المدرسة العليا للتربية والتكوين - اكادير
ⵜⴰⵙⵏⵓⵍⴼⵓⵜ ⵜⴰⵏⴰⴼⵍⵍⴰⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ - ⴰⴳⴰⴷⵉⵔ
ECOLE SUPERIEURE DE L'ÉDUCATION ET DE LA FORMATION - AGADIR

A U : 2019/2020

Licence d'Education Enseignement Secondaire : Mathématiques et Informatiques.

Module : **Mécanique du point matériel**

Série I : Rappels mathématiques

Exercice 1 :

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ une base orthorhombique directe

$$\vec{A}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}\,,\quad \vec{B}=\vec{\jmath}-\vec{k}\,,\quad \vec{C}=2\vec{\jmath}+\vec{k}$$

1. Calculez $\|\vec{A}\|$, $\|\vec{B}\|$ puis $\vec{A}.\vec{B}$
2. Déterminez $cos\theta$ *puis* θ l'angle que fait les vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$
3. Déterminez les composantes du vecteur $\vec{X}=\vec{A}\wedge\vec{B}$
4. Retrouvez θ à partir de la norme $\|\vec{A}\wedge\vec{B}\|$
5. Calculez $(\vec{A}\wedge\vec{B})\wedge\vec{C}$ puis $\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$ puis déduire

Exercice 2 :

Un point M de l'espace peut être représenté soit par:

- Les coordonnées cartésiennes (x,y,z) de base $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$
- Les coordonnées cylindriques (ρ,θ,z) de base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$
- Les coordonnées sphériques (r,θ,φ) de base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$

1. Donner l'expression des bases $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$ en fonction de $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$
2. Soit le référentiel $R(O,x,y,z)$ de base cartésienne $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$. Calculer

   a- $\left.\dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\theta}\right|_R;\ \left.\dfrac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\right|_R$ dans $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$. En déduire leurs expressions dans $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$

   b- $\dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta};\dfrac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi};\dfrac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta};\dfrac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\varphi};\dfrac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}$ les exprimer dans la base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi)$

   c- $\left.\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}\right|_R;\ \left.\dfrac{d\vec{e}_\theta}{dt}\right|_R;\ \left.\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right|_R$
3. Déterminer, l'expression du vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ dans les trois systèmes de coordonnées. En déduire:
   a) L'élément de surface ds normal à $\vec{e}_z$ et l'élément de volume dV d'un cylindre.
   b) L'élément de surface ds normal à $\vec{e}_\varphi$ et celui de volume dV d'une sphère.
4. a) Exprimer la vitesse d'un point M dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques
   b) Exprimer l'accélération d'un point M dans les systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

---

Exercice 3 :

$$f(x,y,z) = x^2yz \ \ et \ \ \vec{A} = 3x^2y\vec{\imath} + yz^2\vec{\jmath} - xz\vec{k}$$

1. Calculez $\frac{\partial^2(f\vec{A})}{\partial y \partial z}$ au point (1,-2,1)
2. Calculez df
3. Calculez $\overrightarrow{grad}f$
4. Calculez $div\,\vec{A}$
5. Calculez $\overrightarrow{rot}\,\vec{A}$

Exercice 4 :

On considère un point matériel M se déplaçant dans un référentiel $R(O,x,y,z)$ muni de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Les coordonnées du point M sont données par :

$$X(t) = 1 + t; \quad Y(t) = 1 + t^2 \ ; \ Z(t) = 0, \ \ t \text{ étant le temps.}$$

1) Donner l'équation de la trajectoire de M dans R. En déduire sa nature.
2) Calculer la vitesse $\vec{V}(M/R)$ et l'accélération $\overrightarrow{\gamma(M/R)}$ du point M. En déduire leurs normes.
3) Exprimer, dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, les vecteurs de la base de Frenet $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$.
4) Calculer le rayon de courbure R_c.

Exercice 5 :

Une particule se déplace avec une accélération donnée par :

$$\vec{\gamma} = 2e^{-t}\vec{\imath} + 5cost\,\vec{\jmath} - 3sint\,\vec{k}$$

Si au temps t=0 la particule est située à (1,-3,2) et si sa vitesse est alors

$4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ trouver

a- La vitesse

b- Le déplacement de la particule pour un temps t>0

Exercice 6: Facultatif

Un point matériel M se déplace dans le plan (xoy) d'un repère fixe $R(O,x,y,z)$.
La position de M est repérée par les paramètres ρ et θ tels que: $\rho(t) = \rho_0 e^{\theta(t)}$ où t est le temps, ρ_0 est une constante et $\theta(t) = \omega t$ avec $\omega = cte$.
Tous les résultats doivent être exprimés dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

1. a. Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en fonction de ρ_0, ω et t.
   b. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}(M/R)$ de M et calculer son module.
   c. Déterminer le vecteur unitaire tangent $\vec{e}_t$ à la trajectoire de M.
   d. Calculer l'expression de la composante tangentielle $\vec{\gamma}_t$ de l'accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ de M par rapport à R.
2. a. Sachant que la base $(\vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_z)$ est une base orthonormée et directe, déterminer le vecteur unitaire $\vec{e}_n$ normale à la trajectoire.
   b. Déterminer l'expression du vecteur accélération de M par rapport à R et calculer son module.
3. a. Sachant que $\vec{\gamma}(M/R) = \gamma_t\vec{e}_t + \gamma_n\vec{e}_n$, calculer l'expression de l'accélération normale γ_n.
   b. En déduire le rayon de courbureR_c de la trajectoire de M à l'instant t.
4. Calculer la distance parcourue par M sur sa trajectoire entre les instants $t = 0s$ et $t = \frac{1}{\omega}$.