ESEFA-Agadir. Exercices d'arithmétique élémentaire.

Ces premiers exercices peuvent être traités en attendant l'achèvement du cours (notamment concernant les systèmes d'énumération et cruptographie)

EXERCICE 1

Soit n un nombre entier naturel. Vérifier l'existence de a et b deux nombres entiers naturels tels que $(1+\sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2}$.

1. Vérifier l'existence de a et b deux nombres entiers naturels tels que $(1+\sqrt{2})^n = a + b\sqrt{2}$.
2. Ecrire $(1-\sqrt{2})^n$ en fonction de a et b.
3. En utilisant le théorème de Bezout, montrer que a et b sont premiers entre eux.

EXERCICE 2

Soit n un nombre entier naturel.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z},\ 6 | 5n^3 + n$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 7 | 4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$.

EXERCICE 3

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p-1$, p divise C_p^k.
2. Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a\ [p]$ (par récurrence sur a).

EXERCICE 4

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ les équations ou systèmes d'équations suivants :

1. $\begin{cases} x + y = 56 \\ x \vee y = 105 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x \wedge y = x - y \\ x \vee y = 72 \end{cases}$
3. ; $x \vee y - x \wedge y = 243$.

EXERCICE 5

On considère l'équation : $36x - 25y = 5$ pour x et y entiers relatifs.

1. Montrer que pour, pour toute solution (x, y), x est multiple de 5.

2. Déterminer une solution particulière de l'équation, puis la résoudre.

3. Soit d le plus grand commun diviseur de x et y lorsque (x, y) est solution de l'équation.

- **a.** Quelles sont les valeurs possibles de d ?
- **b.** Quelles sont les solutions pour lesquelles x et y sont premiers entre eux ?

EXERCICE 6

a et b étant deux entiers naturels non nuls, soit d leur pgcd et m leur ppcm.
Trouver tous les couples (a, b) vérifiant le système :

$$\begin{cases} m = d^2 \\ m + d = 156 \\ a \geqslant b \end{cases}$$

EXERCICE 7

1. Montrer que si deux nombres entiers x et y sont premiers entre eux, il en est de même pour les entiers $2x + y$ et $5x + 2y$.

2. Déterminer les entiers naturels non nuls a et b vérifiant :

$$\begin{cases} (2a+b)(5a+2b) = 1620 \\ ab = 3m \end{cases}$$

où m désigne le ppcm de a et b.

EXERCICE 8

Démontrer que sauf une exception, tout nombre premier p est décomposable d'une seule facon en une différence de deux carrés d'entiers. Exemple : trouver a et b tels que $983 = a^2 - b^2$.

EXERCICE 9

$a,\ b,\ c,\ d$ sont quatre entiers naturels non nuls qui vérifient $ab - cd = 1$.

1. Montrer que cette relation est équivalente à $a(b+d) - d(c+a) = 1$.

2. En déduire que $\dfrac{a}{a+c},\quad \dfrac{d}{b+d},\quad \dfrac{a+c}{b+d}$ sont trois fractions irréductibles.

EXERCICE 10

On pose $u = 2 + \sqrt{3}$ et $v = 2 - \sqrt{3}$.

1. Démontrer par récurrence que, n désignant un entier strictement positif, on peut écrire :

$$u^n = a_n + b_n\sqrt{3} \text{ et } v^n = a_n - b_n\sqrt{3},$$

où a_n et b_n sont des entiers naturels.
Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

2. Établir les égalités : $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ et $a_nb_{n+1} - a_{n+1}b_n = 1$.

En déduire que les fractions $\dfrac{a_n}{b_n},\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n},\ \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ sont irréductibles.