**Travaux dirigés (Corrigés)**
**Série n°1**

**Exercice 3 :**

Soit $f$ une application en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose, pour $x$ dans $[a, b]$

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

1°) Montrer que $F$ est continue sur $[a, b]$.
2°) Soit $c$ dans $[a, b]$. On suppose que $\lim_{x\to c^+} f(x) \neq \lim_{x\to c^-} f(x)$.
Montrer que $F$ n'est pas dérivable au point $c$.

**Solution :**

Soit $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à $f$ et si $f(x)=\lambda_i$ sur $]x_{i-1}, x_i[$, on a, pour $x$ dans $[x_{m-1}, x_m[$

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i\left(x_i-x_{i-1}\right)+\lambda_m\left(x-x_{m-1}\right)$$

et si $x$ se trouve dans $[x_m, x_{m+1}[$

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(x_i-x_{i-1}\right)+\lambda_{m+1}\left(x-x_m\right)$$

1°) Sur $]x_{m-1}, x_m[$ la fonction $F$ est polynomiale donc continue. Au point $x_m$, pour $1\leq m\leq n-1$, on a

$$\lim_{x\to x_m^-}F(x)=\lim_{x\to x_m^-}\left(\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i\left(x_i-x_{i-1}\right)+\lambda_m\left(x-x_{m-1}\right)\right)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=F\left(x_m\right)$$

et

$$\lim_{x\to x_m^+}F(x)=\lim_{x\to x_m^+}\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(x_i-x_{i-1}\right)+\lambda_{m+1}\left(x-x_m\right)\right)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\left(x_i-x_{i-1}\right)$$

(si $m=n$ et $m=0$ une seule des limites existe).
La fonction $F$ est continue en $x_m$. Elle est donc continue sur $[a, b]$.
2°) En dérivant, on trouve pour $x$ dans $]x_{m-1}, x_m[$

$$F'(x)=\lambda_m=f(x)$$

Au point $c=x_m$, la fonction $F'$ possède des limites à droite et à gauche distinctes, et il en résulte que $F$ n'est pas dérivable en $c$.

**Exercice 4 :**

Calculer les primitives des fonctions suivantes

1) $\dfrac{1}{x^4-x^2-2}$ ; 2) $\dfrac{x+1}{(x^2+1)^2}$ ; 3) $\dfrac{x^2}{x^6-1}$ ; 4) $\dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$ ;

5) $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x+2\tan^2 x}$ ; 6) $\dfrac{\sin x}{\cos^3 x+\sin^3 x}$ ; 7) $\dfrac{1}{\sin x+\cos x+2}$ ; 8) $\dfrac{1}{chx\sqrt{ch2x}}$ ;

9) $x\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$ ; 10) $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ ; 11) $\sqrt{-x^2+4x+10}$ ; 12) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+2x}}$.

**Solution :**

Il y a en général plusieurs moyens de calculer les primitives de chaque fonction présentée. Nous nous limiterons à un seul type de résolution.

8) On a $\operatorname{ch} 2x=\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x=\operatorname{ch}^2 x\left(1+\operatorname{th}^2 x\right)$ donc $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x}}$.

On fait donc le changement de variable $t=\operatorname{th} x$. On a $dt=dx/\operatorname{ch}^2 x$ et

$$\int\frac{dx}{\operatorname{ch} x\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}=\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\ln(t+\sqrt{t^2+1})+k$$

donc

$$\int\frac{dx}{\operatorname{ch} x\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}=\ln(\operatorname{th} x+\sqrt{1+\operatorname{th}^2 x})+k,\quad k\in\mathbb{R}.$$

9) On veut calculer les primitives de la forme $\int R(x,\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}})$ avec $ad-bc\neq 0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, où $R$ est une fraction rationnelle en deux variables. On effectue le changement de variables $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, de sorte que $x=g(t)=\dfrac{dt^n-b}{a-t^nc}$ et $dx=g'(t)dt$. On se ramène ainsi à calculer $\int R(g(t),t)g'(t)dt$, primitive d'une fraction rationnelle.

Afin de calculer la primitive de la fonction $x\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$, on fait le changement de variable $t=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$ ou encore $x=\dfrac{2+t^2}{1-t^2}$; on a alors $dx=\dfrac{6t}{(1-t^2)^2}dt$ et

$$\int x\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}dx=\int\frac{2+t^2}{1-t^2}\cdot t\cdot\frac{6t}{(1-t^2)^2}dt=\int\frac{6t^2\left(2+t^2\right)}{(1-t^2)^3}dt$$

De la décomposition en éléments simples

$$\frac{6t^2\left(2+t^2\right)}{(1-t^2)^3}=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{t+1}-\frac{3}{t-1}-\frac{21}{(t+1)^2}-\frac{21}{(t-1)^2}+\frac{18}{(t+1)^3}-\frac{18}{(t-1)^3}\right)$$

on déduit

$$\int\frac{6t^2\left(2+t^2\right)}{(1-t^2)^3}dt=\frac{1}{8}\left(3\ln|t+1|-3\ln|t-1|+\frac{21}{t+1}+\frac{21}{t-1}-\frac{9}{(t+1)^2}+\frac{9}{(t-1)^2}\right)+k$$

Pour obtenir les primitives de la fonction proposée, il suffit ensuite de remplacer $t$ par $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$.

Si on simplifie au mieux l'expression, on parvient finalement à

$$\int x\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}dx=\left(\frac{2x-5}{4}\right)\sqrt{x^2-x-2}+\frac{3}{8}\ln(2\sqrt{x^2-x-2}+2x-1)+k,\quad k\in\mathbb{R}$$

10) Le calcul des primitives de la forme $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)^n\sqrt{\alpha x^2+\beta x+\gamma}}$ est considérablement simplifié en effectuant le changement de variable $t = 1/(z+a)$.

Alors pour calculer la primitive de la fonction $\displaystyle\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$, on fait le changement de variable $t = 1/(x+1)$. Après calculs, on est ramené à la primitive

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = -\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+1}\right| + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

On en déduit le résultat en remplaçant $t$ par $1/(x+1)$

11) On résout le problème en intégrant par parties. On a

$$\int \sqrt{-x^2+4x+10}dx = x\sqrt{-x^2+4x+10} + \int \frac{x^2-2x}{\sqrt{-x^2+4x+10}}dx$$

Or

$$\int \frac{x^2-2x}{\sqrt{-x^2+4x+10}}dx = -\int \frac{-x^2+4x+10}{\sqrt{-x^2+4x+10}}dx + \int \frac{2x+10}{\sqrt{-x^2+4x+10}}dx$$

$$= -\int \sqrt{-x^2+4x+10}dx + \int \frac{2x+10}{\sqrt{-x^2+4x+12}}dx$$

donc

$$2\int \sqrt{-x^2+4x+10}dx = x\sqrt{-x^2+4x+10} - \int \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x+10}}dx + 14\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x+10}}$$

$$= x\sqrt{-x^2+4x+12} - 2\sqrt{-x^2+4x+10} + 14\arcsin\left(\frac{x-2}{\sqrt{14}}\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

12) On pose $\sqrt{x^2+2x} = -x+t$, de sorte que

$$x = \frac{t^2}{2(t+1)} \qquad \text{et} \qquad dx = \frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}dt$$

On se ramène ainsi à

$$\frac{1}{2}\int \frac{t+2}{(t+1)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{1}{2}\ln|t+1| - \frac{1}{2(t+1)} + k$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+x+\sqrt{x^2+2x}| - \frac{1}{2(1+x+\sqrt{x^2+2x})} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$