Exercice 11

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$

$n \longmapsto (a,b)$

$n = 2^a(2b+1)$

$\forall (n,n') \in \mathbb{N}^2$

$f(n) = f(n') \Rightarrow n = n'$

$n = 2^a(2b+1)$

$n' = 2^{a'}(2b'+1)$

$f(n) = f(n') \Rightarrow 2^a(2b+1) = 2^{a'}(2b'+1)$

$\cancel{2^a 2b + 2^a = 2^{a'} 2b' + 2^{a'}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$H = \{ s \in \mathbb{N} ; 2^s / n \} \in \mathbb{N}$.

$H \neq \emptyset$ Car $0 \in H$ et H

mongène

~~$H \neq \emptyset$ Car~~ donc H admet un plus grand élément

$\max H = a$

$n = 2^a . k$

Si k était pair $k = 2p$.

$n = 2^a . 2p = 2^{a+1} p \Rightarrow 2^{a+1} / n$

Celà contredit la définition de a.

k impaire $\exists b \in \mathbb{N} ; k = 2b+1$

$n = 2^a(2b+1)$.

Mq l'injectivité

$2^a . (2b+1) = 2^{a'}(2b'+1)$

Supposons $a \neq a'$

donc on peut écrire $a > a'$

$2^a(2b+1) = 2^{a'}(2b'+1)$

$\Rightarrow \underbrace{2^{a-a'}(2b+1)}_{\text{pair}} = \underbrace{2b'+1}_{\text{impaire}}$

c'est une absurde

Par suite $a = a'$

$\cancel{2^a}(2b+1) = \cancel{2^a}(2b'+1)$

$2b+1 = 2b'+1$

$b = b'$

donc ~~est~~ f est injective

Mq f est surjective

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$

soit $n = 2^a(2b+1) \in \mathbb{N}$

$f(n) = (a,b)$

D'après 1 : si $n' = 2^{a'}(2b'+1) \in \mathbb{N}$

et vérifie $f(n') = (a,b)$

Alors : $n = n'$

en fait f est bijective

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$

$n = 2^a.(2b+1) \longmapsto (a,b)$

$f^{-1} : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$

$(p,q) \longrightarrow 2^p(2q+1)$

autre méthode pour montrer que f est injective :

$f(n) = f(n')$

$(a,b) = (a',b')$

$\begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

$2^a(2b+1) = 2^{a'}(2b'+1)$

$n = n'$

~~$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$~~

~~$n = 2^a \cdot (2b+1) \to (a,b)$~~

exercice 9 :

$E \to F \longrightarrow G$

$g \circ f$ est surjective $\to g$ est surjective

Soit $y \in G$.

On a $g \circ f$ surjective. donc

$\exists a \in E$

tq $g \circ f(a) = y$.

On a $f(a) = x \in F$

$g(f(x)) = g(x) = y$

donc g est surjective.

2°/ Mq : $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.

soit $(x, x') \in E \times E$

$f(x) = f(x')$

Comme g est un application

$g(f(x)) = g(f(x'))$

$g \circ f(x) = g \circ f(x')$

$g \circ f$ injective

donc $x = x'$

ex 058

$f : E \longrightarrow F$

f injective $\Leftrightarrow$ Car $f^{-1}(\{a\}) \leq 1$

f surjective $\Leftrightarrow$