Chapitre 3

Espaces Vectoriels

Dans tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Structure d'espaces vectoriels

Définition 1.

On appelle espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (on note $\mathbb{K}-e.v$) un ensemble non vide muni de deux lois $+$ et $\cdot$.

- *$+$ est la loi de composition interne définie par :*

$$+ : \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow E \\ (x, y) \mapsto x + y \end{array}$$

- *$\cdot$ est la loi de composition externe définie par :*

$$\cdot : \begin{array}{l} \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \end{array}$$

Telles que :

1. *$(E, +)$ est un groupe commutatif (abélien). c-à-d :*
   - (a). $\forall x, y, z \in E, \quad (x + y) + z = x + (y + z).$ *Associativité*
   - (b). $\exists 0 \in E$ *tel que* $\forall x \in E, \quad x + 0 = x = 0 + x.$ *0 élément neutre de E*
   - (c). $\forall x \in E. \ \exists x' \in E$ *tel que* $x + x' = 0 = x' + x$ *x' élément symétrique de x*
   - (d). $\forall x, y \in E, \quad x + y = y + x.$ *Commutativité*
2.
   - (a). $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \quad \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$
   - (b). $\forall \alpha, \forall \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$
   - (c). $\forall \alpha, \forall \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x).$
   - (d). $\forall x \in E, \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x.$

Les éléments de E sont appelés vecteurs. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires. L'élément neutre de E est noté 0_E. Le symétrique de x' est noté $-x$.

Exemples 1.

☞ $\mathbb{R}^2$ *muni des lois suivantes :*

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

est un espace vectoriel.

☞ $\mathbb{R}^n$ *muni des lois suivantes :*

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$
$$\lambda(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

est un espace vectoriel.

Proposition 1.

Soit E un $\mathbb{K}-e.v$, on a les propriétés suivantes :

1. $0 \cdot x = 0_E, \quad \forall x \in E.$
2. $-x = (-1) \cdot x, \quad \forall x \in E.$
3. $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x), \quad \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$
4. $\alpha \cdot x = 0_E \Longrightarrow \alpha = 0$ *ou* $x = 0_E$

3.2 Sous-espace vectoriel

Définition 2.

Soit E un $\mathbb{K}-e.v$ et soit F un sous-ensemble de E, on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est un espace vectoriel.

Proposition 2.

Soit E un $\mathbb{K}-e.v$ et soit F un sous-ensemble de E, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

(a). $F \neq \emptyset$

(b). $\forall x, y \in F, \qquad x + y \in F$

(c). $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in F. \qquad \lambda x \in F$

Remarque 1.

1. *Les deux conditions (b) et (c) peuvent être remplacés par :*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in F, \quad \lambda x + \mu y \in F$$

ou

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in F, \quad \lambda x + y \in F$$

2. *Tout $\mathbb{K}-$s.e.v F est lui même un $\mathbb{K}-$e.v, alors $0_E \in F$. En effet, comme $F \neq$, il existe $u \in F$. D'où :*
$$0 \cdot u \in F$$
Donc $0_E \in F$

Exemples 2.

☞ *Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel. $\{0_E\}$ et E sont des s.e.v de E.*

☞ *$F = \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0,x) \colon x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x,0) \colon x \in \mathbb{R}\}$ sont deux s.e.v de $\mathbb{R}^2$. En effet, pour F on a :*

a. $F \neq \emptyset$ *car* $(0,1) \in F$

b. $\forall (0,x), (0,y) \in F$, $(0,x) + (0,y) = (0, x+y) \in F$

c. $\forall \lambda$, $\forall (0,x) \in F$, $\lambda(0,x) = (0, \lambda x) \in F$

Proposition 3.

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de s.e.v de E alors $F = \cap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Preuve :

- *$F \neq \emptyset$ car $0_E \in F_i$, $\forall i \in I$.*
- *Soient $(x,y) \in F^2$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, on a :*
$$x,\ y \in F_i, \quad \forall i \in I.$$
D'où $\alpha x + \beta y \in F_i$, $\forall i \in I$. (car F_i est un s.e.v de E) Donc $\alpha x + \beta y \in F$. Et parsuite F est un s.e.v de E.

Remarque 2.

En particulier, pour toute partie A de E, l'intersection de tous les s.e.v de E contenant A est un s.e.v de E contenant A. C'est le plus petit s.e.v de E contenant A. On l'appelle le s.e.v de E engendré par A. Il se note $vect(A)$.

Proposition 4.

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel, F_1, F_2 deux s.e.v de E. La somme de F_1, F_2 noté par
$$\begin{aligned} F_1 + F_2 &= \{x \in E / \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 : x = x_1 + x_2\} \\ &= \{x_1 + x_2 / (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2\} \end{aligned}$$
est un s.e.v de E.

Preuve :

- *$F_1 + F_2 \neq \emptyset$ car $0 = 0 + 0 \in F_1 + F_2$.*
- *Soient $(x,y) \in (F_1 + F_2)^2$, il existe $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ et $(y_1, y_2) \in F_1 \times F_2$ tels que*
$$x = x_1 + x_2 \quad \text{et} \quad y = y_1 + y_2$$
On a alors
$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ &= \underbrace{(x_1 + y_1)}_{\in F_1} + \underbrace{(x_2 + y_2)}_{\in F_2} \in F_1 + F_2 \end{aligned}$$

- *Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in F_1 + F_2$, alors il existe $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$ tel que : $x = x_1 + x_2$. On a :*
$$\begin{aligned} \lambda x &= \lambda(x_1 + x_2) \\ &= \underbrace{(\lambda x_1)}_{\in F_1} + \underbrace{(\lambda x_2)}_{\in F_2} \in F_1 + F_2. \end{aligned}$$

Et parsuite $F_1 + F_2$ est un s.e.v de E.

Remarque 3.

1. *Si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ alors on dit que la somme est directe et on note $F_1 \bigoplus F_2$*
2. *Si $E = F_1 \bigoplus F_2$ alors on dit que F_1 et F_2 sont supplémentaire dans E.*

Proposition 5.

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel. F_1, F_2 et F_3 trois s.e.v de E. Les propriétés suivantes sont vérifiées :

(a). $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$	(b). $F_1 \cap F_2 = F_2 \cap F_1$
(c). $F_1 \subset F_1 + F_2$	(d). $F_1 \cap F_2 \subset F_1$
(e). $\begin{cases} F_1 \subset F_3 \\ F_2 \subset F_3 \end{cases} \Longrightarrow F_1 + F_2 \subset F_3$	(f). $\begin{cases} F_3 \subset F_1 \\ F_3 \subset F_2 \end{cases} \Longrightarrow F_3 \subset F_1 \cap F_2$
(g). $F_1 \subset F_2 \Longrightarrow F_1 + F_3 \subset F_2 + F_3$	(h). $F_1 \subset F_2 \Longrightarrow F_1 \cap F_3 \subset F_2 \cap F_3$
(i). $F_1 + F_1 = F_1$	(j). $F_1 \cap F_1 = F_1$
(k). $F_1 + \{0_E\} = F_1$	(l). $F_1 \cap \{0_E\} = \{0_E\}$
(m). $F_1 + E = E$	(n). $F_1 \cap E = F_1$
(o). $(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$	(p). $(F_1 \cap F_2) \cap F_3 = F_1 \cap (F_2 \cap F_3)$

Proposition 6. (exercice)

1. *$A \subset B \Longrightarrow vect(A) \subset vect(B)$.*
2. *A s.e.v de $E \Longleftrightarrow vect(A) = A$.*
3. *$vect(vect(A)) = vect(A)$.*
4. *$vect(A \cup B) = vect(A) + vect(B)$.*

3.3 Combinaisons Linéaires

Définition 3.

Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel et soit $\{u_1, \cdots, u_n\}$ un ensemble de vecteurs de E. Le vecteur $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ où $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ n scalaires est appelé combinaison linéaire de $u_1, u_2, \cdots, u_n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Exemples 3.

- *Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :*
$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$
Tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

- *De même $(x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est combinaison linéaire de $(1, 0, \cdots, 0)$, $(0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, et $(0, 0, \cdots, 0, 1)$.*

Proposition 7.

Soit E un $\mathbb{K}-$ e.v et soit $\{x_1, \cdots, x_n\}$ un système de vecteurs de E. L'ensemble F des combinaisons linéaires du système $\{x_1, \cdots, x_n\}$ est un sous espace vectoriel de E. F est appelé s.e.v engendré par $\{x_1, \cdots, x_n\}$. On dit aussi que $\{x_1, \cdots, x_n\}$ est un système générateur de F ou que $\{x_1, \cdots, x_n\}$ engendre F. F est défini par :

$$\begin{aligned} F &= \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \quad \text{avec} \quad (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n\} \\ &= \{u \in E \ / \ \exists(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad \text{tel que} \quad u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n\} \end{aligned}$$

Preuve :

- *$F \neq \emptyset$ car $x_1 \in F$; $x_1 = 1x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n$*
- *$F \subset E$. En effet, on a :*
$$u \in F \Rightarrow \exists(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \quad \text{tel que} \quad u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$
$$x_1, \cdots, x_n \in E \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \in E \qquad \text{car } E \text{ est un } \mathbb{K}- \text{ e.v}$$
- *Soient $u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \in F$ et $v = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n \in F$ pour tout $\alpha_i \in \mathbb{K}$ et $\beta_i \in \mathbb{K}$, on a :*
$$\begin{aligned} u + v &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)x_1 + (\alpha_2 + \beta_2)x_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)x_n \end{aligned}$$
d'où $u + v \in F$
- *Soient $u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :*
$$\lambda u = \lambda(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) = (\lambda\alpha_1)x_1 + (\lambda\alpha_2)x_2 + \cdots + (\lambda\alpha_n)x_n \in F$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples 4.

- *$\mathbb{R}^2$ est engendré par $\{(1, 0), (0, 1)\}$.*
- *$\mathbb{R}^n$ est engendré par $\{(1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, 0, \cdots, 0, 1)\}$.*

Remarque 4.

1. *Un système générateur n'est pas unique.*
2. *Le système $\{(2, 1), (3, 1)\}$ est aussi un système générateur de $\mathbb{R}^2$.*

3.4 Familles Libres-Familles Liées-Bases

Définition 4.

Soient E un $\mathbb{K}-$ e.v et soit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ n vecteurs de E.

1. *On dit que la famille (ou le système) $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ est libre (ou linéairement indépendant) si et seulement si :*
$$\forall(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_E \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$
2. *Un système qui n'est pas libre est appelé système lié (ou linéairement dépendant). $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ est lié si et seulement si :*
$$\exists(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, 0, \cdots, 0)\}, \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_E.$$

Exemples 5.

- *Dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs $X_1 = (1, 0, 1, 2)$, $X_2 = (0, 1, 1, 2)$, $X_3 = (1, 1, 1, 3)$ sont linéairement indépendants. En effet, soient $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que :*
$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0_{\mathbb{R}^4}$$
On a
$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 0 + \alpha_3 & = 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 & = 0 \end{cases}$$
On obtient : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$
- *$\mathbb{R}^2$, les vecteurs $X_1 = (1, 1)$, $X_2 = (2, 1)$, $X_3 = (-1, 0)$ sont linéairement dépendants.*
- *Toute famille contenant le vecteur nul est liée.*
- *Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'entre eux est un multiple de l'autre (colinéaires).*

Remarque 5.

1. *Toute famille contenant le vecteur nul est liée.*
2. *Deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si l'un d'entre eux est un multiple de l'autre (colinéaires). Plus généralement, nous avons le résultat suivant :*

Proposition 8.

Un système $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ d'un $\mathbb{K}-$ e.v E est liée si et seulement si un au moins d'entre eux est combinaison des autres.

Preuve :

- *($\Rightarrow$) $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ est lié $\Longrightarrow \exists(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, 0, \cdots, 0)\}$ non nul tel que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_E$ supposons que c'est α_i qui est non nul. Alors*

$$x_i = -\frac{1}{\alpha_i}(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{i-1}x_{i-1} + \alpha_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \alpha_n x_n)$$

Donc x_i est combinaison des autres.

- *($\Leftarrow$) Supposons que $x_i = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{i-1}x_{i-1} + \beta_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \beta_n x_n)$ avec $\beta_i \in \mathbb{K}$ donc $\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{i-1}x_{i-1} - x_i + \beta_{i+1}x_{i+1} + \cdots + \beta_n x_n) = 0$ Le coefficient de x_i est $-1 \neq 0$ donc le système $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ est lié.*

Définition 5.

On appelle base d'un $\mathbb{R}-$ e.v E toute famille $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ qui est à la fois libre et génératrice.

Exemples 6.

(a)– Les vecteurs de $e_1 = \begin{pmatrix} 1, 0, \cdots, 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0, 1, \cdots, 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0, \cdots, 0, 1 \end{pmatrix}$ constituent une base de $\mathbb{R}^n$. On l'appelle base canonique de $\mathbb{R}^n$.

(b)– La famille $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, X_3\}$ où $X_1 = (1, 1, 0)$, $X_2 = (1, 0, 1)$ et $X_3 = (0, 1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = X \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ \alpha_1 + \alpha_3 = y \\ \alpha_2 + \alpha_3 = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2}(x + y - z) \\ \alpha_2 = \frac{1}{2}(x - y + z) \\ \alpha_3 = \frac{1}{2}(-x + y + z) \end{cases}$$

On en déduit que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice. Elle est également libre car on a :

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Théorème & Définition 1.

Soit $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ une base d'un $\mathbb{K}-$ e.v E. Alors pour tout vecteur X de E, il existe un $n-$uplet unique $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$X = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n.$$

Les scalaires $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont appelés les composantes (ou les coordonnées) du vecteur X dans la base $\mathcal{B}$.

Démonstration :

Comme $\mathcal{B}$ est génératrice, tout vecteur X de E est une combinaison linéaire des u_i, donc il existe $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$X = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n.$$

De plus, s'il existe $y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbb{K}$ tels que $X = y_1 u_1 + y_2 u_2 + \cdots + y_n u_n$. Alors, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)u_i = (x_1 - y_1)u_1 + (x_2 - y_2)u_2 + \cdots + (x_n - y_n)u_n = 0_E.$$

On en déduit que $x_i = y_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$ compte tenu de la liberté de $\mathcal{B}$.

Théorème & Définition 2.

Soient $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, $\mathcal{L} = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ et $\mathcal{G} = \{w_1, w_2, \cdots, w_p\}$ ***des familles de*** *vecteurs d'un $\mathbb{K}-$ e.v E. Si $\mathcal{B}$ est une base de E, $\mathcal{L}$ est libre et $\mathcal{G}$ est génératrice.* ***Alors, on*** *a :*

$$m \leq n \leq p$$

En particulier, toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce même nombre s'appelle la dimension de E. On la note $\dim E$. Par convention, on pose $\dim E = 0$ si $E = \{0_E\}$.

Théorème 1.

Soient E un $\mathbb{K}-$ e.v de dimension n. Alors on a :

1. *Toute famille libre de n vecteurs de E est une base de E.*
2. *Toute famille génératrice de n vecteurs de E est une base de E.*
3. *Si F est un s.e.v de E. alors on a :*
   $F \subset E$ et si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.