$= (a-b)($

Université Ibn Zohr - Agadir
Campus Universitaire Aït Melloul
Centre des Sciences et Techniques

Examen d'algèbre I

(Durée : 2 heures)

Licence d'Éducation - Info, Semestre 1
Session normale (Janvier 2019)
Responsable : Z. Saassai

1 point sera attribué à la **clarté** de la **rédaction**, à la **lisibilité** et à la **propreté** de votre copie.

Questions de cours.

1. Énoncer le lemme de Gauss.
2. Rappeler la définition d'un nombre premier.
3. Montrer que si p divise ab, avec p premier, alors p divise a ou b.

Exercice 1. Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Montrer que $A \cap B = \emptyset \iff A \subset \complement_E B$.
2. En déduire que $A \subset B \iff A \cap (\complement_E B) = \emptyset$.

Exercice 2. Soit $f : E \to F$ une application.

1. Exprimer verbalement la signification des assertions suivantes.
   (a) $\forall y \in F,\ \exists x \in E :\ \ y = f(x)$. surjective
   (b) $\exists c \in F :\ \forall x \in E,\ \ f(x) = c$. bijective
   (c) $\forall x \in E, \forall x' \in E,\ \ x = x'$ ou $f(x) \neq f(x')$.
2. Donner la négation de chacune.

Exercice 3. On considère l'application

$$f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x + \frac{1}{x}.$$

1. Montrer que
$$\forall (x, x') \in [1, +\infty[^2, \quad xx' = 1 \Rightarrow x = x' = 1.$$
2. En déduire que f est injective.
3. f est-elle surjective ? Justifier votre réponse.
4. Déterminer un domaine $J \subset \mathbb{R}$ tel que l'application $\tilde{f} : [1, +\infty[\to J,\ \ x \mapsto x + \frac{1}{x}$ soit bijective. ~~(On peut étudier les variations de f.)~~
5. Donner la bijection réciproque de $\tilde{f}$.

Exercice 4. Soit E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application injective.

On définit sur E une relation binaire $\leq$ par

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \leq y \iff f(x) \leq f(y).$$

1. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
2. Montrer que la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $[1, +\infty[$ par
$$\forall (x, y) \in [1, +\infty[^2, \quad x \mathcal{R} y \iff xe^y \leq ye^x$$
est une relation d'ordre. (On peut étudier les variations d'une application convenable.)

Exercice 5. Montrer que $2^{4n} - 1$ est divisible par 15, quel que soit l'entier naturel n.

Exercice 6. On pose $d = \operatorname{pgcd}(492, 287)$.

1. Calculer d.
2. Trouver deux entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $d = 492u + 287v$.

Exercice 7. Montrer que $3n^2 - 13n - 9$ et $n - 5$ sont premiers entre eux quel que soit $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8. Donner l'écriture en base 7 de 800667.

****

Bon courage !

$n^2 - n\sqrt{\ } - 1 = 0$

$\Delta =$