ENSEMBLES ET APPLICATIONS

A. Sani-ESEFA-Agadir

18 octobre 2019

1 Ensembles

1.1 Vocabulaire et notations

On part de la notion naïve : un *ensemble* est une collection E d'objets tous distincts. Ceux-ci sont appelés les *éléments de* E. x élément de E se note $x \in E$. Deux ensembles sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes éléments.

Exemple 1 *On s'autorise à manipuler les ensembles de nombres usuels* $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ *sans les avoir définis précisément.*

On décrit un ensemble

— Ou bien en donnant la liste de tous ses éléments. Par exemple, l'ensemble des étudiants du module « Algèbre 1 »en S1 à ESAFA provenant de Tiznit est

$$E = \{\text{Said, Naima, Hind, Ali}\}.$$

On dit qu'on a défini l'ensemble parextension.

— Ou bien en caractérisant ses éléments parmi ceux d'un ensemble déjà connu. Par exemple,

$$\text{E}=\{\text{x}\in \mathbf{R} \mid \cos x < \sin x\}.$$

On dit qu'on a défini l'ensemble par compréhension.

Exemple 2 *L'ensemble E des solutions de l'équation du second degré $x^2 - 3x + 2 = 0$ est*

$$E = \{x \in \mathbf{C} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}.$$

Exemple 3 *Il y a un ensemble qui n'a aucun élément, c'est l'*ensemble vide*, noté* $\emptyset$.

On appelle singleton *un ensemble de la forme* $E = \{x\}$.

On appelle paire *un ensemble de la forme* $E = \{x, y\}$ *avec* $x \neq y$. *Remarquer que* $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Exercice 4 *Décrire l'ensemble E des entiers naturels pairs, l'ensemble F des entiers naturels impairs et strictement inférieurs à 8.*

Solution de l'exercice 4. *Description d'ensembles.*

Cela revient à rédiger mathématiquement une assertion.

$$E = \{n \in \mathbf{N} \mid (\exists m \in \mathbf{N})(n = 2m)\}.$$

$$E = \{n \in \mathbf{N} \mid ((\exists m \in \mathbf{N})(n = 2m + 1) \text{ et } (n < 8)\} = \{1, 3, 5, 7\}.$$

1.2 Sous-ensembles

On dit que F est un *sous-ensemble* de E, ou bien F est contenu dans E, et on note $F \subset E$, si tout élément de F appartient aussi à E. On dit aussi que F est une *partie* de E.

Exemple 5 *Tout rectangle est en particulier un parallélogramme. Autrement dit, l'ensemble R des rectangles du plan est contenu dans l'ensemble P des parallélogrammes, $R \subset P$.*

Remarque 6 *Soient E et F deux ensembles. Pour montrer que $E = F$, il suffit de montrer que $F \subset E$ et $E \subset F$.*

Exercice 7 *Déterminer l'ensemble E des réels qui sont strictement inférieurs à tous les rationnels strictement positifs.*

Solution de l'exercice 7. *Inclusions réciproques.*

Montrons que $E = \mathbf{R}_- =]-\infty, 0]$. En effet, si $x \in R_-$, alors $\forall y \in \mathbf{Q}$, $((y > 0) \Rightarrow (y > x))$, donc $x \in E$. Cela montre que $\mathbf{R}_- \subset E$.

Réciproquement, montrons par l'absurde que $((x \in E) \Rightarrow (x \in \mathbf{R}_-))$. Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $x \notin \mathbf{R}_-$. Alors $x > 0$. Il existe un entier n tel que $n > 1/x$. Alors $x > 1/n$. Or $1/n \in \mathbf{Q}$ et $1/n > 0$, ce qui contredit l'hypothèse $x \in E$. On conclut que $E \subset \mathbf{R}_-$.

On a donc montré que $E = \mathbf{R}_-$.

Remarque 8 *L'inclusion entre ensembles correspond à l'implication. Si $F = \{x \in E \,|\, \mathcal{P}(x)$ est vraie $\}$ et $G = \{x \in E \,|\, \mathcal{Q}(x)$ est vraie $\}$, alors*

$$(F \subset G) \Leftrightarrow ((\forall x \in E)(P(x) \Rightarrow Q(x))).$$

Exemple 9 *On sait que $(\forall x \in \mathbf{R})((x > 1) \Rightarrow (x^2 > x))$. Par conséquent,*

$$\{x \in \mathbf{R} \,|\, x > 1\} \subset \{x \in \mathbf{R} \,|\, x^2 > x\}.$$

1.3 Complémentaire

Si F est un sous-ensemble de E, son *complémentaire dans E* est

$$E \setminus F = \{x \in E \,|\, x \notin F\}.$$

On le note parfois $\mathrm{C}_E F$ ou, lorsque qu'il n'y a pas d'ambiguité, $\bar{F}$.

Exemple 10 *Dans l'ensemble I des étudiants de S1 IFIPS, le complémentaire du groupe 1 est $\overline{G_1} = I \setminus G_1 = G_2 \cup G_3$.*

Exemple 11 *Les éléments du complémentaire $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ sont appelés* nombres irrationnels. *$\sqrt{2}$ est l'un d'entre eux.*

Remarque 12 *Le complémentaire d'un ensemble correspond à la négation. Si $F = \{x \in E \,|\, \mathcal{P}(x)$ est vraie $\}$ alors $E \setminus F = \{x \in E \,|\, \mathrm{non}\,\mathcal{P}(x)$ est vraie $\}$.*

1.4 Intersection, réunion

L'*intersection* de deux sous-ensembles F et G de E, c'est

$$F \cap G = \{x \in E \,|\, (x \in F) \text{ et } (x \in G)\}$$

La *réunion* de deux sous-ensembles F et G de E, c'est

$$F \cup G = \{x \in E \,|\, (x \in F) \text{ ou } (x \in G)\}$$

Exemple 13 *Dans l'ensemble I des étudiants de S1 IFIPS, les étudiants qui font web et robot, c'est l'intersection $W \cap R$ de l'ensemble W de ceux qui font web et de l'ensemble R de ceux qui font robot.*

1.5 Règles

Des propriétés des opérations logiques, il résulte un grand nombre de règles dont voici quelques unes. Soient F, G et H trois sous-ensembles d'un ensemble E.

$$\begin{array}{rcl} (non\,(F \subset G)) & \Leftrightarrow & (F \cap (E \setminus G) \neq \emptyset). \\ (F \subset G) & \Leftrightarrow & (E \setminus G \subset E \setminus F). \\ E \setminus (F \cup H) & = & (E \setminus F) \cap (E \setminus H). \\ F \cap (G \cup H) & = & (F \cap G) \cup (F \cap H). \end{array}$$

1.6 Unions et intersections multiples

Si $F_1, \ldots F_i, \ldots$ sont des sous-ensembles d'un ensemble E, leur intersection $\bigcap_{i \in \mathbf{N}} F_i$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à tous les F_i et leur réunion $\bigcup_{i \in \mathbf{N}} F_i$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à au moins un F_i,

$$\bigcap_{i \in \mathbf{N}} F_i = \{x \in E \,|\, (\forall i \in \mathbf{N})(x \in F_i)\}, \quad \bigcup_{i \in \mathbf{N}} F_i = \{x \in E \,|\, (\exists i \in \mathbf{N})(x \in F_i)\}.$$

Exercice 14 *Déterminer l'ensemble des réels strictement positifs x tel que* $\sin(1/x) < 0$.

Solution de l'exercice 14. Union infinie.

Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $t > 0$,

$$(\sin t < 0) \Leftrightarrow ((\exists k \in \mathbf{N})((2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi)).$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$,

$$\begin{array}{rcl} (\sin(1/x) < 0) & \Leftrightarrow & ((\exists k \in \mathbf{N})((2k+1)\pi < \frac{1}{x} < (2k+2)\pi)) \\ & \Leftrightarrow & ((\exists k \in \mathbf{N})(\frac{1}{(2k+2)\pi} < x < \frac{1}{(2k+1)\pi})). \end{array}$$

Autrement dit,

$$\{x > 0 \,|\, \sin(\frac{1}{x}) < 0\} = \bigcup_{k \in \mathbf{N}}]\frac{1}{(2k+2)\pi}, \frac{1}{(2k+1)\pi}[.$$

Ensembles disjoints*. On dit que F et G sont* disjoints *si $F \cap G = \emptyset$. Ne pas confondre distincts et disjoints.*

On dit que des ensembles F_i sont deux à deux disjoints *si* $(\forall i \in \mathbf{N})$ $(\forall j \in \mathbf{N})$, $i \neq j \Rightarrow F_i \cap F_j \neq \emptyset$. *Ne pas confondre avec $\bigcap_i F_i = \emptyset$.*

1.7 Différence

La différence *de deux sous-ensembles F et G de E, c'est l'ensemble des éléments de F qui n'appartiennent pas à G,*

$$F \setminus G = \{x \in E \,|\, ((x \in F) \text{ et } (x \notin G))\} = F \cap (E \setminus G).$$

Exemple 15 *La contrainte sur les groupes de TD en S1 IFIPS peut s'écrire $W \setminus R \subset G_3$.*

1.8 Différence symétrique

C'est l'opération booléenne qui correspond au ou exclusif. *La* différence symétrique *de deux sous-ensembles F et G d'un ensemble E, c'est $F \Delta G = (F \setminus G) \cup (G \setminus F) = (F \cup G) \setminus (F \cap G)$.*

Exemple 16 *Soit $F \subset \mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers divisibles par 2 et $G \subset \mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers divisibles par 3. Alors $F \Delta G$ est l'ensemble des entiers divisibles par 2 ou 3 mais pas par 6, $F \Delta G = \{\ldots, -9, -8, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 8, 9, 14, 15, \ldots\}$.*

2 Produit cartésien

2.1 Définition

Soient E et F des ensembles. Leur produit cartésien *$E \times F$ est l'ensemble qui possède un élément, appelé* couple *(x, y) pour chaque $x \in E$ et chaque $y \in F$, avec la convention que, pour tous x, $x' \in E$ et tous y, $y' \in F$,*

$$((x, y) = (x', y')) \Leftrightarrow ((x = x') \text{ et } (y = y')).$$

Exemple 17 *Un procès-verbal de jury d'examen est un tableau à deux entrées, en ordonnée, les candidats, en abscisse, les épreuves. Chaque note est numérotée (le mot juste est* indexée*) par un couple (candidat,épreuve), c'est-à-dire, par le produit cartésien de l'ensemble des candidats par celui des épreuves.*

Plus généralement, étant donnés des ensembles $E_1, \ldots, E_n$, on définit leur produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ comme l'ensemble qui possède un élément, appelé n-uplet *$(x_1, \ldots, x_n)$ pour chaque $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ..., $x_n \in E_n$, avec la même convention. On note E^n le produit de n copies de E.*

Exemple 18 *Un parallélépipède de l'espace dont les côtés sont parallèles aux axes s'identifie au produit cartésien de trois intervalles de $\mathbf{R}$.*

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un élément du produit $E_1 \times \cdots \times E_n$. On appelle x_j sa j-ème coordonnée*, ou sa* j-ème composante*, ou sa* projection sur le j-ème facteur.

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles finis. Si N_i est le nombre d'éléments de E_i, alors le nombre d'éléments de $E_1 \times \cdots \times E_n$ est le produit $N_1 \ldots N_n$.

3 Somme disjointe

3.1 Motivation

Je prépare pour chaque enseignant (cours, TD, TP, communication, langue, option) une liste des étudiants de S1-IFIPS qui sont dans sa classe. J'indique sur chaque liste le nombre de noms. Quand j'ajoute ces nombres, je trouve bien plus que le nombre (57) d'étudiants en S1-IFIPS. Je trouve 57×15, car chaque étudiant intéragit avec 15 enseignants différents. Effectuer cette addition me permet de vérifier que je n'ai oublié d'étudiant dans aucun enseignement.

La collection de tous les noms apparaissant sur ces listes est une somme disjointe. Un même nom peut apparaître plusieurs fois.

3.2 Définition

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles. Leur somme disjointe *$E_1 \coprod \cdots \coprod E_n$ est un ensemble qui contient chaque élément de E_1, chaque élément de E_2, etc..., éventuellement répété.*

Exemple 19 *La liste des contrevenants au code de la route pour l'année 2004 est la somme disjointe des listes journalières. Un individu y apparaît autant de fois qu'il a commis de contraventions.*

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles finis. Si N_i est le nombre d'éléments de E_i, alors le nombre d'éléments de la somme disjointe $E_1 \coprod \cdots \coprod E_n$ est $N_1 + \cdots + N_n$.

4 Applications

4.1 Définitions

Une application*, c'est deux ensembles E (l'ensemble de départ ou de définition) et F (l'ensemble d'arrivée) et un procédé f pour associer à chaque élément x de E un élément de F noté $f(x)$. Lorsque l'espace d'arrivée $F = \mathbf{R}$, on parle souvent de* fonction.

Exemple 20 — *La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \sin x$. Sous-entendu $F = \mathbf{R}$.*

- *La fonction f définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$. Sous-entendu $F = \mathbf{R}$.*
- *L'application* identique *$id_E : E \to E$, définie par $id_E(x) = x$.*
- *La* fonction caractéristique *ou* fonction indicatrice *$c_A : E \to \{0,1\}$ d'un sous-ensemble A de E, définie par $c_A(x) = 1$ si $x \in A$, $c_A(x) = 0$ sinon.*
- *L'application $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ appelée* conjugaison*, qui, à un nombre complexe $z = x + iy$ associe son conjugué $\bar{z} = x - iy$.*
- *Une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$) s'appelle une* suite *de réels (resp. de complexes), et on note volontiers u_n au lieu de $f(n)$. Par exemple, $u_n = \frac{1}{n+1}$.*

4.2 Graphe

Le graphe *d'une application $f : E \to F$ est le sous-ensemble $gr(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in E\}$ du produit $E \times F$.*

Exemple 21 *La courbe représentative d'une fonction définie sur une partie de $\mathbf{R}$ est le graphe de cette fonction.*

Une courbe représentative coupe chaque droite parallèle à l'axe Oy en au plus un point. Un cercle n'est donc pas la courbe représentative d'une fonction.

4.3 Restriction, prolongement

Soit $f : E \to F$ une application entre ensembles et $A \subset E$ une partie de E. La restriction *de f à A est l'application $f_{|A} : A \to F$ définie par $f_{|A}(x) = f(x)$ pour $x \in A$.*

Exemple 22 *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$. Elle n'est pas croissante, mais sa restriction à $[0, +\infty[$ est croissante, sa restriction à $]-\infty, 0]$ est décroissante.*

Prolonger *$f : E \to F$ à des ensembles E' contenant E et F' contenant F, c'est trouver une application $g : E' \to F'$ telle que pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.*

Exemple 23 *Soit $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Sa courbe représentative suggère fortement de la prolonger à $\mathbf{R}$ entier en posant $g(0) = 1$. Pourquoi ?*

4.4 Composition d'applications

*Si $f : E \to F$ et $g : F \to H$ sont des applications, on définit l'*application composée *$g \circ f : E \to H$ par $g \circ f(x) = g(f(x))$, pour $x \in E$.*

Exemple 24 *Soit* prems *: $\mathcal{MOT} \to \mathcal{LETTRE}$ l'application qui à un mot associe sa première lettre. Alors* prems$\circ$nom *associe à un étudiant la première lettre de son nom,*

$$prems \circ nom(\textit{Wei Wei Zhao}) = Z.$$

Exemple 25 *Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $g(y) = \sin y$. Alors $g \circ f(x) = \sin(\sqrt{x})$ est définie sur $\mathbf{R}_+$ est n'est pas périodique. $f \circ g(y) = \sqrt{\sin x}$ est une fonction périodique, définie seulement sur une réunion d'intervalles. Par conséquent, $g \circ f \neq f \circ g$.*

Proposition 26 *La composition des applications est associative, i.e. si $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$, alors*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

qu'on peut donc noter $h \circ g \circ f$.

Preuve. *Les deux applications composées ont même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée H. Si $x \in E$, $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f(x))) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$.* ■

4.5 Image d'une partie

Si $f : E \to F$ est une application et $A \subset E$ un sous-ensemble de E, son image *(aussi appelée* image directe*) est*

$$f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\} = \{y \in F \,|\, (\exists x \in A)(y = f(x))\}.$$

Exemple 27 *Quels sont les couplages d'options choisis par les étudiants du groupe 3 ? C'est l'image de $G_3 \subset I$ par l'application options.*

Exercice 28 *Soit $f : \mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ l'application définie par $f(z) = 1/z$. Soient $A = \{z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \,|\, |z| \leq 1\}$ et $B = \{z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \,|\, \Re e(z) > 0\}$. Déterminer les images de A et de B par f.*

Solution de l'exercice 28. Image dans $\mathbf{C}$.

Posons $A' = \{z \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \,|\, |z| \geq 1\}$. Montrons que $f(A) = A'$. Si $z \neq 0$ et $|z| \leq 1$, alors $|f(z)| = |1/z| = 1/|z| \geq 1$, donc $f(z) \in A'$. Cela prouve que $f(A) \subset A'$. Réciproquement, soit $w \in A'$. Posons $z = 1/w$. Alors $f(z) = w$ et $|z| = 1/|w| \leq 1$, donc $z \in A$. Cela prouve que $A' \subset f(A)$. On conclut que $f(A) = A'$.

Montrons que $f(B) = B$. Si $\Re e(z) > 0$, alors

$$\Re e(f(z)) = \Re e(1/z) = \Re e(\bar{z}/z\bar{z}) = \Re e(\bar{z})/z\bar{z} = \Re e(z)/z\bar{z} > 0,$$

donc $f(z) \in B$. Cela prouve que $f(B) \subset B$. Réciproquement, on applique f aux deux côtés de l'inclusion $f(B) \subset B$. Il vient $f \circ f(B) \subset f(B)$. Or $f \circ f$ est l'application identique, donc $B \subset f(B)$. On conclut que $f(B) = B$.

4.6 Image réciproque d'une partie

Si $f : E \to F$ est une application et $B \subset F$ un sous-ensemble de A, son image réciproque *est*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}.$$

Exemple 29 *Quels sont les prénoms des étudiants du groupe 3 qui ont mis* Astrophysique *en premier choix ? C'est l'image par l'application prénom de l'image réciproque de $\{A\}$ par la restriction à G_3 de l'application premier choix,*

$$\textit{prénom}(\textit{premier choix}^{-1}_{|G_3}(\{A\})) = \{\textit{Hakim, Vincent, Thomas}\}.$$

Exercice 30 *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \sin x$. Soit $B =]-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2[$. Déterminer $f^{-1}(B)$.*

Solution de l'exercice 30. Image réciproque dans $\mathbf{R}$.

On s'appuie sur deux dessins, le cercle unité coupé par la bande $|y| < \sqrt{2}/2$, et la sinusoïde coupée par la bande $|y| < \sqrt{2}/2$, et sur le tableau des variations de f sur l'intervalle $]-\pi/4, 7\pi/4]$.

x	$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$
$\sin x$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Soit $A = \bigcup_{k \in \mathbf{Z}}]2k\pi - \pi/4, 2k\pi + \pi/4[\cup]2k\pi + 3\pi/4, 2k\pi + 5\pi/4[$. Montrons que $f^{-1}(B) = A$. Si $x \in A$, alors modulo 2π, $x \in]-\pi/4, \pi/4[\cup]3\pi/4, 5\pi/4[$, donc $f(x) = \sin x \in]-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2[= B$. Cela prouve que $f^{-1}(B)$ contient A. Réciproquement, soit $x \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) \in B$. Alors il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x - 2k\pi \in]-\pi/4, 7\pi/4]$. Alors $f(x - 2k\pi) = f(x) \in B$, ce qui entraîne que $x - 2k\pi \in]-\pi/4, \pi/4[\cup]3\pi/4, 5\pi/4[$. Autrement dit, $x \in A$. Cela montre que $f^{-1}(B) \subset A$. On conclut que $f^{-1}(B) = A$.

4.7 Applications injectives

On dit qu'une application $f : E \to F$ *est* injective *si, pour tous* x, $y \in E$,

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq y.$$

Exemple 31 *Une fonction* $f : A \to \mathbf{R}$, *où* $A \subset \mathbf{R}$, *est injective si et seulement si sa courbe représentative coupe toute droite parallèle à l'axe* Ox *en au plus un point. Un trinôme du second degré n'est donc jamais injectif.*

Remarque 32 *Si* E *et* F *sont des ensembles finis et s'il existe une application injective de* E *dans* F, *alors* E *a moins d'éléments que* F.

Exercice 33 *L'application* $f : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *définie par* $f(r, \theta) = re^{i\theta}$ *est-elle injective ? Sa restriction à* $A =]0, +\infty[\times\mathbf{R}$ *l'est-elle ? Sa restriction à* $B =]0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ *l'est-elle ?*

Solution de l'exercice 33. Injectivité.

Non, car $f(0, 0) = f(0, \pi) = 0$. *La restriction à* A *non plus, car* $(1, 0) \in A$, $(1, 2\pi) \in A$ *mais* $f(1, 0) = f(1, 2\pi) = 1$. *En revanche, la restriction de* f *à* B *est injective. En effet, si* $f(r, \theta) = f(r', \theta') = w$, *alors* $r = |w| = r'$ *et* $\theta = \arg(w) = \theta'$ *modulo* 2π. *Si* θ, $\theta' \in [0, 2\pi[$, *ce n'est possible que si* $\theta = \theta'$. *On conclut que* $f_{|B}$ *est injective.*

4.8 Applications surjectives

On dit qu'une application $f : E \to F$ *est* surjective *si, pour tout* $y \in F$, *il existe* $x \in E$ *tel que* $f(x) = y$. *Autrement dit,* f *est surjective si et seulement si* $f(E) = F$.

Exemple 34 *Une fonction* $f : A \to \mathbf{R}$, *où* $A \subset \mathbf{R}$, *est surjective si et seulement si sa courbe représentative coupe toutes les droites parallèle à l'axe* Ox *en au moins un point. Un trinôme du second degré n'est donc jamais surjectif.*

Remarque 35 *Si* E *et* F *sont des ensembles finis et s'il existe une application surjective de* E *dans* F, *alors* E *a plus d'éléments que* F.

Exemple 36 *Soit* I *l'ensemble des étudiants du S1 IFIPS. L'application* jour de naissance: $I \to \{1, 2, \ldots, 31\}$ *est-elle surjective ?*

On constate que les jours suivants n'apparaissent pas dans le tableau de l'exemple **??** *:* $\{4, 14, 19, 20, 29, 31\}$. *L'application* jour de naissance *n'est donc pas surjective.*

Exercice 37 *L'application* $f : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *définie par* $f(r, \theta) = re^{i\theta}$ *est-elle surjective ? Sa restriction à* $A =]0, +\infty[\times\mathbf{R}$ *l'est-elle ? Quelle est l'image de* A *par* f *? et l'image de* B *?*

Solution de l'exercice 37. Surjectivité.

Si $w \in \mathbf{C}$, *alors* $w = |w|e^{i\arg(w)} = f(|w|, \theta)$, *où* θ *est une détermination quelconque de l'argument de* w. *On conclut que* f *est surjective.*

Si $r \neq 0$, $f(r, \theta) \neq 0$. *Par conséquent,* $f(A)$ *est contenue dans* $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. *Donc* $f_{|A}$ *n'est pas surjective.*

A fortiori, $f(B) \subset f(A) \subset \mathbf{C} \setminus \{0\}$. *Réciproquement, si* $w \in \mathbf{C}$, $w \neq 0$, *alors* $w = |w|e^{i\arg(w)} = f(|w|, \theta)$ *pour la détermination* θ *de l'argument de* w *qui se trouve dans l'intervalle* $[0, 2\pi[$. *Par conséquent, l'image de* $f_{|B}$ *contient* $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. *On conclut que* $f(B) = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

A fortiori, $\mathbf{C} \setminus \{0\} \subset f(B) \subset f(A)$, *donc* $f(A) = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

4.9 Applications bijectives

On dit qu'une application $f : E \to F$ *est* bijective *si, pour tout* $y \in F$*, il existe un et un seul* $x \in E$ *tel que* $f(x) = y$*. Autrement dit,* f *est bijective si et seulement si* f *est à la fois injective et surjective.*

Exemple 38 *Une fonction* $f : A \to \mathbf{R}$*, où* $A \subset \mathbf{R}$*, est bijective si et seulement si sa courbe représentative coupe toutes les droites parallèle à l'axe* Ox *en exactement un point. Une fonction affine non constante est bijective.*

Remarque 39 *Si* E *et* F *sont des ensembles finis et s'il existe une application bijective de* E *dans* F*, alors* E *a autant d'éléments que* F*.*

Exercice 40 *Montrer que l'application* $f :]0, +\infty[\times[0, 2\pi[\to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *définie par* $f(r, \theta) = re^{i\theta}$ *est bijective.*

Solution de l'exercice 33. Bijectivité.

On a montré en 33 que cette application est injective, puis en 37 que cette application est surjective. Elle est donc bijective.

Définition 41 *Soit* $f : E \to F$ *une application bijective. Sa réciproque* $f^{-1} : F \to E$ *est définie par l'assertion*

$$(f(x) = y) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y)).$$

Exemple 42 *La réciproque de l'application* $f :]0, +\infty[\times[0, 2\pi[\to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ *définie par* $f(r, \theta) = re^{i\theta}$ *est* $g : \mathbf{C} \setminus \{0\} \to]0, +\infty[\times[0, 2\pi[$ *définie par* $g(w) = (|w|, \theta)$ *où* θ *est la détermination de l'argument de* w *qui appartient à l'intervalle* $[0, 2\pi[$*.*

5 A retenir/à savoir faire

A retenir

- *La signification des symboles* $\subset$, $\cap$, $\cup$, *passage au complémentaire.*
- *Ne pas confondre distinct et disjoint, couple et paire.*
- *La signification des termes image, image réciproque, injective, surjective, bijective.*

A savoir faire

- *Montrer l'égalité de deux ensembles* $E = F$ *en prouvant les deux inclusions* $E \subset F$ *et* $F \subset E$*.*
- *Manipuler des formules faisant intervenir les symboles* $\cap$, $\cup$ *et le passage au complémentaire.*
- *Calculer une image, une image réciproque.*