Chapitre 2

Fractions Rationnelles dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 L'ensemble des fractions à une indéterminée :

2.1.1 Définitions :

On appelle fraction rationnelle à une indéterminée tout couple (P, Q) de $\mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}^*[X]$ de la forme $\frac{P}{Q}$. P est appelé numérateur, Q le dénominateur. Si $PS = QR$, on identifie les deux fractions rationnelles $\frac{P}{Q}$et $\frac{R}{S}$. (On dit aussi que ce sont deux représentants de la même fraction).
Toute fraction rationnelle admet au moins un représentant irréductible (P_0, Q_0) (c'est à dire tel que P_0 et Q_0 soient premiers entre eux).
L'ensemble des fractions rationnelles est noté $\mathbb{K}(X)$.

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible. On appelle pôle de la fraction F tout zéro de Q. a est un pôle d'ordre m de F si et seulement si a est un zéro de multiplicité m de Q.

2.1.2 Exemples :

a) Soit $F = \dfrac{X^2 - 3X + 2}{X^4 - 1}$ une fraction rationnelle. F n'est pas sous forme irréductible car

$$F = \frac{X^2 - 3X + 2}{X^4 - 1} = \frac{X - 2}{(X + 1)(X - i)(X + i)}$$

Les pôles de F sont -1, i et $-i$ et ils sont tous simples.

b) La fraction $F = \dfrac{X^2 + 2}{(X - 1)^3}$ est irréductible et 1 est un pôle d'ordre 3.

2.1.3 Opérations sur $\mathbb{K}(X)$:

Les règles d'addition, de soustraction, de multiplication et de division des fractions de nombres réels s'appliqueront toutes aux fractions rationnelles. Soient $\dfrac{P}{Q}, \dfrac{R}{S}$ deux fractions rationnelles et soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :

a)- $\dfrac{P}{Q} + \dfrac{R}{S} = \dfrac{PS + QR}{SQ}$,

b)- $\dfrac{P}{Q} \times \dfrac{R}{S} = \dfrac{PR}{SQ}$,

c)- $\lambda\dfrac{P}{Q} = \dfrac{\lambda P}{Q}$.

2.2 Décomposition en éléments simples :

2.2.1 Définition :

Les éléments simples de $\mathbb{K}(X)$ sont les fractions rationnelles qui ont l'une des formes suivantes :

1. Les monômes : $a_n X^n$ où n est un entier naturel.
2. Les fractions rationnelles $\dfrac{P}{Q^r}$ avec $deg(P) < deg(Q)$ et Q un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$ et $r > 0$.

2.2.2 Exemples :

➤ Les éléments simples de $\mathbb{R}(X)$ sont :

1. Les monômes : $a_n X^n$ où $n \geq 0$.
2. Les fractions de la forme $\dfrac{a}{(X - b)^r}$, $(r \geq 1)$ dites éléments simples de 1^{er} espèce.
3. Les fractions de la forme $\dfrac{aX + b}{(X^2 + cX + d)^r}$, avec $c^2 - 4d < 0$ et $r \geq 1$ dites éléments simples de $2^{ème}$ espèce.

➤ Les éléments simples de $\mathbb{C}(X)$ sont :

1. Les monômes : $a_n X^n$ où $n \geq 0$.
2. Les fractions de la forme $\dfrac{a}{(X - b)^r}$, $(r \geq 1)$

2.2.3 Proposition :

Soit F une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible, il existe un unique polynôme E et un unique polynôme R tels que

$$F = E + \frac{R}{Q} \quad \text{et} \quad deg(R) < deg(Q).$$

E est appelée partie entière de la fraction F et $\dfrac{R}{Q}$, la partie fractionnaire.

Preuve :

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$, d'aprés le théorème de la division euclidienne de P par Q, on a :

$$P = E \cdot Q + R, \quad \text{avec} \quad deg(R) < deg(Q).$$

Pr. Nouh IZEM

Donc,

$$F = E + \frac{R}{Q} \quad \text{et} \quad deg(R) < deg(Q).$$

2.2.4 Exemple :

a) Trouver la partie entière et la partie fractionnaire de la fraction rationnelle suivante :

$$\frac{P}{Q} = \frac{X^3 + 4X^2 - 2X - 10}{X^2 - 3}.$$

La division euclidienne de P par Q donne : $P = (X+4)Q + X + 2$.
d'où :

$$\frac{P}{Q} = (X+4) + \frac{X+2}{X^2-3}.$$

La partie entière de la fraction F est le polynôme $X+4$ et sa partie fractionnaire est $\frac{X+2}{X^2-3}$.

b) Pour $F = \frac{X^3}{X^2+1}$, sa partie entière est X, et on a :

$$F = X + \frac{-X}{X^2+1},$$

c'est la décomposition de F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, mais dans $\mathbb{C}(X)$ on a :

$$F = X - \left(\frac{1}{2(X+i)} + \frac{1}{2(X-i)}\right).$$

2.2.5 Théorème de décomposition en éléments simples :(admis)

Toute fraction rationnelle de $\mathbb{K}(X)$ peut s'écrire de façon unique comme somme d'éléments simples de $\mathbb{K}(X)$.

2.3 Pratique de la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$:

2.3.1 Proposition :

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle à coefficients complexes, sous forme irréductible. Soit $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ les pôles distincts de F, avec les multiplicités $m_1, \cdots, m_p$. Alors F s'écrit de manière unique

$$\begin{aligned} F &= E + \frac{\lambda_{1,1}}{(X-\alpha_1)} + \cdots + \frac{\lambda_{1,m_1}}{(X-\alpha_1)^{m_1}} + \frac{\lambda_{2,1}}{(X-\alpha_2)} + \cdots + \frac{\lambda_{2,m_2}}{(X-\alpha_2)^{m_2}} \\ &\quad \cdots \qquad\qquad (*) \\ &\quad + \frac{\lambda_{p,1}}{(X-\alpha_p)} + \cdots + \frac{\lambda_{p,m_p}}{(X-\alpha_p)^{m_p}}; \\ &= E + \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{m_k} \frac{\lambda_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j} \right). \end{aligned}$$

où E est la partie entière de F et $\lambda_{k,j}$ sont des éléments de $\mathbb{C}$. Cette écriture est appelée décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{C}(X)$ et s'effectue donc de la manière suivante :

1. On simplifie d'abord $F = \frac{P}{Q}$ si c'est possible de façon à obtenir une fraction irréductible.
2. Si $deg(P) \geq deg(Q)$, on effectue la division euclidienne de P par Q de façon à obtenir la partie entière E et la partie fractionnaire $\frac{P_1}{Q}$ de F.
3. On décompose le dénominateur Q de F en facteurs irréductibles. Soit $Q = (X - \alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\cdots(X-\alpha_p)^{m_p}$.
4. On écrit la forme de la décomposition $(*)$ et on détermine les coefficients $\lambda_{k,j}$.

2.3.2 Application : (Avec des pôles simples)

Exemple 1 :

Soit F la fraction suivante :

$$F(X) = \frac{X^4+1}{X^3-1}.$$

Comme le numérateur a un degré supérieur au dénominateur, F admet une partie entière non nulle. Cette partie entière s'obtient en faisant la division euclidienne du numérateur par le dénominateur :

$$X^4 + 1 = X(X^3-1) + X + 1.$$

Et on a

$$F(X) = X + \frac{X+1}{X^3-1}.$$

On pose alors $B(X) = \frac{X+1}{X^3-1}$. Pour décomposer B en éléments simples, on décompose $X^3 - 1$ en facteurs de degré 1. On a,

$$X^3 - 1 = (X-1)(X-j)\left(X-j^2\right)$$

la décomposition de B en éléments simples se fait alors sous la forme

$$B(X) = \frac{X+1}{(X-1)(X-j)(X-j^2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-j} + \frac{c}{X-j^2}. \qquad (2.1)$$

Pour déterminer a, on multiplie l'égalité (2.1) par $(X-1)$:

$$(X-1)B(X) = \frac{X+1}{(X-j)(X-j^2)} = a + (X-1)\left(\frac{b}{X-j} + \frac{c}{X-j^2}\right).$$

En posant $X = 1$ dans cette égalité, on obtient

$$a = \frac{2}{3}.$$

Si, de la même manière on multiplie (2.1) par $X - j$ (resp. $X - j^2$), puis on pose $X = j$ (resp. $X = j^2$), on trouve

$$b = -\frac{1}{3} \text{ et } c = -\frac{1}{3}.$$

Remarque 1. *Les coefficients de B étant réels, on a $B = \bar{B}$. En utilisant l'égalité (3.1) et l'unicité du développement en éléments simples, on peut prévoir que a, sera réel et $b = \bar{c}$.*

Proposition :

Si a est un pôle simple de $F(X)$, alors

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{P(X)}{(X-a)Q_1(X)} = \frac{\alpha}{X-a} + \frac{S(X)}{(X-a)Q_1(X)} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)},$$

où $Q'(a)$ étant la dérivée de $Q(X)$ en a.

Preuve :

$Q(X)$ est divisible par $X - a$, donc

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{P(X)}{(X-a)Q_1(X)} = \frac{\alpha}{X-a} + G(X),$$

avec $\alpha = [(X-a)F(X)](a) = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$. De plus, $Q'(X) = Q_1(X) + (X-a)Q_1'(X)$ alors $Q_1(a) = Q'(a)$. Finalement, $\alpha = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$.

Exemple 2 :

Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{X^2+1}{(X-1)(X+2)(X-2)}.$$

Comme $deg(P) < deg(Q)$, la partie entière est nulle et la décomposition de F en éléments simples se fait alors sous la forme

$$F(X) = \frac{X^2+1}{(X-1)(X+2)(X-2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+2} + \frac{c}{X-2}.$$

1 est un pôle simple donc $a = \frac{P(1)}{Q_1(1)} = -\frac{2}{3}$, où $Q_1(X) = (X+2)(X-2)$.

-2 est un pôle simple de $F(X)$ donc $b = \frac{P(-2)}{Q_2(-2)} = \frac{5}{12}$,où $Q_2(X) = (X+2)(X-1)$.

2 est un pôle simple de $F(X)$ donc $c = \frac{P(2)}{Q_3(2)} = \frac{5}{4}$.

Ici, $Q_3(X) = (X-1)(X+2)$.

Finalement :

$$\frac{X^2+1}{(X-1)(X+2)(X-2)} = -\frac{2}{3(X-1)} + \frac{5}{12(X+2)} + \frac{5}{4(X-2)}.$$

3.3.3 Application : (Avec des racines multiples)

Soit

$$F(X) = \frac{4}{(X^2-1)^2}.$$

Comme le numérateur est de degré inférieur à celui du dénominateur, la partie entière de F est nulle.

Comme

$$(X^2-1)^2 = (X-1)^2(X+1)^2,$$

F se décompose sous la forme

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2}. \tag{3.2}$$

Comme -1 est racine double du dénominateur, on peut opérer de deux façons :

Méthode par identification :

En multipliant (3.2) par $(X+1)^2$ et en faisant $X = -1$ dans l'égalité trouvée, on obtient

$$d = 1.$$

En faisant passer $\frac{1}{(X+1)^2}$ dans le premier membre de (3.2) on obtient une fraction qui se simplifie par $X+1$:

$$F(X) - \frac{1}{(X+1)^2} = \frac{-X^2+2X+3}{(X-1)^2(X+1)^2} = -\frac{X-3}{(X+1)(X-1)^2}$$

On obtient donc :

$$-\frac{X-3}{(X+1)(X-1)^2} = \frac{c}{X+1} + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} \tag{3.3}$$

En multipliant (3.3) par $X+1$ et en faisant $X = -1$ on obtient : $c = 1$.

En opérant de la même manière pour $X - 1$, on obtient $b = 1$ et $a = -1$.

Méthode par division en suivant les puissances croissantes :

Pour déterminer c et d on pose $X + 1 = T$: (3.2) s'écrit alors, après multiplication par le dénominateur de $F(X)$:

$$4 = (T-2)^2(d+cT) + T^2(-2a+b+aT). \tag{3.4}$$

On voit alors que l'on peut déterminer d et c en faisant une division suivant les puissances croissantes du polynôme 4 par le polynôme $(T-2)^2 = 4 - 4T + T^2$. On obtient alors :

$$4 = (4 - 4T + T^2)(1+T) + T^2(3-T).$$

En comparant avec (3.4), on obtient $d = 1$ et $c = 1$. On a aussi $-2a + b = 3$ et $a = -1$ qui donne $a = -1$ et $b = 1$.

3.4 Pratique de la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$:

Dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles se décomposent en éléments simples du premier espèce. Dans $\mathbb{R}(X)$ certains éléments simples de la décomposition d'une fraction peuvent être du deuxième espèce. En effet, on a le résultat suivant :

3.4.1 Proposition :

Soient $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle à coefficients réels, sous forme irréductible. Soit la décomposition suivante en produit de facteurs irréductibles du dénominateur $Q = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X-\alpha_k)^{r_k} \prod_{k=1}^{q} (X^2+b_kX+c_k)^{s_k}$. Alors F s'écrit de manière unique :

$$F = E + \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{r_k} \frac{\lambda_{k,j}}{(X-\alpha_k)^j}\right) + \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{s_k} \frac{d_{k,j}X + e_{k,j}}{(X^2+b_kX+c_k)^j}\right). \quad (**)$$

En énumérant,

$$\begin{aligned} F &= E + \frac{\lambda_{1,1}}{(X-\alpha_1)} + \cdots + \frac{\lambda_{1,r_1}}{(X-\alpha_1)^{r_1}} + \frac{\lambda_{2,1}}{(X-\alpha_2)} + \cdots + \frac{\lambda_{2,r_2}}{(X-\alpha_2)^{r_2}} \\ &\quad \cdots \\ &\quad + \frac{\lambda_{p,1}}{(X-\alpha_p)} + \cdots + \frac{\lambda_{p,r_p}}{(X-\alpha_p)^{r_p}}, \\ &= + \frac{d_{1,1}X + e_{1,1}}{(X^2+b_1X+c_1)} + \cdots + \frac{d_{1,s_1}X + e_{1,s_1}}{(X^2+b_1X+c_1)^{s_1}} + \frac{d_{2,1}X + e_{2,1}}{(X^2+b_2X+c_2)} + \cdots + \frac{d_{2,s_2}X + e_{2,s_2}}{(X^2+b_2X+c_2)^{s_2}} \\ &\quad \cdots \\ &\quad + \frac{d_{q,1}X + e_{q,1}}{(X^2+b_qX+c_q)} + \cdots + \frac{d_{q,s_q}X + e_{q,s_q}}{(X^2+b_qX+c_q)^{s_q}}, \end{aligned}$$

où E est la partie entière de F et où les $\lambda_{k,j}$, $d_{k,j}$, $e_{k,j}$ sont des éléments de $\mathbb{R}$. Cette écriture est appelée décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$ et s'effectue donc de la manière suivante :

1. On simplifie d'abord $F = \frac{P}{Q}$ si c'est possible de façon à obtenir une fraction irréductible.
2. Si $deg(P) \geq deg(Q)$, on effectue la division euclidienne de P par Q de façon à obtenir la partie entière E et la partie fractionnaire $\frac{P_1}{Q}$ de F.
3. On décompose Q en facteurs irréductibles. Soit $Q = \lambda \prod_{k=1}^{p}(X-\alpha_k)^{r_k} \prod_{k=1}^{q}(X^2+b_kX+c_k)^{s_k}$.
4. On écrit la forme de la décomposition $(**)$ et on détermine les coefficients $\lambda_{k,j}$, $d_{k,j}$ et $e_{k,j}$.

3.4.2 Exemple 1 :

Soit $D(X) = \dfrac{X^3+1}{X(X-1)(X^2+1)^2}$.

Le facteur (X^2+1) du dénominateur n'est pas réductible, c'est à dire ne peut se décomposer comme produit de facteurs du premier degré. Dans ces conditions la décomposition en éléments simples sera de la forme

$$D(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2}. \quad (3.5)$$

Pour déterminer a, il suffit de multiplier (3.5) par X et faire $X = 0$: On obtient

$$a = -1.$$

On peut opérer de la même manière pour obtenir b et on trouve

$$b = \frac{1}{2}.$$

En multipliant par $(X^2+1)^2$ et en faisant $X = i$, on obtient

$$\frac{i^3+1}{i(i-1)} = ei + f.$$

Le premier membre se simplifie et donne i. On obtient donc

$$e = 1 \text{ et } f = 0.$$

En faisant passer dans le premier membre l'élément simple $\frac{X}{(X^2+1)^2}$, on obtient une fraction qui se simplifie par X^2+1 :

$$D(X) - \frac{X}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{X(X-1)(X^2+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{cX+d}{X^2+1}.$$

Il suffit alors d'utiliser la multiplication par X^2+1 et de faire de nouveau $X = i$ pour obtenir c et d :

$$ci + d = \frac{1}{i(i-1)} = \frac{i-1}{2}.$$

donc

$$c = \frac{1}{2} \text{ et } d = -\frac{1}{2}.$$

Remarque 2. *On peut aussi multiplier les deux membres de l'égalité (3.5) par X et en faisant tendre X vers $+\infty$. On obtient ainsi la relation*

$$a + b + c = 0.$$

3.4.3 Exemple 2 : (Le dénominateur est puissance d'un facteur irréductible)

Soit

$$F(X) = \frac{2X^7 + X^6 - X^4 + 3}{(X^2+X+1)^3}.$$

$X^2 + X + 1$ est un polynôme irréductible dans $\mathbb{R}$. La décomposition de $F(X)$ en éléments simples s'écrira sous la forme :

$$F(X) = E(X) + \frac{aX + b}{X^2 + X + 1} + \frac{cX + d}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{eX + f}{(X^2 + X + 1)^3}.$$

En multipliant cette égalité par $(X^2 + X + 1)^3$, on constate que $eX + f$ est le reste de la division de $2X^7 + X^6 - X^3 + 3$ par $X^2 + X + 1$. On obtient

$$2X + 3.$$

Le quotient de cette division est $2X^5 - X^4 - X^3 + 2X^2 - 2X$. Si l'on divise ce quotient par $X^2 + X + 1$, on obtient comme reste $cX + d$. Cela donne

$$-7X - 5.$$

Le quotient de cette deuxième division est $2X^3 - 3X^2 + 5$. Si l'on divise de nouveau ce quotient par $X^2 + X + 1$, on obtient comme reste $aX + b = 3X + 10$, et comme quotient la partie entière

$$E(X) = 2X - 5.$$

On a donc finalement

$$F(X) = 2X - 5 + \frac{3X + 10}{X^2 + X + 1} + \frac{-7X - 5}{(X^2 + X + 1)^2} + \frac{2X + 3}{(X^2 + X + 1)^3}.$$

Cette méthode s'appelle la **méthode des divisions euclidiennes successives.**