1. Policz

$$y = Ax$$

gdzie $A = \{a_{ij}\}, \quad x = \{x_i\}, \quad y = \{y_i\}, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

ponadto macierz A jest macierzą symetryczną i pasmową. Macierz pasmowa to macierz, w której niezerowe elementy skupione są wokół przekątnej. Poniżej przedstawiona jest schematycznie struktura macierzy pasmowej, w której elementy przekątniowe zaznaczone zostały gwiazdkami, elementy niezerowe liletrą x.

```
* x x x 0 0 0 0 0 0 0 0
x * x x x 0 0 0 0 0 0 0
x x * x x x 0 0 0 0 0 0
x x x * x x x 0 0 0 0 0
x x x x * x x x 0 0 0 0
0 0 x x x * x x x 0 0 0
0 0 0 x x x * x x x 0 0
0 0 0 0 x x x * x x x 0
0 0 0 0 0 x x x * x x x
0 0 0 0 0 0 x x x * x x
0 0 0 0 0 0 0 x x x * x
0 0 0 0 0 0 0 0 x x x *
```

W powyższym przykładzie rozmiar macierzy $n = 12$, a szerokość pasma m=7. Zwykle $n \gg m$ tak, że w budowanym algorytmie należy uwzględnić strukturę podanej macierzy. Po pierwsze należy założyć, że jedynie elementy z pasma macierzy będą przechowywane w pamięci operacyjnej, dokładniej ze względu na symetrię macierzy wystarczy przechowywać wyłącznie elementy nadprzekątniowe (lub podprzekątniowe) oraz elementy z przekątnej tej macierzy. Tak, więc zamiast macierzy o rozmiarze nxn wystarczy przechowywać macierz o rozmiarze nxk, gdzie $k = 0.5(m-1)+1$. W przykładzie powyższym $k = 4$, tak więc jeśli założymy, że przechowywane są elementy ponadprzekątniowe i przekątna macierzy, to dane będą miały postać:

```
* x x x
* x x x
* x x x
* x x x
* x x x
* x x x
* x x x
* x x x
* x x x
* x x 0
* x 0 0
* 0 0 0
```

Do takiej właśnie postaci danych należy dostosować algorytm mnożenia macierzy przez wektor. Algorytm zapisz w funkcji.

2. Policz

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

gdzie $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}, \quad \boldsymbol{x} = \{x_i\}, \quad \boldsymbol{y} = \{y_i\}, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

ponadto macierz $\boldsymbol{A}$ jest macierzą pasmową. Macierz pasmowa to macierz, w której niezerowe elementy skupione są wokół przekątnej. Poniżej przedstawiona jest schematycznie struktura macierzy pasmowej, w której elementy przekątniowe zaznaczone zostały gwiazdkami, elementy niezerowe liletrą x.

```
* x x x 0 0 0 0 0 0 0 0
x * x x x 0 0 0 0 0 0 0
x x * x x x 0 0 0 0 0 0
x x x * x x x 0 0 0 0 0
0 x x x * x x x 0 0 0 0
0 0 x x x * x x x 0 0 0
0 0 0 x x x * x x x 0 0
0 0 0 0 x x x * x x x 0
0 0 0 0 0 x x x * x x x
0 0 0 0 0 0 x x x * x x
0 0 0 0 0 0 0 x x x * x
0 0 0 0 0 0 0 0 x x x *
```

W powyższym przykładzie rozmiar macierzy $n = 12$, a szerokość pasma m=7. Zwykle $n \gg m$ tak, że w budowanym algorytmie należy uwzględnić strukturę podanej macierzy. Należy założyć, że jedynie elementy z pasma macierzy będą przechowywane w pamięci operacyjnej Tak, więc zamiast macierzy o rozmiarze nxn wystarczy przechowywać macierz o rozmiarze nxm, tak więc dane będą miały postać:

```
0 0 0 * x x x
0 0 x * x x x
0 x x * x x x
x x x * x x x
x x x * x x x
x x x * x x x
x x x * x x x
x x x * x x x
x x x * x x x
x x x * x x 0
x x x * x 0 0
x x x * 0 0 0
```

Do takiej właśnie postaci danych należy dostosować algorytm mnożenia macierzy przez wektor. Algorytm zapisz w funkcji.

3. Policz

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

gdzie $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}, \quad \boldsymbol{x} = \{x_i\}, \quad \boldsymbol{y} = \{y_i\}, \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

macierz $\boldsymbol{A}$ jest macierzą symetryczną. Wystarczy zatem przechowywać w pamięci operacyjnej tylko elementy ponadprzekątniowe lub podprzekątniowe podanej macierzy. Należy umieścić je w tablicy jednowskaźnikowej. Przyjmując, że przechowywane są elementy ponadprzekątniowe oraz oznaczając elementy z przekątnej gwiazdkami, a pozostałe literą x, można strukturę macierzy (dla $n = 6$) zapisać schematycznie:

```
1      2     3    4   5  6
*xxxxx *xxxx *xxx *xx *x *
```

Dla większej przejrzystości tego schematu element poszczególnch wierszy danej macierzy zostały oddzielone odstępem i ponumerowane. Do takiej właśnie postaci danych należy dostosować algorytm mnożenia macierzy przez wektor. Algorytm należy zapisać w funkcji.

4. Rozwiąż układ algebraicznych równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n \\
&\boldsymbol{X} = \{x_{ij}\}, \quad i = 1, 2, 3 \ldots, n; \quad j = 1, 2, 3 \ldots, m \\
&\boldsymbol{B} = \{a_{ij}\}, \quad i = 1, 2, 3 \ldots, n; \quad j = n+1, n+2, n+3, \ldots, n+m
\end{aligned}$$

metodą Gaussa. Wykorzystaj napisany program do policzenia macierzy odwrotnej i wyznacznika macierzy $\boldsymbol{A}$

5. Rozwiąż układ algebraicznych równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n; \\
\boldsymbol{X} &= \{x_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2, 3 \ldots, n \\
\boldsymbol{b} &= \{b_i\}, \quad i = 1, 2, 3 \ldots, n
\end{aligned}$$

metodą rozkładu na czynniki trójkątne ($\boldsymbol{LU}$).

6. Rozwiąż układ algebraicznych równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots, n; \\
\boldsymbol{X} &= \{x_{ij}\}, \quad i, j = 1, 2, 3 \ldots, n \\
\boldsymbol{b} &= \{b_i\}, \quad i = 1, 2, 3 \ldots, n
\end{aligned}$$

metodą rozkładu na czynniki trójkątnio-diagonalne ($\boldsymbol{LDU}$).

7. Rozwiąż układ algebraicznych równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\ldots,n; \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{X} &= \{x_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3\ldots,n \\ \boldsymbol{b} &= \{b_i\}, \quad i = 1,2,3\ldots,n \end{aligned}$$

metodą rozkładu na czynniki trójkątne ($\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T$).

8. Rozwiąż układ algebraicznych równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\ldots,n; \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{X} &= \{x_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3\ldots,n \\ \boldsymbol{b} &= \{b_i\}, \quad i = 1,2,3\ldots,n \end{aligned}$$

metodą rozkładu na czynniki trójkątne ($\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}^T$).

9. Rozwiąż układ algebraicznych równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\ldots,n; \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{X} &= \{x_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3\ldots,n \\ \boldsymbol{b} &= \{b_i\}, \quad i = 1,2,3\ldots,n \end{aligned}$$

metodą iteracji prostej.

10. Rozwiąż układ algebraicznych równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\ldots,n; \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{X} &= \{x_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3\ldots,n \\ \boldsymbol{b} &= \{b_i\}, \quad i = 1,2,3\ldots,n \end{aligned}$$

metodą iteracji Gaussa-Seidel'a.

11. Rozwiąż układ algebraicznych równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\ldots,n; \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{X} &= \{x_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3\ldots,n \\ \boldsymbol{b} &= \{b_i\}, \quad i = 1,2,3\ldots,n \end{aligned}$$

zakładając, że macierz $\boldsymbol{A}$ ma strukturę pasmową metodą rozkładu na czynniki trójkątne ($\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T$).

12. Rozwiąż układ algebraicznych równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\ldots,n; \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{X} &= \{x_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3\ldots,n \\ \boldsymbol{b} &= \{b_i\}, \quad i = 1,2,3\ldots,n \end{aligned}$$

zakładając, że macierz $\boldsymbol{A}$ ma strukturę pasmową metodą rozkładu na czynniki trójkątne ($\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}\boldsymbol{L}^T$).

13. Rozwiąż układ algebraicznych równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\ldots,n; \\ \boldsymbol{X} &= \{x_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3\ldots,n \\ \boldsymbol{b} &= \{b_i\}, \quad i = 1,2,3\ldots,n \end{aligned}$$

metodą rozkładu na czynniki trójkątne ($\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$), zakładając pasmową strukturę macierzy $\boldsymbol{A}$.

14. Rozwiąż układ algebraicznych równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \{a_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3,\ldots,n; \\ \boldsymbol{X} &= \{x_{ij}\}, \quad i,j = 1,2,3\ldots,n \\ \boldsymbol{b} &= \{b_i\}, \quad i = 1,2,3\ldots,n \end{aligned}$$

metodą rozkładu na czynniki trójkątnio-diagonalne ($\boldsymbol{L}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}$), zakładając pasmową strukturę macierzy $\boldsymbol{A}$.

15. Policz wektor

$$y = \sum_{i=0}^{m-1} x^{(i)} \quad \text{dla} \quad x^{(i)} \in \Re^n$$

Program napisz tak, by ograniczyć do dwóch liczbę definiowanych tablic. Wykorzystaj funkcje dodającą dwa wektory, alokującą pamięć, wrowadzającą dane do tablicy i wyprowadzającą wyniki z tablicy ze skryptu. Zbuduj drugą wersję tego programu, w której nie skorzystasz z funkcji dodającej dwa wektory.

<table>
<tr><td>16</td><td>Policz ile jest elementów ujemnych w każdym wierszu tablicy
$$A = \{a_{ij}\}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$
Algorytm zapisz w funkcji.

Policz sumę elementów każdej kolumny tablicy
$$A = \{a_{ij}\}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$
Algorytm zapisz w funkcji.</td></tr>
<tr><td>17</td><td>Policz ile jest elementów dodatnich w każdej kolumnie tablicy
$$A = \{a_{ij}\}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$
Algorytm zapisz w funkcji.

W tablicy
$$A = \{a_{ij}\}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$
zamień kolumnę, w której znaduje się element największy tej tablicy, z kolumną, w której znajduje się element najmniejszy tej tablicy.
Algorytm zapisz w funkcji.</td></tr>
<tr><td>18</td><td>W tablicy
$$A = \{a_{ij}\}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$
zastąp elementy ujemne zerami i policz sumę elementów dodatnich tej tablicy.
Algorytm zapisz w funkcji.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>

W tablicy

$$\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

zamień wiersz $k$ty z wierszem l-tym.

Algorytm zapisz w funkcji.

</td></tr>
<tr><td>19</td><td>

W tablicy

$$\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

zastąp elementy dodatnie zerami i policz sumę elementów ujemnych tej tablicy.

Algorytm zapisz w funkcji.

Zamień miejscami element najmnieszy i największy tablicy

$$\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

Algorytm zapisz w funkcji.

</td></tr>
<tr><td>20</td><td>

W tablicy

$$\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

zamień k-tą kolumnę z kolumną l-tą.

Algorytm zapisz w funkcji.

Policz średnią arytmetyczną elementów dodatnich tablicy.

$$\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

Algorytm zapisz w funkcji.

</td></tr>
<tr><td>21</td><td>

W tablicy

$$\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

zamień wiersz, w którym znaduje się element największy tej tablicy, z wierszem, w którym znajduje się element najmniejszy tej tablicy.

Algorytm zapisz w funkcji.

</td></tr>
</table>

	Policz sumę elementów każdego wiersza tablicy $$\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$ Algorytm zapisz w funkcji.

30. Napisz funkcję obliczającą normę euklidesową wektora $\boldsymbol{x} \in \Re^n$. A następnie zakładając, że dana jest macierz $\boldsymbol{A}$ o n wierszach i n kolumnach, wykorzystaj tę funkcję do policzenia normy wektora złożonego z

    - elementów leżących w k-tym wierszu macierzy $\boldsymbol{A}$
    - elementów leżących w k-tej kolumnie macierzy $\boldsymbol{A}$
    - elementów leżących na głównej przekątnej macierzy $\boldsymbol{A}$
    - z dodatnich elementów macierzy $\boldsymbol{A}$.
    - z elementów leżących nad główną przekątną macierzy $\boldsymbol{A}$.

    Norma euklidesowa wektora $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ to $\sqrt{\sum_i x_i^2}$

31. Napisz funkcję obliczającą normę "maksymalną" wektora $\boldsymbol{x} \in \Re^n$. A następnie zakładając, że dana jest macierz $\boldsymbol{A}$ o n wierszach i n kolumnach, wykorzystaj tę funkcję do policzenia normy wektora złożonego z

    - elementów leżących w k-tym wierszu macierzy $\boldsymbol{A}$
    - elementów leżących w k-tej kolumnie macierzy $\boldsymbol{A}$
    - elementów leżących na głównej przekątnej macierzy $\boldsymbol{A}$
    - z dodatnich elementów macierzy $\boldsymbol{A}$.
    - z elementów leżących nad główną przekątną macierzy $\boldsymbol{A}$.

    Norma "maksymalna" wektora $\boldsymbol{x} \in \Re^n$ to wartość bezwględna maksymalnej co do modułu współrzędnej tego wektora.

32. Napisz funkcję obliczającą ile współrzędnych wektora $\boldsymbol{x} \in \Re^m$ nie należy na przedziału $[-1.5, 3.5]$. Następnie przyjmując, że dana macierz $\boldsymbol{A}$ o n wierszach n kolumnach policz

    - ile elementów tej macierzy leżących w l-tym wierszu należy do przedziału $[-1.5, 3.5]$,
    - ile elementów tej macierzy leżących w l-tej kolumnie należy do przedziału $[-1.5, 3.5]$,
    - ile elementów tej macierzy leżących na głównej przekątnej należy do przedziału $[-1.5, 3.5]$.
    - ile elementów tej macierzy leżących pod przekątną należy do przedziału $[-1.5, 3.5]$.
    - ile elementów tej macierzy z drugiej przekątnej należy do przedziału $[-1.5, 3.5]$.

    W każdym z tych przypadków odwołaj się do uprzednio napisanej funkcji. tora.

33. Napisz funkcję obliczającą średnią arytmetyczną współrzędnych wektora $\boldsymbol{x} \in \Re^m$. Następnie przyjmując, że dana macierz $\boldsymbol{A}$ o n wierszach n kolumnach policz

    - średnią arytmetyczną elementów tej macierzy leżących w l-tym wierszu,
    - średnią arytmetyczną elementów tej macierzy leżących w l-tej kolumnie,
    - średnią arytmetyczną elementów tej macierzy leżących na głównej przekątnej,
    - średnią arytmetyczną elementów tej macierzy leżących pod przekątną,
    - średnią arytmetyczną elementów tej macierzy z drugiej przekątnej.

    W każdym z tych przypadków odwołaj się do uprzednio napisanej funkcji.

34. Napisz funkcję obliczającą średnią geometryczną z dodatnich współrzędnych wektora $\boldsymbol{x} \in \Re^m$. Następnie przyjmując, że dana macierz $\boldsymbol{A}$ o n wierszach n kolumnach policz

    - średnią geometryczną dodatnich elementów tej macierzy leżących w l-tym wierszu,
    - średnią geometryczną dodatnich elementów tej macierzy leżących w l-tej kolumnie,
    - średnią geometryczną dodatnich elementów tej macierzy leżących na głównej przekątnej,
    - średnią geometryczną dodatnich elementów tej macierzy leżących pod przekątną,
    - średnią geometryczną dodatnich elementów tej macierzy z drugiej przekątnej.

    W każdym z tych przypadków odwołaj się do uprzednio napisanej funkcji.