



Bab 3

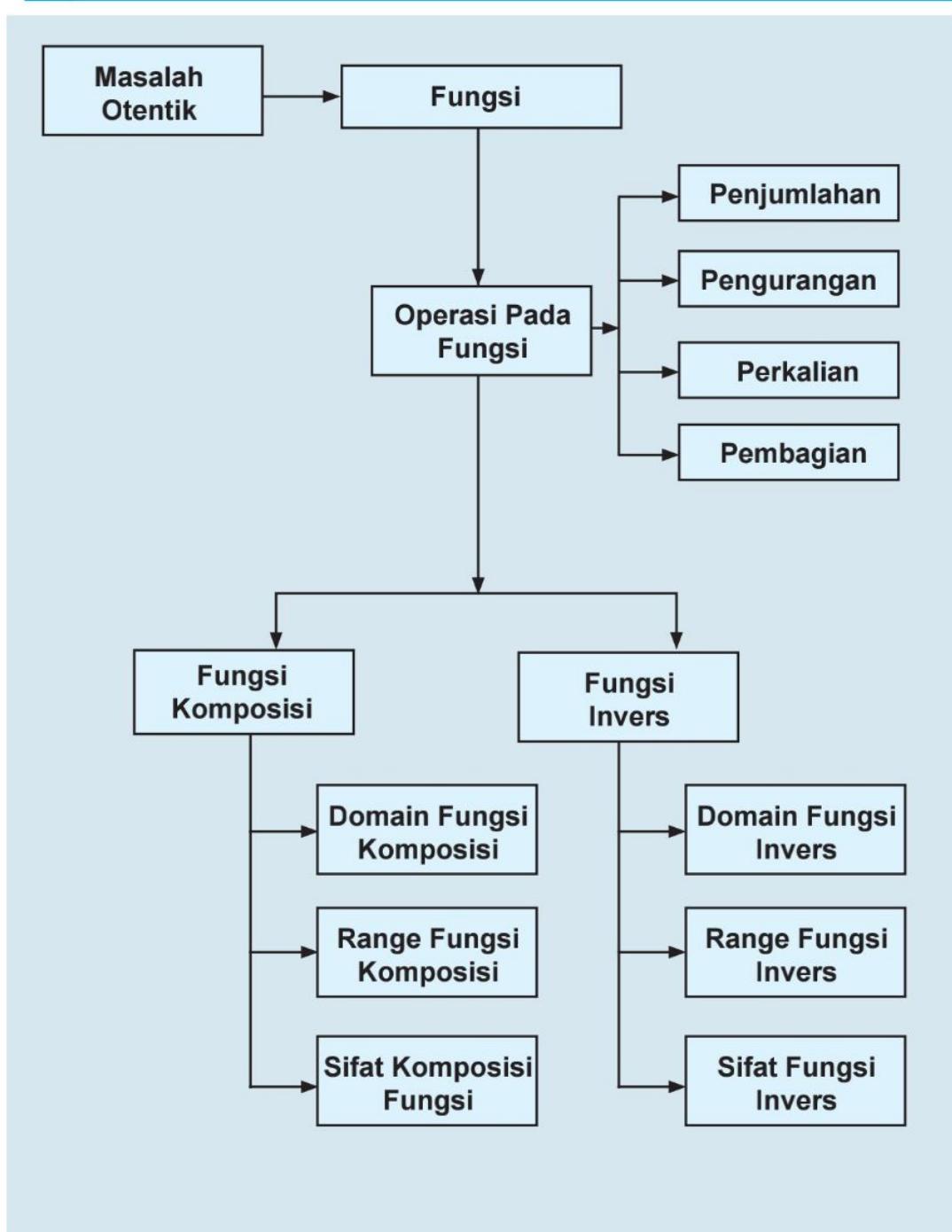
FUNGSI KOMPOSISI DAN FUNGSI INVERS

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<ol style="list-style-type: none">Mendeskripsikan konsep fungsi dan menerapkan operasi aljabar (penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian) pada fungsi.Menganalisis konsep dan sifat suatu fungsi dan melakukan manipulasi aljabar dalam menentukan invers fungsi dan fungsi invers.Mendeskripsikan dan menganalisis sifat suatu fungsi sebagai hasil operasi dua atau lebih fungsi yang lain.Mendeskripsikan konsep komposisi fungsi dengan menggunakan konteks sehari-hari dan menerapkannya.Mengolah data masalah nyata dengan menerapkan aturan operasi dua fungsi atau lebih dan menafsirkan nilai variabel yang digunakan untuk memecahkan masalah.Memilih strategi yang efektif dan menyajikan model matematika dalam memecahkan masalah Nyata terkait fungsi invers dan invers fungsi.Merancang dan mengajukan masalah dunia nyata yang berkaitan dengan Komposisi fungsi dan menerapkan berbagai aturan dalam menyelesaiakannya.	<p>Melalui pembelajaran materi fungsi komposisi dan fungsi invers, siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none">Menjelaskan karakteristik masalah autentik yang penyelesaiannya terkait dengan fungsi komposisi dan fungsi invers.Merancang model matematika dari permasalahan autentik yang merupakan fungsi komposisi dan fungsi invers.Menyelesaikan model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan.Menginterpretasikan hasil penyelesaian masalah yang diberikan.Menuliskan konsep fungsi komposisi dan fungsi invers berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri. <p>Istilah Penting</p> <ul style="list-style-type: none"><i>Fungsi</i><i>Fungsi komposisi</i><i>Fungsi invers</i>



B. PETA KONSEP





C. MATERI PEMBELAJARAN

Pada Bab 5 kelas X, kita telah mempelajari konsep relasi dan fungsi. Konsep tersebut merupakan materi prasyarat dalam mempelajari materi pada bab ini. Kita mempelajari dan menemukan konsep fungsi komposisi dan fungsi invers dengan melakukan pengamatan dan pemahaman pada beberapa masalah dan contoh. Pertama sekali, mari kita memahami operasi aljabar pada fungsi.

1. Operasi Aljabar Pada Fungsi

Pada subbab ini, kita akan mempelajari operasi aljabar (penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian pada fungsi). Perhatikan masalah berikut.



Masalah-3.1

Seorang fotografer dapat menghasilkan gambar yang bagus melalui dua tahap, yaitu; tahap pemotretan dan tahap *editing*. Biaya yang diperlukan pada tahap pemotretan (B_1) adalah Rp500,- per gambar, mengikuti fungsi: $B_1(g) = 500g + 2500$ dan biaya pada tahap *editing* (B_2) adalah Rp100,- per gambar, mengikuti fungsi: $B_2(g) = 100g + 500$, dengan g adalah banyak gambar yang dihasilkan.

- Berapakah total biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 10 gambar dengan kualitas yang bagus?
- Tentukanlah selisih antara biaya pada tahap pemotretan dengan biaya pada tahap *editing* untuk 5 gambar.

Alternatif Penyelesaian

$$\text{Fungsi biaya pemotretan: } B_1(g) = 500g + 2500$$

$$\text{Fungsi biaya editing: } B_2(g) = 100g + 500$$

- Untuk menghasilkan gambar yang bagus, harus dilalui 2 tahap proses yaitu pemotretan dan *editing*, sehingga fungsi biaya yang dihasilkan adalah:

$$\begin{aligned}B_1(g) + B_2(g) &= (500g + 2500) + (100g + 500) \\&= 600g + 3000\end{aligned}$$

Total biaya untuk menghasilkan 10 gambar ($g = 10$) adalah:

$$B_1(g) + B_2(g) = 600g + 3000$$

$$B_1(10) + B_2(10) = (600 \times 10) + 3000 \\= 9000$$

Jadi total biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 10 gambar dengan kualitas yang bagus adalah Rp9000,-



- b) Selisih biaya tahap pemotretan dengan tahap *editing* adalah:

$$\begin{aligned}B_1(g) - B_2(g) &= (500g + 2500) - (100g + 500) \\&= 400g + 2000\end{aligned}$$

Selisih biaya pemotretan dengan biaya *editing* untuk 5 gambar ($g = 5$) adalah:

$$\begin{aligned}B_1(g) - B_2(g) &= 400g + 2000 \\B_1(5) - B_2(5) &= (400 \times 5) + 2000 \\&= 4000\end{aligned}$$

Jadi selisih biaya yang diperlukan untuk menghasilkan 5 gambar dengan kualitas yang bagus adalah Rp4000,-

Perhatikan jumlah biaya pada bagian (a) dan selisih biaya pada bagian (b).

$$B_1(g) = 500g + 2500 \text{ sehingga } B_1(5) = 5000 \text{ dan } B_1(10) = 7500.$$

$$B_2(g) = 100g + 500 \text{ sehingga } B_2(5) = 1000 \text{ dan } B_2(10) = 1500$$

$$\begin{aligned}B_J(g) &= B_1(g) + B_2(g) = 600g + 3000 \text{ sehingga } B_J(10) = 9000 \text{ dan } B_1(10) + B_2(10) \\&= 7500 + 1500 = 9000\end{aligned}$$

Demikian juga,

$$\begin{aligned}B_S(g) &= B_1(g) - B_2(g) = 400g + 2000 \text{ sehingga } B_S(5) = 4000 \text{ dan } B_1(5) - B_2(5) \\&= 5000 - 1000 = 4000.\end{aligned}$$



Definisi 3.1

Jika f suatu fungsi dengan daerah asal D_f dan g suatu fungsi dengan daerah asal D_g , maka pada operasi aljabar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dinyatakan sebagai berikut.

- a) Jumlah f dan g ditulis $f + g$ didefinisikan sebagai

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ dengan daerah asal } D_{f+g} = D_f \cap D_g.$$

- b) Selisih f dan g ditulis $f - g$ didefinisikan sebagai

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \text{ dengan daerah asal } D_{f-g} = D_f \cap D_g.$$

- c) Perkalian f dan g ditulis $f \times g$ didefinisikan sebagai

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \text{ dengan daerah asal } D_{f \times g} = D_f \cap D_g.$$

- d) Pembagian f dan g ditulis $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$.



Contoh 3.1

Diketahui fungsi $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = x^2 - 9$. Tentukanlah fungsi-fungsi berikut dan tentukan pula daerah asalnya!

a) $(f + g)(x)$

c) $(f \times g)(x)$

b) $(f - g)(x)$

d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Alternatif Penyelesaian

Daerah asal fungsi $f(x) = x + 3$ adalah $D_f = \{x | x \in R\}$ dan daerah asal fungsi $g(x) = x^2 - 9$ adalah $D_g = \{x | x \in R\}$

a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= (x + 3) + (x^2 - 9)$$

$$= x^2 + x - 6$$

Daerah asal fungsi $(f + g)(x)$ adalah:

$$\begin{aligned} D_{f+g} &= D_f \cap D_g \\ &= \{x | x \in R\} \cap \{x | x \in R\} \\ &= \{x | x \in R\} \end{aligned}$$

b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$$= (x + 3) - (x^2 - 9)$$

$$= -x^2 + x + 12$$

Daerah asal fungsi $(f - g)(x)$ adalah:

$$\begin{aligned} D_{f-g} &= D_f \cap D_g \\ &= \{x | x \in R\} \cap \{x | x \in R\} \\ &= \{x | x \in R\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} c) \quad (f \times g)(x) &= f(x) \times g(x) \\ &= (x + 3) \times (x^2 - 9) \\ &= x^3 + 3x^2 - 9x - 27 \end{aligned}$$

Daerah asal fungsi $(f \times g)(x)$ adalah

$$\begin{aligned} D_{f \times g} &= D_f \cap D_g \\ &= \{x | x \in R\} \cap \{x | x \in R\} \\ &= \{x | x \in R\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \left(\frac{f}{g} \right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= \frac{x+3}{x^2-9} \\ &= \frac{x+3}{(x+3)(x-3)} \\ &= \frac{1}{x-3}, \quad x \neq -3, x \neq 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g \text{ dan } g(x) \neq 0 \\ &= \{x | x \in R\} \cap \{x | x \in R\} \text{ dan } x^2 - 9 \neq 0 \\ &= \{x | x \in R\} \text{ dan } (x+3)(x-3) \neq 0 \\ &= \{x | x \in R\} \text{ dan } x \neq -3, x \neq 3 \\ &= \{x | x \in R, x \neq -3, x \neq 3\} \end{aligned}$$

Latihan

Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ dan $g(x) = \sqrt{x-2}$. Tentukanlah fungsi-fungsi berikut dan tentukan pula daerah asalnya!

a) $(f + g)(x)$ c) $(f \times g)(x)$

b) $(f - g)(x)$ d) $\left(\frac{f}{g} \right)(x)$



2. Menemukan Konsep Fungsi Komposisi

Setelah kita memahami operasi aljabar pada fungsi, maka pada subbab ini, kita akan membicarakan fungsi komposisi dari suatu fungsi. Untuk mendapatkan konsep fungsi komposisi, kamu pahami dan pelajarilah beberapa masalah kasus dan contoh-contoh berikut.



Masalah-3.2

Suatu bank di Amerika menawarkan harga tukar Dollar Amerika (USD) ke Ringgit Malaysia (MYR), yaitu; 1 USD = 3,28 MYR, dengan biaya penukaran sebesar 2 USD untuk setiap transaksi penukaran. Kemudian salah satu bank di Malaysia menawarkan harga tukar ringgit Malaysia (MYR) ke Rupiah Indonesia (IDR), yaitu; 1 MYR = Rp3.169,54, dengan biaya penukaran sebesar 3 MYR untuk setiap transaksi penukaran.

Seorang turis asal Amerika ingin bertamasya ke Malaysia kemudian melanjutkannya ke Indonesia dengan membawa uang sebesar 2.000 USD. Berapa IDR akan diterima turis tersebut jika pertama dia menukarkan semua uangnya ke mata uang Ringgit Malaysia di Amerika dan kemudian menukarnya ke Rupiah Indonesia di Malaysia?

Alternatif Penyelesaian

Masalah ini dapat diselesaikan dua tahap penukaran.

Langkah 1:

Uang sebesar 2.000 USD akan ditukar ke Ringgit Malaysia di Amerika dengan biaya penukaran sebesar 2 USD, maka jumlah uang yang diterima turis tersebut adalah:

$$(2.000 - 2) \times 3,28 \text{ MYR} = 1.998 \times 3,28 \text{ MYR} = 6.553,44 \text{ MYR}$$

Langkah 2:

Uang sebesar 6.553,44 MYR akan ditukar ke mata uang Rupiah Indonesia, dan perlu di ingat bahwa biaya penukaran sebesar 3 MYR. Uang yang diterima turis tersebut adalah:

$$(6.553,44 - 3) \times 3.169,54 = 6.550,44 \times 3.169,54 = 20.761.881,60 \text{ IDR}$$

Turis tersebut menerima uang rupiah Indonesia sebesar 20.761.881,60 IDR.

Perhitungan kedua transaksi di atas dapat kita buat model matematikanya ke dalam dua fungsi sebagai berikut.



Misalkan :

t = jumlah uang dalam USD

x = jumlah uang dalam MYR

y = jumlah uang dalam IDR

Transaksi penukaran pertama dapat kita tuliskan dengan

$$x = 3,28(t - 2)$$

$$x = 3,28t - 6,56$$

karena x merupakan sebuah fungsi t , maka dapat ditulis:

$$x(t) = 3,28t - 6,56 \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

Untuk transaksi penukaran kedua dapat ditulis sebagai berikut.

$$y = 3.169,54(x - 3)$$

$$y = 3.169,54x - 9.508,62$$

karena y fungsi dari x , maka dapat ditulis

$$y(x) = 3.169,54x - 9.508,62 \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Dengan mensubstitusi persamaan 1 ke persamaan 2 kita peroleh:

$$y(x) = y(x(t)), \text{ misal } f(t) = y(x(t)), \text{ maka}$$

$$f(t) = y(x(t))$$

$$= 3.169,54(3,28t - 6,56) - 9.508,62$$

$$= 10.396,09t - 20792,18 - 9.508,62$$

$$f(t) = 10.396,09t - 30.300,80$$

Fungsi $f(t) = y(x(t))$ ini merupakan fungsi komposisi x dan y dalam t yang dilambangkan dengan $(y \circ x)(t)$ dan didefinisikan dengan $(y \circ x)(t) = y(x(t))$.

Maka fungsi komposisi x dan y pada masalah di atas adalah

$$(y \circ x)(t) = 10.396,09t - 30.300,80 \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$



Dengan menggunakan fungsi komposisi $(y \circ x)(t)$ seperti pada persamaan 3, maka dapat kita hitung jumlah uang turis tersebut dalam mata uang rupiah Indonesia untuk $t = 2000$ USD seperti berikut.

$$\begin{aligned}(y \circ x)(t) &= 10.396,09 t - 30.300,80 \\&= 10.396,09 \times (2.000) - 30.300,80 \\&= 20.792.180 - 30.300,80 \\&= 20.761.881,60\end{aligned}$$

Jumlah uang turis tersebut dalam rupiah adalah Rp20.761.881,60 Perhatikan bahwa hasilnya sama dengan langkah pertama yang kita lakukan.

Agar kamu lebih memahami fungsi komposisi, perhatikanlah masalah berikut.

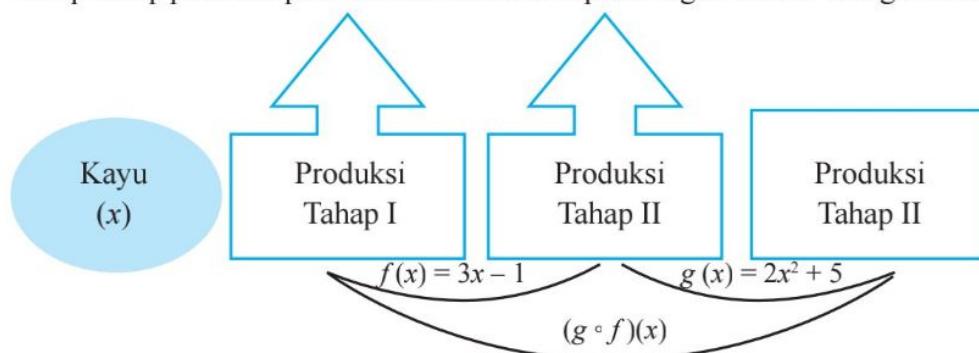


Masalah-3.3

Suatu pabrik kertas berbahan dasar kayu memproduksi kertas melalui dua tahap. Tahap pertama dengan menggunakan mesin I yang menghasilkan bahan kertas setengah jadi, dan tahap kedua dengan menggunakan mesin II yang menghasilkan kertas. Dalam produksinya mesin I menghasilkan bahan setengah jadi dengan mengikuti fungsi $f(x) = 0,9x - 1$ dan mesin II mengikuti fungsi $g(x) = 0,02x^2 - 2,5x$, dengan x merupakan banyak bahan dasar kayu dalam satuan ton. Jika bahan dasar kayu yang tersedia untuk suatu produksi sebesar 200 ton, berapakah kertas yang dihasilkan? (kertas dalam satuan ton).

Alternatif Penyelesaian

Tahap-tahap produksi pabrik kertas tersebut dapat kita gambarkan sebagai berikut.



Gambar 3.1. Tahapan Produksi Pabrik Kertas



Dari Gambar 3.1. di atas, terlihat jelas bahwa tahap produksi kertas terdiri atas dua tahap. Hasil produksi setiap tahap kita hitung sebagai berikut

Hasil produksi tahap I

Rumus fungsi pada produksi tahap I adalah: $f(x) = 0,9x - 1$

Untuk $x = 200$, diperoleh:

$$\begin{aligned}f(x) &= 0,9x - 1 \\&= 0,9(200) - 1 \\&\equiv 179\end{aligned}$$

Maka hasil produksi tahap I adalah 179 ton bahan kertas setengah jadi.

Hasil produksi tahap II

Rumus fungsi pada produksi tahap II adalah: $g(x) = 0,02x^2 - 2,5x$

Karena hasil produksi pada tahap I akan dilanjutkan pada produksi tahap II, maka hasil produksi tahap I menjadi bahan dasar produksi tahap II, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
 g(x) &= 0,02x^2 - 2,5x \\
 &= 0,02(200)^2 - 2,5(200) \\
 &= 640,82 - 447,5 \\
 &= 193,32
 \end{aligned}$$

Dengan demikian hasil produksi tahap II adalah 193,32 ton bahan jadi kertas.

Hasil produksi yang dihasilkan pabrik kertas tersebut jika bahan dasar kayunya sebanyak 200 ton adalah 193,32 ton bahan jadi kertas.

Masalah 3.3 di atas dapat kita selesaikan dengan menggunakan cara yang berbeda sebagai berikut.

Diketahui fungsi-fungsi produksi berikut.

dengan mensubstitusikan pers. 1 ke persamaan 2, kita peroleh fungsi

$$\begin{aligned}
 g(f(x)) &= 0,02(0,9x - 1)^2 - 2,5(0,9x - 1) \\
 &= 0,02(0,81x^2 - 1,8x + 1) - 2,5(0,9x - 1) \\
 &= 0,0162x^2 - 0,036x + 0,02 - 2,25x + 2,5 \\
 &= 0,0162x^2 - 2,286x + 2,52
 \end{aligned}$$

Kita peroleh fungsi $g(f(x)) = 0,0162 x^2 - 2,286x + 2,52$(3)

Jika disubstitusikan nilai $x = 200$ ke persamaan 3, kita peroleh:

$$g(f(x)) = 0.0162 x^2 - 2.286x + 2.52$$

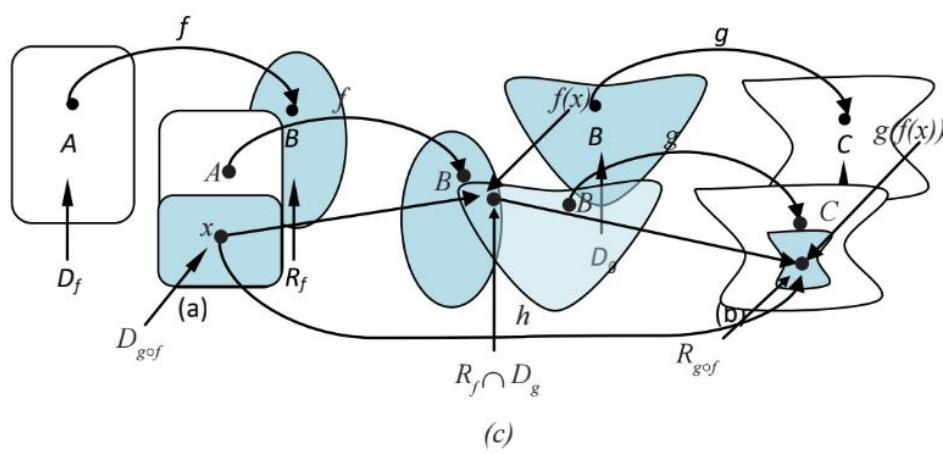


$$\begin{aligned} &= 0,0162 (200)^2 - 2,286(200) + 2,52 \\ &= 648 - 457,2 + 2,52 \\ &= 193,32 \end{aligned}$$

Terlihat bahwa hasil produksi sebesar 193,32 ton. Nilai ini sama hasilnya dengan hasil produksi dengan menggunakan perhitungan cara pertama di atas.

Nilai $g(f(x))$ merupakan nilai suatu fungsi yang disebut fungsi komposisi f dan g dalam x yang dilambangkan dengan $g \circ f$. Karena itu nilai $g \circ f$ di x ditentukan dengan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Perhatikan Gambar 3.2 berikut.



Gambar 3.2. Fungsi Komposisi

Berdasarkan Gambar 3.2 di atas dapat dikemukakan beberapa hal berikut.

- 1) D_f = daerah asal fungsi f , R_f = daerah hasil fungsi f , D_g = daerah asal fungsi g ; R_g = daerah hasil fungsi g ; $D_{g \circ f}$ = daerah asal fungsi komposisi $g \circ f$; $R_{g \circ f}$ = daerah hasil fungsi komposisi $g \circ f$
- 2) Fungsi f memetakan himpunan A ke himpunan B , ditulis $f : A \rightarrow B$.
Setiap unsur $x \in D_f$ dipetakan ke $y \in R_f$ dengan fungsi $y = f(x)$. Perhatikan Gambar 3.2(a).
- 3) Fungsi g memetakan himpunan B ke himpunan C , ditulis $g : B \rightarrow C$.
Setiap unsur $y \in D_g$ dipetakan ke $z \in R_g$ dengan fungsi $z = g(y)$. Perhatikan Gambar 3.2(b).
- 4) Fungsi h memetakan himpunan A ke himpunan C melalui himpunan B , ditulis: $h : A \rightarrow C$. Setiap unsur $x \in D_h$ dipetakan ke $z \in h$ dengan fungsi $z = h(x)$. Perhatikan Gambar 3.2(c).



Berdasarkan beberapa hal di atas kita peroleh definisi berikut.



Definisi 3.2

Jika f dan g fungsi dan $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka terdapat suatu fungsi h dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g yang disebut fungsi komposisi f dan g (ditulis: $g \circ f$) yang ditentukan dengan

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

daerah asal fungsi komposisi f dan g adalah, $D_{f \circ g} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$ dengan

D_f = daerah asal (domain) fungsi f , D_g = daerah asal (domain) fungsi g ;
 R_f = daerah hasil (range) fungsi f , R_g = daerah hasil (range) fungsi g .

Pertanyaan kritis!

Untuk fungsi komposisi f dan g atau $g \circ f$.

- 1) Apa akibatnya jika $R_g \cap D_f = \emptyset$? Mengapa?
- 2) Bagaimana hubungan $D_{g \circ f}$ dengan D_f ? Apakah $D_{g \circ f} \subseteq D_f$? Mengapa?
- 3) Bagaimana hubungan dengan R_g ? Apakah $R_{g \circ f} \subseteq R_g$? Mengapa?

Untuk lebih memahami konsep fungsi komposisi, perhatikanlah contoh berikut.



Contoh 3.2

Diketahui fungsi $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 2x + 1$ dan fungsi $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $g(x) = x^2 - 1$.

- 1) Apakah fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ terdefinisi?
- 2) Tentukan fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$!

Alternatif Penyelesaian

$$f(x) = 2x + 1; g(x) = x^2 - 1$$

$$D_f = \{x \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}; R_f = \{y \mid y \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$$

$$D_g = \{x \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}; R_g = \{y \mid y \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$$



(1) Untuk menentukan apakah fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ terdefinisi, diketahui berdasarkan:

- Jika $R_f \in D_g \neq \emptyset$ maka $(g \circ f)(x)$ terdefinisi.
 $\{y | y \in R\} \cap \{x | x \in R\} = R \cap R = R \neq \emptyset$, karena $R_f \cap D_g \neq \emptyset$ maka $(g \circ f)(x)$ terdefinisi.
- Jika $R_g \in D_f \neq \emptyset$ maka $(f \circ g)(x)$ terdefinisi.
 $\{y | y \in R\} \cap \{x | x \in R\} = R \cap R = R \neq \emptyset$, karena $Rg \cap D_f \neq \emptyset$ maka $(f \circ g)(x)$ terdefinisi.

(2) Untuk menentukan apakah fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\text{➤ } (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x + 1) \\ &= (2x + 1)^2 - 1 \\ &= (4x^2 + 4x + 1) - 1 \\ &= 4x^2 + 4x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{➤ } (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2 - 1) \\ &= 2(x^2 - 1) + 1 \\ &= 2x^2 - 2 + 1 \\ &= 2x^2 - 1\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$ dan $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1$.

Perhatikan kembali Contoh 3.2 di atas! Contoh tersebut diberikan untuk menentukan fungsi komposisi jika fungsi-fungsi yang lain telah diketahui. Berikut ini diberikan contoh bagaimana menentukan fungsi jika diketahui fungsi komposisi dan suatu fungsi yang lain.



Contoh 3.3

Diketahui fungsi komposisi $(g \circ f)(x) = 18x^2 + 24x + 2$ dan fungsi $g(x) = 2x^2 - 6$. Tentukanlah rumus untuk

- fungsi $f(x)$
- fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$!



Alternatif Penyelesaian

Jika diketahui $(g \circ f)(x) = 18x^2 + 24x + 2$ dan $g(x) = 2x^2 - 6$

a) Menentukan fungsi $f(x)$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 18x^2 + 24x + 2 \\ \Leftrightarrow 2f(x)^2 - 6 &= 18x^2 + 24x + 2 \\ \Leftrightarrow 2f(x)^2 &= 18x^2 + 24x + 2 + 6 \\ \Leftrightarrow f(x)^2 &= \frac{18x^2 + 24x + 8}{2} \\ \Leftrightarrow f(x)^2 &= 9x^2 + 12x + 4 \\ \Leftrightarrow f(x) &= \pm\sqrt{9x^2 + 12x + 4} \\ \Leftrightarrow f(x) &= \pm(3x + 2)\end{aligned}$$

Jadi ada dua fungsi f yang mungkin, yaitu; $f(x) = 3x + 2$ dan $f(x) = -3x - 2$.

b) Menentukan fungsi komposisi $(f \circ g)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 18x^2 + 24x + 2$$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= -3g(x) - 2, \text{ karena } f(x) = -3x - 2 \\ &= -3(2x^2 - 6) - 2 \\ &= -6x^2 + 18 - 2 \\ &= -6x^2 + 16\end{aligned}$$

Jadi, fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = -6x^2 + 16$



3. Sifat-sifat Operasi Fungsi Komposisi

Lakukanlah pengamatan pada beberapa contoh soal berikut untuk menentukan sifat-sifat operasi fungsi komposisi. Dari pengamatan yang kamu lakukan, tariklah sebuah kesimpulan terkait sifat operasi fungsi komposisi.



Contoh 3.4

Diketahui fungsi $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 4x + 3$ dan fungsi $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $g(x) = x - 1$.

- Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$
- Selidiki apakah $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$!

Penyelesaian

a) Menentukan rumus fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$

$$\begin{aligned} * \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(4x + 3) \\ &= (4x + 3) - 1 \\ &= 4x + 2 \\ * \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x - 1) \\ &= 4(x - 1) + 3 \\ &= 4x - 4 + 3 \\ &= 4x - 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian $(g \circ f)(x) = 4x + 2$ dan $(f \circ g)(x) = 4x - 1$.

- b) Selidiki apakah $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$!

Berdasarkan hasil perhitungan butir (a) di atas diperoleh

$$(g \circ f)(x) = 4x + 2, \text{ dan}$$

$$(f \circ g)(x) = 4x - 1$$

Andaikan $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$

$$4x + 2 = 4x - 1$$

$$2 = -1$$

Ternyata hasil yang diperoleh adalah kontradiksi dari pernyataan.

Jadi, $g \circ f \neq f \circ g$

Berdasarkan Contoh 3.4 di atas, disimpulkan bahwa pada umumnya sifat komutatif pada operasi fungsi komposisi tidak berlaku, yaitu; $g \circ f \neq f \circ g$.



Contoh 3.5

Diketahui fungsi $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 2x - 1$ dan fungsi $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $g(x) = 4x + 5$, dan fungsi $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $h(x) = 2x - 3$.

- Tentukanlah fungsi komposisi $(g \circ (f \circ h))(x)$ dan $((g \circ f) \circ h)(x)$.
- Tentukanlah fungsi komposisi $(f \circ (g \circ h))(x)$ dan $((f \circ g) \circ h)(x)$.
- Selidiki apakah:
 - $(g \circ (f \circ h))(x) = ((g \circ f) \circ h)(x)$, dan
 - $(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x)$

Alternatif Penyelesaian

- Rumus fungsi komposisi $(g \circ (f \circ h))(x)$ dan $((g \circ f) \circ h)(x)$

i) Misalkan $k(x) = (f \circ h)(x)$

$$\begin{aligned} k(x) &= f(h(x)) \\ &= 2h(x) - 1 \\ &= 2(2x - 3) - 1 \\ &= 4x - 6 - 1 \\ &= 4x - 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ (f \circ h))(x) &= (g \circ k)(x) \\ &= g(k(x)) \\ &= 4(k(x)) + 5 \\ &= 4(4x - 7) + 5 \\ &= 16x - 28 + 5 \\ &= 16x - 23 \end{aligned}$$

Jadi fungsi komposisi $(g \circ (f \circ h))(x) = 16x - 23$

ii) Misalkan $l(x) = (g \circ f)(x)$

$$\begin{aligned} l(x) &= g(f(x)) \\ &= 4(f(x)) + 5 \\ &= 4(2x - 1) + 5 \\ &= 8x - 4 + 5 \\ &= 8x + 1 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} ((g \circ f) \circ h)(x) &= (l \circ h)(x) \\ &= l(h(x)) \\ &= 8(h(x)) + 1 \\ &= 8(2x - 3) + 1 \\ &= 16x - 24 + 1 \\ &= 16x - 23 \end{aligned}$$



- Jadi rumus fungsi komposisi $((g \circ f) \circ h)(x) = 16x - 23$.
- b) Rumus fungsi komposisi $f \circ (g \circ h)$ dan $(f \circ g) \circ h$

i) Misalkan $m(x) = (g \circ h)(x)$

$$\begin{aligned} m(x) &= g(h(x)) \\ &= 4(h(x)) + 5 \\ &= 4(2x - 3) + 5 \\ &= 8x - 12 + 5 \\ &= 8x - 7 \\ (f \circ (g \circ h))(x) &= (f \circ m)(x) \\ &= f(m(x)) \\ &= 2(m(x)) - 1 \\ &= 2(8x - 7) - 1 \\ &= 16x - 14 - 1 \\ &= 16x - 15 \end{aligned}$$

Jadi rumus fungsi komposisi $(f \circ (g \circ h))(x) = 16x - 15$

ii) Misalkan $n(x) = (f \circ g)(x)$

$$\begin{aligned} n(x) &= f(g(x)) \\ &= 2(4x + 5) - 1 \\ &= 8x + 10 - 1 \\ &= 8x + 9 \\ ((f \circ g) \circ h)(x) &= (n \circ h)(x) \\ &= n(h(x)) \\ &= 8(h(x)) + 9 \\ &= 8(2x - 3) + 9 \\ &= 16x - 24 + 9 \\ &= 16x - 15 \end{aligned}$$

Jadi rumus fungsi komposisi $((f \circ g) \circ h)(x) = 16x - 15$

iii) Dari butir (a) dan butir (b), diperoleh nilai

- i) $(g \circ (f \circ h))(x) = 16x - 23$ dan $((g \circ f) \circ h)(x) = 16x - 23$
ii) $(f \circ (g \circ h))(x) = 16x - 15$ dan $((f \circ g) \circ h)(x) = 16x - 15$

Berdasarkan nilai-nilai ini disimpulkan bahwa

- i) $(g \circ (f \circ h))(x) = ((g \circ f) \circ h)(x) = 16x - 23$
ii) $(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x) = 16x - 15$



Sifat 3.1

Diketahui f , g , dan h suatu fungsi. Jika $R_h \cap D_g \neq \emptyset$; $Rg \cap Df \neq \emptyset$; maka pada operasi komposisi fungsi berlaku sifat asosiatif, yaitu;

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$



Contoh 3.6

Diketahui fungsi $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 5x - 7$ dan fungsi $I: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $I(x) = x$.

- Rumus fungsi komposisi $f \circ I$ dan $I \circ f$.
- Selidikilah apakah $f \circ I = I \circ f = f$.

Alternatif Penyelesaian

- Rumus fungsi komposisi $f \circ I$ dan $I \circ f$

$$\begin{aligned}\checkmark (f \circ I)(x) &= f(I(x)) \\ &= f(x) \\ &= 5x - 7 \\ \checkmark (I \circ f)(x) &= I(f(x)) \\ &= I(f(x)) \\ &= 5x - 7\end{aligned}$$

- Berdasarkan hasil-hasil pada butir (a) di atas disimpulkan bahwa: $f \circ I = I \circ f = f$
Berdasarkan penyelesaian Contoh 3.6 kita peroleh sifat berikut.



Sifat 3.2

Diketahui f suatu fungsi dan I merupakan fungsi identitas. Jika $R_i \cap D_f \neq \emptyset$ maka terdapat sebuah fungsi identitas yaitu: $I(x) = x$, sehingga berlaku sifat identitas, yaitu; $f \circ I = I \circ f = f$

Agar kamu lebih memahami sifat 3.2, selesaikanlah latihan berikut.

Latihan

Diketahui fungsi $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 5x - 7$ dan fungsi identitas $I: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $I(x) = x$. Buktikanlah bawah $(f \circ I) = (I \circ f) = f$.



Uji Kompetensi 3.1

1. Suatu pabrik kertas berbahan dasar kayu memproduksi kertas melalui dua tahap. Tahap pertama dengan menggunakan mesin I yang menghasilkan bahan kertas setengah jadi, dan tahap kedua dengan menggunakan mesin II yang menghasilkan bahan kertas. Dalam produksinya mesin I menghasilkan bahan setengah jadi dengan mengikuti fungsi $f(x) = 0,7x + 10$ dan pada mesin II terdapat bahan campuran lain sehingga mengikuti fungsi $g(x) = 0,02x^2 + 12x$, x merupakan banyak bahan dasar kayu dalam satuan ton.
 - a) Jika bahan dasar kayu yang tersedia untuk suatu produksi sebesar 50 ton, berapakah kertas yang dihasilkan? (kertas dalam satuan ton).
 - b) Jika bahan setengah jadi untuk kertas yang dihasilkan oleh mesin I sebesar 110 ton, berapa ton kah kayu yang sudah terpakai? Berapa banyak kertas yang dihasilkan?
2. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{x-3}{x}$, $x \neq 0$ dan $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$. Tentukan rumus fungsi berikut bila terdefinisi dan tentukan daerah asal dan daerah hasilnya.
 - a) $(f+g)(x)$
 - b) $(f-g)(x)$
 - c) $(f \times g)(x)$
 - d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
3. Misalkan f fungsi yang memenuhi untuk $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} f(-x) = 2x$ setiap $x \neq 0$. Tentukanlah nilai $f(2)$.
4. Diketahui fungsi $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $f(x) = x^2 - 4x + 2$ dan fungsi $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $g(x) = 3x - 7$.
 - a) $(g \circ f)(x)$
 - b) $(f \circ g)(x)$
 - c) $(g \circ f)(5)$
 - d) $(f \circ g)(10)$



5. Jika $f(xy) = f(x + y)$ dan $f(7) = 7$. Tentukanlah nilai $f(49)$!

6. Diketahui fungsi f dan g dinyatakan dalam pasangan terurut

$$f = \{(1,5), (2,6), (3,-1), (4,8)\}$$

$$g = \{(2,-1), (1,2), (5,3), (6,7)\}$$

Tentukanlah

a) $(g \circ f)(x)$

b) $(f \circ g)(x)$

7. Jika f fungsi yang memenuhi persamaan $f(1) = 4$ dan $f(x+1) = 2f(x)$. Tentukanlah $f(2014)$!

8. Jika $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ dan $x^2 \neq 1$, buktikanlah bahwa $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

9. Untuk pasangan fungsi yang diberikan tentukanlah daerah asal dan daerah hasil fungsi komposisi $(g \circ f)(x)$.

a) $f(x) = 2x$ dan $g(x) = \sin x$

b) $f(x) = -x$ dan $g(x) = \ln x$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ dan $g(x) = 2 \sin x$

10. Jika $f(x) = 2^{2x} + 2^{x+1} - 3$ dan $g(x) = 2^x + 3$. Tentukanlah nilai $\frac{f(x)}{g(x)}$!

11. Diketahui fungsi $f(x) = 2^{x+2} \times 6^{x-4}$ dan $g(x) = 12^{x-1}$ untuk x bilangan

asli. Tentukanlah nilai $\frac{f(x)}{g(x)}$.

12. Diketahui $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$ dan $g(x) = x^2 - 1$. Tentukanlah nilai $f(x - 2)$.



4. Fungsi Invers

Berikutnya, kita akan mempelajari balikan dari fungsi yang disebut dengan fungsi invers. Dengan demikian, mari kita memahami masalah berikut.



Masalah-3.4

Seorang pedagang kain memperoleh keuntungan dari hasil penjualan setiap x potong kain sebesar $f(x)$ rupiah. Nilai keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 500x + 1000$, (dalam ribuan rupiah) x adalah banyak potong kain yang terjual.

- Jika dalam suatu hari pedagang tersebut mampu menjual 50 potong kain, berapa keuntungan yang diperoleh?
- Jika keuntungan yang diharapkan sebesar Rp100.000,00 berapa potong kain yang harus terjual?
- Jika A merupakan daerah asal (domain) fungsi f dan B merupakan daerah hasil (range) fungsi f , gambarkanlah permasalahan butir (a) dan butir (b) di atas.

Alternatif Penyelesaian

Keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 500x + 1000$, untuk setiap x potong kain yang terjual.

- Penjualan 50 potong kain, berarti $x = 50$ dan nilai keuntungan yang diperoleh adalah:

$$\begin{aligned}f(x) &= 500x + 1000 \\ \text{untuk } x = 50 \text{ berarti } f(50) &= (500 \times 50) + 1000 \\ &= 2500 + 1000 \\ &= 3600\end{aligned}$$

Jadi keuntungan yang diperoleh dalam penjualan 50 potong kain sebesar Rp3.600.000,-

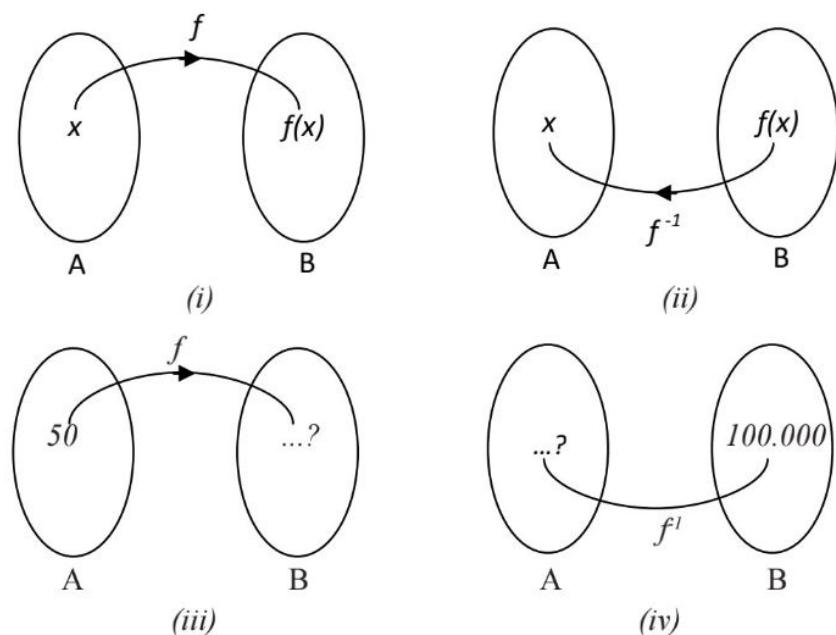
- Agar keuntungan yang diperoleh sebesar Rp100.000,-, maka banyak potong kain yang harus terjual adalah:

$$\begin{aligned}f(x) &= 500x + 1000 \\ 100.000 &= 500x + 1000 \\ 500x &= 100.000 - 1.000 \\ 500x &= 99.000 \\ x &= \frac{99.000}{500} \\ &= 198\end{aligned}$$



Jadi banyak potong kain yang harus terjual adalah 198 potong.

- c) Jika A merupakan daerah asal fungsi f dan B merupakan daerah hasil fungsi f , permasalahan butir (a) dan butir (b) di atas digambarkan seperti berikut.



Gambar 3.3. Invers Fungsi

Berdasarkan Gambar 3.3 di atas, dikemukakan beberapa hal sebagai berikut.

- Gambar 3.3 (i) menunjukkan bahwa fungsi f memetakan A ke B , ditulis: $f: A \rightarrow B$.
- Gambar 3.3 (ii) menunjukkan bahwa f^{-1} memetakan B ke A , ditulis: $f^{-1}: B \rightarrow A$. f^{-1} merupakan invers fungsi f .
- Gambar 3.3 (iii) menunjukkan bahwa untuk nilai $x = 50$ maka akan dicari nilai $f(x)$.
- Gambar 3.3 (iv) menunjukkan kebalikan dari Gambar 3.3 (iii) yaitu mencari nilai x jika diketahui nilai $f(x) = 100.000$.



Untuk lebih memahami konsep invers suatu fungsi, perhatikan kembali Gambar 3.4 berikut.

Berdasarkan Gambar 3.4 di samping, diketahui beberapa hal sebagai berikut. Pertama, fungsi f memetakan $x \in A$ ke $y \in B$. Ingat kembali pelajaran Kelas X tentang menyatakan fungsi ke dalam bentuk pasangan berurutan. Jika fungsi f dinyatakan ke dalam bentuk pasangan berurutan, maka dapat ditulis sebagai berikut.

$f = \{(x, y) | x \in A \text{ dan } y \in B\}$. Pasangan berurut (x, y) merupakan unsur dari fungsi f .

Kedua, invers fungsi f atau f^{-1} memetakan $y \in B$ ke $x \in A$. Jika invers fungsi f dinyatakan ke dalam pasangan berurutan, maka dapat ditulis $f^{-1} = \{(y, x) | y \in B \text{ dan } x \in A\}$. Pasangan berurut (y, x) merupakan unsur dari invers fungsi f .

Berdasarkan uraian-uraian di atas, diberikan definisi invers suatu fungsi sebagai berikut.



Definisi 3.3

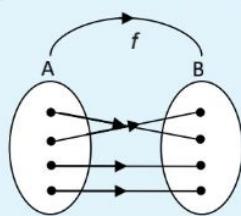
Jika fungsi f memetakan A ke B dan dinyatakan dalam pasangan berurutan $f = \{(x, y) | x \in A \text{ dan } y \in B\}$, maka invers fungsi f (dilambangkan f^{-1}) adalah relasi yang memetakan B ke A , dalam pasangan berurutan dinyatakan dengan $f^{-1} = \{(y, x) | y \in B \text{ dan } x \in A\}$.

Untuk lebih memahami konsep invers suatu fungsi, selesaikanlah Masalah 3.5 berikut.

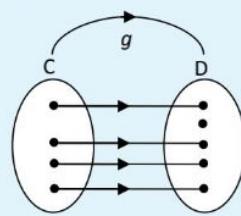


Masalah-3.5

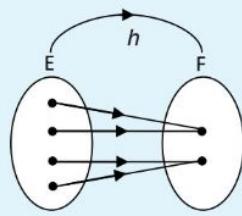
Diketahui fungsi $f: A \rightarrow B$ merupakan fungsi bijektif, fungsi $g: C \rightarrow D$ merupakan fungsi injektif, dan fungsi $h: E \rightarrow F$ merupakan fungsi surjektif yang digambarkan seperti Gambar 3.5 di bawah ini.



i



ii



iii

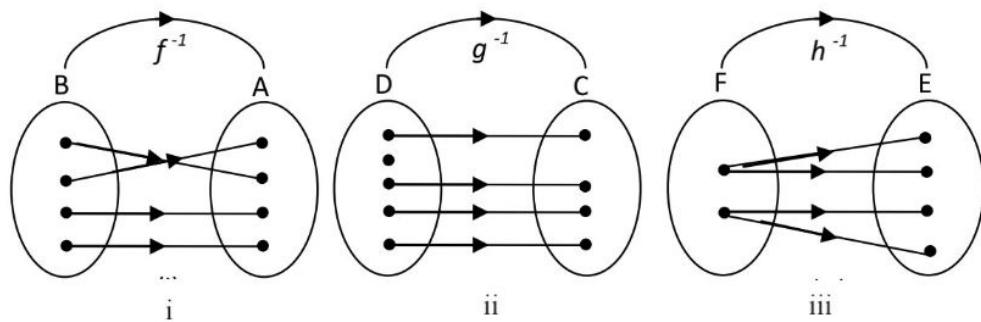
Gambar 3.5. Fungsi f , g , dan h



- Jika invers fungsi f memetakan B ke A , invers fungsi g memetakan D ke C , dan invers fungsi h memetakan F ke E , gambarlah ketiga invers fungsi tersebut!
- Dari ketiga invers fungsi tersebut, tentukanlah mana yang merupakan fungsi.

Alternatif Penyelesaian

- Gambar ketiga invers fungsi tersebut ditunjukkan sebagai berikut.



- Berdasarkan Gambar 3.6, disimpulkan sebagai berikut.
 - Gambar 3.6 (i) merupakan fungsi. Mengapa?
 - Gambar 3.6 (ii) bukan fungsi. Mengapa?
 - Gambar 3.6 (iii) bukan fungsi. Mengapa?

Berdasarkan alternatif penyelesaian pada Masalah 3.5 di atas, dapat disimpulkan bahwa invers suatu fungsi belum tentu merupakan fungsi tetapi dapat hanya berupa relasi biasa. Invers fungsi g dan h **bukan** suatu fungsi melainkan hanya relasi biasa. Invers suatu fungsi yang merupakan fungsi disebut **fungsi invers**. Invers fungsi f merupakan suatu fungsi invers.

Berdasarkan uraian di atas, ditemukan sifat berikut.



Sifat 3.3

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan memiliki fungsi invers $f^{-1} : B \rightarrow A$ jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi bijektif.

Perhatikan kembali Sifat 3.3 di atas, pada fungsi bijektif $f : A \rightarrow B$, A merupakan daerah asal fungsi f dan B merupakan daerah hasil fungsi f . Secara umum, definisi fungsi invers diberikan sebagai berikut.



Definisi 3.4

Jika fungsi $f: D_f \rightarrow R_f$ adalah fungsi bijektif, maka invers fungsi f adalah fungsi yang didefinisikan sebagai $f^{-1}: R_f \rightarrow D_f$ dengan kata lain f^{-1} adalah fungsi dari R_f ke D_f .

Perhatikan kembali Definisi 3.4 di atas. Fungsi $f: D_f \rightarrow R_f$ adalah fungsi bijektif, jika $y \in R_f$ merupakan peta dari $x \in D_f$, maka hubungan antara y dengan $f(x)$ didefinisikan dengan $y = f(x)$. Jika f^{-1} adalah fungsi invers dari fungsi f , maka untuk setiap $x \in R_{f^{-1}}$ adalah peta dari $y \in D_{f^{-1}}$. Hubungan antara x dengan $f^{-1}(y)$ didefinisikan dengan rumus $x = f^{-1}(y)$.

5. Menentukan Rumus Fungsi Invers



Masalah-3.6

Salah satu sumber penghasilan yang diperoleh klub sepak bola adalah hasil penjualan tiket penonton jika timnya sedang bertanding. Besar dana yang diperoleh bergantung pada banyaknya penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut. Suatu klub memberikan informasi bahwa besar pendapatan yang diperoleh klub dari penjualan tiket penonton mengikuti fungsi $f(x) = 50.000x + 20.000$, dengan x merupakan banyak penonton yang menyaksikan pertandingan.

- Tentukanlah invers fungsi pendapatan dari tiket penonton klub sepak bola tersebut.
- Jika dalam suatu pertandingan, klub memperoleh dana hasil penjualan tiket penonton sebesar Rp55.570.000,-. Berapa penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui bahwa fungsi pendapatan klub sepak bola tersebut adalah $f(x) = 50.000x + 20.000$

- Invers fungsi pendapatan dari tiket penonton klub sepak bola

Untuk menentukan rumus fungsi invers $f(x)$ dilakukan sebagai berikut.

$$y = f(x) = 50.000x + 20.000$$

$$y = 50.000x + 20.000$$

$$50.000x = y - 20.000$$

$$x = \frac{y - 20.000}{50.000}$$



$$\text{Karena } x = f^{-1}(y) \text{ maka } f^{-1}(y) = \frac{y - 20.000}{50.000}$$

$$\text{Karena } f^{-1}(y) = \frac{y - 20.000}{50.000} \text{ maka } f^{-1}(x) = f^{-1}(x) = \frac{x - 20.000}{50.000}$$

Jadi, fungsi invers dari $f(x) = 50.000x + 20.000$ adalah $f^{-1}(x) = \frac{x - 20.000}{50.000}$ atau $f^{-1}(x) = \frac{1}{50.000}(x - 20.000)$.

- b) Jika dana hasil penjualan tiket penonton sebesar Rp 55.570.000, maka banyak penonton yang menyaksikan pertandingan tersebut adalah

$$\begin{aligned}f^1(x) &= \frac{x - 20.000}{50.000} \\f^1(5.000.000) &= \frac{55.570.000 - 20.000}{50.000} \\&= \frac{55.570.000 - 20.000}{50.000} \\&= 1111\end{aligned}$$

Jadi, penonton yang menyaksikan pertandingan itu sebanyak 1111 orang.

Berdasarkan alternatif penyelesaian Masalah 3.6 di atas, diperoleh sifat sebagai berikut.



Sifat 3.4

Misalkan f^{-1} adalah fungsi invers fungsi f . Untuk setiap $x \in D_f$ dan $y \in R_f$ berlaku $y = f(x)$ jika dan hanya jika $f^{-1}(y) = x$.



Contoh 3.7

Diketahui fungsi $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 5x + 7$. Tentukanlah fungsi inversnya!



Alternatif Penyelesaian

Karena $y = f(x)$, maka $y = 5x + 7$

$$5x = y - 7$$

$$x = \frac{y-7}{5}$$

Karena $x = f^{-1}(y)$, maka $f^{-1}(y) = \frac{y-7}{5}$

$$\begin{aligned} \text{Karena } f^{-1}(y) &= \frac{y-7}{5}, \text{ maka } f^{-1}(x) = \frac{x-7}{5}, \\ &= \frac{1}{5}(x-7) \end{aligned}$$

Jadi fungsi invers $f(x) = 5x + 7$ adalah $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x-7)$.



Contoh 3.8

Diketahui fungsi $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $f(x) = 3x - 1$. Tentukanlah fungsi inversnya!

Alternatif Penyelesaian

Karena $y = f(x)$, maka $y = 3x - 1$

$$y = 3x - 1$$

$$3x = y + 1$$

$$x = \frac{y+1}{3}$$

Karena $f^{-1}(y) = x$, maka $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}$

$$\text{Karena } f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3}, \text{ maka } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3},$$

Jadi fungsi invers $f(x) = 3x - 1$ adalah $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$.



Contoh 3.9

- Tunjukan rumus fungsi komposisi $(f \circ f^{-1})(x)$ dan $(f^{-1} \circ f)(x)$
- Kesimpulan apa yang bisa kamu temukan?

Alternatif Penyelesaian

(1) Berdasarkan Contoh 3.7, diketahui bahwa $f(x) = 5x + 7$ dan $f^{-1}(x)$

$$= \frac{1}{5}(x - 7).$$

a) Rumus fungsi komposisi $(f \circ f^{-1})(x)$ dan $(f^{-1} \circ f)(x)$ ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) \\&= 5(f^{-1}(x)) + 7 \\&= 5\left(\frac{1}{5}(x - 7)\right) + 7 \\&= x - 7 + 7 \\&= x \\(f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) \\&= \frac{x - 7}{5} \\&= \frac{f(x) - 7}{5} \\&= \frac{(5x + 7) - 7}{5} \\&= \frac{5x}{5} \\&= x\end{aligned}$$

- b) Berdasarkan hasil pada butir (a) disimpulkan bahwa nilai $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x)$

(2) Sebagai latihanmu, silahkan buktikan bahwa $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x)$ juga berlaku pada Contoh 3.8.

Berdasarkan penyelesaian Contoh 3.7 dan Contoh 3.8 diperoleh sifat berikut



Sifat 3.5

Misalkan f sebuah fungsi bijektif dengan daerah asal D_f dan daerah hasil R_f , sedangkan $I(x) = x$ merupakan fungsi identitas. Fungsi f^{-1} merupakan fungsi invers dari fungsi f jika dan hanya jika

$$(f \circ f^{-1})(x) = x = I(x) \text{ untuk setiap } x \in D_f \text{ dan}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x) \text{ untuk setiap } x \in R_f.$$

Sifat 3.5 di atas dapat digunakan untuk mengetahui apakah suatu fungsi merupakan fungsi invers dari fungsi f atau tidak. Agar kamu lebih memahami, perhatikan kembali Contoh 3.10 berikut.



Contoh 3.10

Buktikanlah bahwa $f(x) = 10x - 1$ dan $g(x) = \frac{x+1}{10}$ merupakan fungsi yang saling invers.

Alternatif Penyelesaian

Untuk membuktikan bahwa $f(x)$ dan $g(x)$ saling invers, cukup menunjukkan fungsi komposisi $f(g(x)) = g(f(x)) = x$.

Bukti.

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{10}\right) \\ & = 10(g(x)) - 1 \\ & = 10\left(\frac{x+1}{10}\right) - 1 \\ & = x + 1 - 1 \\ & = x \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{(ii)} & g(f(x)) = g(10x - 1) \\ & = \frac{(10x - 1) + 1}{10} \\ & = \frac{10x}{10} \\ & = x \end{array}$$

Karena $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, maka kedua fungsi saling invers.

Perhatikan kembali Contoh 3.11 berikut.



Contoh 3.11

Diketahui fungsi $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan $f(x) = x - 1$. Tentukanlah $(f^{-1})^{-1}(x)$!



Alternatif Penyelesaian

Untuk menentukan rumus $(f^{-1})^{-1}(x)$ maka langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan $f^{-1}(x)$ sebagai berikut.

Diketahui bahwa $f(x) = x - 1$, karena $f(x) = y$, maka: $y = x - 1$ atau $x = y + 1$

Oleh karena $x = f^{-1}(y)$, maka $f^{-1}(y) = y + 1$ sehingga $f^{-1}(x) = x + 1$.

Langkah kedua adalah menentukan fungsi invers dari $f^{-1}(x)$, sebagai berikut.

Misalkan $f^{-1}(x) = h(x)$, maka fungsi invers dari $h(x)$ adalah $h^{-1}(x)$, yang ditentukan seperti berikut.

Misalkan h^{-1} adalah fungsi invers fungsi h . Untuk setiap $x \in D_h$ dan $y \in R_h$ berlaku $y = h(x)$ jika dan hanya jika $x = h^{-1}(y)$.

Karena $h(x) = x + 1$ dan $h(x) = y$, kita peroleh hubungan $y = x + 1$ atau $x = y - 1$.

Karena $x = h^{-1}(y)$, maka $h^{-1}(y) = y - 1$ sehingga $h^{-1}(x) = x - 1$.

Karena $f^{-1}(x) = h(x)$ dan $h^{-1}(x) = x - 1$, maka $(f^{-1})^{-1}(x) = x - 1$.

Jadi, $(f^{-1})^{-1}(x) = x - 1$.

Perhatikan kembali rumus fungsi $(f^{-1})^{-1}(x)$ yang kita peroleh dengan rumus fungsi $f(x)$ yang diketahui, dari kedua nilai ini kita peroleh bahwa

$$(f^{-1})^{-1}(x) = f(x) = x - 1$$

Berdasarkan hasil uraian pada Contoh 3.11 di atas, maka diperoleh sifat fungsi invers sebagai berikut.



Sifat 3.6

Jika f sebuah fungsi bijektif dan f^{-1} merupakan fungsi invers f , maka fungsi invers dari f^{-1} adalah fungsi f itu sendiri, disimbolkan dengan $(f^{-1})^{-1} = f$



Contoh 3.12

Diketahui fungsi f dan g adalah fungsi bijektif yang ditentukan dengan $f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = x - 2$. Tentukanlah

- $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$
- $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$
- $(g \circ f)^{-1}(x)$ dan $(f \circ g)^{-1}(x)$



- d) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ dan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$
- e) hubungan antara $(g \circ f)^{-1}(x)$ dengan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$
- f) hubungan antara $(f \circ g)^{-1}(x)$ dengan $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Alternatif Penyelesaian

a) $(g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g)(x)$

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= f(x) - 2 \\ &= (2x + 5) - 2 \\ &= 2x + 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(ii)} \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= 2(g(x)) + 5 \\ &= 2(x - 2) + 5 \\ &= 2x + 1\end{aligned}$$

b) $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$

(i) $f^{-1}(x)$

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x + 5 \\ \text{karena } f(x) &= y \text{ maka } y = 2x + 5 \\ 2x &= y - 5\end{aligned}$$

$$x = \frac{y - 5}{2}$$

$$\text{Karena } f^{-1}(y) = x \text{ maka } f^{-1}(y) = \frac{y - 5}{2}$$

$$\text{sehingga } f^{-1}(x) = f^{-1}(y) = \frac{y - 5}{2}$$



(ii) $g^{-1}(x)$

$$g(x) = x - 2$$

karena $g(x) = y$ maka $y = x - 2$ sehingga $x = y + 2$

karena $g^{-1}(y) = x$ maka $g^{-1}(y) = y + 2$

sehingga $g^{-1}(x) = x + 2$

c) $(g \circ f)^{-1}(x)$ dan $(f \circ g)^{-1}(x)$

(i) $(g \circ f)^{-1}(x)$

$$(g \circ f)(x) = 2x + 3$$

Misalkan $(g \circ f)(x) = h(x)$ sehingga $h(x) = 2x + 3$

karena $h(x) = y$ maka $y = 2x + 3$ sehingga $x = \frac{y-3}{2}$

karena $h^{-1}(y) = x$ maka $h^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$ sehingga $h^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

karena $(g \circ f)(x) = h(x)$ maka $(g \circ f)^{-1}(x) = h^{-1}(x)$

sehingga $(g \circ f)^{-1}(x)$

(ii) $(f \circ g)^{-1}(x)$

$$(f \circ g)(x) = 2x + 1$$

Misalkan $(f \circ g)(x) = k(x)$ sehingga $k(x) = 2x + 1$

karena $k(x) = y$ maka $y = 2x + 1$ sehingga $x = \frac{y-1}{2}$

karena $k^{-1}(y) = x$ maka $k^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$ sehingga $k^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

karena $(f \circ g)(x) = k(x)$ maka $(f \circ g)^{-1}(x) = k^{-1}(x)$

sehingga $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$



d) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ dan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

(i) $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Pada butir (b) telah ditemukan bahwa $g^{-1}(x) = x + 2$ dan

$$\begin{aligned}f^{-1}(x) &= \frac{x-5}{2} \\(g^{-1} \circ f^{-1})(x) &= g^{-1}(f^{-1}(x)) \\&= (f^{-1}(x)) + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{x-5}{2} + 2 \\&= \frac{x-5+4}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{x-1}{2}$$

(ii) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= f^{-1}(g^{-1}(x)) \\&= \frac{g^{-1}(x)-5}{2} \\&= \frac{(x+2)-5}{2} \\&= \frac{x-3}{2}\end{aligned}$$

e) hubungan antara $(g \circ f)^{-1}(x)$ dengan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

Hasil perhitungan di atas menunjukkan bahwa rumus fungsi $(g \circ f)^{-1}(x)$ sama dengan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ atau $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{x-1}{2}$.



- f) hubungan antara $(f \circ g)^{-1}(x)$ dengan $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Hasil perhitungan di atas menunjukkan bahwa rumus fungsi $(f \circ g)^{-1}(x)$ sama dengan $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ atau $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

Berdasarkan Contoh 3.12 di atas dapat kita simpulkan sifat berikut.



Sifat 3.7

Jika f dan g fungsi bijektif maka berlaku $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1})$

Agar kamu lebih memahami Sifat 3.7, selesaikanlah latihan berikut.

Latihan

Fungsi $f: R \rightarrow R$ dan $g: R \rightarrow R$ ditentukan oleh rumus $f(x) = 5x - 4$ dan $g(x) = 3x$. Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(f \circ g)^{-1}(x)$ dan $(g \circ f)^{-1}(x)$!



Contoh 3.13

Tentukanlah invers fungsi $f(x)$ berikut.

a. $f(x) = 2x - 4$

b. $f(x) = x^2 - 4x + 2$

c. $f(x) = \frac{2x-1}{4x-1}$

Alternatif Penyelesaian

a. Menentukan invers $f(x) = 2x - 4$

Misalkan $y = 2x - 4$ sehingga $x = \frac{y+4}{2}$

Dengan demikian, $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$

b. Menentukan invers $f(x) = x^2 - 4x + 2$

Misalkan $y = x^2 - 4x + 2$ sehingga dengan kuadrat sempurna diperoleh:

$$y = x^2 - 4x + 4 - 4 + 2 \Leftrightarrow y = (x-2)^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow y+2 = (x-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x-2 = \pm\sqrt{y+2}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{y+2}$$

sehingga $f^{-1}(x) = 2 \pm \sqrt{x+2}$



c. Menentukan invers $f(x) = \frac{2x-1}{4x-1}$

Misalkan $y = \frac{2x-1}{4x-1}$ sehingga dengan proses aljabar,

$$\begin{aligned}y = \frac{2x-1}{4x-1} &\Leftrightarrow y(4x-1) = 2x-1 \\&\Leftrightarrow 4xy - y = 2x - 1 \\&\Leftrightarrow 4xy - 2x = y - 1 \\&\Leftrightarrow x(4y - 2) = y - 1 \\&\Leftrightarrow x = \frac{y-1}{4y-2}\end{aligned}$$

sehingga $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{4x-2}$



Uji Kompetensi 3.2

1. Seorang pedagang kain memperoleh keuntungan dari hasil penjualan setiap x potong kain sebesar $f(x)$ rupiah. Nilai keuntungan yang diperoleh mengikuti fungsi $f(x) = 100x + 500$, x merupakan banyak potong kain yang terjual.
 - a) Jika dalam suatu hari pedagang tersebut mampu menjual 100 potong kain, berapa keuntungan yang diperoleh?
 - b) Jika keuntungan yang diharapkan sebesar Rp500.000,00 berapa potong kain yang harus terjual?
 - c) Jika A merupakan himpunan daerah asal (*domain*) fungsi $f(x)$ dan B merupakan himpunan daerah hasil (*range*) fungsi $f(x)$, gambarkanlah permasalahan butir (a) dan butir (b) di atas.
2. Tentukanlah fungsi invers dari fungsi-fungsi berikut jika ada.
 - a) $f(x) = 2x^2 + 5$
 - b) $g(x) = \frac{2x-1}{6}$
 - c) $h(x) = \sqrt[3]{x+2}$
3. Diketahui f dan g suatu fungsi dengan rumus fungsi $f(x) = 3x+4$ dan $g(x) = \frac{x-4}{3}$. Buktikanlah bahwa $f^{-1}(x) = g(x)$ dan $g^{-1}(x) = f(x)$.



4. Diketahui fungsi $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dengan rumus fungsi $f(x) = x^2 - 4$. Tentukanlah daerah asal fungsi f agar fungsi f memiliki invers dan tentukan pula rumus fungsi inversnya untuk daerah asal yang memenuhi!
5. Untuk mengubah satuan suhu dalam derajat Celcius (${}^{\circ}\text{C}$) ke satuan suhu dalam derajat Fahrenheit (${}^{\circ}\text{F}$) ditentukan dengan
rumus $F = \frac{9}{5}C + 32$.
- Tentukanlah rumus untuk mengubah satuan derajat Fahrenheit (${}^{\circ}\text{F}$) ke satuan suhu dalam derajat Celcius (${}^{\circ}\text{C}$).
 - Jika seorang anak memiliki suhu badan $86{}^{\circ}\text{F}$, tentukanlah suhu badan anak itu jika diukur menggunakan satuan derajat Celcius!
6. Jika $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{5}$ dan $g^{-1}(x) = \frac{3-x}{2}$ dan, tentukanlah nilai $(f \circ g)^{-1}(x)$!
7. Diketahui fungsi $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dan $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dirumuskan dengan $f(x) = \frac{x-1}{x}$, untuk $x \neq 0$ dan $g(x) = x + 3$. Tentukanlah $(g \circ f)^{-1}(x)$!
8. Diketahui $f(x) = 3^{x-1}$. Tentukanlah rumus fungsi $f^{-1}(x)$ dan tentukan juga $f^{-1}(81)$!
9. Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 1$ dan $(f \circ g)(x+1) = -2x^2 - 4x - 1$. Tentukanlah $g^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(-2)$!
10. Fungsi $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ dan $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ditentukan oleh rumus $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = 2x$. Tentukanlah rumus fungsi komposisi $(f \circ g)^{-1}(x)$ dan $(g \circ f)^{-1}(x)$!
11. Diketahui $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ dan $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x-2} \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. Tentukanlah $(f \circ g)^{-1}(x)$.
12. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $x \neq 0$ dan f^{-1} adalah invers fungsi f . Jika k adalah banyaknya faktor prima dari 210, tentukanlah nilai $f^{-1}(k)$.



Projek

Rancanglah sebuah permasalahan kehidupan nyata dan selesaikan dengan menggunakan konsep fungsi komposisi. Buatlah laporannya dan persentasikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan uraian materi pada Bab 3 ini, beberapa kesimpulan yang dapat dinyatakan sebagai pengetahuan awal untuk mendalami dan melanjutkan bahasan berikutnya. Beberapa kesimpulan disajikan sebagai berikut.

1. Jika f suatu fungsi dengan daerah asal D_f dan g suatu fungsi dengan daerah asal D_g , maka pada operasi aljabar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian dinyatakan sebagai berikut.
 - (1) Jumlah f dan g ditulis $f + g$ didefinisikan sebagai $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
 - (2) Selisih f dan g ditulis $f - g$ didefinisikan sebagai $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
 - (3) Perkalian f dan g ditulis $f \times g$ didefinisikan sebagai $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ dengan daerah asal $D_{f \times g} = D_f \cap D_g$.
 - (4) Pembagian f dan g ditulis $\frac{f}{g}$ didefinisikan sebagai $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$.
2. Jika f dan g fungsi dan $R_f \cap D_g \neq \emptyset$, maka terdapat suatu fungsi h dari himpunan bagian D_f ke himpunan bagian R_g yang disebut fungsi komposisi f dan g (ditulis: $g \circ f$) yang ditentukan dengan
$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$
3. Sifat komutatif pada operasi fungsi komposisi tidak memenuhi, yaitu;
$$(g \circ f) \neq (f \circ g).$$



4. Diketahui f , g , dan h suatu fungsi. Jika $R_h \cap D_g \neq \emptyset$; $\emptyset; R_{g \circ h} \cap D_f \neq \emptyset$; $R_g \cap D_f \neq \emptyset$; $R_h \cap D_{f \circ g} \neq \emptyset$; maka pada operasi komposisi fungsi berlaku sifat asosiatif, yaitu; $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.
5. Diketahui f fungsi dan I merupakan fungsi identitas. Jika $R_I \cap D_f \neq \emptyset$ maka terdapat sebuah fungsi identitas yaitu: $I(x) = x$, sehingga berlaku sifat identitas, yaitu; $f \circ I = I \circ f = f$.
6. Jika fungsi f memetakan A ke B dan dinyatakan dalam pasangan berurutan $f = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$, maka invers fungsi f (dilambangkan f^{-1}) memetakan B ke A , dalam pasangan berurutan dinyatakan dengan $f^{-1} = \{(y, x) \mid y \in B \text{ dan } x \in A\}$.
7. Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut memiliki fungsi invers $f^{-1}: B \rightarrow A$ jika dan hanya jika fungsi f merupakan fungsi yang bijektif.
8. Jika fungsi $f: D_f \rightarrow R_f$ adalah fungsi bijektif, maka invers dari fungsi f adalah fungsi f^{-1} yang didefinisikan sebagai $f^{-1}: R_f \rightarrow D_f$.
9. Jika f fungsi bijektif dan f^{-1} merupakan fungsi invers f , maka fungsi invers dari f^{-1} adalah fungsi f itu sendiri.
10. Jika f dan g fungsi bijektif maka berlaku $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1})$.

Beberapa hal yang telah kita rangkum di atas adalah modal dasar bagi kamu dalam belajar fungsi secara lebih mendalam pada jenjang pendidikan yang lebih tinggi. Konsep-konsep dasar di atas harus kamu pahami dengan baik karena akan membantu dalam pemecahan masalah dalam kehidupan sehari-hari.