Ecole Supérieure de l'Education et de la Formation
Université IBN ZOHR
Agadir

Filières LEM et LEI
Semestre 2
2019-2020

Correction de TD3

Analyse III
Développements limités et applications
Responsable du Module : Mouna HADDADI

Exercice 1

Rappel : Si f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0.
Si $g(x) \neq 0$ sur un voisinage de x_0 (ou sauf peut être en x_0 càd on peut avoir $g(x_0) = 0$), alors

$$f(x) = o(g(x)) \;\; (x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

$$f(x) = O(g(x)) \;\; (x_0) \Longleftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \text{ est bornée.}$$

Remarque :

$$f(x) = o(g(x)) \;\; (x_0) \Longrightarrow f(x) = O(g(x)) \;\; (x_0)$$

Mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

1. $f(x) = x^2$
   on a : $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ donc $f(x) = o(1)$ (0) ce qui implique que $f(x) = O(1)$ (0).
   On a : $\dfrac{f(x)}{x^2} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 1$ alors $f(x) \neq o(1)$ (0). Par contre puisque $\dfrac{f(x)}{x^2} = 1$ alors $\dfrac{f(x)}{x^2}$ est bornée, et par conséquent $f(x) = O(x^2)$ (0).
2. $g(x) = \frac{\sin(x^4)}{x}$
   On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} g(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^4)}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} x^3 \frac{\sin(x^4)}{x^4} \\
&= \lim_{x \to 0} x^3 \times \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^4)}{x^4} \\
&= 0 \times 1 = 0
\end{aligned}$$

alors $g(x) = o(1)\ (0)$ ce qui implique que $g(x) = O(1)\ (0)$.
on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)}{x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} x\frac{\sin(x^4)}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} x \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)}{x^4} \\
&= 0 \times 1 = 0
\end{aligned}$$

donc $g(x) = o(x^2)\ (0)$ et par suite $g(x) = O(x^2)\ (0)$.

3. $h(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}} = e^{-\frac{1}{x^2}}$

   On a

$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

   alors $h(x) = o(1)\ (0)$ ce qui donne $h(x) = O(1)\ (0)$.
   On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{u\to +\infty} ue^{-u} \text{ avec } u = \frac{1}{x^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

   donc $h(x) = o(x^2)\ (0)$ et on déduit que $h(x) = O(x^2)\ (0)$.

4. $i(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$ On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} i(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\frac{\ln(1+x)}{x} \\
&= +\infty \times 1 \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

   donc $i(x) \neq o(1)\ (0)$, et comme $\lim_{x\to 0} i(x) = +\infty$ alors $i(x)$ ne peut pas être bornée au voisinage de 0, donc $i(x) \neq O(1)\ (0)$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{i(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\frac{\ln(1+x)}{x} \\
&= +\infty \times 1 \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

donc $i(x) \neq o(x^2)$ (0), et comme $\lim_{x\to 0} \frac{i(x)}{x^2} = +\infty$ donc $\frac{i(x)}{x^2}$ ne peut pas être bornée au voisinage de 0, alors $i(x) \neq O(x^2)$ (0).

Exercice 2

Rappel : On dit que $f = o(g(x))$ au voisinage de x_0 si $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
Donc d'aprés cette définition $o(g(x)) = \varepsilon(x)g(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

1. Pour montrer que $o(x^n) = x^{n-1}o(1)$ (0) il faut que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(x^n)}{x^{n-1}} = 0$.
   On sait que si $g(x) = o(x^n) \iff g(x) = x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ alors
$$o(x^n) = x^n\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^{n-1}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^n\varepsilon(x)}{x^{n-1}} \\ &= \lim_{x\to 0} x\varepsilon(x) = 0\end{aligned}$$
   donc on obtient que $\dfrac{o(x^n)}{x^{n-1}} = o(1)$ (0) alors $o(x^n) = x^{n-1}o(1)$ (0) .
2. Tout d'abord, on doit montrer que $o(x^n) = x^n o(1)$ (x_0) :
   Par définition si $f(x) = o(x^n)$ $(x_0) \iff f(x) = x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$, alors
$$o(x^n) = x^n\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{o(x^n)}{x^n} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^n\varepsilon(x)}{x^n} \\ &= \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0\end{aligned}$$
   donc on obtient que $\dfrac{o(x^n)}{x^n} = o(1)$ (x_0) alors $o(x^n) = x^n o(1)$ (x_0) .
   Donc $\forall n, p \in \mathbb{N}$ on a
$$\begin{aligned}x^n o(x^p) = &= x^n x^p o(1)\ (x_0) \quad \text{car } o(x^p) = x^p o(1) \\ &= x^{n+p} o(1)\ (x_0) \\ &= o(x^{n+p})\ (x_0)\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} o(x^n)o(x^p) &= x^n o(1) x^p o(1) \ (x_0) \\ &= x^{n+p} o(1) \ (x_0) \quad \text{car } o(1) \times o(1) = o(1) \\ &= o(x^{n+p}) \ (x_0) \end{aligned}$$

4. On a

$$o(x^n) \pm o(x^p) = x^n o(1) \pm x^p o(1)$$

Supposons que $n \leqslant p$ alors $\min(n,p) = n$, donc

$$\begin{aligned} o(x^n) \pm o(x^p) &= x^n o(1) \pm x^n x^{p-n} o(1) \\ &= x^n \big(o(1) \pm x^{p-n} o(1) \big) \end{aligned}$$

puisque on a $\lim\limits_{x \to x_0} \big(o(1) \pm x^{p-n} o(1) \big) = 0$, alors on obtient

$$o(1) \pm x^{p-n} o(1) = o(1) \ (x_0)$$

Donc

$$\begin{aligned} o(x^n) \pm o(x^p) &= x^n o(1) \\ &= x^{\min(n,p)} o(1) \end{aligned}$$

Exercice 3

Le dl de $\cos x$ en 0 à l'ordre 6 est :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6).$$

Calculons celui de $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ sachant que $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$:

$$\begin{aligned} \frac{1+ax^2}{1+bx^2} &= (1+ax^2) \times \frac{1}{1+bx^2} \\ &= (1+ax^2) \times \big(1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)\big) \\ &= 1 + (a-b)x^2 - b(a-b)x^4 + b^2(a-b)x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

alors

$$f(x) = \big(-\frac{1}{2} - (a-b)\big)x^2 + \big(\frac{1}{24} + b(a-b)\big)x^4 + \big(-\frac{1}{720} - b^2(a-b)\big)x^6 + o(x^6).$$

Pour que $f(x)$ soit $o(x^6)$, il faut annuler les coefficients des x de degré 2 et 4 . On souhaite donc avoir

$$-\frac{1}{2} - (a-b) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{24} + b(a-b) = 0.$$

En substituant l'égalité de gauche dans celle de droite on trouve :

$$a = -\frac{5}{12} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{1}{12}.$$

On obtient alors

$$f(x) = \big(-\frac{1}{720} - b^2(a-b)\big)x^6 + o(x^6) = \frac{1}{480}x^6 + o(x^6).$$

Exercice 4

1. $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

   Alors $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

2. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$

   Alors $\frac{\sin(x)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

3. $\sin(x) - x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$

   Alors $\frac{\sin(x)-x}{x^3} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} = -\frac{1}{6}$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$$

4. $\sin(x) - x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$

   Alors $\frac{\sin(x)-x}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} = -\frac{x}{6}$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0$$

5. $1 - \cos(x) = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1 = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

   Alors $\frac{1-\cos(x)}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

6. $1-\cos(x) = 1-\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1 = \frac{x^2}{2}+o(x^2) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

   Alors $\frac{1-\cos(x)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{x} = \frac{x}{2}$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = 0$$

7. $e^x - 1 = 1 + x + o(x) - 1 \underset{0}{\sim} x$

   Alors $\frac{e^x-1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Exercice 5

1.

$$f_a(x) = \arctan\big(u(x)\big) \qquad \text{avec } u(x) = \frac{x+a}{1-ax}$$

$$f_a'(x) = \frac{u'(x)}{1 + \big(u(x)\big)^2}$$

$$u'(x) = \frac{1 \times (1 - ax) - (x + a) \times (-a)}{(1 - ax)^2} = \frac{1 + a^2}{(1 - ax)^2}$$

$$1 + \big(u(x)\big)^2 = 1 + \left(\frac{x + a}{1 - ax}\right)^2 = \frac{(1 - ax)^2 + (x + a)^2}{(1 - ax)^2}$$

$$= \frac{1 - 2ax + a^2x^2 + x^2 + 2ax + a^2}{(1 - ax)^2}$$

$$= \frac{1 + a^2x^2 + x^2 + a^2}{(1 - ax)^2} = \frac{1 + a^2 + x^2(a^2 + 1)}{(1 - ax)^2} = \frac{(1 + a^2)(1 + x^2)}{(1 - ax)^2}$$

$$f_a'(x) = \frac{\dfrac{1 + a^2}{(1 - ax)^2}}{\dfrac{(1 + a^2)(1 + x^2)}{(1 - ax)^2}} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f_a'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2(n-1)} + o(x^{2n-1})$$

2.

$$f_a(x) = f_a(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n - 1} + o(x^{2n})$$

$$= \arctan(a) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n - 1} + o(x^{2n})$$

$$= \arctan(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{2k - 1} + o(x^{2n})$$

Exercice 6

1. $\cos x \cdot \exp x$ (à l'ordre 3).

   Le dl de $\cos x$ à l'ordre 3 est
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \varepsilon_1(x)x^3.$$
   Le dl de $\exp x$ à l'ordre 3 est
$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3.$$
   Par convention toutes nos fonctions $\varepsilon_i(x)$ vérifierons $\varepsilon_i(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

   On multiplie ces deux expressions
$$\begin{aligned}\cos x \times \exp x &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_1(x)x^3\right) \times \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right)\\ &= 1 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right)\\ &\qquad - \frac{1}{2}x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right)\\ &\qquad + \varepsilon_1(x)x^3 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right)\end{aligned}$$

   On va développer chacun de ces produits, par exemple pour le deuxième produit :
$$-\frac{1}{2!}x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^5 - \frac{1}{2}x^2 \cdot \varepsilon_2(x)x^3.$$
   Mais on cherche un dl à l'ordre 3 donc tout terme en x^4, x^5 ou plus se met dans $\varepsilon_3(x)x^3$, y compris $x^2 \cdot \varepsilon_2(x)x^3$ qui est un bien de la forme $\varepsilon(x)x^3$. Donc
$$-\frac{1}{2}x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \varepsilon_3(x)x^3.$$
   Pour le troisième produit on a
$$\varepsilon_1(x)x^3 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) = \varepsilon_1(x)x^3 + x\varepsilon_1(x)x^3 + \cdots = \varepsilon_4(x)x^3$$

On en arrive à :

$$\begin{aligned}
\cos x \cdot \exp x &= \Big(1 - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_1(x)x^3\Big) \times \Big(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\Big) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_1(x)x^3 \\
&\qquad - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \varepsilon_3(x)x^3 \\
&\qquad + \varepsilon_4(x)x^3 \qquad \text{il ne reste plus qu'à regrouper les termes :} \\
&= 1 + x + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})x^2 + (\frac{1}{6} - \frac{1}{2})x^3 + \varepsilon_5(x)x^3 \\
&= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon_5(x)x^3
\end{aligned}$$

Ainsi le dl de $\cos x \cdot \exp x$ en 0 à l'ordre 3 est :

$$\cos x \cdot \exp x = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon_5(x)x^3.$$

2. $(\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).

   Il s'agit juste de multiplier le dl de $\ln(1+x)$ par lui-même. En fait si l'on réfléchit un peu on s'aperçoit qu'un dl à l'ordre 3 sera suffisant (car le terme constant est nul) :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3$$

   $\varepsilon_5(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$.

$$
\begin{aligned}
(\ln(1+x))^2 &= \ln(1+x)\times\ln(1+x)\\
&= \left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\varepsilon(x)x^3\right)\times\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\varepsilon(x)x^3\right)\\
&= x\times\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\varepsilon(x)x^3\right)\\
&\qquad -\frac{1}{2}x^2\times\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\varepsilon(x)x^3\right)\\
&\qquad +\frac{1}{3}x^3\times\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\varepsilon(x)x^3\right)\\
&\qquad +\varepsilon(x)x^3\times\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\varepsilon(x)x^3\right)\\
&= x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x^4+\varepsilon(x)x^4\\
&\qquad -\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^4+\varepsilon_1(x)x^4\\
&\qquad +\frac{1}{3}x^4+\varepsilon_2(x)x^4\\
&\qquad +\varepsilon_3(x)x^4\\
&= x^2-x^3+\frac{11}{12}x^4+\varepsilon_4(x)x^4
\end{aligned}
$$

3. $\dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$ (à l'ordre 6).

   Pour le dl de $\dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$ on commence par faire un dl du numérateur. Tout d'abord :

$$\operatorname{sh} x = x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9+\varepsilon(x)x^9$$

   donc

$$\operatorname{sh} x - x = \frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9+\varepsilon(x)x^9.$$

   Il ne reste plus qu'à diviser par x^3 :

$$\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3} = \frac{\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9+\varepsilon(x)x^9}{x^3} = \frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}x^2+\frac{1}{7!}x^4+\frac{1}{9!}x^6+\varepsilon(x)x^6$$

Remarquez que nous avons commencé par calculer un dl du numérateur à l'ordre 9, pour obtenir après division un dl à l'ordre 6.

4. $\exp\big(\sin(x)\big)$ (à l'ordre 4).
   On sait $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$ et $\exp(u) = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{4!}u^4 + o(u^4)$.
   On note désormais toute fonction $\varepsilon(x)x^n$ (où $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$) par $o(x^n)$. Cela évite les multiples expressions $\varepsilon_i(x)x^n$.
   On substitue $u = \sin(x)$, il faut donc calculer u, u^2, u^3 et u^4 :

$$u = \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$$

$$u^2 = \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)$$
$$u^3 = \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big)^3 = x^3 + o(x^4)$$
$$u^4 = x^4 + o(x^4) \qquad \text{et} \qquad o(u^4) = o(x^4)$$

   Pour obtenir :

$$\begin{aligned}\exp(\sin(x)) &= 1 + x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\\ &\quad + \frac{1}{2!}\big(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\big)\\ &\quad + \frac{1}{3!}\big(x^3 + o(x^4)\big)\\ &\quad + \frac{1}{4!}\big(x^4 + o(x^4)\big)\\ &\quad + o(x^4)\\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

5. $\sin^6(x)$ (à l'ordre 9).
   On sait $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$.
   Si l'on voulait calculer un dl de $\sin^2(x)$ à l'ordre 5 on écrirait :

$$\begin{aligned}\sin^2(x) &= \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big)^2 = \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big) \times \big(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\big)\\ &= x^2 - 2\frac{1}{3!}x^4 + o(x^5).\end{aligned}$$

En effet tous les autres termes sont dans $o(x^5)$.

Le principe est le même pour $\sin^6(x)$:

$$\sin^6(x) = \big(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\big)^6 = \big(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\big)\times\big(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^4)\big)\times\cdots$$

Lorsque l'on développe ce produit en commençant par les termes de plus petits degrés on obtient

$$\sin^6(x) = x^6 + 6\cdot x^5\cdot(-\frac{1}{3!}x^3) + o(x^9) = x^6 - x^8 + o(x^9)$$

6. $\ln\big(\cos(x)\big)$ (à l'ordre 6).

   Le dl de $\cos x$ à l'ordre 6 est

   $$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6).$$

   Le dl de $\ln(1+u)$ à l'ordre 6 est $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 + o(u^6)$.

   On pose $u = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)$ de sorte que

   $$\ln(\cos x) = \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 + o(u^6).$$

   Il ne reste qu'à développer les u^k, ce qui n'est pas si dur que cela si les calculs sont bien menés et les puissances trop grandes écartées.

   Tout d'abord :

   $$\begin{aligned} u^2 &= \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)\right)^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right)^2 + o(x^6) \\ &= \left(-\frac{1}{2!}x^2\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2!}x^2\right)\left(\frac{1}{4!}x^4\right) + o(x^6) \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} u^3 &= \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)\right)^3 \\ &= \left(-\frac{1}{2!}x^2\right)^3 + o(x^6) \\ &= -\frac{1}{8}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

En effet lorsque l'on développe u^3 le terme $(x^2)^6$ est le seul terme dont l'exposant est $\leqslant 6$.

Enfin les autres termes u^4, u^5, u^6 sont tous des $o(x^6)$. Et en fait développer $\ln(1+u)$ à l'ordre 3 est suffisant.

Il ne reste plus qu'à rassembler :

$$\begin{aligned} \ln(\cos x) &= \ln(1+u) \\ &= u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3) \\ &= \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + o(x^6)\right) \\ &\quad + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}x^6 + o(x^6)\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

7. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.

Le dl de $\cos x$ à l'ordre 4 est

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4).$$

Le dl de $\frac{1}{1+u}$ à l'ordre 2 (qui sera suffisant ici) est $\frac{1}{1+u} = 1-u+u^2+o(u^2)$.
On pose $u = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$ et on a $u^2 = \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u} \\
&= 1 - u + u^2 + o(u^2) \\
&= 1 - \Big(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) \Big) + \Big(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) \Big)^2 + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

8. $\tan x$ (à l'ordre 5 (ou 7 pour les plus courageux)).

   Pour ceux qui souhaitent seulement un dl à l'ordre 5 de $\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x}$ alors il faut multiplier le dl de $\sin x$ à l'ordre 5 par le dl de $\frac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4 (voir question précédente).

   Si l'on veut un dl de $\tan x$ à l'ordre 7 il faut d'abord refaire le dl $\frac{1}{\cos x}$ mais cette fois à l'ordre 6 :

   $$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^6)$$

   Le dl à l'ordre 7 de $\sin x$ étant :

   $$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^7)$$

   Comme $\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x}$, il ne reste donc qu'à multiplier les deux dl pour obtenir après calculs :

   $$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$$

9. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ (à l'ordre 3).

   Si l'on pense bien à écrire $(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = \exp\Big(\frac{1}{1+x}\ln(1+x)\Big)$ alors c'est juste des calculs utilisant les dl à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$ et $\exp x$.

   On trouve

   $$(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = 1 + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

10. $\arcsin\left(\ln(1+x^2)\right)$ (à l'ordre 6).

Tout d'abord $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$. Et $\arcsin u = u + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$. Donc en posant $u = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$ on a :

$$\begin{aligned}
\arcsin\big(\ln(1+x^2)\big) &= \arcsin\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right) \\
&= \arcsin u \\
&= u + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3) \\
&= \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\right)^3 + o(x^6) \\
&= \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\right) + \frac{x^6}{6} + o(x^6) \\
&= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} + o(x^6)
\end{aligned}$$

Exercice 7

1. Première méthode. On applique la formule de Taylor (autour du point $x = 1$)

   $$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

   Comme $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ alors $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ et donc $f'(1) = \frac{1}{2}$. Ensuite on calcule $f''(x)$ (puis $f''(1)$), $f'''(x)$ (et enfin $f'''(1)$).
   On trouve le dl de $f(x) = \sqrt{x}$ au voisinage de $x = 1$:

   $$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

   Deuxième méthode. Posons $h = x - 1$ (et donc $x = h + 1$). On applique la formule du dl de $\sqrt{1+h}$ autour de $h = 0$.

   $$\begin{aligned}
   f(x) = \sqrt{x} &= \sqrt{1+h} \\
   &= 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o(h^3) \quad \text{c'est la formule du dl de } \sqrt{1+h} \\
   &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)
   \end{aligned}$$

2. La première méthode consiste à calculer $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \exp\sqrt{x}$, $g''(x)$, $g'''(x)$ puis $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$, $g'''(1)$ pour pouvoir appliquer la formule de Taylor conduisant à :

   $$\exp(\sqrt{x}) = e + \frac{e}{2}(x-1) + \frac{e}{48}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

   (avec $e = \exp(1)$).

   Autre méthode. Commencer par calculer le dl de $k(x) = \exp x$ en $x = 1$ ce qui est très facile car pour tout n, $k^{(n)}(x) = \exp x$ et donc $k^{(n)}(1) = e$:

   $$\exp x = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

   Pour obtenir le dl $g(x) = h(\sqrt{x})$ en $x = 1$ on écrit d'abord :

   $$\exp(\sqrt{x}) = e + e(\sqrt{x}-1) + \frac{e}{2!}(\sqrt{x}-1)^2 + \frac{e}{3!}(\sqrt{x}-1)^3 + o((\sqrt{x}-1)^3).$$

   Il reste alors à substituer $\sqrt{x}$ par son dl obtenu dans la première question.

3. Posons $u = x - \frac{\pi}{3}$ (et donc $x = \frac{\pi}{3} + u$). Alors

   $$\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{3}+u) = \sin(\frac{\pi}{3})\cos(u) + \sin(u)\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u + \frac{1}{2}\sin u$$

   On connait les dl de $\sin u$ et $\cos u$ autour de $u = 0$ (car on cherche un dl autour de $x = \frac{\pi}{3}$) donc

   $$\begin{aligned}
   \sin x &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u + \frac{1}{2}\sin u \\
   &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 - \frac{1}{2!}u^2 + o(u^3)\right) + \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{3!}u^3 + o(u^3)\right) \\
   &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3) \\
   &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{\sqrt{3}}{4}(x-\frac{\pi}{3})^2 - \frac{1}{12}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3)
   \end{aligned}$$

Maintenant pour le dl de la forme $\ln(a+v)$ en $v=0$ on se ramène au dl de $\ln(1+v)$ ainsi :

$$\ln(a+v) = \ln\big(a(1+\frac{v}{a})\big) = \ln a + \ln(1+\frac{v}{a}) = \ln a + \frac{v}{a} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{v^3}{a^3} + o(v^3)$$

On applique ceci à $h(x) = \ln(\sin x)$ en posant toujours $u = x - \frac{\pi}{3}$:

$$\begin{aligned}
h(x) &= \ln(\sin x) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right)\right) \\
&= \cdots \qquad \text{on effectue le dl du } \ln \text{ et on regroupe les termes} \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}u - \frac{2}{3}u^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}u^3 + o(u^3) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3)
\end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3}) - \frac{2}{3}(x-\frac{\pi}{3})^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}(x-\frac{\pi}{3})^3 + o((x-\frac{\pi}{3})^3)$$

Bien sûr une autre méthode consiste à calculer $h(1)$, $h'(1)$, $h''(1)$ et $h'''(1)$.

Exercice 8

1. On a

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4) \qquad \text{et} \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

On s'aperçoit qu'en fait un dl à l'ordre 2 suffit :

$$e^{x^2} - \cos x = \big(1 + x^2 + o(x^2)\big) - \big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\big) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

Ainsi $\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \frac{3}{2} + o(1)$ (où $o(1)$ désigne une fonction qui tend vers 0) et donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$$

2. On sait que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Les dl sont distincts dès le terme de degré 2 donc un dl à l'ordre 2 suffit :

$$\ln(1+x) - \sin x = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc

$$\frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} = -\frac{x}{2} + o(x)$$

et ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} = 0.$$

3. Sachant

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

et

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} &= \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right)}{x^4} \\
&= \frac{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4} \\
&= \frac{1}{6} + o(1)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}$$

Exercice 9

1.

$$\ln(x+1) = \ln\left(x \times (1+\frac{1}{x})\right) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln x + \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$$

Donc

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{x\ln x} + o(\frac{1}{x\ln x}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x &= \exp\left(x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right)\\ &= \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x}+o(\frac{1}{x\ln x})\right)\right)\\ &= \exp\left(x\left(\frac{1}{x\ln x}+o(\frac{1}{x\ln x})\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{1}{\ln x}+o(\frac{1}{\ln x})\right)\\ &= 1+\frac{1}{\ln x}+o(\frac{1}{\ln x})\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x = 1$$

.

2. d'aprés la question 1) on a alors lorsque $x \to +\infty$

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1 \sim \frac{1}{\ln x}.$$