Université Ibn Zohr
ESEFA - Agadir

Année universitaire 2019-2020
LE- Informatique S 3

Série 5 d'exercices avec des éléments de réponse
Variables aléatoires discrètes et continues

Exercice 1 (Loi binomiale)
On lance 10 fois un dé. Quelle est la probabilité d'avoir 4 fois le 1 ?

Exercice 2 (Loi exponentielle)
On modélise le temps entre deux clics d'un compteur Geiger (instrument qui sert à mesurer les rayonnements) par une loi exponentielle. Le nombre moyen de clics par minutes est égal à 50.

a) Calculer le paramètre λ de cette loi exponentielle.
b) Quelle est la probabilité qu'on attende plus d'une seconde entre deux clics ?

On approche un minéral légèrement radioactif du compteur et le nombre de clics passe à 100 par seconde.

c) Quelle est la probabilité d'attendre moins d'un centième de seconde entre deux clics ?

Exercice 3 (Loi normale)

1. La variable aléatoire X suit une loi normale $\mathcal{N}(18; 2,5)$. Calculer les probabilités suivantes : $P(X < 17)$; $P(X > 20)$; $P(16 < X < 19.5)$.
2. Supposons que X suit la loi normale $\mathcal{N}(68; 15)$. Déterminer a tel que $P(X < a) = 0,8315$.

Exercice 4 (Loi uniforme discrète)
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'ensemble $X(\Omega) = \{-3, -2, 1, 4\}$.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. On définit la variable aléatoire $Y = 2X + 1$.
   (a) Donner $Y(\Omega)$, et la loi de Y.
   (b) Calculer $E(Y)$ de deux façons différentes.

Exercice 5 (Image d'une variable aléatoire réelle)
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de densité

$$f(t) = \begin{cases} 2 - 2t, & \text{si} \quad t \in [0, 1], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y := X^2$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y.
   (b) En déduire que Y est une variable aléatoire continue.
   (c) Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire Y.

Eléments de réponse

Exercice 1
Sur l'espace probabilisé de base l'univers Ω des éventualités associées au lancé d'un dé 10 fois, on considère la v.a. X qui compte le nombre de fois d'obtenir la face numéro 4.
Cette expérience est composée de 10 épreuves indépendantes de Bernoulli, car dans chaque lancé, on peut avoir le 4 avec la probabilité $\frac{1}{6}$ et on peut ne le pas avoir avec la probabilité $\frac{5}{6}$.
Donc, X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{6}$, et avoir le 4 une seule fois est l'événement $(X = 1)$.
Et on a

$$P(X=1) = C_{10}^{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{9} = \frac{10\times 5^9}{6^{10}} = 2\times\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,32.$$

Exercice 3
L'idée générale est de revenir chaque fois à la loi normale centrée réduite, et d'utiliser la table de cette dernière. Par exemple, pour la variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(18; 2,5)$, on a :

$$\begin{aligned}
P(16 < X < 19.5) &= P\left(\frac{16-18}{2,5} < \frac{X-18}{2,5} < \frac{19,5-16}{2,5}\right)\\
&= P\left(\frac{2}{2,5} < Z < \frac{3,5}{2,5}\right), \quad \text{avec} \quad Z := \frac{X-18}{2,5} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).\\
&= P\left(0,8 < Z < 1,4\right)\\
&= \Phi(1,4) - \Phi(0,8), \text{ où } \Phi \text{ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.}\\
&= 0,9192 - 0,7881, \text{ ces valeurs sont obtenues à partir de la table de la loi N.C.R.}\\
&= 0,1311.
\end{aligned}$$

Exercice 4
la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'ensemble $X(\Omega) = \{-3, -2, 1, 4\}$.

1. La loi de X : puisque la loi de X est uniforme sur $X(\Omega)$ et $\text{Card}(X(\Omega)) = 4$, alors
$$P(-3) = P(-2) = P(1) = P(4) = \frac{1}{4}$$
.
2. Calcul de $E(X)$ et $V(X)$:
$$E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = \frac{(-3)+(-2)+1+4}{4} = 0, \quad \text{et}$$
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(-3)^2+(-2)^2+1^2+4^2}{4} - 0^2 = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}.$$
3. On définit la variable aléatoire $Y = 2X + 1$.
   (a) Donner $Y(\Omega)$, et la loi de Y : les éléments y_i de $Y(\Omega)$ s'obtiennent à partir des éléments x_i de $X(\Omega)$ par la relation $y_i = 2.x_i + 1$. D'où : $Y(\Omega) = \{-5, -3, 3, 9\}$, et la loi de Y est donnée par $P(Y = -5) = P(X = -3) = \frac{1}{4}$. De même, $P(Y = -3) = P(Y = 3) = P(Y = 9) = \frac{1}{4}$.
   (b) Calcul de $E(Y)$ de deux façons différentes : D'une part on peut utiliser la linéarité de l'espérance : $E(Y) = E(2.X + 1) = 2.E(X) + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$.
   D'autre part, on peut utiliser la définition de l'espérance :
   $E(Y) = \sum y_i P(Y = y_i) = (-5) \times P(Y = -5) + (-3) \times P(Y = -3) + 3 \times P(Y = 3) + 9 \times P(Y = 9) = \frac{(-5)+(-3)+3+9}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

Exercices 2 et 5

Voir les solutions des exercices 1.2 et 3.1 dans le deuxième document.