples.

a) Homothéties vectorielles.

DEF : pour tout scalaire a et tout $\overrightarrow{x}$ de E, on pose $h_a(\overrightarrow{x}) = a\overrightarrow{x}$; l'application $h_a \in E^E$ est appelée l'*homothétie* (*vectorielle*) de rapport a.

PROP : les homothéties sont linéaires.

Propriétés immédiates :

$h_1 = id_E, h_a = a.id_E$
$h_a \circ h_b = h_{ab} = h_b \circ h_a$
h_a est bijective ssi $a \neq 0$ et $(h_a)^{-1} = h_{1/a}$
L'ensemble $H(E)$ des homothéties vectorielles de E de rapport non nul
est un sous-groupe de $(bij(E), \circ)$, isomorphe à $(K^*, \times)$ si E n'est pas réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$

PROP : si E est une droite (donc par exemple si $E = K$) les homothéties sont les seules applications linéaires de E dans E.

b) Projections vectorielles.

Elles ont été définies au moment des sommes directes.

PROP : les projections sont linéaires.

Propriétés immédiates : si $E = F \oplus G$, soient p (resp q) la projection de base F (resp G) et de direction G (resp F) :

$\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}' \in E \;\; \overrightarrow{x}' = p(\overrightarrow{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{x}' \in F \\ \overrightarrow{x}' - \overrightarrow{x} \in G \end{cases}$
$p \circ p = p, \;\; p \circ q = h_0, \;\; p + q = h_1 = id_E$
si $F = E$, $p = h_1 = id_E$
si $G = E$, $p = h_0$

c) Exemples de K^2 dans K^2.

E1

d) Exemples en analyse.

E2 : limite, dérivée, intégrale.

3) Vocabulaire.

Une application linéaire de E dans lui-même est appelée un *endomorphisme* de E.
Une application linéaire bijective est appelée un *isomorphisme* d'espaces vectoriels.
Un endomorphisme de E bijectif est appelé un *automorphisme* de E.

E3

II) ESPACE VECTORIEL DES APPLICATIONS LINÉAIRES $L(E,F)$.

Notation : $L(E,F)$ est l'ensemble des applications linéaires de E dans F :

$$L(E,F) = \{f \in F^E \ / \ f \text{ est linéaire}\}$$

Quand $E = F$, on abrège la notation en $L(E)$, (ou $END(E)$).

PROP : $L(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.

Par exemple, si comme ci-dessus p et q sont les deux projections associées à la décomposition $E = F \oplus G$, alors pour tous scalaires λ, μ $\lambda p + \mu q$ est linéaire. Ceci donne de nouveaux exemples d'endomorphismes de E ; en particulier :

DEF : l'application $s = p - q$ est appelée la *symétrie (vectorielle)* de *base* F et de *direction* G (ou *symétrie par rapport à* F et *parallèlement* à G).

Propriétés immédiates :

$\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}' \in E \quad \overrightarrow{x}' = s(\overrightarrow{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{x} + \overrightarrow{x}' \in F \\ \overrightarrow{x}' - \overrightarrow{x} \in G \end{cases}$
$s = 2p - id_E, \quad s \circ s = h_1 = id_E$ (on dit que s est *involutive*)
si $F = E$, $s = h_1 = id_E$
si $G = E$, $s = h_{-1} = -id_E$

Et plus généralement :

DEF : l'application $f_a = p + aq$ est appelée la *dilatation* (ou *affinité*) *(vectorielle)* de *base* F, de *direction* G et de rapport a.

REM : quand $a = 0$, on retrouve les ...., quand $a = -1$, les ...., quand $a = 1$, l'............, et si $F = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, les .... Il est demandé aux diants de remplir les vides par: Projection; Symétrie; Identité.

III) COMPOSITION DES APPLICATIONS LINÉAIRES

PROP : la composée de deux applications linéaires est linéaire ; plus précisément :

$$\text{si } f \in L(E,F) \text{ et } g \in L(F,G) \text{ alors } g \circ f \in L(E,G)$$

La composition des applications définit donc une loi de composition interne dans $L(E)$;
on a alors la structure remarquable :
PROP : $(L(E), +, \circ)$ est un anneau, qui est non commutatif et non intègre dès que $\dim E \geqslant 2$.

Exemple d'application : avec la notation des affinités ci-dessus :

$$f_a \circ f_b = f_{ab}$$

IV) NOYAU ET IMAGE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE.

1) Noyau.

a) Définition et premières propriétés.

DEF : le noyau d'une application linéaire est l'ensemble des vecteurs de l'ensemble de départ qui ont pour image le vecteur nul de l'espace d'arrivée ; si $f \in L(E, F)$

$$\ker f = \{\overrightarrow{x} \in E \ / \ f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}_F\} = f^{-1}\left(\overrightarrow{0}_F\right)$$

REM : ker vient de l'allemand "Kern" : noyau (introduit par Hilbert en 1904), qui a donné l'anglais "kernel" : amande.

PROP : le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de l'espace de départ.

REM: cette proposition est souvent utilisée pour démontrer qu'une partie d'un ev est en fait un sev.

b) Exemples.

E4

c) Noyau et injectivité.

LEMME : si $f \in L(E, F)$ et $\overrightarrow{y} \in F$, alors la différence de deux solutions de l'équation d'inconnue $\overrightarrow{x} \in E$:

$$(E) \ : \ f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}$$

est un élément du noyau de f.

REM : une autre façon de dire la même chose est de dire que si $\overrightarrow{x_0}$ est une solution particulière de (E), alors les autres solutions sont obtenues en ajoutant à $\overrightarrow{x_0}$ un élément de $\ker f$; sous forme symbolique :

$$f^{-1}(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x_0} + \ker f$$

CORO : si $f \in L(E, F)$ et $\overrightarrow{y} \in F$ alors $f^{-1}(\overrightarrow{y})$ est

soit vide

soit un sous-espace affine de E de direction le noyau de F

PROP : une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit à zéro :

$$f \text{ est injective } \Leftrightarrow \ker f = \{\overrightarrow{0}_E\}$$

E5

BLAGUE : qu'est-ce qu'un kinder surprise injectif ? REP : un kinder sans jouet dedans car ....

2) Image.

DEF : l'image d'une application linéaire est l'ensemble des images des vecteurs de l'espace de départ :

$$\operatorname{Im}(f) = \{\overrightarrow{y} \in F \ / \ \exists \overrightarrow{x} \in E \ / \ f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}\} = f(E)$$

PROP : l'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de l'espace d'arrivée.

REM : par définition de la surjectivité, une application linéaire est surjective si et seulement si son image est égale à son espace d'arrivée :

$$f \text{ est surjective } \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = F \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \supset F$$

PROP : si $\mathcal{B}$ est une base de E, $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(f(\mathcal{B}))$.

D14 bis

E6

Bien retenir que le noyau d'une projection est sa direction et que son image est sa base.

V) ISOMORPHISMES.

a) Isomorphismes et espaces isomorphes.

Rappelons qu'un isomorphisme (d'espaces vectoriels) est une application linéaire bijective.

Nous noterons $ISOM(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes de E sur F.

PROP : la composée de deux isomorphismes est un isomorphisme, et la réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme :

$$\boxed{f \in ISOM(E,F), g \in ISOM(F,G) \Rightarrow g \circ f \in ISOM(E,G)}$$
$$\boxed{f \in ISOM(E,F) \Rightarrow f^{-1} \in ISOM(F,E)}$$

DEF : deux espaces vectoriels E et F sont dits isomorphes (notation $E \approx F$) s'il existe un isomorphisme de E vers F, autrement dit :

$$E \approx F \Leftrightarrow ISOM(E,F) \neq \emptyset$$

PROP : (corollaire de la prop. précédente) : la relation d'isomorphie $\approx$ est une relation d'équivalence entre espaces vectoriels.

Exemple important : si $E = F \oplus G$, alors $E \approx F \times G$.

b) Isomorphismes et dimension.

LEMME : soit $f \in L(E,F)$, $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ base de E, alors

f est injective (1) $\Leftrightarrow$ l'image $(f(\overrightarrow{e_1}), ..., f(\overrightarrow{e_n}))$ de $\mathcal{B}$ par f est une famille libre de F (2)

f est surjective (3) $\Leftrightarrow$ l'image $(f(\overrightarrow{e_1}), ..., f(\overrightarrow{e_n}))$ de $\mathcal{B}$ par f est une famille génératrice de F (4)

f est bijective (donc est un isomorphisme) $\Leftrightarrow$ ....

TH de caractérisation des espaces isomorphes en dimension finie :

Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

VI) THÉORÈME DE LA RESTRICTION, THÉORÈME DU RANG.

1) Théorème de la restriction.

TH (de la restriction) : la restriction d'une application linéaire à un supplémentaire de son noyau (pour le départ) et à son image (pour l'arrivée) est un isomorphisme, autrement dit

si $\boxed{(H) : f \in L(E,F),\ E = \ker f \oplus G \text{ et } f_1 = f|_G^{\mathrm{Im} f} : \left\{ \begin{array}{c} G \to \mathrm{Im}(f) \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.}$ alors $\boxed{(C) : f_1 \text{ est bijective, donc est un isomorphisme.}}$

REM : on peut aussi dire de façon équivalente que la restriction $f_0 : \left\{ \begin{array}{c} G \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right.$ est injective et que $\mathrm{Im}\, f_0 = \mathrm{Im}\, f$.

COROLLAIRE 1 : un supplémentaire du noyau d'une application linéaire est toujours isomorphe à l'image de cette application linéaire.

COROLLAIRE 2 : deux supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel sont toujours isomorphes.

2) Codimension, hyperplans.

TH : d'après le corollaire 2 ci-dessus, si un sous-espace vectoriel F de E possède un supplémentaire de dimension finie, tous les autres supplémentaires ont la même dimension ; cette dimension est par définition la *codimension* de F.

REM : si E est de dimension finie, $\operatorname{codim} F = \dim E - \dim F$.

DEF : un hyperplan de E est un sous-espace de codimension 1 (autrement dit, un sous-espace dont un supplémentaire est une droite).

Ex : en dimension 3, les hyperplans sont les plans, mais en dimension 2, les hyperplans sont les droites...

3) Théorème du rang.

THÉORÈME DU RANG : (application directe du corollaire 1 ci-dessus) : la somme des dimension du noyau et de l'image d'une application linéaire (dont l'espace de départ est de dimension finie) est égale à la dimension de l'espace de départ :

$$\boxed{\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E, \text{ si } \dim E < +\infty}$$

COROLLAIRE 1 : la dimension de l'image d'une application linéaire est inférieure ou égale à la dimension de l'espace de départ.

COROLLAIRE 2 : une application linéaire diminue les dimensions au sens large, plus précisément :
si $f \in L(E,F)$, G sev DE DIMENSION FINIE de E , alors

$$\dim (f(G)) \leqslant \dim G$$

COROLLAIRE 3 pour qu'une application linéaire entre deux espaces DE MÊME DIMENSION FINIE soit bijective, il suffit qu'elle soit injective (ou qu'elle soit surjective).

Appplication à l'existence et l'unicité des polynômes de Lagrange, des polynômes de Taylor.

<u>MISE EN GARDE :</u> une croyance très répandue au sujet des endomorphismes (que j'appelle "le faux théorème du rang") est que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$ (au lieu de $\dim E = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$) : elle est fausse, comme le montre l'exemple de l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^2$ défini par

$$f(x,y) = (y,0)$$

dont l'image et le noyau sont égaux à $Ox = Vect((1,0))$.

4) Rang d'une application linéaire.

DEF : le rang d'une application linéaire est la dimension de son image :

$$\text{si } f \in L(E,F), \ \boxed{\text{rg}(f) = \dim (\operatorname{Im} f)}$$

REM 1 : comme $\operatorname{Im} f = Vect(f(\mathcal{B}))$ où $\mathcal{B}$ est une base de E, le rang de f est aussi celui de la famille $f(\mathcal{B})$.

REM 2 : le théorème du rang s'appelle ainsi car il peut s'énoncer sous la forme :

$$\boxed{\text{rg}(f) = \text{codim } (\ker f)}$$

Propriétés du rang : si $f \in L(E,F)$, $\dim E = n, \dim F = p$, alors

1. $\text{rg}(f) \leqslant \min(n,p)$
2. $\text{rg}(f) = n \Leftrightarrow f$ est injective
3. $\text{rg}(f) = p \Leftrightarrow f$ est surjective
4. $\text{rg}(f) = n = p \Leftrightarrow f$ est bijective

VII) AUTOMORPHISMES. GROUPE LINÉAIRE.

Rappelons qu'un automorphisme (d'espace vectoriel) est un endomorphisme bijectif.

L'ensemble des automorphismes de l'espace vectoriel E est noté $GL(E)$, ou parfois $AUT(E)$.

PROP (diverses caractérisation des automorphismes parmi les endomorphismes) :
Soit $f \in L(E)$; alors les 10 conditions suivantes sont des CNS pour que $f \in GL(E)$:

1. f est bijective ($\forall \overrightarrow{y} \in E \;\; \exists! \overrightarrow{x} \in E \; / \; \overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x})$)
2. $\exists g \in L(E) \quad g \circ f = f \circ g = id_E$
3. f est un élément inversible de l'anneau $(L(E), +, \circ)$

Attention :Les 7 conditions suivantes ne sont valables que si E est de dimension finie

4. l'image de toute base de E est une base de E
5. l 'image d'une base donnée de E est une famille libre
6. f est injective
7. $\ker f = \{\overrightarrow{0}_E\}$
8. f est surjective.
9. (voir cours sur les matrices) : une matrice de f est inversible
10. (voir cours sur les déterminants) : $\det f \neq 0$

Contre-exemples montrant que 6., 7. et 8. sont faux en dimension infinie :

- la multiplication par X de $K[X]$ dans lui-même est injective, mais elle n'est pas surjective.

- la dérivation de $K[X]$ dans lui-même est surjective, mais elle n'est pas injective.

On a vu que l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau est toujours un groupe ; donc :

PROP : l'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel est un groupe pour la loi $\circ$.

REM : c'est donc un sous-groupe de $(BIJ(E), \circ)$.

VOCABULAIRE : ce groupe est appelé le *groupe linéaire* de E (d'où la notation $GL(E)$).