Exercice 1
Soient G, H deux groupes multiplicatifs. On munit $G \times H$ de l'opération :

$$\forall g, g' \in G,\ \forall h, h' \in H,\ (g,h)\cdot(g',h') = (gg', hh').$$

Montrer que $\cdot$ définit une loi de groupe sur $G \times H$.

Exercice 2
Soit G un groupe multiplicatif et H une partie finie de G non vide, stable par multiplication. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 3
Soit G un groupe multiplicatif.

On note $Z(G) = \{a \in G$ tel que $\forall b \in G$, on a $ab = ba\}$ ($\{$*centre de* G*), et pour* $a \in G$ *on note :* $C(a) = \{b \in G$ tel que $ab = ba\}$ *(commutant de* a *}).*
Montrer que $Z(G)$ *et* $C(a)$ *sont des sous-groupes de* G*.*

Exercice 4
Les opérations suivantes sont-elles des lois de groupe ?

1)

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	b
c	a	b	c

2)

	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

3)

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

Exercice 5 (Groupe d'exposant 2)
Soit G un groupe fini tel que : $\forall x \in G$, $x^2 = e$.

1. Montrer que G est commutatif (considérer $(xy)(xy)$).
2. Donner l'exemple d'un tel groupe de cardinal infini.

Exercice 6
Un élément x d'un anneau A est dit nilpotent s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$. On suppose que A est commutatif, et on fixe a, b deux éléments nilpotents.

1. Montrer que ab est nilpotent.
2. Montrer que $a + b$ est nilpotent.
3. Montrer que $1_A - a$ est inversible.
4. Dans cette question, on ne suppose plus que A est commutatif. Soit $u, v \in A$ tels que uv est nilpotent. Montrer que vu est nilpotent.

Exercice 7
On considère $Z[\sqrt{2}] = a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \tilde{A})$est un anneau.
2. On note $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$. Montrer que, pour tous x, y de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$
3. En déduire que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sont ceux s'écrivant $a + b\sqrt{2}$ avec $a^2 - 2b^2 = 1$

Exercice 8
a. Montrer que les seuls idéaux d'un corps K sont $\{0_K\}$ et K.
b. On dit qu'un idéal est premier si $\forall (x, y) \in I :\ xy \in I \implies x \in I$ou $y \in I$. Montrer qu'un idél de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est premier ssi p est premier.