



## Bab 2

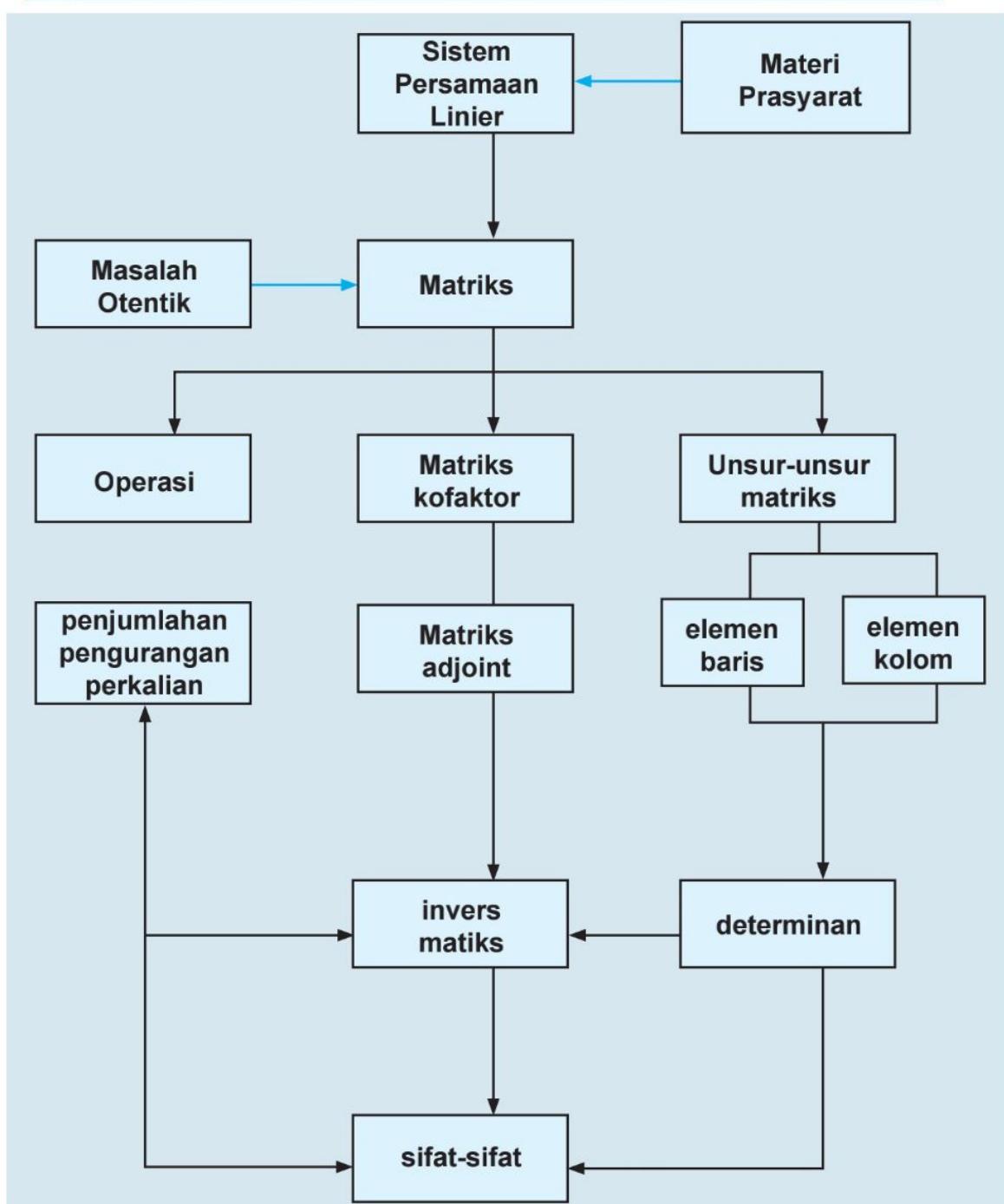
# MATRIKS

### A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<ol style="list-style-type: none"><li>Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah.</li><li>Mendeskripsikan dan menganalisis konsep dasar operasi matriks dan sifat-sifat operasi matriks serta menerapkannya dalam pemecahan masalah.</li><li>Memadu berbagai konsep dan aturan operasi matriks dan menyajikan model matematika dari suatu masalah nyata dengan memanfaatkan nilai determinan atau invers matriks dalam pemecahannya.</li></ol>	<p>Melalui pembelajaran materi matriks, siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>mengamati secara cermat aturan susunan objek.</li><li>berpikir mandiri mengajukan ide secara bebas dan terbuka.</li><li>menemukan hubungan-hubungan di antara objek-objek.</li><li>melatih berpikir kritis dan kreatif.</li><li>bekerjasama menyelesaikan masalah.</li></ul> <p><b>Istilah Penting</b></p> <ul style="list-style-type: none"><li><i>Operasi pada matriks</i></li><li><i>Determinan matriks</i></li><li><i>Invers matriks</i></li></ul>



## B. PETA KONSEP





## C. MATERI PEMBELAJARAN

### 1. Operasi Pada Matriks Dan Sifat-Sifatnya

Saat duduk di kelas X, kamu telah mempelajari konsep matriks, jenis dan operasi pada matriks yang ditemukan dari berbagai masalah nyata disekitar kehidupan kita. Pada kesempatan ini, kita akan menganalisis sifat-sifat operasi pada matriks dan menggunakannya dalam pemecahan masalah otentik. Amatilah dengan cermat berbagai informasi dan masalah yang diajukan dan temukan sifat-sifat operasi matriks di dalam langkah pemecahan masalah yang diajukan.

#### a. Operasi Penjumlahan Matriks dan Sifat-sifatnya



#### Masalah-2.1

Dua orang bersaudara laki-laki dan perempuan membuka dua cabang toko kue di Padang dan di Medan. Toko kue itu menyediakan 2 jenis kue, yaitu; bronis dan bika ambon. Biaya untuk bahan ditangani oleh saudara perempuan dan biaya untuk chef ditangani oleh saudara laki-laki. Biaya untuk tiap-tiap kue seperti pada tabel berikut:

Tabel Biaya Toko di Padang (dalam Rp)

	Bronis	Bika Ambon
Bahan Kue	1.000.000	1.200.000
Chef	2.000.000	3.000.000

Tabel Biaya Toko di Medan (dalam Rp)

	Bronis	Bika Ambon
Bahan Kue	1.500.000	1.700.000
Chef	3.000.000	3.500.000

Berapa total biaya yang diperlukan oleh kedua toko kue?



### Alternatif Penyelesaian

Jika kita misalkan matriks biaya di Padang, sebagai matriks  $A$  dan matriks biaya di Medan sebagai matriks  $B$ , maka matriks biaya kedua toko disajikan sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 1000000 & 1200000 \\ 2000000 & 3000000 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1500000 & 1700000 \\ 3000000 & 3500000 \end{pmatrix}.$$

Total biaya yang dikeluarkan kedua toko kue tersebut dapat diperoleh, sebagai berikut.

Total biaya bahan untuk bronis =  $1.000.000 + 1.500.000 = 2.500.000$

Total biaya bahan untuk bika ambon =  $1.200.000 + 1.700.000 = 2.900.000$

Total biaya *chef* untuk bronis =  $2.000.000 + 3.000.000 = 5.000.000$

Total biaya *chef* untuk bika ambon =  $3.000.000 + 3.500.000 = 6.500.000$

Keempat total biaya tersebut dinyatakan dalam matriks berikut:

**Tabel Biaya Toko di Medan (dalam Rp)**

	Bronis	Bika Ambon
Bahan Kue	2.500.000	2.900.000
Chef	5.000.000	6.500.000

Total biaya pada tabel di atas dapat ditentukan dengan menjumlahkan matriks  $A$  dan  $B$ .

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 1000000 & 1200000 \\ 2000000 & 3000000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1500000 & 1700000 \\ 3000000 & 3500000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1000000 + 1500000 & 1200000 + 1700000 \\ 2000000 + 3000000 & 3000000 + 3500000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2500000 & 2900000 \\ 5000000 & 6500000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Penjumlahan kedua matriks biaya di atas dapat dioperasikan karena kedua matriks biaya memiliki ordo yang sama, yaitu  $2 \times 2$ . Seandainya ordo kedua matriks biaya tersebut berbeda, kita tidak dapat melakukan penjumlahan dua matriks.



Nah, melalui pembahasan di atas, tentunya dapat didefinisikan penjumlahan dua matriks dalam konteks matematis.



### Definisi 2.1

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah matriks berordo  $m \times n$  dengan elemen-elemen  $a_{ij}$  dan  $b_{ij}$ . Matriks  $C$  adalah jumlah matriks  $A$  dan matriks  $B$ , ditulis  $C = A + B$ , dengan elemen-elemen ditentukan oleh  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  (untuk semua  $i$  dan  $j$ ).

#### Catatan:

Dua matriks dapat dijumlahkan hanya jika memiliki ordo yang sama. Ordo matriks hasil penjumlahan dua matriks sama dengan ordo matriks yang dijumlahkan.



### Contoh 2.1

a). Jika diketahui matriks  $P = \begin{bmatrix} x & 2 & 4 \\ 1 & x-7 & 5 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ 1 & y & 1 \end{bmatrix}$  dan

$$P + Q = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$
 Tentukan nilai  $x$  dan  $y$ !

Jika dimisalkan  $R = P + Q$ , maka jumlah matriks  $P$  dan  $Q$  adalah

$$R = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P + Q = \begin{bmatrix} x+2 & 2+2 & 4+8 \\ 1+1 & x-7+y & 5+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks, diperoleh

$$x + 2 = 12 \text{ atau } x = 10$$

$$x - 7 + y = 3 \text{ atay } 10 - 7 + y = 3 \text{ atau } y = 0$$

Jadi diperoleh nilai  $x = 10$  dan  $y = 0$

b). Diketahui matriks  $T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ . Tunjukkan bahwa  $T + 0 = T$  dan  $0 + T = T$

dengan  $0$  adalah matriks nol berordo  $3 \times 3$ .



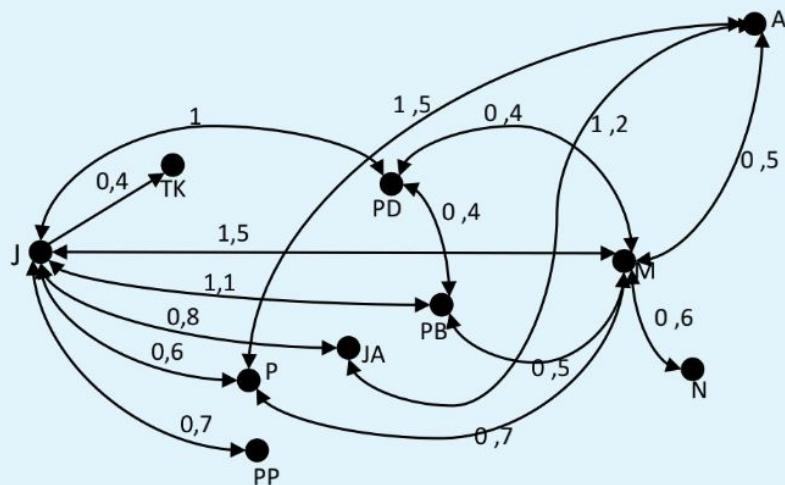
$$\begin{aligned}\bullet \quad T+O &= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6+0 & 3+0 & 1+0 \\ 5+0 & 5+0 & 0+0 \\ 1+0 & 3+0 & 7+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = T \\ \bullet \quad O+T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+6 & 0+3 & 0+1 \\ 0+5 & 0+5 & 0+0 \\ 0+1 & 0+3 & 0+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} = T\end{aligned}$$

Dalam kajian selanjutnya, jika dikatakan matriks nol, maka kita harus memikirkan matriks nol dengan ordo yang sama dengan matriks yang sedang dikaji. Demikian juga halnya untuk matriks identitas,  $I$ .



## Masalah-2.2

Cermati skema dan biaya penerbangan salah satu jenis pesawat dari Bandara Soekarno Hatta Jakarta ke berbagai kota yang ada di Pulau Sumatera yang disajikan sebagai berikut.



Gambar 2.1 : Lintasan Penerbangan Pesawat Antar Dua Kota



- a) Sajikan lintasan pesawat dalam bentuk matriks  $A = (a_{ij})$ , dengan elemen  $a_{ij}$  menyatakan adanya lintasan penerbangan yang langsung antar dua kota.
- b) Sajikan biaya penerbangan dalam bentuk matriks  $B = (b_{ij})$ , dengan  $b_{ij}$  menyatakan biaya penerbangan antar dua kota. Selanjutnya tentukan biaya penerbangan yang paling rendah dari kota Jakarta (J) ke kota Aceh (A) dengan bobot biaya penerbangan yang tersedia dalam juta rupiah!
- c) Jika matriks pada bagian a) dikalikan dengan dirinya sendiri, apa yang dapat kamu simpulkan dari unsur-unsur matriks tersebut?

### Alternatif Penyelesaian

#### Bagian a)

Kata kunci pada persoalan ini adalah adanya lintasan antar dua kota, secara matematis, fungsi lintasan antar dua kota tersebut, dinyatakan sebagai berikut:

Dari hasil pengamatan lintasan penerbangan pesawat pada skema di atas, diperoleh data sebagai berikut:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{Jika tidak ada lintasan langsung dua kota} \\ 1, & \text{Jika ada lintasan langsung dua kota} \end{cases}$$

- i) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Jakarta (J) ke kota yang lain adalah 7 lintasan, yaitu dari Jakarta ke Tanjung Karang (TK); dari Jakarta ke Palembang (P); dari Jakarta ke Pangkal Pinang (PP); dari Jakarta ke Jambi (JA), dari Jakarta ke Padang (PD), dari Jakarta ke Pekan Baru (PB), dan dari Jakarta ke Medan (M).
- ii) Banyak lintasan penerbangan pesawat dari Tanjung Karang ke kota lain adalah 1 lintasan, yaitu dari Tanjung Karang (TJ) ke Jakarta (J).
- iii) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Palembang (P) ke kota yang lain adalah 3 lintasan, yaitu dari Palembang (P) ke Jakarta (J); dari Palembang ke Aceh (A); dan dari Palembang (P) ke Medan (M).
- iv) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Pangkal Pinang (PP) ke kota yang lain adalah 1 lintasan, yaitu dari Pangkal Pinang ke Jakarta.
- v) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Jambi (JA) ke kota yang lain adalah 2 lintasan, yaitu dari Jambi (JA) ke Jakarta (J); dari Jambi (JA) ke Aceh (A).



- vi) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Padang (PD) ke kota yang lain adalah 3 lintasan, yaitu dari Padang (PD) ke Jakarta (J); dari Padang (PD) ke Medan (M); dari Padang (PD) ke Pekan Baru (PB).
- vii) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Pakam Baru (PB) ke kota yang lain adalah 3 lintasan, yaitu dari Pekan Baru (PB) ke Jakarta (J); dari Pekan Baru (PB) ke Padang (PD); dan dari Pekan Baru (PB) ke Medan (M).
- viii) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Medan (P) ke kota yang lain adalah 6 lintasan, yaitu dari Medan (M) ke Jakarta (J); dari Medan (M) ke Padang (PD); dari Medan (M) ke Pekan Baru (PB); dari Medan (M) ke Palembang (P); dari Medan (M) ke Aceh (A); dari Medan (M) ke Nias (N).
- ix) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Aceh (A) ke kota yang lain adalah 3 lintasan, yaitu dari Aceh (A) ke Jakarta (J); dari Aceh (A) ke Medan (M); dari Aceh (A) ke Jambi (JA).
- x) Banyak lintasan penerbangan pesawat yang langsung dari kota Nias (N) ke kota yang lain adalah 1 lintasan, yaitu dari Nias (N) ke Medan (M).

Dari data di atas, adanya lintasan penerbangan pesawat antar dua kota, dapat disajikan dalam sebuah matriks A berikut.

$$A = \begin{pmatrix} J & TK & P & PP & JA & PD & PB & M & A & N \\ J & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ TK & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ P & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ PP & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ JA & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ PD & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ PB & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ M & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ A & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Perhatikan elemen matriks  $A$  di atas, jumlah elemen-elemen baris menyatakan banyaknya lintasan penerbangan dari kota pada baris matriks tersebut. Misalnya pada baris pertama matriks  $A$ , jumlah elemen matriks adalah 7, artinya ada 7 lintasan penerbangan dari Jakarta ke kota-kota yang lain pada gambar.

### Bagian b)

Dari skema penerbangan di atas, biaya penerbangan antar dua kota yang terhubung langsung, dapat disajikan dalam sebuah matriks B berikut.



	J	TK	P	PP	JA	PD	PB	M	A	N
J	0	0,4	0,6	0,7	0,8	1	1,1	1,5	0	0
TK	0,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P	0,6	0	0	0	0	0	0	0,7	1,5	0
PP	0,7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
JA	0,8	0	0	0	0	0	0	0	1,2	0
PD	1	0	0	0	0	0	0,4	0,4	0	0
PB	1,1	0	0	0	0	0,4	0	0,5	0	0
M	1,5	0	0,7	0	0	0,4	0,5	0	0,5	0,6
A	0	0	1,5	0	1,2	0	0	0,5	0	0
N	0	0	0	0	0	0	0	0,6	0	0

Perhatikan Gambar-2.1 dan Matriks B di atas, terdapat 8 cara (lintasan) penerbangan dari kota Jakarta (J) menuju kota Banda Aceh (A), yaitu:

- i) Dari Jakarta menuju kota Medan dan dari Medan menuju Aceh dengan total biaya 2 juta Rupiah.
- ii) Dari Jakarta menuju Pekan Baru, dari Pekan Baru menuju Medan dan dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 2,1 juta Rupiah.
- iii) Dari Jakarta menuju Pekan Baru, dari Pekan Baru menuju Padang, dari Padang menuju Medan, dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 2,4 juta Rupiah.
- iv) Dari Jakarta menuju Palembang, dari Palembang menuju Medan dan dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 1,8 juta Rupiah.
- v) Dari Jakarta menuju Jambi, dan dari Jambi menuju Aceh, dengan total biaya 2 juta Rupiah.
- vi) Dari Jakarta menuju Padang, dari Padang menuju Medan, dan dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 1,9 juta Rupiah.
- vii) Dari Jakarta menuju Padang, dari Padang menuju Pekan Baru, dari Pekan Baru Menuju Medan dan dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 2,4 juta Rupiah.
- viii) Dari Jakarta menuju Palembang, dari Palembang menuju Aceh, dengan total biaya 2,1 juta Rupiah.

Dari ke delapan lintasan dari Jakarta menuju Aceh, biaya terendah diperoleh melalui jalur Jakarta menuju Palembang, dari Palembang menuju Medan, dan dari Medan menuju Aceh, dengan total biaya 1,8 juta Rupiah.



Ingat kembali materi operasi penjumlahan matriks yang kamu sudah pelajari di kelas X, jika kita jumlahkan matriks B dengan dirinya sendiri diperoleh

$$B + B = \boxed{\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0,4 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 1 & 1,1 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 1,5 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 \\ 1,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1,5 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0,4 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0,6 \\ 0 & 0 & 1,5 & 0 & 1,2 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \end{array}} +$$

$$\boxed{\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0,4 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 1 & 1,1 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 1,5 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 \\ 1,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1,5 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0,4 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0,6 \\ 0 & 0 & 1,5 & 0 & 1,2 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \end{array}}$$



$$B + B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 0,6 & 0,7 & 0,8 & 1 & 1,1 & 1,5 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 1,5 & 0 \\ 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 \\ 1,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 1,5 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0,4 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0,6 \\ 0 & 0 & 1,5 & 0 & 1,2 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B + B = 2B.$$

Makna elemen matriks  $2B$  adalah biaya pulang pergi untuk penerbangan antar dua kota. Misalnya biaya penerbangan dari Jakarta menuju Medan, dan sebaliknya, biaya pulang pergi adalah  $2 \times 1,5$  juta = 3 juta Rupiah.

$$\text{Misalkan matriks } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{B + B + B + \dots + B}_{8} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}}_8$$

$$8B = 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$



### Definisi 2.2

Misalkan  $B$  sebuah matriks dengan ordo  $n \times m$ ,  $n \in N$ . Hasilnya penjumlahan matriks  $B$  sebanyak  $k$  dengan  $k \in N$  adalah  $\underbrace{B + B + B + \dots + B}_k = kB$ , dan matriks  $kB$  berordo  $n \times n$ .



### b. Sifat Komutatif Penjumlahan Matriks



#### Masalah-2.3

Perhatikan masalah di bawah ini!

Di suatu pasar terdapat dua orang pedagang mangga, jenis buah yang dijual antara lain mangga dengan kualitas tinggi dan mangga dengan kualitas sedang. Pedagang satu memiliki 3 kg mangga kualitas tinggi dan 6 kg mangga kualitas sedang. Pedagang kedua memiliki 1 kg mangga dengan kualitas tinggi dan 8 kg mangga kualitas sedang. Keesokan harinya kedua pedagang tersebut berbelanja untuk menambah persediaan mangganya. Pedagang satu menambah 20 kg mangga berkualitas tinggi dan 15 mangga kualitas sedang, sedangkan pedagang kedua menambah 20 kg mangga kualitas tinggi dan 10 kg mangga kualitas sedang.

Berapakah persediaan mangga setiap pedagang sekarang?

#### Alternatif penyelesaian

Pedagang satu dan pedagang dua memiliki mangga kualitas tinggi dan sedang dan pada hari berikutnya kedua pedagang menambah persediaan mangga seperti tabel di bawah ini:

**Tabel persediaan mangga sebelum penambahan**

	Kualitas Tinggi	Kualitas Sedang
Pedagang I	3	6
Pedagang II	1	8

**Tabel tambahan persediaan mangga**

	Kualitas Tinggi	Kualitas Sedang
Pedagang I	20	15
Pedagang II	20	10

Jika kita misalkan matriks persediaan buah mangga sebelum penambahan sebagai matriks  $A$  dan sesudah penambahan sebagai matriks  $B$ . Matriks  $A$  dan  $B$  disajikan sebagai berikut.



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ingat kembali materi operasi pada matriks yang sudah dipelajari. Dua matriks dapat dijumlahkan apabila kedua matriks tersebut memiliki ordo yang sama. Matriks  $A$  dan  $B$  memiliki ordo yang sama, yaitu; matriks berordo  $2 \times 2$ .

Maka jumlah keseluruhan persediaan mangga dapat diperoleh sebagai berikut.

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3+20 & 6+15 \\ 1+20 & 8+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 21 \\ 21 & 18 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 20 & 15 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20+3 & 15+6 \\ 20+1 & 10+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 21 \\ 21 & 18 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan hasil operasi di atas dapat disimpulkan (1) total persediaan mangga Pedagang I adalah 23 kg mangga kualitas tinggi dan 21 kg mangga kualitas sedang; (2) total persediaan mangga Pedangang II adalah 21 kg mangga kualitas tinggi dan 18 kg mangga kualitas sedang; (3) ternyata hasil penjumlahan matriks  $A + B = B + A$ .



## Contoh 2.2

Misalkan matriks  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$  dan matriks  $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3+(-3) & -1+(-1) & 2+2 \\ 0+0 & 6+6 & 4+4 \\ 1+1 & 5+(-5) & 1+(-1) \end{pmatrix}$$



$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 12 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3+3 & -1+(-1) & 2+2 \\ 0+0 & 6+6 & 4+4 \\ 1+1 & -5+5 & -1+1 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 12 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan contoh di atas dapat disimpulkan bahwa  $A + B = B + A$ .

Mari kita buktikan secara umum bahwa operasi penjumlahan pada matriks memenuhi sifat komutatif. Misalkan matriks  $A$  dan  $B$  berordo  $n \times k$ . Elemen-elemen matrik  $A$  dan  $B$  adalah bilangan real yang disajikan sebagai berikut.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & \dots & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & \dots & b_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$



$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & \dots & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & \dots & b_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & \dots & a_{1k} + b_{1k} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & \dots & a_{2k} + b_{2k} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & \dots & \dots & a_{3k} + b_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & a_{n3} + b_{n3} & \dots & \dots & a_{nk} + b_{nk} \end{pmatrix}$$

Karena nilai  $a_{ij}$  dan  $b_{ij}$  untuk setiap  $i$  dan  $j$  adalah bilangan real, maka nilai  $a_{ij} + b_{ij}$  sama dengan nilai  $b_{ij} + a_{ij}$  atau  $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ . Dengan demikian hasil penjumlahan  $A + B = B + A$ .



### Sifat 2.1

Misalkan matriks  $A$  dan  $B$  berordo  $n \times k$ . Penjumlahan matriks  $A$  dan  $B$  memenuhi sifat komutatif jika dan hanya jika  $A + B = B + A$ .



### Contoh 2.3

Diberikan matriks  $A = \begin{pmatrix} x-2y & y \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$  dan  $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2x & x-y \end{pmatrix}$  dengan hasil penjumlahan matriks  $B + A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}$ . Tentukan matriks  $A$  dan  $B$ !



### Alternatif penyelesaian

Berdasarkan Definisi-2.2 di atas,  $A + B = B + A$ , sehingga diperoleh

$$A + B = \begin{pmatrix} x - 2y & y \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2x & x - y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x - 2y + 5 & y + 3 \\ 2x + 4 & x - y + 1 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan Definisi-2.2 di atas,  $A + B = B + A$ , sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} x - 2y + 5 & y + 3 \\ 2x + 4 & x - y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 16 & 2 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan sifat kesamaan dua matriks, maka diperoleh

$x - 2y + 5 = 1$ ;  $y + 3 = 8$ ;  $2x + 4 = 16$ , dan  $x - y + 1 = 2$ . Dari keempat persamaan ini diperoleh nilai  $x$ , dan  $y$ .

$2x + 4 = 16$  diperoleh  $x = 6$ .

$y + 3 = 8$  maka  $y = 5$

Dengan demikian matriks  $A = \begin{pmatrix} x - 2y & y \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$  dan matriks  $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$

### c. Sifat Asosiatif Penjumlahan Matriks



#### Masalah-2.4

Pada suatu acara perlombaan masak pada acara 17 Agustus di SMA yang terdiri dari tiga sekolah, terdapat tiga peserta perwakilan dari masing-masing sekolah. Terdapat tiga orang anggota tim juri menilai dari setiap hasil masakan dari masing-masing sekolah, dengan nilai rentang nilai 6 sampai 10. Tabel nilai tersebut adalah

Tabel persediaan mangga sebelum penambahan

	Juri I	Juri II	Juri III
SMA I	8	8	9
SMA II	7	8	8
SMA III	10	8	8



### Alternatif penyelesaian

Misalkan:

- Nilai dari juri I untuk masing-masing sekolah:

$$\begin{bmatrix} SMAI \\ SMAII \\ SMAIII \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Nilai juri II untuk masing-masing sekolah:

$$\begin{bmatrix} SMAI \\ SMAII \\ SMAII \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

- Nilai juri III untuk masing-masing sekolah:

$$\begin{bmatrix} SMAI \\ SMAII \\ SMAII \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$(I + II) + III = \left( \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 23 \\ 26 \end{bmatrix} \text{ Atau}$$

$$I + (II+III) = \left( \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix} \right) + \left( \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \right)$$



$$= \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 \\ 16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 23 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Dari penyelesaian tersebut dapat diketahui peringkat I adalah SMA III, Peringkat kedua adalah SMA I, dan peringkat ketiga adalah SMA II. Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa matriks  $I + (II + III) = (I + II) + III$ . Hal ini dinamakan **sifat asosiatif operasi penjumlahan pada matriks**.

#### Contoh 2.4

Misalkan  $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ , dan  $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(A + B) + C = \left( \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 6 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$



$$= \begin{pmatrix} 11 & -6 \\ 8 & -7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan contoh di atas dapat disimpulkan bahwa hasil penjumlahan matriks

$$A + (B + C) = (A + B) + C = \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$



### Sifat 2.2

Misalkan matriks  $A$ ,  $B$  dan  $C$  berordo  $n \times k$ . Penjumlahan matriks  $A$ ,  $B$  dan  $C$  memenuhi sifat asosiatif jika dan hanya jika  $A + (B+C) = (A+B) + C$ .

## 2. Pengurangan Dua Matriks

Sebagai gambaran awal mengenai operasi pengurangan dua matriks, mari kita cermati contoh masalah berikut ini.



### Masalah-2.5

Sebuah pabrik tekstil hendak menyusun tabel aktiva mesin dan penyusutan mesin selama 1 tahun yang dinilai sama dengan 10 % dari harga perolehan sebagai berikut:

Lengkapilah tabel tersebut dengan menggunakan matriks!

Jenis Aktiva	Harga Perolehan (Rp)	Penyusutan Tahun I (Rp)	Harga Baku (Rp)
Mesin A	25.000.000	2.500.000	
Mesin B	65.000.000	6.500.000	
Mesin C	48.000.000	4.800.000	



## Alternatif penyelesaian

Misalkan:

$$\text{Harga perolehan merupakan matriks } A = \begin{bmatrix} 25.000.000 \\ 65.000.000 \\ 48.000.000 \end{bmatrix}$$

$$\text{Penyusutan tahun pertama merupakan matriks } B = \begin{bmatrix} 2.500.000 \\ 6.500.000 \\ 4.800.000 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari harga baku pada tabel tersebut adalah

$$A - B = \begin{bmatrix} 25.000.000 \\ 65.000.000 \\ 48.000.000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.500.000 \\ 6.500.000 \\ 4.800.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22.500.000 \\ 58.500.000 \\ 43.200.000 \end{bmatrix}$$

Rumusan penjumlahan dua matriks di atas dapat kita diterapkan untuk memahami konsep pengurangan matriks  $A$  dengan matriks  $B$ .

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah matriks-matriks berordo  $m \times n$ . Pengurangan matriks  $A$  dengan matriks  $B$  didefinisikan sebagai jumlah matriks  $A$  dan lawan matriks  $-B$ , ditulis:

$$\mathbf{A-B=A+(-B).}$$

Matriks  $-B$  merupakan matriks yang setiap unsurnya berlawanan tanda dengan setiap unsur yang bersesuaian dengan matriks  $B$ .

Dari pemahaman penyelesaian Masalah-2.5 di atas, pengurangan dua matriks dapat juga dilakukan dengan mengurangkan langsung elemen-elemen yang seletak dari kedua matriks tersebut, seperti yang berlaku pada penjumlahan dua matriks, yaitu :  $A-B = [a_{ij}] - [b_{ij}]$

## 3. Perkalian Suatu Bilangan Real dengan Matriks

Dalam aljabar matriks, bilangan real  $k$  sering disebut sebagai skalar. Oleh karena itu perkalian real terhadap matriks juga disebut sebagai perkalian skalar dengan matriks.



Sebelumnya, pada kajian pengurangan dua matriks,  $A - B = A + (-B)$ ,  $(-B)$  dalam hal ini sebenarnya hasil kali bilangan  $-1$  dengan semua elemen matriks  $B$ . Artinya, matriks  $(-B)$  dapat kita tulis sebagai :

$$-B = k \cdot B, \text{ dengan } k = -1.$$

Secara umum, perkalian skalar dengan matriks dirumuskan sebagai berikut.

Misalkan  $A$  suatu matriks berordo  $m \times n$  dengan elemen-elemen  $a_{ij}$  dan  $k$  adalah suatu bilangan real. Matriks  $C$  adalah hasil perkalian bilangan real  $k$  dengan matriks  $A$ , dinotasikan  $C = k \cdot A$ , bila matriks  $C$  berordo  $m \times n$  dengan elemen-elemennya ditentukan oleh :

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij} \quad (\text{untuk semua } i \text{ dan } j).$$



### Contoh 2.5

a) Jika  $T = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -5 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$ , Maka  $2 \cdot H = \begin{bmatrix} 2 \times (-2) & 2 \times (-4) \\ 2 \times (-4) & 2 \times (-4) \\ 2 \times 12 & 2 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -8 & -10 \\ 24 & 10 \end{bmatrix}$ .

b) Jika  $S = \begin{bmatrix} 18 & 60 & 15 \\ 9 & 24 & 18 \\ 3 & -3 & -12 \end{bmatrix}$ , Maka

$$\frac{1}{3}S = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \times 18 & \frac{1}{3} \times 60 & \frac{1}{3} \times 15 \\ \frac{1}{3} \times 9 & \frac{1}{3} \times 24 & \frac{1}{3} \times 18 \\ \frac{1}{3} \times 3 & \frac{1}{3} \times (-3) & \frac{1}{3} \times (-12) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 20 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

c) Jika  $P = \begin{bmatrix} 16 & 40 & 36 \\ 24 & 60 & 72 \end{bmatrix}$ , Maka

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}P + \frac{3}{4}P &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \times 16 & \frac{1}{4} \times 40 & \frac{1}{4} \times 36 \\ \frac{1}{4} \times 24 & \frac{1}{4} \times 60 & \frac{1}{4} \times 72 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \times 16 & \frac{3}{4} \times 40 & \frac{3}{4} \times 36 \\ \frac{3}{4} \times 24 & \frac{3}{4} \times 60 & \frac{3}{4} \times 72 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 10 & 9 \\ 6 & 15 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 30 & 27 \\ 18 & 45 & 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 40 & 36 \\ 24 & 60 & 72 \end{bmatrix} = P \end{aligned}$$



#### 4. Operasi Perkalian Dua Matriks dan Sifat-sifatnya



#### Masalah-2.6

P.T Melodi adalah sebuah perusahaan multinasional yang bergerak di bidang penjualan alat-alat musik. Perusahaan tersebut memiliki beberapa toko penjualan di beberapa kota besar di Indonesia. Persediaan alat-alat olah raga di setiap toko disajikan pada tabel berikut.

Tabel 1.1: Alokasi setiap sumber yang tersedia

Sumber	Jenis Alat Musik			
	Piano	Gitar	Terompet	Seksopon
Medan	95	68	85	75
Surabaya	70	57	120	80
Makasar	85	60	56	90
Yogya	45	90	87	64
Bandung	75	54	90	65

Tabel di bawah ini menyatakan harga satu buah untuk setiap jenis alat musik

Jenis Alat Musik	Harga (Rp)
Piano	15.000.000,-
Gitar	1.500.000,-
Terompet	5.000.000,-
Seksofon	5.000.000,-

Setiap toko di masing-masing kota telah berhasil menjual berbagai jenis alat musik yang disajikan pada tabel berikut.



Kota/ Terjual	Jenis Alat Musik			
	Piano	Gitar	Terompet	Seksopon
Medan	85	56	84	70
Surabaya	55	52	85	65
Makasar	80	48	43	86
Yogya	42	60	67	62
Bandung	72	51	78	60

Amatilah data di atas dan tentukan nilai dari

- Nilai persediaan alat musik seluruhnya!
- Penghasilan kotor perusahaan P.T Melodi

### Alternatif Penyelesaian

Misalkan  $P$  adalah matriks yang menyatakan persediaan alat musik di setiap kota dan matriks  $H$  adalah matriks yang menyatakan harga untuk setiap jenis alat musik serta  $T$  adalah matriks yang menyatakan banyaknya barang yang telah berhasil dijual di setiap kota. Matriks  $P$ ,  $H$ , dan  $T$  dapat ditulis sebagai berikut.

Kota/ Terjual	Jenis Alat Musik			
	Piano	Gitar	Terompet	Seksopon
Medan	85	56	84	70
Surabaya	55	52	85	65
Makasar	80	48	43	86
Yogya	42	60	67	62
Bandung	72	51	78	60



$$P = \begin{pmatrix} 95 & 68 & 85 & 75 \\ 70 & 57 & 120 & 80 \\ 85 & 60 & 56 & 90 \\ 45 & 90 & 87 & 64 \\ 75 & 54 & 90 & 65 \end{pmatrix} \text{ dan } H = \begin{pmatrix} 15000000 \\ 1500000 \\ 5000000 \\ 5000000 \end{pmatrix} \text{ dan } T = \begin{pmatrix} 85 & 56 & 84 & 70 \\ 55 & 52 & 85 & 65 \\ 80 & 48 & 43 & 86 \\ 42 & 60 & 67 & 62 \\ 72 & 51 & 78 & 60 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nilai Barang Keseluruhan} = \begin{pmatrix} 95 & 68 & 85 & 75 \\ 70 & 57 & 120 & 80 \\ 85 & 60 & 56 & 90 \\ 45 & 90 & 87 & 64 \\ 75 & 54 & 90 & 65 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15000000 \\ 1500000 \\ 5000000 \\ 5000000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 95(15000000) + 68(1500000) + 85(5000000) + 75(5000000) \\ 70(15000000) + 57(1500000) + 120(5000000) + 80(5000000) \\ 85(15000000) + 60(1500000) + 56(5000000) + 90(5000000) \\ 45(15000000) + 90(1500000) + 87(5000000) + 64(5000000) \\ 75(15000000) + 54(1500000) + 90(5000000) + 65(5000000) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1425000000 + 102000000 + 425000000 + 375000000 \\ 1050000000 + 85500000 + 600000000 + 400000000 \\ 1275000000 + 80000000 + 280000000 + 450000000 \\ 675000000 + 135000000 + 435000000 + 320000000 \\ 11255000000 + 81000000 + 45000000 + 325000000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2327000000 \\ 2135500000 \\ 2805000000 \\ 7640000000 \\ 1981000000 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas, diperoleh nilai barang keseluruhan di setiap toko di masing-masing kota adalah



Nilai Inventori Barang =	$\begin{array}{l l} \hline 2327000000 & Medan \\ 2135500000 & Surabaya \\ 2805000000 & Makasar \\ 7640000000 & Yogyakarta \\ 1981000000 & Bandung \\ \hline \end{array}$
--------------------------	--

Berdiskusilah dengan temanmu, coba tentukan nilai barang yang terjual di setiap toko di kota.

Dapat kita cermati dari perkalian di atas, bahwa setiap elemen baris pada matriks  $C$  berkorespondensi satu-satu dengan setiap elemen kolom pada matriks  $D$ . Seandainya terdapat satu saja elemen baris ke-1 pada matriks  $C$  tidak memiliki pasangan dengan elemen kolom ke-1 pada matriks  $D$ , maka operasi perkalian terhadap kedua matriks itu tidak dapat dilakukan. Jadi, dapat disimpulkan operasi perkalian terhadap dua matriks dapat dilakukan jika banyak baris pada matriks  $C$  sama dengan banyak kolom pada matriks  $D$ . Banyak perkalian akan berhenti jika setiap elemen baris ke- $n$  pada matriks  $C$  sudah dikalikan dengan setiap elemen kolom ke- $n$  pada matriks  $D$ .

Secara matematis, kita dapat menyatakan perkalian dua matriks sebagai berikut. Misalkan matriks  $A_{m \times n}$  dan matriks  $B_{n \times p}$ , matriks  $A$  dapat dikalikan dengan matriks  $B$  jika banyak baris matriks  $A$  sama dengan banyak kolom  $B$ . Hasil perkalian matriks  $A$  berordo  $m \times n$  terhadap matriks  $B$  berordo  $n \times p$  adalah suatu matriks berordo  $m \times p$ . Proses menentukan elemen-elemen hasil perkalian dua matriks dipaparkan sebagai berikut.

$$A_{m \times n} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ dan } = B_{n \times p} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Jika  $C$  adalah matriks hasil perkalian matriks  $A_{m \times n}$  terhadap matriks  $B_{n \times p}$ , dinotasikan  $C = A \cdot B$ , maka  $C$  berordo  $m \times p$ . Elemen-elemen matriks  $C$  pada baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$ , dinotasikan  $c_{ij}$ , diperoleh dengan cara mengalikan elemen baris ke- $i$  dari matriks  $A$  terhadap elemen kolom ke- $j$  dari matriks  $B$ , kemudian dijumlahkan. Dinotasikan  $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$



### Definisi 2.3

Misalkan  $A = [a_{ij}]$  adalah matriks yang berordo  $m \times p$  dan  $B =$  adalah matriks yang berordo  $q \times n$ .

Hasil kali matriks  $A$  dan  $B$  adalah suatu matriks  $C$  berordo  $m \times n$  dinotasikan  $A \times B = C = [c_{ij}]$  berordo  $m \times n$  dengan elemen baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  adalah:  $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$ , dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ; dan  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

*Catatan: Matriks  $A$  dan  $B$  dapat dikalikan apabila banyak kolom matriks  $A$  sama dengan banyak baris matriks  $B$ .*

Mari kita pelajari contoh-contoh di bawah ini, untuk memudahkan kita mengerti akan konsep di atas!



### Contoh 2.6

Gambarkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut ini.

a) Diketahui matriks  $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$  dan  $B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$  matriks hasil

$$\text{perkalian matriks } A \text{ dan matriks } B, A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} & a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} & a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} & a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33} \end{bmatrix}$$

Sekarang, silahkan tentukan hasil perkalian matriks  $B$  terhadap matriks  $A$ . Kemudian, simpulkan apakah berlaku atau tidak sifat komutatif pada perkalian matriks? Berikan alasanmu!

b) Mari kita tentukan hasil perkalian matriks  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ , dengan menggunakan



konsep perkalian dua matriks di atas, diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 + 2.1 & 1.3 + 2.2 & 1.4 + 2.0 \\ 3.2 + 4.1 & 3.3 + 4.2 & 3.4 + 4.0 \\ 5.2 + 6.1 & 5.3 + 6.2 & 5.4 + 6.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 10 & 17 & 12 \\ 16 & 27 & 20 \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan hasil diskusi yang kamu peroleh pada contoh a) dan b),

silahkan periksa apakah matriks  $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  dapat dikalikan terhadap matriks  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ? Berikan penjelasanmu!

### a. Sifat Asosiatif dan Distributif Operasi Perkalian Matriks

Misalkan Matriks  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$   $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -25 + 36 & 15 - 3 \\ -60 + 12 & 36 - 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -48 & 35 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} -25 + 36 & -15 + 3 \\ 60 - 12 & 36 - 1 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ 48 & 35 \end{pmatrix}$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas, dapat disimpulkan bahwa perkalian matriks tidak memenuhi sifat komutatif sebab  $A \times B \neq B \times A$

Mari kita cek sifat asosiatif!

$$A \times (B \times C) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times (B \times C) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 23 & -13 \end{pmatrix}$$



$$A \times (B \times C) = \begin{pmatrix} 34 & 1 \\ -61 & 83 \end{pmatrix}$$

Sekarang perhatikan hasil perkalian matriks

$$(A \times B) \times C = \left( \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A \times B) \times C = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -48 & 35 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A \times B) \times C = \begin{pmatrix} 34 & 1 \\ -61 & 83 \end{pmatrix}$$

Dari hasil perhitungan di atas dapat disimpulkan  $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ .



### Sifat 2.3

Misalkan matriks  $A$  berordo  $m \times n$ ,  $B$  berordo  $n \times p$  dan  $C$  berordo  $p \times q$  dengan  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ . Perkalian matriks memenuhi sifat asosiatif jika dan hanya jika  $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ .

Perhatikan kembali matriks  $A$ ,  $B$ , dan  $C$  di atas.

$$\text{Matriks } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times (B + C) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \left\{ \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 13 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24 & 10 \\ -23 & 24 \end{pmatrix}$$

$$(A \times B) + (A \times C) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 12 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ -48 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 13 & -2 \\ 25 & -11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24 & 10 \\ -23 & 24 \end{pmatrix}$$



Dari hasil perhitungan di atas, dapat disimpulkan bahwa  $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ .



### Sifat 2.4

Misalkan matriks  $A$  berordo  $m \times n$ ,  $B$  berordo  $n \times p$  dan  $C$  berordo  $n \times p$  dengan  $m, n, p, q \in N$ . Perkalian matriks memenuhi sifat distributif operasi perkalian terhadap operasi pen-jumlahan matriks jika dan hanya jika  $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ .

Nah, sekarang mari kita cermati untuk perkalian berulang suatu matriks  $A$  berordo  $p \times q$ .



### Contoh 2.7

Diketahui matriks  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Tentukanlah  $A^{2013}$

#### Alternatif Penyelesaian

Mari cermati langkah-langkah berikut!

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1$$

Jika  $A^2 = -I$ , maka  $A^4 = I$ . Artinya, untuk setiap pangkat matriks  $A$  kelipatan 4, akan ditemukan matriks identitas.

Selanjutnya, 2013 dapat kita tuliskan sebagai berikut:

$$2013 = 4 \cdot (503) + 1.$$

Akibatnya,

$$A^{2013} = A^{(4 \cdot 503) + 1} = (A^4)^{503} \cdot A^1.$$

Matriks  $A^4 = I$ , dan  $I^n = I, n = 1, 2, 3, \dots$ , akibatnya berlaku,  $(A^4)^{503} = I$ . Oleh karena itu,  $A^{2013} = I \cdot A = A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Dari hasil pembahasan Contoh 2.7, secara umum dapat kita nyatakan dalam definisi berikut ini.



### Definisi 2.7

Misalkan matriks  $A$  berordo  $p \times q$  dan  $n \in N$ .

$$A^n = \underbrace{A \times A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ faktor}}$$



$A^{2013}$  pada contoh di atas, dengan  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , kebetulan memiliki pola untuk menentukan hasilnya. Namun, jika kamu menjumpai masalah untuk menentukan  $A^n$ ,  $n$  bilangan asli dapat kamu kerjakan dengan menentukan hasil kali matriks  $A$  sebanyak  $n$  faktor.

**Pertanyaan Kritis:** Apakah  $A^4 = I$  berlaku untuk sembarang matriks persegi berordo  $2 \times 2$  ?



## Uji Kompetensi 2.1

1. Hasil penjumlahan matriks  $\begin{pmatrix} p+2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & 6 \\ 6 & q+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ . Tentukan nilai  $p$  dan  $q$ !
2. Misalkan matriks  $A = \begin{pmatrix} p+2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} p & 6 \\ 6 & q+3 \end{pmatrix}$  Bila  $3A = B$ , Tentukan nilai  $p$  dan  $q$ !
3. Diberikan matriks  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$   $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$  dan  $C = \begin{pmatrix} -26 & -2 \\ 3 & -35 \end{pmatrix}$  Tunjukkan bahwa  $A + B = B^2 + C$ .
4. Tentukanlah hasil perkalian matriks-matriks berikut!

a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$	c. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 7 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$
5. Apa yang dapat kamu jelaskan tentang operasi pembagian matriks? Misalnya diketahui persamaan matriks  $A.C = B$ , dengan matriks  $A$  dan  $B$  matriks yang diketahui. Bagaimana kita menentukan matriks  $C$ ? Paparkan di depan kelas!
6. Berikan dua matriks yang memenuhi kesamaan:
  - i.  $(A + B)^2 = A^2 + B^2$
  - ii.  $A^2 - B^2 = (A - B).(A + B)$
7. Seorang agen perjalanan menawarkan paket perjalanan ke Danau Toba. Paket I



- terdiri atas 3 malam menginap, 2 tempat wisata dan 4 kali makan. Paket II dengan 4 malam menginap, 5 tempat wisata dan 8 kali makan. Paket III dengan 3 malam menginap, 2 tempat wisata dan tidak 1 makan. Sewa hotel Rp 250.000,00 per malam, biaya pengangkutan ke tiap tempat wisata Rp 35.000,00, dan makan di restoran yang ditunjuk Rp 75.000,00.
- Dengan menggunakan perkalian matriks, tentukan matriks biaya untuk tiap paket.
  - Paket mana yang menawarkan biaya termurah?
8. Sebuah perusahaan angkutan menawarkan tiket pulang bersama ke Provinsi Jawa Timur. Perusahaan angkutan tersebut mempunyai tiga jenis bus, yaitu Executif, Ekonomi, dan AC. Setiap bus dilengkapi dengan kursi penumpang untuk kelas umum, mahasiswa dan pelajar. Jumlah kursi penumpang tiga jenis bus tersebut disajikan pada tabel di bawah ini.

	<b>Eksekutif</b>	<b>Ekonomi</b>	<b>AC</b>
Umum	40	42	41
Mahasiswa	33	41	35
Pelajar	30	39	28

Perusahaan telah mendaftar jumlah penumpang yang mengikuti perjalanan wisata ke negara *A*, seperti pada tabel berikut.

<b>Kategori penumpang</b>	<b>Jumlah penumpang</b>
Umum	123
Mahasiswa	109
Pelajar	94

Berapa banyak bus yang harus disediakan untuk perjalanan tersebut?



9. Tentukanlah  $B^3 - 4B^2 + B - 4I$ , dengan matriks  $I$  merupakan matriks identitas berordo  $3 \times 3$  dan matriks  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. Jika matriks  $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , maka tentukanlah matriks  $D^3 - 4D^2 + D + 4.I$ , dengan matriks  $I$  merupakan matriks identitas berordo  $3 \times 3$

11. Tentukanlah nilai  $p$  dan  $q$  yang memenuhi syarat berikut ini!

a)  $R = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 0 & q \end{bmatrix}$  dan  $R^2 = I$

b)  $S = \begin{bmatrix} .3 & -1 \\ .2 & -5 \end{bmatrix}$  dan  $S^2 = p.S + q.I$



## Projek

Rancang sebuah permasalahan terkait pekerjaan tukang pos yang melibatkan matriks. Beri bobot lintasan kendaraan dari sisi jarak atau biaya dalam pelaksanaan tugas mengantar surat atau barang dari rumah ke rumah penduduk. Selesaikan tugas ini secara berkelompok. Buat laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

## 5. DETERMINAN DAN INVERS MATRIKS

### a. Determinan Matriks.



### Masalah-2.8

Siti dan teman-temannya makan di sebuah warung. Mereka memesan 3 ayam penyet dan 2 gelas es jeruk di kantin sekolahnya. Tak lama kemudian, Beni datang dan teman-temannya memesan 5 porsi ayam penyet dan 3 gelas es jeruk. Siti menantang Amir menentukan harga satu porsi ayam penyet dan harga es jeruk per gelas, jika Siti harus membayar Rp70.000,00 untuk semua pesanannya dan Beni harus membayar Rp115.000,00 untuk semua pesanannya, berapakah harga satu porsi ayam penyet dan es jeruk per gelasnya?



## Alternatif Penyelesaian

Cara I

Petunjuk : Ingat kembali materi sistem persamaan linier yang sudah kamu pelajari. Buatlah sistem persamaan linear dari masalah tersebut, lalu selesaikan dengan matriks.

Misalkan :

$x$  = harga satu porsi ayam penyet

$y$  = harga es jeruk per gelas

Sistem persamaan linearnya :  $3x + 2y = 70000$

$$5x + 3y = 115000$$

Dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70000 \\ 115000 \end{bmatrix}$$

Mengingat kembali bentuk umum persamaan linier dua variabel.

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Solusi persamaan tersebut adalah:

- Ingat kembali bagaimana menentukan himpunan penyelesain SPLDV. Tentunya, kamu mampu menunjukkannya.

Cara II

Dalam konsep matriks, nilai  $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$  disebut sebagai determinan matriks  $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ , dinotasikan  $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$  atau  $\det(A)$ , dengan matriks  $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = A$

Oleh karena itu, nilai x dan y pada persamaan (2) dapat ditulis menjadi:



dengan  $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ .

Kembali ke persamaan (1), dengan menerapkan persamaan (3), maka diperoleh:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 70000 & 2 \\ 115.000 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{210.000 - 230.000}{9 - 10} = \frac{-20.000}{-1} = 20.000$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 70.000 \\ 5 & 115.000 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{345.000 - 350.000}{9 - 10} = \frac{-5.000}{-1} = 5.000$$

Jadi, harga satu porsi ayam penyet adalah Rp20.000,00 dan harga satu gelas Jus adalah Rp5.000,00.

Notasi Determinan

Misalkan matriks  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Determinan dari matriks  $A$  dapat dinyatakan

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

### b. Sifat-Sifat Determinan.

Misalkan matriks  $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  dan matriks  $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5$$

$$\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -5$$

jadi  $|A| \times |B| = 25$

$$\begin{aligned} \text{Matriks } A \times B &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -17 & -16 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$\text{Dengan demikian } \det(A \times B) = |AB| = \begin{vmatrix} -17 & -16 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -153 + 128 = -25$$



### Sifat 2.5

Misalkan matriks  $A$  dan  $B$  merupakan matriks persegi berordo  $m \times m$  dengan  $m \in \mathbb{N}$ . Jika determinan matriks  $A$  dinotasikan  $|A|$  dan determinan matriks  $B$  dinotasikan  $|B|$ , maka  $|AB| = |A|.|B|$ .



### Contoh 2.8

Gambarkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut ini.

Diketahui  $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$  dan matriks  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ .

Tunjukkan bahwa  $|A \cdot B| = |A|.|B|$ !

### Alternatif Penyelesaian

Sebelum kita menentukan determinan  $A \cdot B$ , mari kita tentukan terlebih dahulu matriks  $A \cdot B$ , yaitu:

$$|A \cdot B| = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{bmatrix}.$$

Dengan matriks  $A \cdot B$  tersebut kita peroleh  $|A \cdot B| = \begin{bmatrix} 19 & 28 \\ 20 & 28 \end{bmatrix} = -28$ .

Sekarang kita akan bandingkan dengan nilai  $|A|.|B|$ . Dengan matriks  $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$  Maka  $|A| = 14$ , dan  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  Maka  $|B| = -2$  nilai  $|A|.|B| = 14.(-2) = -28$   
 $|A \cdot B| = |A|.|B| = -28$

Soal Tantangan....

- Selidiki apakah  $|A \cdot B \cdot C| = |A|.|B|.|C|$  untuk setiap matriks-matriks  $A, B$ , dan  $C$  berordo  $n \times n$ .
- Jika matriks  $A$  adalah matriks persegi, dan  $k$  adalah skalar. Coba telusuri, nilai determinan matriks  $k \cdot A$ .



## Contoh 2.9

Sebuah matriks  $P$  ordo  $2 \times 2$  dengan  $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  dengan  $a, b, c, d \in R$ .

Jika determinan  $P$  adalah  $\alpha$ , dengan  $\alpha \in R$ . Tentukanlah determinan

dari matriks  $Q = \begin{bmatrix} a & b \\ xc - sa & xd - sb \end{bmatrix}$  dengan  $x, y \in R$ .

### Alternatif Penyelesaian

Jika  $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , dan determinan matriks  $P$  adalah  $\alpha$ , maka berlaku  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc = \alpha$

Elemen matriks  $Q$  memiliki hubungan dengan matriks  $P$ , yaitu:

$q_{21} =$  hasil kali skalar  $x$  terhadap  $p_{21}$  – hasil kali skalar  $s$  terhadap  $p_{11}$ .

$q_{22} =$  hasil kali skalar  $x$  terhadap  $p_{22}$  – hasil kali skalar  $s$  terhadap  $p_{12}$ .

Tujuan kita sekarang adalah mereduksi matriks  $Q$  menjadi kelipatan matriks  $P$ . Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ xc - sa & xd - sb \end{vmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{baris 1} \\ \text{baris 2} \end{array}$$

Elemen baris 1 matriks  $Q$  = elemen baris 1 matriks  $P$ . Mereduksi dalam hal ini adalah mengoperasikan elemen baris 2 matriks  $Q$  menjadi elemen baris 2 matriks  $P$ . Unsur  $q_{21}$  dapat dioperasikan menjadi:

$(q_{21})^* = s \cdot q_{11} + q_{21}$ , akibatnya kita peroleh:

$$|Q| = \begin{vmatrix} a & b \\ xc & xd \end{vmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \text{baris 1*} \\ \text{baris 2*} \end{array}$$

Menurut sifat determinan matriks (silahkan minta penjelasan lebih lanjut dari guru Matematika), maka  $|Q| = x \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = x\alpha$ ,  $\left( \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \alpha \right)$ . jadi  $|Q| = x\alpha$



### Soal Tantangan....

Misal matriks  $P$  adalah matriks berordo  $3 \times 3$ , dengan  $|P|=\alpha$  dan matriks  $Q$  berordo  $3 \times 3$  dan mengikuti pola seperti contoh di atas.

Tentukan determinan matriks  $Q$ .

Perhatikan kembali matriks  $A$  di atas dan ingat kembali menentukan transpose sebuah matriks yang sudah dipelajari, Matriks  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  dan matriks transpose dari matriks  $A^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

$$\text{Determinan adalah } \det(A^t) = |A^t| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 8 = 5$$

Perhatikan dari hasil perhitungan  $\det(A)$  dan  $\det(A^t)$  diperoleh  $\det(A) = \det(A^t)$ .



### Sifat 2.5

Misalkan matriks  $A$  dan  $B$  berordo  $m \times m$  dengan  $m \in N$ . Jika  $\det(A) = |A|$  dan  $\det(A^{-1}) = |A^{-1}|$  maka



### Masalah-2.9

Sebuah perusahaan penerbangan menawarkan perjalanan wisata ke negara A, perusahaan tersebut mempunyai tiga jenis pesawat yaitu Airbus 100, Airbus 200, dan Airbus 300. Setiap pesawat dilengkapi dengan kursi penumpang untuk kelas turis, ekonomi, dan VIP. Jumlah kursi penumpang dari tiga jenis pesawat tersebut disajikan pada tabel berikut.

Kategori	Airbus 100	Airbus 200	Airbus 300
Kelas Turis	50	75	40
Kelas Ekonomi	30	45	25
Kelas VIP	32	50	30



Perusahaan telah mendaftar jumlah penumpang yang mengikuti perjalanan wisata ke negara A seperti pada tabel berikut.

Kategori	Jumlah Penumpang
Kelas Turis	305
Kelas Ekonomi	185
Kelas VIP	206

Berapa banyak pesawat masing-masing yang harus dipersiapkan untuk perjalanan tersebut?

### Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan kita menyelesaikan masalah ini, kita misalkan:

$x$  : banyaknya pesawat Airbus 100

$y$  : banyaknya pesawat Airbus 200

$z$  : banyaknya pesawat Airbus 300

Sistem persamaan yang terbentuk adalah:

$$\begin{array}{l} 50x + 75y + 40z = 305 \\ 30x + 45y + 25z = 185 \\ 32x + 50y + 30z = 206 \end{array} \leftrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 50 & 75 & 40 & x \\ 30 & 45 & 25 & y \\ 32 & 50 & 30 & z \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 305 \\ 185 \\ 206 \end{array} \right]$$

Sebelum ditentukan penyelesaian masalah di atas, terlebih dahulu kita periksa apakah matriks  $A$  adalah matriks tak singular.

Cara untuk menentukan  $\det(A)$ , dengan Metode Sarrus. Yaitu sebagai berikut:

Misalnya matriks  $A_{3 \times 3}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} a_{11} \rightarrow \\ a_{21} \rightarrow \\ a_{31} \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} a_{12} \rightarrow \\ a_{22} \rightarrow \\ a_{32} \rightarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} a_{13} \rightarrow \\ a_{23} \rightarrow \\ a_3 \rightarrow \end{matrix}$$
$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Untuk matriks pada Masalah 4.9,

$$\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 & 50 & 75 \\ 30 & 45 & 25 & 30 & 45 \\ 32 & 50 & 30 & 32 & 50 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} - & - & - \\ + & + & + \end{matrix}$$
$$= (50 \cdot 45 \cdot 30) + (75 \cdot 25 \cdot 32) + (40 \cdot 30 \cdot 50) - (32 \cdot 45 \cdot 40) - (50 \cdot 25 \cdot 50) - (30 \cdot 30 \cdot 75)$$
$$= -100.$$

Analog dengan persamaan (2), kita akan menggunakan determinan matriks untuk menyelesaikan persoalan di atas.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 305 & 75 & 40 \\ 185 & 45 & 25 \\ 206 & 50 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-300}{-100} = 3 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 305 & 40 \\ 30 & 185 & 25 \\ 32 & 206 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-100}{-100} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 305 \\ 30 & 45 & 185 \\ 32 & 50 & 206 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{vmatrix}} = \frac{-200}{-100} = 2$$



Oleh karena itu:

banyak pesawat Airbus 100 yang disediakan sebanyak 3 unit  
banyak pesawat Airbus 200 yang disediakan sebanyak 1 unit  
banyak pesawat Airbus 300 yang disediakan sebanyak 2 unit.

- Analog dengan cara II untuk penyelesaian masalah Pembelian Tiket PRJ, coba kamu selesaikan masalah pengadaan pesawat ini dengan cara yang sama. Mintalah bimbingan dari gurumu.

### c. Invers Matriks

Perhatikan Masalah-2.8 di atas, kamu dapat menyelesaikan masalah tersebut dengan cara berikut. Perhatikan sistem persamaan linier yang dinyatakan dalam matriks berikut,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70000 \\ 115000 \end{pmatrix} \leftrightarrow A \cdot X = B \leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

Karena  $A$  adalah matriks tak singular, maka matriks  $A$  memiliki invers. Oleh karena itu, langkah berikutnya adalah menentukan matriks  $X$ .

$$X = \frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 70000 \\ 115000 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -20000 \\ -5000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20000 \\ 5000 \end{pmatrix}$$

Diperoleh  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20000 \\ -5000 \end{pmatrix}$   $x = 20.000$  dan  $y = 5.000$

Ditemukan jawaban yang sama dengan cara I. Tetapi perlu pertimbangan pemilihan cara yang digunakan menyelesaikan persoalannya.

- Mengajak siswa untuk menemukan aturan untuk menentukan invers sebuah matriks berordo  $2 \times 2$  dengan meninjau kembali langkah-langkah pemecahan masalah di atas. Membuat kesepakatan terkait batasan persyaratan yang diperlukan untuk menentukan invers sebuah matriks.

Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah matriks yang memenuhi persamaan berikut.

$$A \cdot X = B \dots \dots \dots \quad (4)$$



Persoalan kita: bagaimana menentukan matriks  $X$  pada Persamaan (4)?

Pada teori dasar matriks, bahwa tidak ada operasi pembagian pada matriks, tetapi yang ada adalah invers matriks atau kebalikan matriks. Misalkan  $A$  matriks persegi, berordo  $2 \times 2$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Maka invers matriks  $A$ , dinotasikan  $A^{(-1)}$ :

$$A^{-1} = \frac{1}{(a.d - b.c)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \text{ dengan } a.d \neq b.c$$

$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$  disebut adjoint matriks  $A$ , dinotasikan  $adj(A)$ .

Salah satu sifat invers matriks adalah  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ . Akibatnya persamaan (4) dapat dimodifikasi menjadi:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B, \text{ (semua ruas dikalikan } A^{-1}).$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$LX = A^{-1} B$$

$$X = A^{-1} B \text{ (karena } IX = X\text{)} \dots \quad (5)$$

Rumusan ini berlaku secara umum, dengan syarat  $\det(A) \neq 0$ , namun ada beberapa teknik yang harus diperhatikan. Untuk selanjutnya akan dikaji pada subbab berikut.



### Definisi 2.3

Misalkan  $A$  sebuah matriks persegi dengan ordo  $n \times n$ ,  $n \in N$ .

- Matriks  $A$  disebut matriks tidak singular, apabila  $\det(A) \neq 0$ .
  - Matriks  $A$  disebut matriks singular, apabila  $\det(A) = 0$ .
  - $A^{-1}$  disebut invers matriks  $A$  jika dan hanya jika  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ , dengan  $I$  adalah matriks identitas perkalian matriks.



## Masalah-2.10

Agen perjalanan Sumatera Holidays menawarkan paket perjalanan ke Danau Toba, yaitu menginap di Inna Parapat Hotel, transportasi ke tiap tempat wisata, dan makan di Singgalang Restaurant. Paket perjalanan yang ditawarkan yaitu Paket I terdiri 4 malam menginap, 3 tempat wisata dan 5 kali makan dengan biaya Rp2.030.000,00. Paket II dengan 3 malam menginap, 4 tempat wisata dan 7 kali makan dengan biaya Rp1.790.000,00. Paket III dengan 5 malam menginap, 5 tempat wisata dan 4 kali makan dengan biaya Rp2.500.000,00. Berapakah biaya sewa hotel tiap malam, satu kali transportasi dan satu kali makan?



## Alternatif Penyelesaian

Misalkan

$x$  : biaya sewa hotel

$y$  : biaya untuk transportasi

$z$  : biaya makan

	Paket 1	Paket 2	Paket 3
Sewa hotel	4	3	5
Transportasi	3	4	5
Makan	5	7	4
Biaya Total	2.030.000	1.790.000	2.500.000

Dalam bentuk matriks adalah seperti berikut :

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2030000 \\ 1790000 \\ 2500000 \end{bmatrix}$$

**Determinan untuk matriks masalah 2.10 di atas :**

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix} \text{ Maka } \det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= (4 \times 4 \times 4) + (3 \times 5 \times 5) + (5 \times 3 \times 7) - (5 \times 4 \times 5) - (4 \times 5 \times 7)$$
$$- (3 \times 3 \times 4) = -32$$

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 2030000 & 3 & 5 \\ 1790000 & 4 & 5 \\ 2500000 & 7 & 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}} = -\frac{17520000}{-32} = 547500$$



$$y = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 2030000 & 5 \\ 3 & 1790000 & 5 \\ 5 & 2500000 & 4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}} = -\frac{18960000}{-32} = 592500$$
$$z = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2030000 \\ 3 & 4 & 1790000 \\ 5 & 7 & 2500000 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}} = -\frac{3740000}{-32} = 116875$$

Oleh karena itu, biaya sewa hotel tiap malam adalah Rp547.500,00; biaya transportasi adalah Rp592.500,00; dan biaya makan adalah Rp116.875,00

Cobalah kamu selesaikan masalah tersebut dengan cara menentukan invers matriks. Mintalah bimbingan dari gurumu.

#### d. Metode Kofaktor

Terlebih dahulu kamu memahami tentang minor suatu matriks. Minor suatu matriks  $A$  dilambangkan dengan  $M_{ij}$  adalah determinan matriks bagian dari  $A$  yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen pada baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$ .

Jika  $A$  adalah sebuah matriks bujur sangkar berordo  $n \times n$ , maka minor elemen  $a_{ij}$  yang dinotasikan dengan  $M_{ij}$  didefinisikan sebagai determinan dari sub matriks  $A$  berordo  $(n-1) \times (n-1)$  setelah baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dihilangkan.

Misalkan matriks  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

minor elemen  $a_{11}$  adalah  $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

sehingga  $M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$



$M_{11}$ ,  $M_{12}$ , dan  $M_{13}$  merupakan submatriks hasil ekspansi baris ke-1 dari matriks A. Matriks kofaktor matriks A dilambangkan

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \text{ dan } c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}) = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -19$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 13 \quad c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 23$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -9 \quad c_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -13$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -5 \quad c_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

Dari masalah di atas diperoleh matriks kofaktor A, dengan menggunakan rumus :

$$\begin{aligned} C(A) &= \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -19 & 13 & 1 \\ 23 & -9 & -13 \\ -5 & -5 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matriks adjoint dari matriks A adalah transpose dari kofaktor-kofaktor matriks tersebut, dilambangkan dengan  $\text{adj}(A) = (C_{ij})^t$ , yaitu:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^t = \begin{bmatrix} -19 & 23 & -5 \\ 13 & -9 & -5 \\ 1 & -13 & 7 \end{bmatrix}$$



Dari masalah 2.10 di atas, diperoleh inver matriks A. Dengan rumus :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$$

$$\text{Sehingga: } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A) = \frac{1}{-32} \begin{pmatrix} -19 & 23 & -5 \\ 13 & -9 & -5 \\ 1 & -13 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{32} & \frac{-23}{32} & \frac{5}{32} \\ \frac{-13}{32} & \frac{9}{32} & \frac{5}{32} \\ \frac{-1}{32} & \frac{13}{32} & \frac{-7}{32} \end{pmatrix}$$

Berdiskusilah dengan temanmu satu kelompok, coba tunjukkan bahwa  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ , dengan  $I$  adalah matriks identitas  $3 \times 3$ .

$$\text{Bentuk matriks permasalahan 2.10 adalah } \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2030000 \\ 1790000 \\ 2500000 \end{pmatrix}$$

Bentuk ini dapat kita nyatakan dalam bentuk persamaan  $AX = B$ . Untuk memperoleh matriks  $X$  yang elemen-elemennya menyatakan biaya sewa hotel, biaya transportasi dan biaya makan, kita kalikan matriks  $A^{-1}$  ke ruas kiri dan ruas kanan persamaan  $AX = B$ , sehingga diperoleh

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{19}{32} & \frac{-23}{32} & \frac{5}{32} \\ \frac{-13}{32} & \frac{9}{32} & \frac{5}{32} \\ \frac{3}{32} & \frac{3}{32} & \frac{3}{32} \\ \frac{-1}{32} & \frac{13}{32} & \frac{-7}{32} \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{32} & \frac{1}{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2030000 \\ 1790000 \\ 2500000 \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} 547500 \\ 592500 \\ 116875 \end{pmatrix}$$

Hasil yang diperoleh dengan menerapkan cara determinan dan cara invers, diperoleh hasil yang sama, yaitu; biaya sewa hotel tiap malam adalah Rp547.500,00; biaya transportasi adalah Rp592.500,00; dan biaya makan adalah Rp116.875,00.

Berdasarkan langkah-langkah pemecahan masalah di atas, dapat disimpulkan



### Sifat 2.6

Misalkan matriks  $A$  berordo  $n \times n$  dengan  $n \in N$ . Jika  $\det(A) \neq 0$ ,  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$  dan  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ ,  $I$  adalah matriks identitas perkalian matriks

#### e. Sifat-Sifat Invers Matriks

Misalkan matriks  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 2(-2) - 1(-3) = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\det(A^{-1})} \text{adj}(A^{-1}) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = A$$



Perhatikan uraian di atas diperoleh bahwa  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

Coba buktikan sifat berikut setelah kamu mempelajari invers matriks



### Sifat 2.7

Misalkan matriks  $A$  dan  $B$  berordo  $m \times m$  dengan  $m \in N$ . Jika  $\det(A) = |A|$  dan  $\det(B^{-1}) = |B^{-1}|$  maka  $|B^{-1}| = 1/|A|$



### Sifat 2.8

Misalkan matriks  $A$  dan  $B$  berordo  $m \times m$  dengan  $m \in N$ .  $\det(A) \neq 0$ , Jika  $A^{-1}$  adalah invers matriks  $A$ , maka  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

Perhatikan pertanyaan, apakah  $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

Misalkan matriks  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  dan  $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 2(-2) - 1(-3) = -1$$



$$\begin{aligned}A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\det(B) = 0(-2) - 3(-1) = 3$$

$$\begin{aligned}B^{-1} &= \frac{1}{\det(B)} \text{adj}(B) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh  $\det(AB) = -3 - 0 = -3$ .

$$\begin{aligned}\text{Selanjutnya, } (AB)^{-1} &= \frac{1}{\det(AB)} \text{adj}(AB) = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\(AB)^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$B^{-1} A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dari perhitungan di atas diperoleh  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ .



### Sifat 2.9

Misalkan matriks  $A$  dan  $B$  berordo  $n \times n$  dengan  $n \in N$ .  $\det(A) \neq 0$  dan  $\det(B) \neq 0$ , Jika  $A^{-1}$  dan  $B^{-1}$  adalah invers matriks  $A$ , dan  $B$  maka  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ .

- Coba kamu diskusikan dengan temanmu satu kelompok, apakah  $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$ . Jika tidak, beri alasannya!



## Uji Kompetensi 2.2

1. Misalkan  $A$  sebarang matriks persegi. Jika pertukaran elemen-elemen sebarang dua baris atau dua kolom dari matriks  $A$ , maka buktikan bahwa nilai determinannya berubah tanda.
  2. Misalkan  $A$  sebarang matriks persegi. Buktiakan bahwa jika semua unsur dalam suatu baris (atau kolom) matriks  $A$  dikalikan dengan sebuah bilangan  $k \in R$ , maka determinannya juga dikalikan dengan bilangan itu.
  3. Jika  $B$  matriks persegi dengan  $\det(B) \neq 0$ , tunjukkan bahwa  $[B']^{-1} = [B^{-1}]'$ .
  4. Selidiki bahwa  $\det(K^n) = (\det K)^n$ , untuk matriks;
    - a)  $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  dengan  $n = 2$
    - b)  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$  dengan  $n = 6$
5. Diketahui  $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -8$ , tentukanlah:
- a)  $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$
  - b)  $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$
6. Tentukanlah nilai  $z$  yang memenuhi persamaan berikut!

$$\begin{vmatrix} z & -3 \\ 3 & 1-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & z & -6 \\ 1 & 3 & z-5 \end{vmatrix}.$$



7. Selidiki bahwa  $\det(C+D)=\det C + \det D$  ! untuk setiap matriks  $C$  dan  $D$  merupakan matriks persegi. i.
8. Diberikan matriks  $M$  adalah matriks berordo  $2 \times 2$ , dengan  $|M| \neq 0$ . Tentukan hubungan  $|M|$  dengan  $\det(M^T)$ . Coba kamu generalisasikan untuk matriks  $M$  berordo  $n \times n$ !
9. Tentukanlah nilai  $z$  yang memenuhi persamaan berikut ini!

$$\begin{vmatrix} z & -1 \\ 3 & 1-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & z & -6 \\ 1 & 3 & z-5 \end{vmatrix}$$

10. Jika semua elemen baris ke-1 suatu matriks persegi adalah nol. Tentukanlah determinan matriks tersebut!
11. Diketahui matriks  $R$  adalah matriks berordo  $n \times n$  dengan semua elemen kolom ke-1 adalah nol. Tentukanlah determinan matriks tersebut. Berikan juga contohnya!
12. Periksalah kebenaran setiap pernyataan berikut ini. Berikanlah contoh penyangkal untuk setiap pernyataan yang tidak berlaku!
  - a)  $\det(2A)=2.\det(A)$
  - b)  $|A^2|=|A|^2$
  - c)  $\det(I+A)=1+\det(A)$
13. Misalkan matriks-matriks  $P$  dan  $Q$  adalah matriks berordo  $n \times n$ , dengan  $PQ \neq QP$ . Apakah  $\det(PQ) = \det(QP)$ ? Jelaskan!
14. Masalah Nutrisi  
Winarno bermaksud mengikuti ujian saringan masuk perwira. Setelah berkonsultasi dengan seorang perwira dan memperoleh saran mengenai pola makan yang hendak dikonsumsi lebih baik dimasak sendiri. Pengalaman perwira tersebut menyarankan untuk mencampurkan dua sumber zat gizi dalam jumlah yang berbeda untuk menghasilkan tiga jenis biskuit. Jumlah (dalam satuan gram) kalsium, protein, dan karbohidrat dalam setiap sumber gizi ditunjukkan oleh matriks  $G$ , dan jumlah (dalam satuan gram) setiap sumber zat gizi yang dikonsumsi dalam setiap biskuit ditunjukkan oleh matriks  $J$ .



Sumber Sumber

I II

$$G = \begin{bmatrix} 12 & 16 \\ 32 & 24 \\ 20 & 8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Kalsium} \\ \text{Protein} \\ \text{Karbohidrat} \end{array}$$

Biskuit a Biskuit b Biskuit c

$$J = \begin{bmatrix} 24 & 18 & 25 \\ 25 & 32 & 16 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Sumber I} \\ \text{Sumber II} \end{array}$$

- Tentukanlah jumlah kalsium dalam biskuit B!
- Hitunglah  $G \cdot J$  dan jelaskan arti setiap elemen matriks tersebut!

15. Masalah alokasi sumber daya.

Agen perjalanan menawarkan paket perjalanan ke Bali. Paket I terdiri 4 malam menginap, 3 tempat wisata dan 5 kali makan. Paket II dengan 3 malam menginap, 4 tempat wisata dan 7 kali makan. Paket III dengan 5 malam menginap, 4 tempat wisata dan tidak ada makan. Sewa hotel Rp400.000,00 per malam, tranprotasi ke tiap tempat wisata Rp80.000,00, dan makan di restoran yang ditunjuk Rp90.000,00.

Nyatakan matriks harga sewa hotel, tranportasi dan makan.

Nyatakan matriks paket yang ditawarkan.

Dengan menggunakan perkalian matriks, tentukan matriks biaya untuk tiap paket.

Paket mana yang menawarkan biaya termurah?

16. Masalah Persediaan Toko Cat.

Sebuah toko penjual cat eceran memiliki persediaan tiga jenis cat eksterior yaitu regular, deluxe, dan commercial. Cat-cat tersebut tersedia dalam empat pilihan warna yaitu, biru, hitam, kuning, dan coklat. Banyak penjualan cat (dalam gallon) selama satu minggu dicatat dalam matriks R, sedangkan inventaris toko pada awal minggu dalam matriks S berikut ini.

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & 6 \\ 6 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Biru} \\ \text{Hitam} \\ \text{Kuning} \\ \text{Cokelat} \end{array} \begin{array}{l} \text{Regular} \\ \text{Deluxe} \\ \text{Commercial} \end{array}$$

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Biru} \\ \text{Hitam} \\ \text{Kuning} \\ \text{Cokelat} \end{array} \begin{array}{l} \text{Regular} \\ \text{Deluxe} \\ \text{Commercial} \end{array}$$



- Tentukan inventaris toko pada akhir minggu
- Jika toko tersebut menerima kiriman stok baru yang dicatat dalam matriks  $T$ .

Tentukan inventaris toko yang baru.

17. Dengan menggunakan matriks persegi, tunjukkan bahwa  $(B^{-1})^{-1} = B$  dan  $[B^{t-1}] = [B^{-1}]^t$

18. Tentukanlah determinan dari matriks

$$M = \begin{bmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{bmatrix}$$

19. Diberikan suatu sistem persamaan linier dua variabel

$$x + y = 3$$

$$2x - y = 0$$

20. Tentukanlah nilai  $x$  dan  $y$  yang memenuhi sistem tersebut dengan menggunakan konsep matriks.

## D. PENUTUP

Setelah telah selesai membahas materi matriks di atas, ada beberapa hal penting sebagai kesimpulan yang dijadikan pengangan dalam mendalami dan membahas materi lebih lanjut, antara lain:

- Penjumlahan sebarang matriks dengan matriks identitas penjumlahan hasilnya matriks itu sendiri. Matriks identitas penjumlahan adalah matriks nol.
- Dalam operasi penjumlahan dua matriks berlaku sifat komutatif dan assosiatif, misal jika  $A$  dan  $B$  adalah matriks, maka
  - $\underbrace{A+A+A+\cdots+A}_k = kA$
  - $A + B = B + A$
  - $A + I = I + A$ , dengan  $I$  adalah matriks identitas penjumlahan matriks
  - $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Hasil kali sebuah matriks dengan suatu skalar atau suatu bilangan real  $k$  akan menghasilkan sebuah matriks baru yang berordo sama dan memiliki elemen-elemen  $k$  kali elemen-elemen matriks semula.



4. Dua matriks hanya dapat dikalikan apabila banyaknya kolom matriks yang dikali sama dengan banyaknya baris matriks pengalinya.
5. Matriks  $A$  dan  $B$  dapat dikalikan apabila banyak kolom matriks  $A$  sama dengan banyak baris matriks  $B$ . Hasil kali matriks  $A$  dan  $B$  menghasilkan matriks  $C$  yang elemen-elemennya merupakan hasil kali elemen baris matriks  $A$  dan elemen kolom matriks  $B$ , ditulis  $A_{p \times q} \times B_{q \times r} = C_{p \times r}$ .
6. Hasil perkalian matriks  $A$  dengan matriks identitas, hasilnya adalah matriks  $A$ .
7. Perkalian dua atau lebih matriks, tidak memenuhi sifat komutatif. Tetapi perkalian matriks memenuhi sifat asosiatif.
8. Matriks yang memiliki invers adalah matriks persegi dengan nilai determinannya tidak nol (0).

