Série d'exercices. 1 S M

Exercice 1 :

On considère l'application $f :]-1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{x}{x+1}$

1. Déterminer $f^{-1}(\{2\})$ et $f^{-1}(\{-2\})$.
2. Montrer que, $f([-\frac{1}{2};0]) = [-1;0]$.
3. Déterminer $f(]-1;+\infty[)$.

Exercice 2 :

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto -x^2+2x+3$

1. a). Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(2-x) = f(x)$.
   b). L'application f est-elle injective ?
2. a). Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) \leq 4$.
   b). L'application f est-elle surjective ?
3. Soit g la restriction de l'application f sur l'intervalle $[1;+\infty[$.
   a). Montrer que $g([1;+\infty[) =]-\infty;4]$.
   b). Montrer que g est bijective de $[1;+\infty[$ vers $]-\infty;4]$.
   c). Déterminer la bijection réciproque g^{-1}.

Exercice 3 :

On considère l'application f définie par :

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto x(\sqrt{x}-2)^2.$$

1. Montrer que l'application f n'est pas injective.
2. Soit g la restriction de l'application f sur l'intervalle $I = [4;+\infty[$.
   a- Montrer que $\forall (x;y) \in I^2$ $g(x) = g(y) \Rightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = (\sqrt{y}-1)^2$.
   b- En déduire que l'application g est injective.
   c- Montrer que l'application g est bijective de I vers $\mathbb{R}^+$ et déterminer sa bijection réciproque g^{-1}.

Exercice 4 :

On considère l'application f définie de $[1;+\infty[$ vers $[2;+\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

1. Montrer que l'application f est injective.
2. Montrer que l'application f est surjective.
3. En déduire que l'application f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 5 :

On considère les applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
3. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective alors g est injective.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g est injective alors f est surjective.