$j^3 = 1$ $\quad j^2 = \bar{j}$
$1 + j + j^2 = 0$

oussama

DÉPARTEMENT MATHEMATIQUES

Année Universitaire: 2019/2020

جامعة ابن زهر
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⵉⴱⵏ ⵣⵓⵀⵔ
UNIVERSITÉ IBN ZOHR

Travaux Dirigés. Polynômes de $\mathbb{K}[X]$

Pr. Nouh IZEM

Algèbre 2 Série n^o1

Exercice 1

$\boxed{1}$ Effectuer la division euclidienne (suivant les puissances décroissantes) de

(a) $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$; (b) $X^5 + 2X^3 + 3X + 1$ par $X^3 + 1$;

(c) $X^4 + (1+i)X^2 + 1$ par $X^2 - 1$; (d) $2X^4 + 2iX^3 + 5X^2 + (8i-5)X + 1$ par $X^2 - iX + 2$;

$\boxed{2}$ Effectuer la division suivant les puissances croissantes de:

(a) $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$ par $B = X^2 + X + 1$ à l'ordre 2;

(b) $A = X^6 + 2X^4 + X^3 + 1$ par $B = X^3 + X^2 + 1$ à l'ordre 4;

Exercice 2

$\boxed{1}$ Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n + X + b$ par $(X-a)^2$, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$\boxed{2}$ Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos a + X \sin a)^n$ par $1 + X^2$, pour $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

$\boxed{3}$ Montrer que le polynôme $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ est divisible par $(X-1)^2$ et calculer le quotient. ?

Exercice 3

$\boxed{1}$ Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

a) $X^4 + 4$; b) $X^6 + 27$;

c) $X^4 + X^2 + 1$; d) $X^8 + X^4 + 1$;

$\boxed{2}$ Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^n - 1$ pour $n = 5$ et $n = 6$.

Exercice 4

Soit $P = X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

$\boxed{1}$ Montrer que 1 et -1 sont des racines de P.

$\boxed{2}$ Déterminer P_1 tel que $P = (X-1)^{\alpha}(X+1)^{\beta}P_1$ avec $P_1(1) \neq 0$ et $P_1(-1) \neq 0$.

$\boxed{3}$ Montrer que $P_1(z) = 0$ si et seulement si $z + \frac{1}{z}$ est solution d'un polynôme de second degré.

$\boxed{4}$ En déduire la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 5

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par:

$$P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$$

$\boxed{1}$ Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine multiple de P.

$\boxed{2}$ En remarquant que P est un polynôme pair, donner toutes les racines de ainsi que leur multiplicité.

$\boxed{3}$ Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

DÉPARTEMENT MATHEMATIQUES

Année Universitaire: 2019/2020

المدرسة العليا للتربية والتكوين - أكادير
ECOLE SUPÉRIEURE DE L'ÉDUCATION ET DE LA FORMATION - AGADIR

Travaux Dirigés.

Pr. Nouh IZEM

Fractions Rationnelles dans $\mathbb{K}(X)$

Algèbre 2 Série $n^o 2$

Exercice 1

$\boxed{1}$ Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

$a)$ $\dfrac{X}{(X-1)^2(X+2)}$; $b)$ $\dfrac{X^8}{(X^2+X+1)^3}$; $c)$ $\dfrac{X^4+X+1}{X(X^2+1)^3}$;

$\boxed{2}$ Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle suivante:

$$\frac{X^3-4X^2+2X+1}{(X^2+1)(X^2+4)},$$

puis en déduire sa décomposition dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 2

Soit F la fraction rationnelle définie par :

$$F(X)=\frac{X^2+1}{X^4+X^2+1}.$$

$\boxed{1}$ Donner la forme de la décomposition en éléments simples de F dans $\mathbb{R}(X)$.

$\boxed{2}$ En utilisant la parité de F, déterminer la relation entre les coefficients de sa décomposition.

$\boxed{3}$ Calculer les coefficients de cette décomposition.

Exercice 3

Soit G la fraction rationnelle définie par :

$$G(X)=\frac{1}{(X^2+1)^2}.$$

$\boxed{1}$ Donner la forme de la décomposition en éléments simples de G dans $\mathbb{C}(X)$.

$\boxed{2}$ En utilisant le fait que G est une fraction à coefficients réelles, déterminer la relation entre les coefficients de sa décomposition.

$\boxed{3}$ Calculer les coefficients de cette décomposition.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Année Universitaire : 2019/2020

Travaux Dirigés. Espaces Vectoriels

Algèbre 2 Série n^o3

Pr. Nouh IZEM

Exercice 1

Dire si les parties suivantes sont des sous espaces vectoriels

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + y + 3z = 0\}\ ; \qquad F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x \cdot y = 0\}$$

$$F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ x^2 + xy + y^2 \geq 0\}\ ; \qquad F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$$

$$F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + 2y - z = 3\}\ ; \qquad F_6 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \ f(1) = 0\}$$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, former un système d'équations cartésiennes de F engendré par les u_i :

(a) $u_1 = (1, 2, 3)$ (b) $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$ (c) $u_1 = (1, -1, 1, -1)$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)$.

Exercice 3

Trouver un système générateur des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + 2y - z = 0\}; \qquad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}.$$

Exercice 4

$\boxed{1}$ Les familles suivantes sont-elles libres ? liées ?

(a) (u, v) avec $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-1, 4, 6)$;

(b) (u, v) avec $u = (1 + i, 1)$ et $v = (1, 1 + i)$;

(c) (u, v, w) avec $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (-1, 2, -3)$;

$\boxed{2}$ Montrer que les vecteurs $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver dans cette base les coordonnées du vecteur $u = (1, 1, 1)$.

$\boxed{3}$ Soient $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$ et $d = (5, 0, -7)$. Soient $E = vect(a, b)$ et $F = vect(c, d)$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $E = F$.

$\boxed{4}$ Soient $w_1 = (1, -1, i)$, $w_2 = (-1, i, 1)$ et $w_3 = (i, 1, -1)$ des vecteurs de $\mathbb{C}^3$.

(a) Montrer que $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

(b) Exprimer le vecteur $W = (1 + i, 1 - i, i)$ dans cette base.

Exercice 5

Soit E le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par : $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + 2y - z = 0\}$ et soient les vecteurs

$$U = (1, 2, 0), \quad V = (0, 3, 1), \quad W = (1, -1, -1).$$

$\boxed{1}$ Etablir que $U_1 = (-2, 1, 0)$ et $U_2 = (1, 0, 1)$ forment une base de E et déduire $dimE$.

$\boxed{2}$ On pose $\mathcal{F} = \{U, V, W\}$.

a)- la famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? liée ? Justifier.

b)- Former l'équation cartésienne de $G = vect\,(\mathcal{F})$.

$\boxed{3}$ Déterminer le sous espace vectoriel $E \cap G$ et en donner une base.