Chapitre 1

Polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 L'ensemble des polynômes à une indéterminée

1.1.1 Définitions :

On appelle polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ ou tout simplement polynôme, toute expression algébrique de la forme

$$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

avec $a_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in 0, \cdots, n$.

- Les scalaires $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont appelés <u>coefficients</u> du polynômes P.
- X est appelé variable ou indéterminée.
- Les termes a_kX^k sont appelés les monômes d'ordre k de P.
- Si $a_n = 1$ alors le polynôme est dit normalisé ou unitaire.
- Si $a_n \neq 0$ alors on appelle terme dominant de P le monôme a_nX^n.

Nous Notons $\mathbb{K}[X]$ L'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1.1.2 Opérations sur $\mathbb{K}[X]$:

a) Addition de deux polynômes :

Soient $P(X) = a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X+a_0$ et $Q(X) = b_nX^n+b_{n-1}X^{n-1}+\cdots+b_1X+b_0$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $n \in \mathbb{N}$. On définit alors le polynôme $P+Q$ par :

$$(P+Q)(X) = (a_n+b_n)X^n + (a_{n-1}+b_{n-1})X^{n-1} + \cdots + (a_1+b_1)X + (a_0+b_0)$$

b) Multiplication de deux polynômes :

Etant donnés deux polynômes $P(X) = a_pX^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0$ et $Q(X) = b_qX^q + b_{q-1}X^{q-1} + \cdots + b_1X + b_0$, on définit le polynôme $P \cdot Q$ par :

$$(P \cdot Q)(X) = c_rX^r + c_{r-1}X^{r-1} + \cdots + c_1X + c_0$$

avec

$$r = p+q \qquad \text{et} \qquad c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i} = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j}b_j, \qquad k \in \{0, 1, \cdots, r\}$$

1.1.3 Degré d'un polynôme :

Définition :

On appelle degré d'un polynôme P non nul, le plus grand ordre des monômes non nuls de P. On le note $deg(P)$ ou d^oP.
Si P est le polynôme nul, on convient que le degré de P est moins l'infini $(-\infty)$.

Exemples :

Soient $P(X) = 1+4X+3X^9$ et $Q(X) = X^{12}-2X^3+5X+1$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, on a

a) $deg(P) = 9$.

b) $deg(Q) = 12$.

Propriétés :

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors on a :

a) $deg(P+Q) \leq \max(deg(P), deg(Q))$.

b) $deg(P \cdot Q) = deg(P) + deg(Q)$.

c) $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*, \quad deg(\alpha P) = deg(P)$.

Preuve :
Posons

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k, \qquad \text{avec } a_n \neq 0,$$
$$Q = \sum_{k=0}^{m} b_kX^k, \qquad \text{avec } b_m \neq 0.$$

a) Si $n > m$ alors

$$P+Q = \sum_{k=0}^{m}(a_k+b_k)X^k + \sum_{k=m+1}^{n} a_kX^k,$$

d'où

$$deg(P+Q) = n.$$

De même si $m > n$, on obtient $deg(P+Q) = m$.

Si $m = n$ alors $P+Q = \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)X^k$.

Le monôme de plus haut degré dans l'expression de $P+Q$ est $(a_n+b_n)X^n$

➔ Si $a_n = -b_n$, ce monôme est nul et l'on a alors $deg(P+Q) < n$.

➔ Si $a_n \neq -b_n$ alors $deg(P+Q) = n$.

Donc
$$deg(P+Q) \leq \max(deg(P), deg(Q)).$$

b) Le monôme dominant de $P \cdot Q$ est $c_{m+n}X^{m+n}$ avec,
$$\begin{aligned} c_{m+n} &= \sum_{i=0}^{m+n} a_i b_{m+n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{m+n-i} + \sum_{i=n+1}^{m+n} a_i b_{m+n-i} \\ &= a_n b_n \neq 0. \end{aligned}$$

Car pour
$$\begin{aligned} 0 \leq i \leq n &\implies b_{m+n-i} = 0 \\ i \geq n+1 &\implies a_i = 0 \end{aligned}$$

Donc
$$deg(P \cdot Q) = deg(P) + deg(Q).$$

c) Claire.

1.2 Division des polynômes dans $\mathbb{K}[X]$

1.2.1 Division suivant les puissances décroissantes :

Théorème de la division euclidienne (admis) :

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tel que $B(0) \neq 0$. Il existe deux polynômes uniques Q et R de $\mathbb{K}[X]$ tels que :
$$A = B \cdot Q + R, \qquad \text{avec } deg(R) < deg(B). \qquad (*)$$
Le polynôme Q est appelé quotient de la division de A par B, R est le reste, B le diviseur et A le dividende.
L'opération permettant de passer du couple (A, B), $B(0) \neq 0$, au couple (Q, R) vérifiant $(*)$ est appelée la division euclidienne de A par B.

Exemple :

Effectuer la division euclidienne de $A = 6X^4 + X^3 + X + 1$ par $B = X^2 + X + 1$.
On a :

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 6X^4 & + X^3 & + 0X^2 & + X & + 1 & & X^2+X+1 \\ \cline{7-7} 6X^4 & + 6X^3 & + 6X^2 & & & & 6X^2-5X-1 \\ \cline{1-6} & -5X^3 & -6X^2 & + X & + 1 & & \\ & -5X^3 & -5X^2 & -5X & & & \\ \cline{2-6} & & -X^2 & +6X & +1 & & \\ & & -X^2 & -X & -1 & & \\ \cline{3-6} & & & 7X & +2 & & \end{array}$$

D'où :
$$A = BQ + R, \qquad \text{avec } Q = 6X^2 - 5X - 1 \text{ et } R = 7X + 2.$$

1.2.2 Racines d'un polynôme :

Définition :

Soient A et $B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que A est divisible par B ou que B divise A si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.
$$B \text{ divise } A \text{ (On note } B/A) \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que : } A = BQ.$$

Exemple :

Soient $A = X^3 - 1$ et $B = X - 1$.
Alors B divise A : $\quad A = QB \quad$ avec $\quad Q = X^2 + X + 1$.

Définition :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition :

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
$$\alpha \text{ est une racine de } P \text{ si et seulement si } (X - \alpha)/P.$$

Preuve :

$\Longleftarrow$) Si $(X-\alpha)/P$ alors $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $P(X) = (X-\alpha)Q(X)$.
d'où
$$P(\alpha) = 0.Q(\alpha) = 0.$$
Donc α est une racine de P.

$\Longrightarrow$) Supposons α est une racine de P. D'aprés le théorème de la division euclidienne de P par $(X-\alpha)$, on a :
$$P(X) = (X-\alpha)Q(X) + \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{K}.$$
Or, $P(\alpha) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$.
d'où
$$P(X) = (X-\alpha)Q(X).$$
Donc $(X-\alpha)/P$.

Définition :

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. α est une racine d'ordre de multiplicité m si et seulement si $(X-\alpha)^m/P$ et $(X-\alpha)^{m+1}$ ne divise pas P.
2. Soit α une racine d'ordre de multiplicité m alors :
   - ➔ Si $m = 1$, on dit que α est une racine simple de P.
   - ➔ Si $m = 2$, on dit que α est une racine double de P.
   - ➔ Si $m = 3$, on dit que α est une racine triple de P.

Exemple :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P(X) = (X-1)(X-4)^2(X+3)^5.$$

- 1 est une racine simple de P.
- 4 est une racine double de P.
- -3 est une racine d'ordre 5 de P.

Théorème :(admis)

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ des racines de P deux à deux distinctes d'ordres de multiplicité respectifs $k_1, k_2, \cdots, k_m$. Alors, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P(X) = (X-\alpha_1)^{k_1}(X-\alpha_2)^{k_2}\cdots(X-\alpha_m)^{k_m}Q(X), \quad \text{et} \quad Q(\alpha_i) \neq 0, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m.$$

Corollaire :

Soit P un polynôme de$\mathbb{K}[X]$ de degré n. Alors P ne peut pas avoir plus de n racines distinctes.

Preuve :

Supposons que P admet $n+1$ racines $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$. Alors, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P(X) = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_{n+1})Q(X), \qquad Q \in \mathbb{K}[X]$$

donc,

$$\begin{aligned} deg(P) &= deg((X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_{n+1})) + deg(Q) \\ &\geq n+1. \quad \text{Absurde!} \end{aligned}$$

Définition :

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n > 1$. P est dit scindé sur $\mathbb{K}$ s'il admet n racines dans $\mathbb{K}$.

Exemple :

a) $P(X) = X^3 - 3X^2 - X + 3 = (X-1)(X+1)(X-3)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

b) $Q(X) = X^2 + 1 = (X-i)(X+i)$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Théorème d'Alembert :(admis)

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n > 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

1.2.3 Décomposition en facteurs irréductibles :

Définition :

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. P est irréductible dans $\mathbb{K}$ s'il n'a pour diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ que les polynômes constants et les polynômes λP où $\lambda \neq 0$.

Théorème :(Polynôme irréductible dans $\mathbb{C}$)

Un polynôme P est irréductible dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $deg(P) = 1$.

Corollaire :

Tout polynôme P non nul de $\mathbb{C}[X]$ admet une décomposition en facteurs irréductibles du type suivant :

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{m_i},$$

où $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ est l'ensemble des racines de P, m_i est la multiplicité de λ_i et λ est le coefficient du terme dominant de P.

Théorème :(Polynôme irréductible dans $\mathbb{R}$)

Les polynômes irréductible de $\mathbb{R}[X]$ sont

- Les polynômes de degré 1.
- Les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatifs. $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Exemple :

Le polynôme $P(X) = X^3 + 3X^2 + 2X + 6$ se décompose en facteurs irréductibles dans :

a) $\mathbb{C}[X]$ en $(X-3)(X+i\sqrt{2})(X-i\sqrt{2})$.

b) $\mathbb{R}[X]$ en $(X-3)(X^2+2)$.

1.2.4 Division suivant les puissances croissantes :

Théorème :(admis)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tel que $B(0) \neq 0$ et n un entier strictement positif, alors il existe deux polynômes uniques Q_n et R_n de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$\begin{cases} A = B \cdot Q_n + X^{n+1}R_n, \\ deg(Q_n) \leq n \end{cases}$$

On effectue cette division un peu comme la division euclidienne classique, mais en écrivant les polynômes suivant les puissances croissantes, et en cherchant à éliminer d'abord les termes constants, puis les termes en X, etc...

Exemple :

Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 de $A = 4 + X^2$ par $B = 1 + X + X^2$.
On a :

$$\begin{array}{ccccccccc|l}
4 & + & 0X & & X^2 & & & & & 1 + X + X^2 \\ \cline{10-10}
4 & + & 4X & + & 4X^2 & & & & & 4 - 4X + X^2 \\ \cline{1-9}
 & - & 4X & - & 3X^2 & & & & & \\
 & - & 4X & - & 4X^2 & - & 4X^3 & & & \\ \cline{1-9}
 & & & & X^2 & + & 4X^3 & & & \\
 & & & & X^2 & + & X^3 & + & X^4 & \\ \cline{4-9}
 & & & & & & 3X^3 & - & X^4 &
\end{array}$$

D'où :

$$A = BQ_2 + X^3R_2, \quad \text{avec} \quad Q_2 = 4 - 4X + X^2 \quad \text{et} \quad R_2 = 3 - X.$$

1.3 Dérivation des polynômes

1.3.1 Définition :

Soit $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On appelle polynôme dérivé de P et on note P' le polynôme suivant :

$$P'(X) = \begin{cases} na_nX^{n-1} + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + 2a_2X + a_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1}, & \text{Si } n \geq 1 \\ 0, & \text{Si } n = 0 \end{cases}$$

1.3.2 Propriétés :

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a les propriétés suivantes :

1. Si $deg(P) > 0$ alors $deg(P') = deg(P) - 1$.

2. Si P est constant alors $P' = 0$.
3. $(P + Q)' = P' + Q'$.
4. $(\lambda P)' = \lambda P'$.
5. $(P \cdot Q)' = P' \cdot Q + P \cdot Q'$.

1.3.3 Remarque :

On définit par récurrence le polynôme dérivé d'ordre n du polynôme P, que l'on note $P^{(n)}$ comme suit :

$$P^{(0)} = P, \quad \text{et} \quad \forall k \in \{0, \cdots, n\}, \quad P^{(k)} = (P^{(k-1)})'.$$

Et on a le résultat suivant entre les dérivées successives de P et ses coefficients :

1.3.4 Proposition : (Formule de Mac-Laurin)

Soit $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On a :

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}, \quad \forall k \in \{1, \cdots, n\}$$

En d'autres termes, si P est un polynôme de degré n alors :

$$\begin{aligned} P(X) &= P(0) + \frac{P'(0)}{1!}X + \frac{P''(0)}{2!}X^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}X^n, \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k. \end{aligned}$$

Preuve :

Soit $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kX^k$.
Pour tout $j \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} P^{(j)}(X) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(X^k\right)^{(j)} \\ &= \sum_{k=j}^{n} a_k \left(k(k-1)\cdots(k-j+1)\right) X^{k-j} \\ &= a_j j! + \sum_{k=j+1}^{n} a_k \left(k(k-1)\cdots(k-j+1)\right) X^{k-j} \end{aligned}$$

On en déduit que $P^{(j)}(0) = j!a_j$.
Plus généralement, on a la formule de Taylor pour les polynômes.

1.3.5 Proposition : (Formule de Taylor)

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré n et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a la relation suivante :

$$\begin{aligned} P(X) &= P(\alpha) + \frac{P'(\alpha)}{1!}(X - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(X - \alpha)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X - \alpha)^n, \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X - \alpha)^k. \end{aligned}$$

1.3.6 Théorème :

Soient P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. α est une racine d'ordre m de P.

2. $P^{(k)}(\alpha) = 0, \ \ \forall k \in \{0, \cdots, m-1\}$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

oussama

DÉPARTEMENT MATHEMATIQUES

Année Universitaire: 2019/2020

جامعة ابن زهر

ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵉⴱⵏ ⵣⵓⵀⵔ

UNIVERSITÉ IBN ZOHR

Travaux Dirigés. Polynômes de $\mathbb{K}[X]$

Algèbre 2 Série $n^o 1$

Pr. Nouh IZEM

Exercice 1

$\boxed{1}$ Effectuer la division euclidienne (suivant les puissances décroissantes) de

(a) $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$; (b) $X^5 + 2X^3 + 3X + 1$ par $X^3 + 1$;

(c) $X^4 + (1+i)X^2 + 1$ par $X^2 - 1$; (d) $2X^4 + 2iX^3 + 5X^2 + (8i-5)X + 1$ par $X^2 - iX + 2$;

$\boxed{2}$ Effectuer la division suivant les puissances croissantes de:

(a) $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$ par $B = X^2 + X + 1$ à l'ordre 2;

(b) $A = X^6 + 2X^4 + X^3 + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$ à l'ordre 4;

Exercice 2

$\boxed{1}$ Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n + X + b$ par $(X-a)^2$, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$\boxed{2}$ Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos a + X \sin a)^n$ par $1 + X^2$, pour $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$\boxed{3}$ Montrer que le polynôme $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $(X-1)^2$ et calculer le quotient.

Exercice 3

$\boxed{1}$ Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$a)$ $X^4 + 4$; $b)$ $X^6 + 27$;

$c)$ $X^4 + X^2 + 1$; $d)$ $X^8 + X^4 + 1$;

$\boxed{2}$ Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^n - 1$ pour $n = 5$ et $n = 6$.

Exercice 4

Soit $P = X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

$\boxed{1}$ Montrer que 1 et -1 sont des racines de P.

$\boxed{2}$ Déterminer P_1 tel que $P = (X-1)^\alpha (X+1)^\beta P_1$ avec $P_1(1) \neq 0$ et $P_1(-1) \neq 0$.

$\boxed{3}$ Montrer que $P_1(z) = 0$ si et seulement si $z + \frac{1}{z}$ est solution d'un polynôme de second degré.

$\boxed{4}$ En déduire la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 5

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par:

$$P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$$

$\boxed{1}$ Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine multiple de P.

$\boxed{2}$ En remarquant que P est un polynôme pair, donner toutes les racines de ainsi que leur multiplicité.

$\boxed{3}$ Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

8