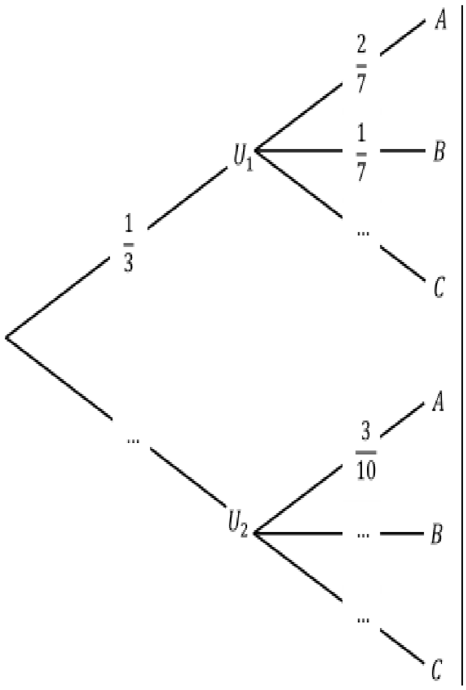
الاحتمالات

❖ بكالوريا **2019** – شعبة الرياضيات – الموضوع الثاني – التمرين الثاني ❖

صندوقان غير شفافين U_1 و U_2، يحتوي الصندوق U_1 على 4 كريات حمراء و 3 كريات سوداء ويحتوي الصندوق U_2 على 3 كريات حمراء وكريتين سوداوين (الكريات كلها متشابهة لا نفرق بينها باللمس).

نرمي نردا غير مزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6.

إذا ظهر الرقمان 2 أو 4 نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_1 وفي باقي الحالات نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_2.



نعتبر الأحداث A، B و C المعرفة بـ :

A : «سحب كريتين حمراوين»

B : «سحب كريتين سوداوين»

C : «سحب كريتين من لونين مختلفين»

1) أنقل وأكمل شجرة الاحتمالات.

2) أحسب احتمالات الأحداث A، B و C.

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

3) أ- عين قيم المتغير العشوائي X.

ب- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X.

4) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

الاحتمالات

الحل المفصل:

صندوقان غير شفافين U_1 و U_2، يحتوي الصندوق U_1 على 4 كريات حمراء و 3 كريات سوداء ويحتوي الصندوق U_2 على 3 كريات حمراء وكريتين سوداوين (الكريات كلها متشابهة لا نفرق بينها باللمس).

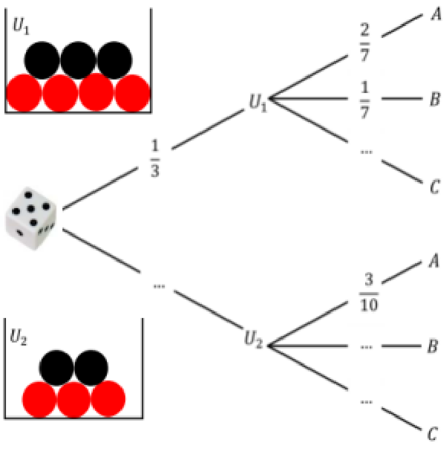
نرمي نردا غير مزيف ذا ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6.

إذا ظهر الرقمان 2 أو 4 نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_1 وفي باقي الحالات نسحب عشوائيا كريتين في آن واحد من الصندوق U_2. نعتبر الأحداث A، B و C المعرفة بـ :

A : «سحب كريتين حمراوين»

B : «سحب كريتين سوداوين»

C : «سحب كريتين من لونين مختلفين»



1) نقل وإكمال شجرة الاحتمالات بحساب $P(U_2)$، $P_{U_1}(C)$، $P_{U_2}(B)$ و $P_{U_2}(C)$:

- حساب $P(U_2)$:

$P(U_2)$: احتمال اختيار الصندوق U_2 وهو احتمال ظهور أحد الأرقام التالية على النرد: 1 أو 3 أو 5 أو 6

يمكن استعمال طريقتين مختلفتين:

طريقة 1: نعلم أن: $P(U_1)+P(U_2)=1$

أي: $P(U_2)=1-P(U_1)$

بالتعويض: $P(U_2)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$$P(U_2)=\frac{2}{3}$$

طريقة 2: النرد غير مزيف (من المعطيات)

حسب مبدأ تساوي الاحتمال: $P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=P(6)=\frac{1}{6}$

وعليه: $P(U_2)=P(1)+P(3)+P(5)+P(6)$

بالتعويض: $P(U_2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

$$P(U_2)=\frac{2}{3}$$

- حساب $P_{U_1}(C)$:

$P_{U_1}(C)$: احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين علما أنهما من الصندوق U_1

يمكن استعمال طريقتين مختلفتين:

طريقة 1: نعلم أن: $P_{U_1}(A)+P_{U_1}(B)+P_{U_1}(C)=1$

أي: $P_{U_1}(C)=1-\left(P_{U_1}(A)+P_{U_1}(B)\right)$

بالتعويض: $P_{U_1}(C)=1-\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{7}\right)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$

$$P_{U_1}(C)=\frac{4}{7}$$

- حساب $P_{U_2}(B)$:

$P_{U_2}(B)$: احتمال سحب كريتين سوداوين علما أنهما من الصندوق U_2

عدد الحالات الممكنة لسحب كريتين عشوائيا وفي آن واحد من الصندوق U_2 هو C_5^2

عدد الحالات الملائمة لسحب كريتين سوداوين من الصندوق U_2 هو C_2^2

ومنه: $P_{U_2}(B) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

$$P_{U_2}(B) = \frac{1}{10}$$

- حساب $P_{U_2}(C)$:

$P_{U_2}(C)$: احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين علما أنهما من الصندوق U_2

يمكن استعمال طريقتين مختلفتين:

طريقة 1: نعلم أن: $P_{U_2}(A) + P_{U_2}(B) + P_{U_2}(C) = 1$

أي: $P_{U_2}(C) = 1 - \left(P_{U_2}(A) + P_{U_2}(B)\right)$

بالتعويض: $P_{U_2}(C) = 1 - \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{10}\right) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$$P_{U_2}(C) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

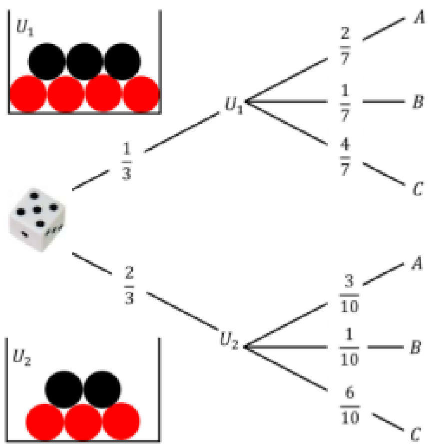
طريقة 2: عدد الحالات الممكنة لسحب كريتين عشوائيا وفي آن واحد من الصندوق U_2 هو C_5^2

عدد الحالات الملائمة لسحب كريتين من لونين مختلفين من الصندوق U_2 هو $C_3^1 \times C_2^1$

ومنه: $P_{U_2}(C) = \frac{C_3^1 \times C_2^1}{C_5^2} = \frac{3 \times 2}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{3}{5}$

$$P_{U_2}(C) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

فتكون شجرة الاحتمالات كالتالي:



2) حساب احتمالات الأحداث A، B و C:

- حساب $P(A)$:

$P(A)$: احتمال سحب كريتين حمراوين (سحب كريتين حمراوين من الصندوق U_1 أو من الصندوق U_2)

لدينا من شجرة الاحتمالات: $P(A) = P(U_1 \cap A) + P(U_2 \cap A)$

ونكتب أيضا: $P(A) = P(U_1) \times P_{U_1}(A) + P(U_2) \times P_{U_2}(A)$

بالتعويض: $P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{31}{105}$

$$P(A) = \frac{31}{105}$$

- حساب $P(B)$:

$P(B)$: احتمال سحب كريتين سوداوين (سحب كريتين سوداوين من الصندوق U_1 أو من الصندوق U_2)

لدينا من شجرة الاحتمالات: $P(B) = P(U_1 \cap B) + P(U_2 \cap B)$

ونكتب أيضا: $P(B) = P(U_1) \times P_{U_1}(B) + P(U_2) \times P_{U_2}(B)$

بالتعويض: $P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{12}{105} = \frac{4}{35}$

$$P(B) = \frac{12}{105} = \frac{4}{35}$$

- حساب $P(C)$:

$P(C)$: احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين (سحب كريتين من لونين مختلفين من الصندوق U_1 أو من الصندوق U_2)

لدينا من شجرة الاحتمالات: $P(C) = P(U_1 \cap C) + P(U_2 \cap C)$

ونكتب أيضا: $P(C) = P(U_1) \times P_{U_1}(C) + P(U_2) \times P_{U_2}(C)$

بالتعويض: $P(C) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{6}{10} = \frac{62}{105}$

$$P(C) = \frac{62}{105}$$

X : المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة

3) أ- تعيين قيم المتغير العشوائي X:

عدد الكريات الحمراء المسحوبة هو 0 أو 1 أو 2

فنكتب: $X = \{0 ; 1 ; 2\}$

حيث:

$X = 0$: لا ظهور للكريات الحمراء بعد السحب (سحب كريتين سوداوين)

$X = 1$: ظهور كرية واحدة فقط حمراء بعد السحب (سحب كريتين من لونين مختلفين)

$X = 2$: ظهور كريتين حمراوين بعد السحب (سحب كريتين حمراوين)

3) ب- تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

- حساب $P(X = 0)$:

$P(X = 0)$: احتمال سحب كريتين سوداوين ($P(B)$)

أي: $P(X = 0) = P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{7} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{12}{105}$

$$P(X = 0) = \frac{12}{105}$$

- حساب $P(X=1)$:

$P(X=1)$: احتمال سحب كريتين من لونين مختلفين $(P(C))$

أي: $P(X=1)=P(C)=\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{6}{10}=\frac{62}{105}$

$$P(X=1)=\frac{62}{105}$$

- حساب $P(X=2)$:

$P(X=2)$: احتمال سحب كريتين حمراوين $(P(A))$

أي: $P(X=2)=P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{7}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{31}{105}$

$$P(X=2)=\frac{31}{105}$$

ملاحظة: يمكن التحقق من صحة النتائج

حيث: $P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1$

نلخص النتائج السابقة للمتغير العشوائي X في الجدول التالي:

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{12}{105}$	$\frac{62}{105}$	$\frac{31}{105}$

4) حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

من القانون: $E(X)=\sum_{i=0}^{i=3} x_i\times P(X=x_i)$

بالتعويض: $E(X)=0\times\frac{12}{105}+1\times\frac{62}{105}+2\times\frac{31}{105}$

نجد: $E(X)=0+\frac{62}{105}+\frac{62}{105}=\frac{124}{105}$

$$E(X)=\frac{124}{105}$$