Les lois usuelles de probabilités

Lois discrètes

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère une variable aléatoire réelle discrète X.

Soit $X(\Omega) := \{x_0, x_2, \cdots, x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par la variable X.

La détermination de la loi de X désigne de la détermination des probabilités $\mathbb{P}(X = x_i)$ pour tout x_i.

La loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli, du nom du mathématicien suisse Jacques Bernoulli (1654-1705), modélise une expérience aléatoire ayant deux issues possibles : le succès auquel est associé une probabilité $p \in [0, 1]$ et l'échec auquel est associé la probabilité $q = 1 - p$.

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$, et on a $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

Sa moyenne est p, et sa variance est $p(1 - p)$

Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p et indépendantes, alors leur somme S_n est aussi une variable aléatoire, qui suit la loi binomiale :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{B}(n, p).$$

La loi Binomiale

Elle modélise modélise le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre p.

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, et on a $X(\Omega) = \{0, 1, \cdots, n\}$.

Sa loi est donnée par $\forall k \in \{0, 1, \cdots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

Sa moyenne est $\mathbf{E}(X) = np$, et sa variance est $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$

La somme de deux variables aléatoires (v.a) indépendantes suivantes les lois $\mathcal{B}(n_1, p)$ et $\mathcal{B}(n_2, p)$ est v.a. suivant la loi $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

La loi de Poisson

La loi de Poisson est attribuée à Siméon Denis Poisson, mathématicien français (1781-1840).

Elle modélise le nombre de la réalisation d'un événement dans un intervalle de temps donné (arrivée de clients qui se présentent à un guichet d'une banque en une heure, apparitions de pannes d'un réseau informatique en une année, arrivée de malades aux urgences d'un hôpital en une nuit,....).

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$, et on a $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Sa loi est donnée par $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Sa moyenne est $\mathbf{E}(X) = \lambda$, et sa variance est $\mathbf{V}(X) = \lambda$

La somme de deux variables aléatoires (v.a) indépendantes suivantes les lois $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$ est v.a. suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

La loi uniforme discrète

Elle modélise les situations où la variable prend un nombre fini de valeurs $\{x_1, \cdots, x_n\}$ et toutes la valeurs prises sont équiprobables.

Lorsque le nombre de valeurs prises est n, on note $X \sim \mathcal{U}(n)$, et on a $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

Sa loi est donnée par $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = x_k) = \frac{1}{n}.$$

Sa moyenne est $\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}$, et sa variance est $\mathbf{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$

La loi géométrique

Elle modélise les situations dont on répète continuellement et de façon indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p.

Soit X le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir un premier succès. Alors X suit une loi géométrique de paramètre p.

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$, et on a $X(\Omega) = \{1, 2, \cdots\} = \mathbb{N}^*$.

Sa loi est donnée par $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p.$$

Sa moyenne est $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{p}$, et sa variance est $\mathbf{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

La loi hypergéométrique

Elle modélise les situations dont on tire sans remise n objets d'un ensemble de N objets dont D possèdent une caractéristique particulière (et les autres $N - D$ ne la possèdent pas).

Soit X le nombre d'objets de l'échantillon qui possèdent la caractéristique. Alors X suit une loi hypergéométrique de paramètre n, N et D.

On note $X \sim \mathcal{H}(n, N, D)$, et on a $X(\Omega) = \{\max(0, n - N + D), \cdots, min(n, D)\}$.

Sa loi est donnée par $\forall k \in \{\max(0, n - N + D), \cdots, min(n, D)\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_D^k \, C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

Sa moyenne est $\mathbf{E}(X) = n\frac{D}{N}$, et sa variance est $\mathbf{V}(X) = n\frac{D}{N}\left(1 - \frac{D}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

Lois continues

Definition. Une v.a. X est dite à densité, ou continue, s'il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que la fonction de répartition de X s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

où f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ satisfaisant les conditions

i) $f(t) \geq 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$

Une fonction qui vérifie les condition *i*) et *ii*) est appelée *une densité de probabilité*.

La loi uniforme continue

Elle utilisée pour modélisée une v.a. X répartie uniformément sur un inertvalle $[a, b]$, avec $a < b$. Et on note $X \sim \mathcal{U}([a, b])$.

Sa densité de probabilité est donnée par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$$

Sa moyenne est $\mathbf{E}(X) = \frac{a+b}{2}$, et sa variance est $\mathbf{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

La loi normale ou loi de Laplace-Gauss

L'adjectif "normale" s'explique par le fait que cette loi décrit et modélise des situations statistiques aléatoires concrètes et naturelles. Prenons par exemple une population de 1000 personnes dont la taille moyenne est de 170 cm. En traçant l'histogramme des tailles, on obtient une courbe en cloche dont la population se concentre essentiellement autour de la moyenne.

Elle fut découverte indépendamment par les mathématiciens Gauss en Allemagne (1809) et Laplace en France (1812).

Pour une v.a. normale de moyenne m et de variance σ^2, on note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Si $m = 0$ et $\sigma = 1$, on parle de la loi normale centrée réduite.

Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, sa densité de probabilité est donnée par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Sa moyenne est $\mathbf{E}(X) = m$, et sa variance est $\mathbf{V}(X) = \sigma^2$

La loi exponentielle

Elle modélise la durée de vie d'un phénomène sans mémoire : la probabilité que le phénomène dure au moins $s+t$ heures sachant qu'il a déjà duré t heures sera la même que la probabilité de durer s heures à partir de sa mise en fonction initiale.

Pour une v.a. X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Sa densité de probabilité est donnée par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Sa moyenne est $\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$, et sa variance est $\mathbf{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

La loi khi-deux

C'est une loi dérivée de la loi normale. elle dépend d'un paramètre n entier, appelé degré de liberté (d.d.l), et est très utilisée en statistique référentielle.

Soient $X1, ..., Xn$, n variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite. Alors par définition la variable X, telle que $X := \sum_{i=1}^{k} X_i^2$ suit une loi du khi deux à n degrés de liberté. On note $X \sim \chi_2(n)$.

Sa densité de probabilité est donnée par, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{+*}}(x)$, pour tout x positif où Γ est la fonction Gamma définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ pour tout $x > 0$.

Sa moyenne est $\mathbf{E}(X) = n$, et sa variance est $\mathbf{V}(X) = 2n$

La loi de Student

Elle se définit à partir d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$ et d'une loi χ_2^n. Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi_2^n$. Par définition, la v.a. T définie par

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$$

suit une loi de Student à n degrés de liberté. On note $T \sim St(n)$.

Sa densité de probabilité est donnée par, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$, pour $n \geq 1$.

Sa moyenne est $\mathbf{E}(X) = 0$ si $n \geq 2$, et sa variance est $\mathbf{V}(X) = \frac{n}{n-2}$, si $n > 2$.

Pour $n > 30$, $St(n)$ peut être approchée par $\mathcal{N}(0,1)$.