Université Ibn Zohr
Ecole **S**upérieure de l'**E**ducation et de la **F**ormation - **A**gadir
ESEFA

المدرسة العليا للتربية والتكوين - أكادير
ⵜⵉⵏⵎⵍ ⵜⴰⵏⴰⴼⵍⵉⵜ ⵏ ⵜⵓⵙⵙⵓⵖⵍⴰ ⴷ ⵜⵓⴳⴳⵓⵔⵜ - ⴰⴳⴰⴷⵉⵔ
ECOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉDUCATION ET DE LA FORMATION - AGADIR

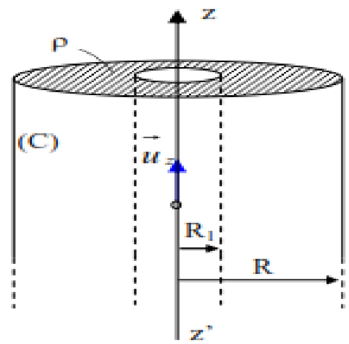
Année Universitaire
2019/2020
Semestre 2

SOLUTION DE TD D'ÉLECTRICITÉ

Filières **: LEESM**, **LEESI**

Série N° : 3

EXERCICE : 1



1. Variable dont dépend E et sa direction :

* Le cylindre chargé a un axe de révolution Oz (figure). Le système de coordonnées le plus adapté est le système cylindrique de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Cette distribution de charge est invariante par translation suivant Oz et par rotation d'angle θ autour de Oz.

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(r,\theta,z) = \vec{E}(r)$$

* Le plan Π_1 = (M, $\vec{u}_r, \vec{u}_z$) passe par M et l'axe (Oz) est un plan de symétrie pair.

$\vec{E} \in \Pi_1$ ainsi $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_z$

* Le plan Π_2 = (M, $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta$) passant par M et perpendiculaire à (Oz) est un plan de symétrie pair.

$\vec{E} \in \Pi_2$ ainsi $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$

Ainsi, $\vec{E} \in \Pi_1 \cap \Pi_2$

D'où, le champ est radial : $\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r$

2. Le flux à travers la surface de gauss :

$$\phi = 2\pi r h E(r)$$

a. $\underline{\underline{r \leq R_1 :}}$

$\vec{E}(r \leq R_1) = \vec{0}$ car $Q_{int}(r < R_1) = 0$

b. $\underline{\underline{R_1 \leq r \leq R :}}$

$$Q_{int} = \rho \int_{R_1}^{r} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz$$

$$= \rho \left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_1}^{r} .2\pi.h$$

$$= \rho\, \pi. h\left[r^2 - {R_1}^2\right]$$

D'après le théorème de Gauss :

$$\phi = 2\pi r h E(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Donc :

$$\vec{E}(R_1 \leq r \leq R) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\left[r^2 - {R_1}^2\right]\vec{u}_r$$

c. $\underline{\underline{r \geq R :}}$

$$Q_{int} = \rho \int_{R_1}^{R} rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz$$

$$= \rho \left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_1}^{R} .2\pi.h$$

$$= \rho\, \pi.h\left[R^2 - {R_1}^2\right]$$

D'après le théorème de Gauss :

$$\phi = 2\pi rhE(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Donc :

$$\vec{E}(r > R) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\left[R^2 - {R_1}^2\right]\vec{u}_r$$

d. Continuités de champ $\vec{E}(M)$ à la traversée des deux surfaces de la couronne cylindrique:

- $E(r = {R_1}^-) = 0;\ E\left(r = {R_1}^+\right) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 R_1}\left[{R_1}^2 - {R_1}^2\right] = 0$

Donc

$$E(r = {R_1}^-) = E\left(r = {R_1}^+\right) = 0$$

⇨ **E est continu en $r = R_1$**

- $E(r = R^-) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 R}\left[R^2 - {R_1}^2\right];\ E(r = R^+) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 R}\left[R^2 - {R_1}^2\right]$

Donc

$$E(r = R^-) = E(r = R^+) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 R}\left[R^2 - {R_1}^2\right]$$

⇨ **E est continu en $r = R$**

3. $\boldsymbol{R_1 ==> R}$

a. En considérant un cylindre de hauteur h, la conservation de la charge s'écrit :

$$Q = \rho\, \pi.h\left[R^2 - {R_1}^2\right] = \sigma 2\pi Rh$$

D'où :

$$\sigma = \frac{\rho}{2R}\left[R^2 - {R_1}^2\right]$$

b. le champ $\vec{E}(M)$ crée par un cylindre creux de rayon R est :

$\underline{\underline{*\ \ \boldsymbol{r \leq R}}}$

$\vec{E}(r \leq R) = \vec{0}$ (car le cylindre creux de rayon R est charge en surface ➔ $Q_{int} = 0$)

$\underline{\underline{*\ \ \boldsymbol{r > R}}}$

Ona : $\vec{E}(r > R) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0 r}\left[R^2 - {R_1}^2\right]\vec{u}_r = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 r} R\, \vec{u}_r$

Donc : $\vec{E}(r > R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 r} R\, \vec{u}_r$

On trouve le champ crée par un cylindre de rayon R, de longueur infinie, chargé en surface par une densité surfacique de la charge uniforme σ > 0

4. ' $R_1 = 0$ ***et*** $R \ll \ell$ **;** (le cylindre peut être considérée comme un fil infini. On désigne par λ la densité linéique du fil)

a. λ en fonction de ρ et R

la conservation de la charge s'écrit :

$Q = \rho\, \pi . h\, R^2 = \lambda h$

Donc :

$\lambda = \rho\, \pi\, R^2$

b. L'expression du champ $\vec{E}(M)$ crée par le fil

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$$

c. Le champ $\vec{E}(M)$ crée par un fil de longueur infinie à partir du théorème de Gauss

$\phi = 2\pi r h E(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$ avec ($Q_{int} = \lambda h$)

⇨ $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$

d. Le potentiel V(M)

On a

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{dv}{dr}\vec{u}_r$ (car $\vec{E}$ est radial)

$$V = -\int E(r)dr = -\int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r}$$

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}Log\ (r) + K$$

EXERCICE : 2

1. La charge Q est répartie dans la sphère de rayon R avec une densité volumique uniforme ρ donc : la charge élémentaire $dq = \rho d\tau$

$$Q = \iiint \rho\, d\tau = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

⇨ $Q = \rho\frac{R^3}{3}.2.2\pi = \frac{4}{3}\pi . R^3\rho$

2. L'énergie électrostatique en utilisant la relation :

$$w = \iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$$

On a le champs électrostatique $\vec{E}$ crée par une sphère de rayon R avec une densité volumique uniforme ρ en tout point intérieur et extérieur de la sphére :

$\vec{E} = \rho\frac{r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r$ (r < R)

$\vec{E} = \rho\frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$ (r < R)

$$d\tau = r^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr$$

$$w = \iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau = \iiint \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[\int_0^R \left(\rho \frac{r}{3\varepsilon_0}\right)^2 r^2 dr + \int_0^R \left(\rho \frac{R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\right)^2 r^2 dr\right] \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{R^5}{5} + R^5\right).2.2\pi$$

$$= \frac{4\pi}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{3}\right)^2 \frac{6}{5} R^5$$

Donc :

$$W = \frac{4\pi}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\rho}{3}\right)^2 \frac{6}{5} R^5$$

EXERCICE : 3

1.

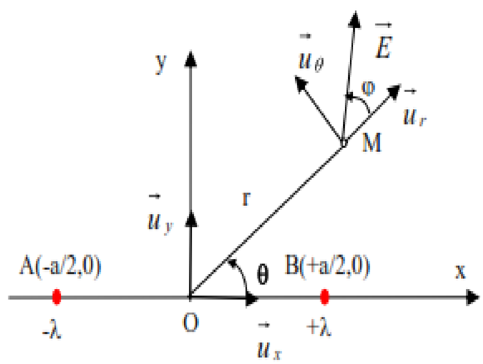
$\overrightarrow{AB} = a\vec{u}_x$

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ avec r >> a (approximation dipolaire)

- Le fil passant par B de densité + λ crée le potentiel :

$$V_{+\lambda}(M) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Log \left\|\overrightarrow{BM}\right\| + K$$

- Le fil passant par A de densité - λ crée le potentiel :



$$V_{-\lambda}(M) = +\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Log \left\|\overrightarrow{AM}\right\| + K$$

2. Potentiel *V(M)* crée par les deux fils

On a *V(O) = 0*

Le principe de superposition s'écrit :

$$V(M) = V_{+\lambda}(M) + V_{-\lambda}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Log\left[\left\|\overrightarrow{AM}\right\| - \left\|\overrightarrow{BM}\right\|\right] + cte$$

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Log\left(\frac{AM}{BM}\right) + cte$$

Or, en M = O, $\frac{AM}{BM} = 1$; $V(O) = cte = 0$

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Log\left(\frac{AM}{BM}\right)$$

3.

$$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}\right)^2 = \overrightarrow{AO}^2 + \overrightarrow{OM}^2 + 2\overrightarrow{AO}\,\overrightarrow{OM}$$

Où, $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = r$; $\left\|\overrightarrow{AO}\right\| = \frac{a}{2}$ et $\overrightarrow{AO}\,\overrightarrow{OM} = \frac{a}{2} r \cos(\theta) = \frac{ar}{2}\cos(\theta)$

On a :

$$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} + ar\cos(\theta) = r^2\left(1 + \frac{a}{r}\cos(\theta) + \frac{a}{4r^2}^2\right)$$

Puisque $\frac{a}{r} \ll 1$, on a : $\frac{a}{4r^2}^2 \ll \frac{a}{r}$,

$$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 \cong r^2\left(1 + \frac{a}{r}\cos(\theta)\right)$$

D'où,

$$AM \cong r^2\left(1 + \frac{a}{r}\cos(\theta)\right)^{1/2}$$

De meme pour BM :

$$\left\|\overrightarrow{BM}\right\|^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} + ar\cos(\pi - \theta) = r^2\left(1 - \frac{a}{r}\cos(\theta) + \frac{a}{4r^2}^2\right)$$

$$BM \cong r^2\left(1 - \frac{a}{r}\cos(\theta)\right)^{1/2}$$

4. On a :

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Log\left(\frac{AM}{BM}\right)$$

$$V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Log\left(\frac{\left(1 + \frac{a}{r}\cos(\theta)\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{a}{r}\cos(\theta)\right)^{1/2}}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left\{log\left(1 + \frac{a}{r}\cos(\theta)\right)^{1/2} - log\left(1 - \frac{a}{r}\cos(\theta)\right)^{1/2}\right\}$$

On a : pour x << 1, Log (1+ x) ≅ x (au 1[er] ordre)

$$V(M) \cong \frac{\lambda 2a\ \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda a\ \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

5.

$\vec{p} = Q_\lambda \overrightarrow{AB} = (\lambda\ell)a\vec{u}_x \quad p = (\lambda\ell)a$

6.

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} == \dfrac{\lambda a\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta} = \dfrac{\lambda a\sin\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$

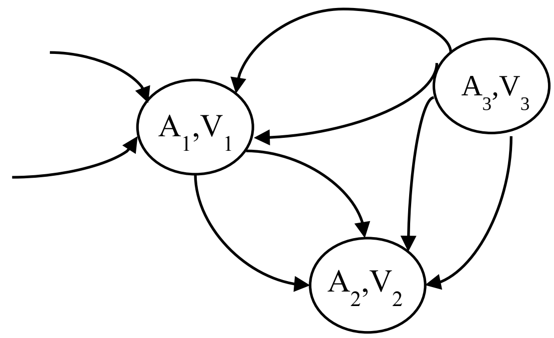
$$E = \left(E_r^2 + E_\theta^2\right)^{1/2} = \frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0 r^2}$$

EXERCICE : 4

1. On sait que les lignes de champ portent des potentiels le plus élevé au potentiel le moins élevé.

D'après la figure, on a :

Des lignes de champs portent de :



- A_3 vers A_1 ➔ $V_3 > V_1$
- A_3 vers A_2 ➔ $V_3 > V_2$
- A 1 vers A2 ➔ $V_1 > V_2$

Donc : $V_3 > V_1 > V_2$

2. On a : $V(\infty) = 0$
   D'après la figure :
   - Il y a des lignes de champs qui portent de A_3 vers l'infini ➔ $V_3 > V(\infty) = 0$
   - Il y a des lignes de champs qui viennent de l'infini vers A_1 ➔ $V_1 < 0$
   - Puisque $V_2 < V_1$ ➔ $V_2 < 0$
3. Non, car $V_2 < 0$