



Bab 1

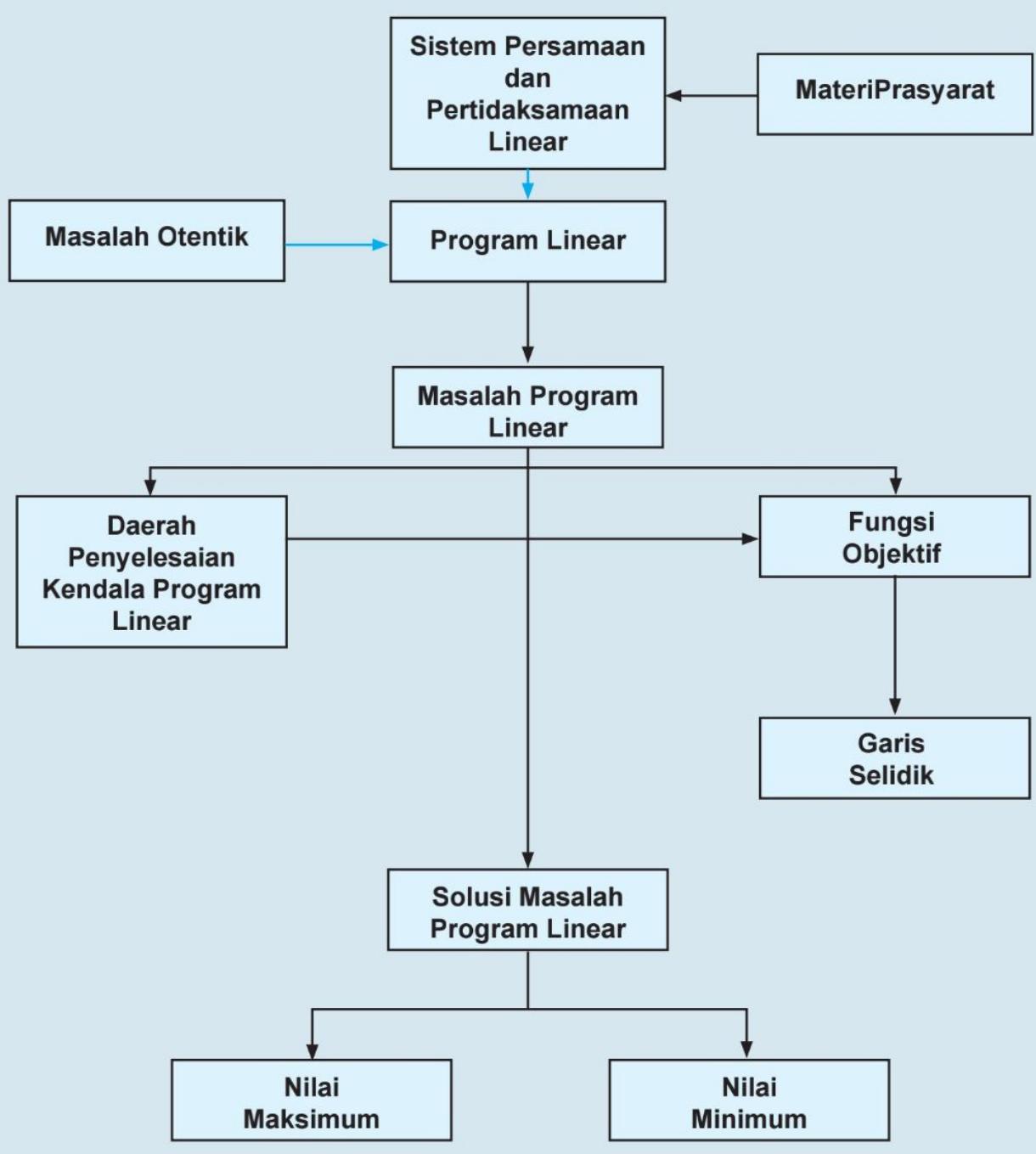
PROGRAM LINEAR

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
<ol style="list-style-type: none">Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah.Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan.Mendeskripsikan konsep sistem per-samaan dan pertidaksamaan linear dua variabel dan menerapkannya dalam pemecahan masalah program linear.Menerapkan prosedur yang sesuai untuk menyelesaikan masalah program linear terkait masalah nyata dan menganalisis kebenaran langkah langkahnya.Menganalisis bagaimana menilai validitas argumentasi logis yang digunakan dalam matematika yang sudah dipelajari terkait pemecahan masalah program linear.Merancang dan mengajukan masalah nyata berupa masalah program linear, dan menerapkan berbagai konsep dan aturan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dan menentukan nilai optimum dengan menggunakan fungsi selidik yang ditetapkan	<p>Melalui pembelajaran Program Linear, siswa memperoleh pengalaman belajar:</p> <ul style="list-style-type: none">mengamati secara cermat aturan susunan objek.berpikir mandiri mengajukan ide secara bebas dan terbuka.menemukan hubungan-hubungan di antara objek-objek.melatih berpikir kritis dan kreatif.bekerjasama menyelesaikan masalah. <p>Istilah Penting</p> <ul style="list-style-type: none"><i>Kendala/Keterbatasan (Constraint)</i><i>Optimum (Maksimum atau minimum)</i><i>Daerah Layak, Daerah Jawab, Daerah Penyelesaian</i><i>Garis Selidik</i><i>Titik Optimum</i>



B. PETA KONSEP





C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Model Matematika

Pada subbab ini, kita akan mempelajari bagaimana masalah dalam kehidupan sehari-hari dapat diselesaikan dengan matematika. Namun, sangat dibutuhkan kemampuan berpikir logis untuk mengubah masalah sehari-hari ke bentuk matematika.

Mari kita perhatikan masalah berikut ini.



Masalah-1.1

Sekelompok tani transmigran mendapatkan 10 hektar tanah yang dapat ditanami padi, jagung, dan palawija lain. Karena keterbatasan sumber daya petani harus menentukan berapa bagian yang harus ditanami padi dan berapa bagian yang harus ditanami jagung, sedangkan palawija lainnya ternyata tidak menguntungkan. Untuk suatu masa tanam, tenaga yang tersedia hanya 1550 jam/orang, pupuk juga terbatas, tak lebih dari 460 kilogram, sedangkan air dan sumber daya lainnya cukup tersedia. Diketahui pula bahwa untuk menghasilkan 1 kuintal padi diperlukan 10 jam-orang tenaga dan 5 kilogram pupuk, dan untuk 1 kuintal jagung diperlukan 8 jam/orang tenaga dan 3 kilogram pupuk. Kondisi tanah memungkinkan menghasilkan 50 kuintal padi per hektar atau 20 kuintal jagung per hektar. Pendapatan petani dari 1 kuintal padi adalah Rp 40.000 sedang dari 1 kuintal jagung Rp 30.000, dan dianggap bahwa semua hasil tanamnya selalu habis terjual.

Masalah bagi petani ialah bagaimakah rencana produksi yang memaksimumkan pendapatan total? Artinya berapa hektar tanah harus ditanami padi dan berapa hektar tanah harus ditanami jagung

Perumusan Masalah

Mari kita mengkaji jika hasil padi dan jagung dinyatakan per kuintal.

Berdasarkan masalah di atas, diketahui bahwa setiap 1 hektar menghasilkan 50 kuintal padi. Artinya, untuk 1 kuintal padi diperlukan 0,02 hektar. Demikian juga, untuk 1 kuintal jagung diperlukan 0,05 hektar.



Cermati angka-angka yang tersaji pada tabel berikut ini!

Tabel 1.1: Alokasi setiap sumber yang tersedia

Sumber	Padi (per kuintal)	Jagung (per kuintal)	Batas sumber	Satuan
Tanah	0,02	0,05	10	hektar
Tenaga	10	8	1550	jam-orang
Pupuk	5	3	460	kilogram
Pendapa-tan	40	30		Ribuan

Catatan:

1. Satuan jam-orang (*man-hour*) adalah banyak orang kali banyak jam bekerja. Kita anggap (*asumsi*) bahwa setiap transmigran memiliki tenaga dan waktu yang relatif sama.
2. Air dianggap berlimpah sehingga tidak menjadi kendala/keterbatasan. Jika ada kendala air maka satuannya adalah banyak jam membuka saluran tersier untuk mengalirkan air ke sawah.
3. Batas ketersediaan dalam soal ini kebetulan semuanya berupa batas atas.

Alternatif Penyelesaian

Besarnya pendapatan kelompok petani dipengaruhi banyak (kuintal) padi dan jagung yang diproduksi. Tentunya, besar pendapatan tersebut merupakan tujuan kelompok tani, tetapi harus mempertimbangkan keterbatasan sumber (luas tanah, tenaga dan pupuk).

Misalkan :

- x banyak kuintal padi yang diproduksi oleh kelompok tani
 y banyak kuintal jagung yang diproduksi oleh kelompok tani.

Untuk memperoleh pendapatan terbesar, harus dipikirkan keterbatasan-keterbatasan berikut:

- a. Banyak hektar tanah yang diperlukan untuk y kuintal padi dan untuk x kuintal jagung tidak boleh melebihi 10 hektar.
- b. Untuk y ketersediaan waktu (jam-orang), tiap-tiap padi dan jagung hanya tersedia waktu tidak lebih dari 1550 jam-orang.
- c. Jumlah pupuk yang tersedia untuk padi dan jagung tidak lebih dari 460 kilogram.



- d. Dengan semua keterbatasan (kendala) (a), (b), dan (c), kelompok tani ingin mengharapkan pendapatan Rp40.000,00 dan Rp30.000,00 untuk setiap kuintal padi dan jagung.
- Dari uraian keterbatasan atau kendala pada bagian (a), (b), dan (c) dan tujuan pada bagian (d), bersama temanmu, coba rumuskan model matematika yang mendeskripsikan kondisi yang dihadapi kelompok tani tersebut.

Melihat uraian di atas, masalah kelompok tani transmigran dapat diubah bentuk menjadi suatu sistem pertidaksamaan linear dua variabel. Pemecahan sistem tersebut dapat dikerjakan dengan metode grafik (dibahas pada subbab berikutnya). Hal ini merupakan pengembangan konsep pertidaksamaan linear satu variabel yang telah kamu pelajari pada Kelas X.

Adapun sistem pertidaksamaan linear yang dimaksud adalah sebagai berikut:

$$\begin{cases} 0,02x + 0,05y \leq 10 \\ 10x + 8y \leq 1550 \end{cases} \text{ atau } \begin{cases} 2x + 5y \leq 1000 \rightarrow \text{kendala lahan} \\ 10x + 8y \leq 1550 \rightarrow \text{kendala waktu} \\ 5x + 3y \leq 460 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + 3y \leq 460 \rightarrow \text{kendala pupuk} \end{cases} \quad (1)$$

Karena luas tanah/lahan, banyak waktu, dan banyak pupuk tidak mungkin negatif, kendala ini sebagai kendala nonnegatif, yaitu:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{kendala nonnegatif} \quad (2)$$

Untuk pendapatan, tentu dimaksimumkan dan sebaliknya untuk biaya tentu diminimumkan. Untuk masalah ini, kelompok tani tentu hendak memaksimumkan pendapatan, melalui memperbanyak kuintal padi dan jagung yang dijual berturut-turut Rp 40.000 dan Rp 30.000. Rumusan ini disebut sebagai fungsi tujuan/sasaran; sebut $Z(x, y)$.

Secara matematik dituliskan:

$$\text{Maksimumkan: } Z(x, y) = 40x + 30y \text{ (dalam satuan ribuan rupiah).} \quad (3)$$

Untuk memecahkan masalah banyak kuintal padi dan jagung yang akan dihasilkan kelompok tani tersebut, akan kita kaji pada subbab garis selidik.

Selain dua variabel, masalah program linear dalam kehidupan sehari-hari banyak juga yang memuat tiga variabel atau lebih. Seperti masalah yang ditemui seorang pengrajin perabot rumah tangga berikut ini.



Masalah-1.2

Pak Toni, seorang pengrajin perabot rumah mendapat pesanan membuat rak buku yang kerangkanya terbuat dari besi siku lubang yang dipotong-potong kemudian dirangkai dengan sekrup. Untuk membuat rak itu, diperlukan potongan besi sepanjang 250 cm sebanyak 8 potong, sepanjang 70 cm sebanyak 12 potong, dan sepanjang 37,5 cm sebanyak 20 potong. Ternyata batangan besi siku lubang yang dijual di toko mempunyai panjang standar 3 m, sehingga Pak Toni harus berpikir, cukup berapa potong besi batangan yang akan dibeli dan bagaimana caranya mengatur pemotongannya supaya panjang total sisa pemotongan menjadi minimal (dengan demikian kerugian Pak Toni minimal). Dapatkah kamu membantu Pak Toni untuk memotong besi batangan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Dari persoalan di atas, ada berapa jenis pola potongan besi batangan yang diperlukan Pak Toni? Mari perhatikan gambar berikut ini.

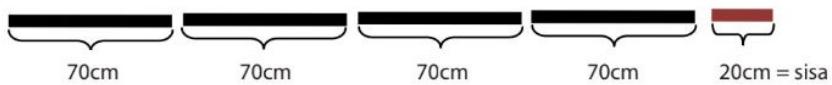
Pola Pemotongan I

Panjang Besi Batangan : 3 meter



Pola Pemotongan II

Panjang Besi Batangan : 3 meter



Gambar 1.1: Pola pemotongan besi

- Dari dua pola di atas, tentunya kamu bisa menampilkan pola yang lain. Temukan pola pemotongan yang lain, kemudian bandingkan hasil teman-temanmu.
- Setelah lengkap, tuliskan pola-pola pemotongan besi tersebut seperti pada tabel berikut ini.



Tabel 1.2: Pola pemotongan besi batangan

		Pola pemotongan ke							
	300	1	2	dipesan	
Panjang Potongan Kawat	250	1	0	8	
	70	0	4	12	
	37,5	1	0	20	
	sisa	12,5	20		

- Dengan menemukan semua pola pemotongan besi secara lengkap, jelaskan makna setiap pola pemotongan besi tersebut.

Dengan demikian terdapat 6 peubah yang muncul yaitu, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , dengan x_i : banyak batang besi yang dipotong menurut kombinasi pola ke- i . Oleh karena itu, kita temukan rumusan berikut ini:

$$\begin{aligned}x_1 &\geq 8 \\4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &\geq 12 \\x_1 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 8x_6 &\geq 20\end{aligned}\tag{4}$$

untuk setiap x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , dan $x_6 \geq 0$

dengan memminimumkan: $12,5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 5x_5 + 0x_6$ (5)

Persamaan (5) dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi yang tergantung pada nilai x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , dan x_6 ; sebut fungsi

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 12,5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 5x_5 + 0x_6$$

atau

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 12,5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 5x_5$$

merupakan fungsi sisa pemotongan dari semua pola pemotongan besi. Fungsi Z merupakan tujuan pola pemotongan besi batangan yang dibutuhkan Pak Toni. Sedangkan apa yang dinyatakan pada bagian (4) merupakan kendala atau keterbatasan untuk mencapai tujuan tersebut.

Cermati tanda yang digunakan pada bagian (4) di atas, merupakan salah satu karakteristik yang digunakan pada kajian materi program linear.



Masalah-1.3

Suatu perusahaan kertas memiliki dua pusat penggilingan yang harus memasok persediaan tiga pusat percetakan kertas koran secara mingguan. Setiap minggu, Penggilingan I dan II, berturut-turut menghasilkan 350 ton dan 550 ton bubur kertas koran. Sebagai bahan baku, Percetakan I, II, dan III berturut-turut memerlukan 275 ton/minggu, 325 ton/minggu, 300 ton/minggu bubur kertas. Ongkos pengiriman (dalam puluh ribu rupiah/ton) adalah sebagai berikut:

Tabel 1.3: Rincian biaya pengiriman

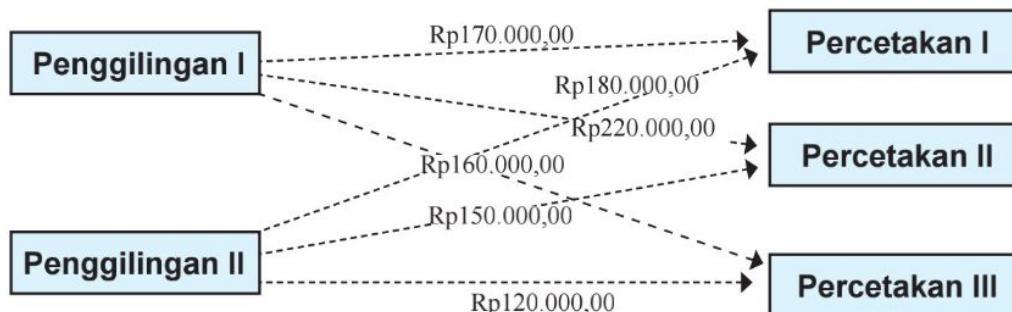
	Percetakan I	Percetakan II	Percetakan III
Penggilingan I	17	22	15
Penggilingan II	18	16	12

Masalah pada perusahaan tersebut adalah menentukan kapasitas bubur kertas koran setiap pengiriman (ton) ke setiap percetakan agar biaya pengiriman minimal.

Alternatif Penyelesaian

Langkah awal kita untuk menyelesaikan masalah ini adalah dengan merumuskan model matematika masalah pengiriman bubur kertas koran perusahaan tersebut.

Coba perhatikan gambar berikut ini.



Tabel 1.2: Diagram rute pengiriman serta biaya

- Coba kamu sebutkan dan rumuskan kondisi yang terdapat pada persoalan pengangkutan di atas!



- Sebagai contoh buat kamu untuk memahaminya, perhatikan rumusan berikut ini.
- Penggilingan I mampu menghasilkan 350 ton/minggu merupakan pasokan ke Percetakan I, II, dan III. Misalkan x_{ij} : kapasitas pengiriman (ton) setiap minggu dari Penggilingan ($i = 1, 2$) ke Percetakan ($j = 1, 2, 3$).
Jadi dapat dituliskan: $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 350$
➤ Menurut kamu, apa alasan kita menggunakan tanda “=”, bukan tanda \leq atau \geq ?
 - Jumlah bahan bubur kertas koran yang diperlukan Percetakan I sebesar 275 ton/minggu harus dipasok oleh Penggilingan I dan II. Kondisi ini dituliskan: $x_{11} + x_{21} = 350$

Demikian selanjutnya, sehingga kita dapat menyimpulkan secara lengkap sebagai berikut:

Model matematika pasokan bubur kertas koran dari dua Penggilingan ke Percetakan I, II, dan III.

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 350 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 550 \end{array} \right\} \text{Model matematika suplai bubur kertas} \quad (6)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} = 275 \\ x_{12} + x_{22} = 325 \\ x_{13} + x_{23} = 300 \end{array} \right\} \text{Model matematika permintaan bubur} \quad (6)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, 2 \text{ dan } j = 1, 2, 3$$

Dengan model pengiriman bubur kertas dari dua pusat penggilingan ketiga pusat percetakan menimbulkan biaya pengiriman. Dengan memperhatikan Gambar 1.2, tentu kamu dapat memahami bahwa, setiap minggu, biaya pengiriman setiap ton bubur kertas dari Penggilingan I ke Percetakan II adalah Rp220.000,00, kondisi ini dituliskan: $220.000x_{12}$.

Demikian hal yang sama 170.000 x_{11} memiliki arti bahwa, setiap minggu, biaya pengiriman setiap ton bubur kertas dari Penggilingan I ke Percetakan II adalah Rp 170.000,00.

Secara kumulatif total biaya pengiriman perusahaan tersebut, dituliskan sebagai berikut:

$$Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 17x_{11} + 22x_{12} + 15x_{13} + 18x_{21} + 16x_{22} + 12x_{23}$$

(dalam puluh ribu rupiah).



Fungsi Z merupakan fungsi biaya, tentu pihak perusahaan ingin biaya tersebut minimal. Oleh karena itu, untuk kajian program linear, fungsi Z merupakan fungsi tujuan/sasaran, dituliskan:

Meminimumkan:

$$Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 17x_{11} + 22x_{12} + 15x_{13} + 18x_{21} + 16x_{22} + 12x_{23}$$

(dalam puluh ribu rupiah).

Fungsi biaya total Z memiliki nilai paling minimal jika ditemukan nilai x_{ij} yang memenuhi semua kondisi batasan pada model permintaan dan suplai bubur bahan kertas koran.

Dari Masalah 1.1, 1.2, dan 1.3, kita belum menyelesaikan masalah secara lengkap. Khususnya untuk menentukan semua nilai variabel yang memenuhi setiap kondisi. Hal ini disebabkan, untuk sebagian masalah diperlukan pengetahuan lebih lanjut agar mampu menyelesaiannya; misalnya pada Masalah 1.1 dan 1.3. Sedangkan untuk Masalah 1.2 akan kita kaji pada subbab berikutnya.

Selain itu, dari Masalah 1.1 dan 1.2, khususnya pada rumusan yang terbentuk pada persamaan (1), (2), (3), (4), (5), (6), dan (7), serta fungsi tujuan yang terbentuk dapat kita simpulkan beberapa ciri model matematika dalam program linear, yaitu:

- 1) Adanya fungsi tujuan/sasaran dari setiap masalah yang dikaji. Misalnya,
 - i. Maksimumkan: $Z(x, y) = 40x + 30y$ (dalam satuan ribuan rupiah).
 - ii. Minimumkan:

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 12,5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 5x_5.$$

- iii. Minimumkan:

$$Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 17x_{11} + 22x_{12} + 15x_{13} + 18x_{21} + 16x_{22} + 12x_{23}$$

(dalam puluh ribu rupiah).

- 2) Kendala atau keterbatasan utama masalah dinyatakan sebagai suatu sistem pertidaksamaan linear atau sistem persamaan linear.
- 3) Terdapat juga kendala nonnegatif sebagai syarat dasar nilai setiap variabel yang akan ditentukan.

Dari tiga ciri di atas, dapat kita simpulkan masalah Program Linear dirumuskan sebagai berikut:



Definisi 1.1

Masalah program linear adalah menentukan nilai x_1, x_2, \dots, x_n yang memaksimumkan (atau meminimumkan) fungsi sasaran/tujuan,

$$z(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$$

dengan kendala/keterbatasan:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Namun, dalam kajian bab ini kita akan mengkaji masalah program linear hanya untuk dua variabel. Untuk tiga variabel atau lebih dibutuhkan pengetahuan lanjutan tentang teknik menyelesaikan sistem persamaan atau pertidaksamaan linear.

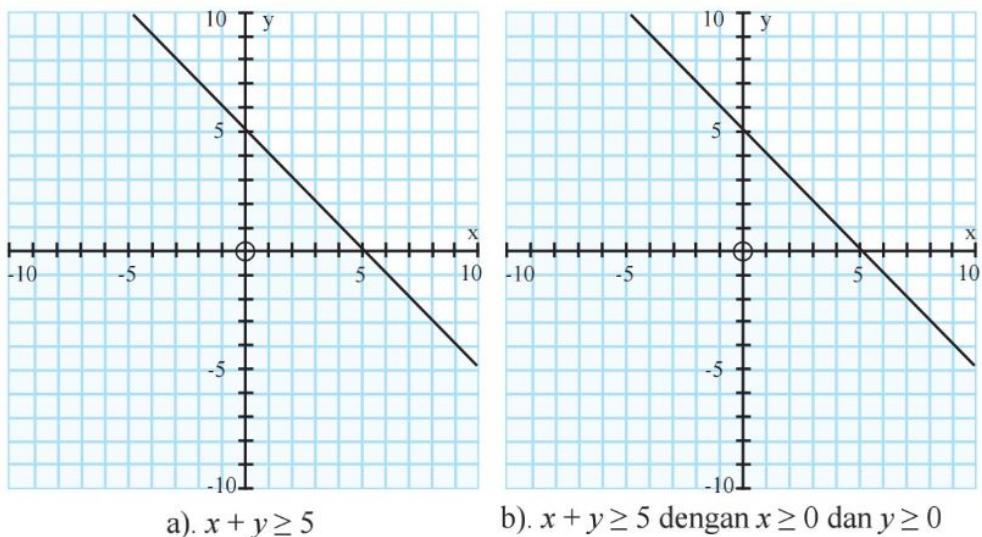
Pembahasan kita selanjutnya, mengkaji grafik setiap kendala yang terbentuk dari masalah program linear.

2. Program Linear dengan Metode Grafik

Kajian masalah program linear dua variabel dapat diselesaikan melalui grafik sistem kendala dari masalah tersebut. Oleh karena itu, langkah awal dalam menyelesaikan masalah tersebut, yaitu dengan menggambarkan sistem pertidaksamaan yang terbentuk pada kendala/keterbatasan masalah program linear. Berikut ini diberikan 1 pertidaksamaan dengan kombinasi syarat variabelnya.

- a) $x + y \geq 5$
- b) $x + y \geq 5$ dengan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$.
- c) $x + y \geq 5$ dengan $x \geq 0$ dan $y \leq 0$.
- d) $x + y \geq 5$ dengan $x \leq 0$ dan $y \geq 0$.
- e) $x + y \geq 5$ dengan $x \leq 0$ dan $y \leq 0$.

- Dengan pengetahuan tentang cara menggambarkan daerah penyelesaian suatu pertidaksamaan linear pada Kelas X, coba diskusikan bersama temanmu, apa perbedaan kelima pertidaksamaan di atas.



Gambar 1.3: Grafik a). $x + y \geq 5$ dan b). $x + y \geq 5$
dengan $x + y \geq 5$ dengan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$

Dalam buku ini, untuk semua grafik persamaan linear atau sistem pertidaksamaan linear, **Daerah Bersih** merupakan daerah penyelesaian pertidaksamaan atau sistem pertidaksamaan yang dikaji.

Pada gambar a), dapat kita pahami bahwa semua titik yang terletak pada daerah yang tidak diarsir (bersih) memenuhi pertidaksamaan $x + y \geq 5$. Hal ini berbeda dengan syarat nilai x dan y pada Gambar 2.3 b). Hanya pada saat $x \geq 0$ dan $y \geq 0$ yang memenuhi daerah penyelesaian pertidaksamaan $x + y \geq 5$.

Apa yang dapat kamu jelaskan dari gambar b) di atas?



Contoh 1.1

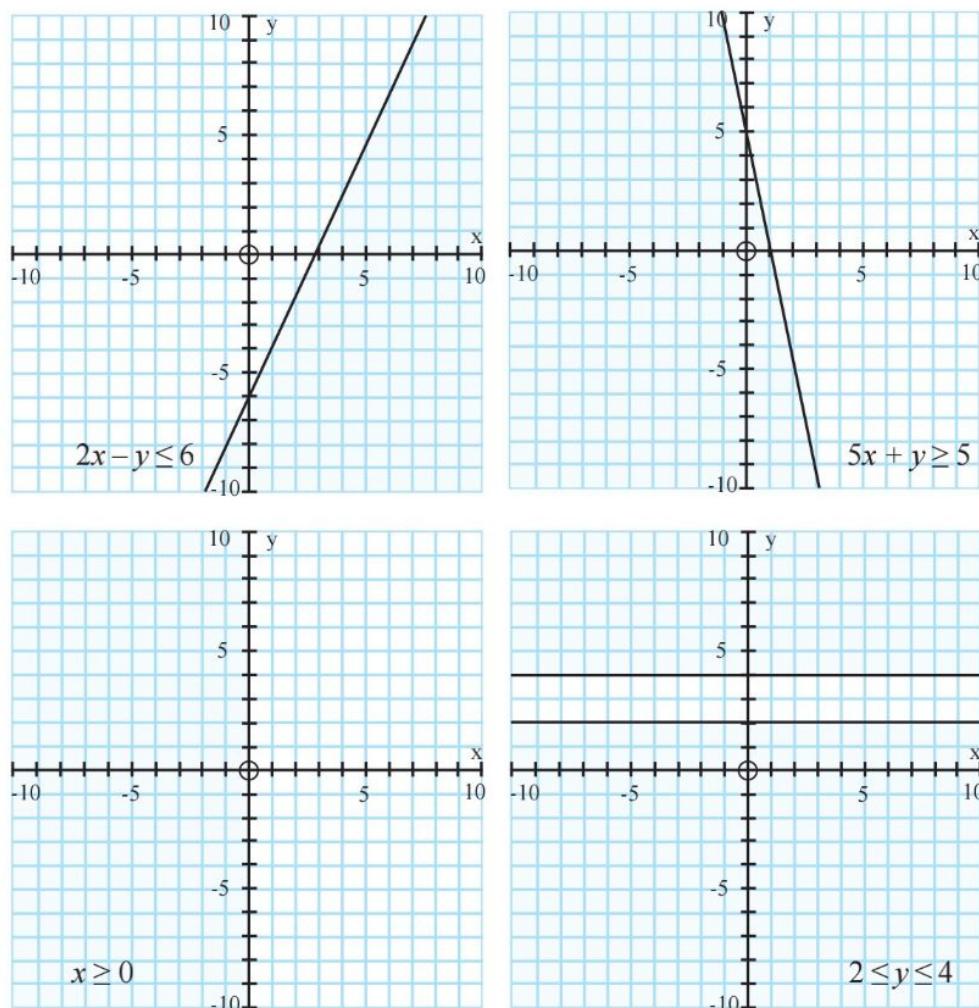
Gambarkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan berikut ini.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \left. \begin{array}{l} 2x - y \leq 6 \\ 5x + y \geq 5 \\ x \geq 0 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{array} \right\} \\ \text{b)} \quad \left. \begin{array}{l} x + y \leq 2 \\ -3x + 2y \geq 6 \\ 3 \leq x \leq 4 \end{array} \right\} \end{array}$$



Alternatif Penyelesaian

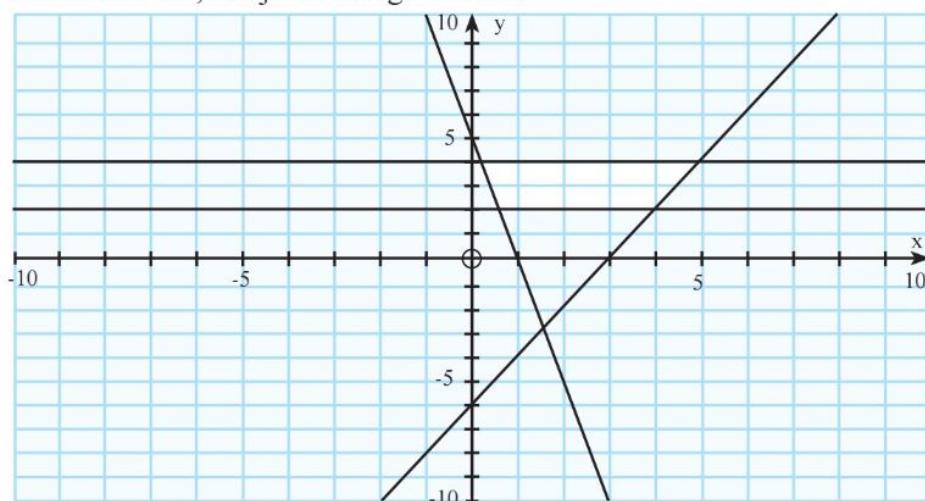
Untuk menggambarkan daerah penyelesaian setiap pertidaksamaan pada sistem di atas, dapat dimulai dengan menggambar satu per satu pertidaksamaan yang tersaji. Tentu, semua daerah penyelesaian tersebut nanti harus disajikan dalam satu bidang koordinat kartesius.



Gambar 1.4: Daerah penyelesaian pertidaksamaan



Secara kolektif, disajikan sebagai berikut.



Gambar 1.5: Daerah penyelesaian pertidaksamaan

- Dengan cara yang sama, gambarkan daerah penyelesaian pertidaksamaan secara terpisah, kemudian gambarkan secara lengkap dalam satu bidang koordinat kartesius.
- Dengan dua daerah penyelesaian yang disajikan di atas, diskusikan bersama teman langkah-langkah untuk menggambarkan daerah penyelesaian pertidaksamaan linear. Jika kamu mengalami kesulitan, tanyakanlah kepada gurumu.



Uji Kompetensi 1.1

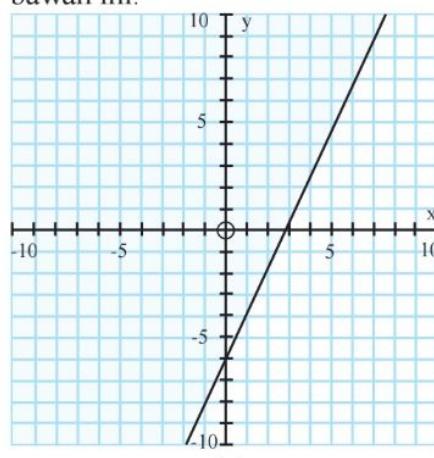
1. PT Lasin adalah suatu pengembang perumahan di daerah pemukiman baru. PT tersebut memiliki tanah seluas 12.000 meter persegi berencana akan membangun dua tipe rumah, yaitu tipe mawar dengan luas 130 meter persegi dan tipe melati dengan luas 90 m^2 . Jumlah rumah yang akan dibangun tidak lebih 150 unit. Pengembang merancang laba tiap-tiap tipe rumah Rp2.000.000,00 dan Rp 1.500.000,00.
Modelkan permasalahan di atas!
2. Klinik “Dewi” akan membuka cabang baru di daerah padat penduduk. Untuk itu, pemilik klinik merancang sebuah jadwal jaga perawat yang akan bertugas, seperti berikut ini.



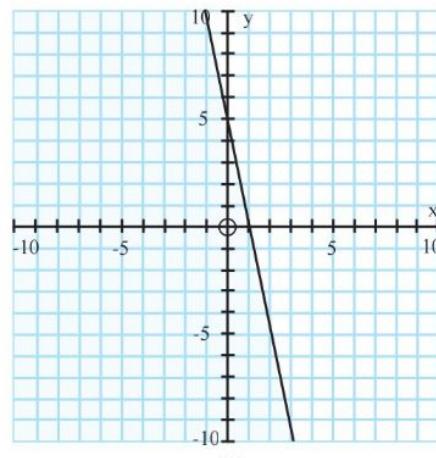
	24.00 - 04.00	04.00 - 08.00	08.00 - 12.00	12.00 - 16.00	16.00 - 20.00	20.00 - 24.00
Ketersedian	1	2	3	4	5	6
Banyak Pe- rawat yang dibutuhkan	6	8	11	9	18	11

Rumuskan masalah penjadwalan perawat tersebut dalam model matematika.

3. Tentukanlah pertidaksamaan yang memenuhi setiap daerah penyelesaian di bawah ini.



(a)



(b)

4. Gambarkanlah daerah penyelesaian setiap sistem pertidaksamaan di bawah ini.

a) $2x + y \geq 24$
 $x \geq 5$

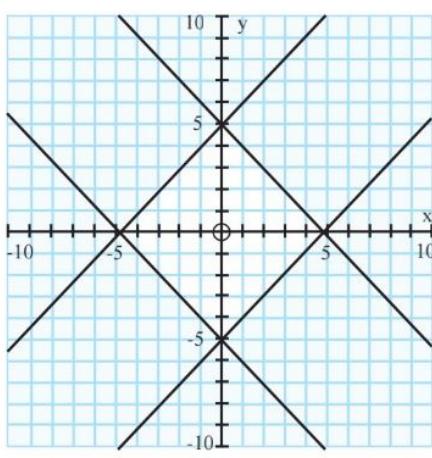
b) $2y \leq 5 - 6x$
 $1 \leq y \leq 6$

5. Cermati pertidaksamaan $ax + by \geq c$.

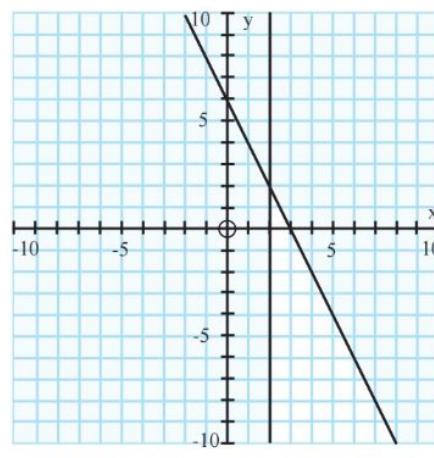
Untuk menentukan daerah penyelesaian (bersih) pada bidang koordinat, selain dengan menggunakan uji titik, selidiki hubungan tanda koefisien x dan y terhadap daerah penyelesaian (bersih) pertidaksamaan.



6. Perhatikan grafik-grafik di bawah ini.
Nyatakan pertidaksamaan-pertidaksamaan yang memenuhi setiap daerah yang memenuhi.



(i)



(ii)

7. Seorang atlet diwajibkan makan dua jenis tablet setiap hari. Tablet pertama mengandung 5 unit vitamin A dan 3 unit vitamin B, sedangkan tablet kedua mengandung 10 unit vitamin A dan 1 unit vitamin B. Dalam satu hari, atlet itu memerlukan 20 unit vitamin A dan 5 unit vitamin B. Harga tiap-tiap 1 tablet, Rp1.500,00 dan Rp2.000,00.
Modelkan masalah di atas.
8. Dengan persediaan kain polos 20 meter dan kain bergaris 10 meter, seorang penjahit akan membuat 2 model pakaian jadi. Model I memerlukan 1 meter kain polos dan 1,5 meter kain bergaris. Model II memerlukan 2 meter kain polos dan 0,5 meter kain bergaris. Bila pakaian tersebut dijual, setiap model I memperoleh untung Rp15.000,00 dan model II memperoleh untung Rp10.000,00. (UAN 2004 No. 22)
Nyatakan masalah di atas dalam model matematika
9. Sebuah toko bunga menjual 2 macam rangkaian bunga. Rangkaian I memerlukan 10 tangkai bunga mawar dan 15 tangkai bunga anyelir, Rangkaian II memerlukan 20 tangkai bunga mawar dan 5 tangkai bunga anyelir. Persediaan bunga mawar



dan bunga anyelir masing-masing 200 tangkai dan 100 tangkai. Rangkaian I dijual seharga Rp200.000,00, dan Rangkaian II dijual seharga Rp100.000,00 per rangkaian. (UN 2006 No. 21)

Modelkan masalah di atas dalam bentuk model matematika.

10. Perhatikan masalah yang dihadapi seorang penjaja buah-buahan berikut ini.
Pak Benni, seorang penjaja buah-buahan yang menggunakan gerobak menjual apel dan pisang. Harga pembelian apel Rp 18.000,- tiap kilogram dan pisang Rp8.000,00,- tiap kilogram. Beliau hanya memiliki modal Rp2.000.000,00, sedangkan muatan gerobak tidak lebih dari 450 kilogram. Padahal keuntungan tiap kilogram apel 2 kali keuntungan tiap kilogram pisang.
Rumuskanlah model matematika masalah di atas.

3. Daerah Bersih dan Garis Selidik

Penggunaan istilah daerah bersih merupakan daerah yang memenuhi suatu pertidaksamaan. Untuk konsistensi pada buku ini, kita menggunakan istilah daerah bersih, artinya semua titik (x, y) yang memenuhi suatu pertidaksamaan linear atau suatu sistem pertidaksamaan linear.

Sekarang, yang menjadi pokok permasalahan pada bagian subbab ini adalah menentukan daerah bersih suatu pertidaksamaan linear atau sistem pertidaksamaan linear. Mari kita mulai daerah bersih yang terdapat pada Gambar 1.3 b). Untuk setiap nilai x dan y yang memenuhi $x + y \geq 5$ dengan $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, disajikan pada tabel berikut ini.

- Temukan hubungan titik koordinat dengan daerah bersih yang terdapat pada Gambar 1.3.b! Apa kesimpulan yang dapat ditarik dari hubungan tersebut?

Tabel 1.4: Uji Titik dengan Nilai pertidaksamaan dan Arah Daerah Bersih

(x, y)	Nilai $x + y \geq 5$	Arah Daerah Bersih
(5, 4)	Benar ($9 > 5$)	Sebelah kanan (atas) garis $x + y = 5$
(6, 1)	Benar ($7 > 5$)	Sebelah kanan (atas) garis $x + y = 5$
(2, 1)	Salah ($3 > 5$)	Sebelah kiri (bawah) garis $x + y = 5$
(0, 0)	Salah ($0 > 5$)	Sebelah kiri (bawah) garis $x + y = 5$



Sekarang, kita uji pemahaman kita menggambarkan daerah bersih yang dihasilkan masalah berikut ini.



Masalah-1.4

Suatu pabrik farmasi menghasilkan dua jenis kapsul obat flu yang diberi nama Fluin dan Fluon. Tiap-tiap kapsul memuat tiga unsur (*ingredient*) utama dengan kadar kandungannya tertera dalam Tabel 1.5. Menurut dokter, seseorang yang sakit flu akan sembuh jika dalam tiga hari (secara rata-rata) minimal menelan 12 grain aspirin, 74 grain bikarbonat dan 24 grain kodein. Jika harga Fluin Rp500,00 dan Fluon Rp600,00 per kapsul, bagaimana rencana (program) pembelian seorang pasien flu (artinya berapa kapsul Fluin dan berapa kapsul Fluon harus dibeli) supaya cukup untuk menyembuhkannya dan meminimumkan ongkos pembelian total.

Table 1.5: Kandungan Unsur (dalam grain)

Unsur	Banyak grain perkapsul	
	Fluin	Fluon
Aspirin	2	1
Bikarbonat	5	8
Kodein	1	6

Alternatif Penyelesaian

Data pada masalah di atas, dapat disajikan seperti tabel berikut ini.

Tabel 1.6: Tabel persiapan

Unsur	Fluin	Fluon	Batas Minimum
Aspirin	2	1	12
Bikarbonat	5	6	74
Kodein	1	6	24
Harga	500	600	



Dengan tabel tersebut, dapat kita misalkan:
 x : banyak kapsul Fluin yang dibeli.
 y : banyak kapsul Fluon yang dibeli.
Selanjutnya, kita dengan mudah menemukan bentuk masalah program linear masalah di atas.

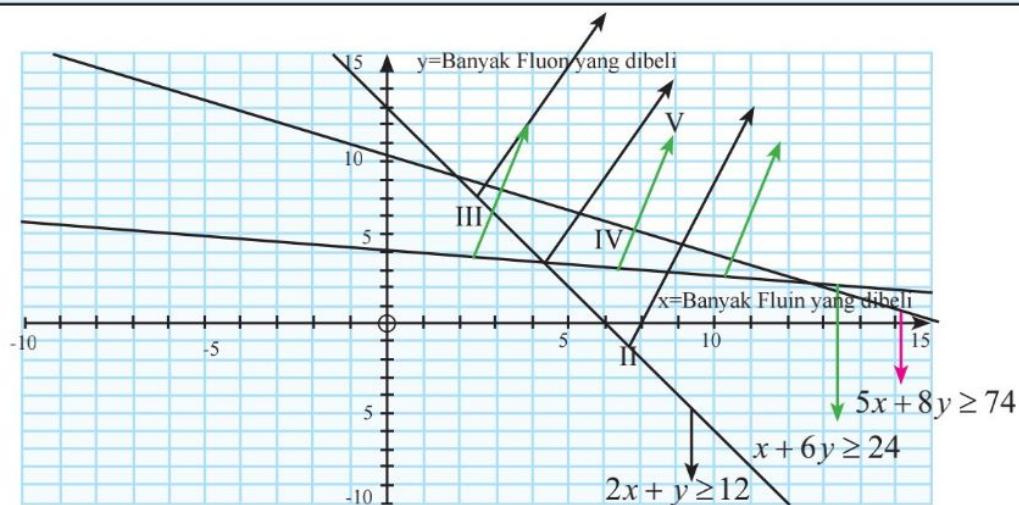
Mencari x, y yang memenuhi:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 12 \\ 5x + 8y \geq 74 \\ x + 6y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (\text{a})$$

dan meminimumkan $Z = 500x + 600y$. (b)

- Dengan menggunakan uji titik, coba kamu gambarkan daerah penyelesaian setiap pertidaksamaan di atas.

software *Autograph* merupakan salah satu software yang digunakan untuk menggambarkan daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear. *Autograph* juga dapat digunakan untuk menggambarkan berbagai grafik fungsi, misalnya fungsi kuadrat, dan fungsi logaritma.



Gambar 1.4: Daerah V adalah irisan daerah bersih sistem pertidaksamaan (a)



Daerah no. V merupakan irisan daerah bersih keenam pertidaksamaan, juga disebut **daerah layak, atau daerah penyelesaian atau daerah optimum**.

Dalam buku ini kita sepakati untuk menggunakan istilah daerah penyelesaian. Jika keenam pertidaksamaan di atas, dinyatakan sebagai suatu sistem pertidaksamaan, maka daerah penyelesaian dapat kita definisikan sebagai berikut:



Definisi 1.2

(Daerah Layak/Daerah Penyelesaian/Daerah Optimum)

Daerah fisibel atau Daerah Penyelesaian Masalah Program Linear merupakan himpunan semua titik (x, y) yang memenuhi kendala suatu masalah program linear.

- Coba diskusikan dengan temanmu, apakah semua kendala suatu masalah program linear memiliki daerah penyelesaian? Jika ya, tunjukkan syaratnya. Jika tidak, berikan contohnya! (Petunjuk: tunjukkan untuk program linear 2 variabel)

Daerah penyelesaian untuk masalah ini merupakan suatu daerah yang tak terbatas (*unbounded*). Tentu terdapat juga daerah penyelesaian yang terbatas (*bounded*).

Selanjutnya, akan ditentukan nilai x dan y yang terdapat di daerah penyelesaian yang menjadikan nilai fungsi $Z = 500x + 600y$ minimum. Jadi, kita akan fokus pada nilai fungsi Z di daerah penyelesaian. Perhatikan nilai-nilai fungsi Z pada tabel berikut ini.

Tabel 1.7: Tabel nilai $Z = 500x + 600y$

(x, y)	Nilai $Z = 500x + 600y$
(0, 12)	$Z = 500.(0) + 600.(12) = 7200$
(2, 8)	$Z = 500.(2) + 600.(8) = 5800$
(4, 7)	$Z = 500.(4) + 600.(7) = 6200$
(5, 10)	$Z = 500.(5) + 600.(10) = 8500$

Kegiatan 1

- Dengan nilai fungsi Z pada tabel di atas, gambarkan beberapa grafik persamaan garis $K = 500x + 600y$ dengan k bilangan bulat (sesuai dengan nilai (x,y)), yang melalui daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (a).



- Cermati perubahan nilai garis tersebut, jika garis digeser ke kanan (atas) atau ke kiri (bawah), hingga ditemukan nilai paling minimum di daerah penyelesaian.

Dari hasil Kegiatan 1, ditemukan bahwa pada saat $x = 6$ dan $y = 3$ fungsi sasaran $K = 500x + 600y$ bernilai minimum, yaitu 4800.

Sebagai pembanding, bahwa daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (a) merupakan daerah tidak terbatas (*unbounded area*).

- Coba cermati nilai fungsi $Z = 500x + 600y$ untuk titik A , B , dan C .

Tabel 1.8: Nilai $Z = 500x + 600y$

	$Z = 500x + 600y$
$A (0,12)$	$Z = 500.(0) + 600.(12) = 7.200$
$B (2,8)$	$Z = \dots\dots$
$C (6,3)$	$Z = \dots\dots$

- Kesimpulan apa yang dapat kamu tarik dengan nilai Z yang ada pada tabel di atas?
➤ Seandainya, fungsi tujuan masalah tersebut diubah menjadi:
Maksimumkan: $Z = 500x + 600y$
Berapa nilai maksimum Z yang kamu peroleh?

Dari hasil penyelidikan melalui Tabel 1.8, diharapkan kamu menemukan supaya uang pembelian total menjadi minimum sebaiknya dibeli 6 kapsul Fluin dan 3 kapsul Fluon dan uang pembeliannya adalah Rp4800,00.

Untuk memperkaya pengetahuan dan ketrampilan kamu, mari kita selesaikan masalah kelompok tani transmigran yang disajikan pada awal bab ini.



Contoh 1.2

Telah diketahui model matematika masalah tersebut, yaitu

$$\begin{cases} 0,02x + 0,05y \leq 10 \\ 10x + 8y \leq 1550 \text{ atau } \\ 5x + 3y \leq 460 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 5y \leq 1000 \rightarrow \text{kendala lahan} \\ 10x + 8y \leq 1550 \rightarrow \text{kendala waktu} \\ 5x + 3y \leq 460 \rightarrow \text{kendala pupuk} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



Fungi Tujuan

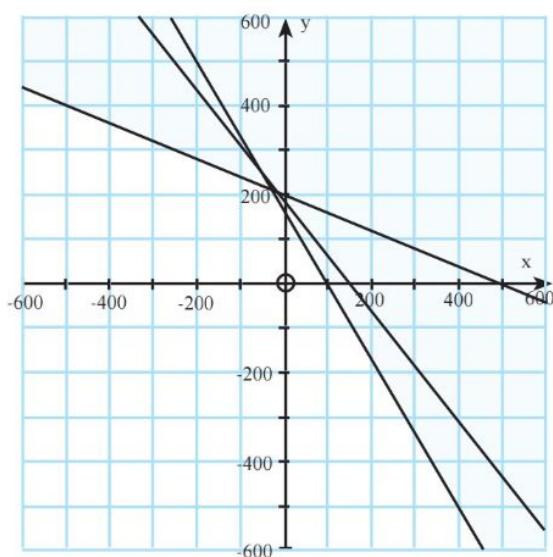
Maksimumkan: $Z(x, y) = 40x + 30y$ (dalam satuan ribuan rupiah). (2)

Kita akan menentukan banyak hektar tanah yang seharusnya ditanami pada dan jagung agar pendapatan kelompok tani tersebut maksimum.

Alternatif Penyelesaian

Langkah pertama, kita menentukan daerah penyelesaian yang memenuhi sistem (1).

Mari cermati gambar di bawah ini.



Gambar 1.5: Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (1).

- Untuk memastikan ketrampilanmu dalam menggambarkan daerah penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear, selidiki Gambar 1.5 apakah sudah sesuai dengan batasan (1)? Berikan alasanmu.

Selanjutnya kita akan memilih dua titik yang terdapat di daerah penyelesaian untuk membantu menentukan arah pergeseran garis selidik $K = 40x + 30y$ (dalam ribuan rupiah).

Misal, dipilih titik $(20, 20)$, sehingga diperoleh persamaan garis $40x + 30y = 1400$. Sedangkan untuk titik $(50, 100)$, diperoleh persamaan garis $40x + 30y = 5000$.

- Dengan teliti, selidiki arah pergeseran nilai grafik garis selidik pada daerah penyelesaian hingga kamu menemukan titik yang mengakibatkan garis tersebut bernilai maksimum. Bandingkan hasil kerjamu dengan hasil kinerja temanmu!



- Dari hasil yang kamu peroleh, interpretasikan pada konteks masalah yang sebenarnya.

Dari pembahasan Masalah 1.1 dan Masalah 1.4, mari kita tuliskan dan cermati bersama kesimpulan berikut ini, yang kita nyatakan dalam definisi.



Definisi 1.3

Fungsi sasaran/tujuan merupakan atau fungsi objektif suatu rumusan fungsi yang memenuhi semua keterbatasan pada suatu masalah program linear.

Fungsi sasaran/tujuan merupakan fungsi linear yang terkait dengan setiap nilai variabel dalam semua kendala program linear.

Mari kita cermati kembali fungsi sasaran untuk setiap Masalah 1.1 sampai Masalah 1.4.

i Maksimumkan: $Z(x, y) = 40x + 30y$ (dalam satuan ribuan rupiah).

ii Minimumkan:

$$Z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 12,5x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 10x_4 + 5x_5.$$

ii Minimumkan:

$$Z(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}) = 17x_{11} + 22x_{12} + 15x_{13} + 18x_{21} + 16x_{22} + 12x_{23}.$$

(dalam puluh ribu rupiah).

iv Minimumkan: $Z(x, y) = 500x + 600y$

Fungsi sasaran bagian (i) dan (iv) hanya memuat dua variabel, yaitu variabel x dan y , sedangkan pada bagian (ii) dan (iii) memuat enam variabel. Bahkan, terdapat masalah yang memuat n banyak variabel.

Oleh karena itu, secara umum dapat ditulis bentuk umum fungsi sasaran dari suatu masalah program linear, yaitu:

Maksimumkan (Minimumkan)

$$Z(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n.$$

Nilai maksimum (atau minimum) fungsi Z adalah nilai terbesar (atau terkecil) dari fungsi objektif yang merupakan solusi optimum masalah program linear.

Namun dalam kesempatan ini, kita mengkaji hanya untuk $n = 2$ melibatkan, sehingga fungsi sasaran menjadi $Z(x_1, x_2) = C_1x_1 + C_2x_2$.

- Selidiki syarat suatu fungsi tujuan mempunyai (tidak mempunyai) nilai maksimum!



Definisi 1.4

Garis selidik adalah grafik persamaan fungsi sasaran/tujuan yang digunakan untuk menentukan solusi optimum (maksimum atau minimum) suatu masalah program linear.

Untuk menentukan persamaan garis selidik $K = C_1x_1 + C_2x_2$ dengan k bilangan real, kita memilih minimal dua titik (x, y) yang terdapat di daerah penyelesaian. Dengan dua titik tersebut, nilai optimum fungsi sasaran dapat ditemukan melalui pergeseran garis selidik di daerah penyelesaian.

Namun pada kasus tertentu, garis selidik tidak dapat digunakan untuk menentukan nilai optimum suatu fungsi sasaran. Mari kita cermati masalah berikut ini.



Masalah-1.5

Apakah kamu pernah melihat tanaman hias seperti di bawah ini? Tahukah kamu berapa harga satu tanaman hias tersebut?



Gambar 1.6: Tanaman Hias Aglaonema dan Sansevieria

Sumber: www.aksesdunia.com



Setiap enam bulan, seorang pemilik usaha tanaman hias memesan tanaman hias dari agen besar; Aglaonema (A) dan Sansevieria (S) yang berturut-turut memberi laba sebesar Rp5.000.000,00 dan Rp3.500.000,00 per unit yang terjual. Dibutuhkan waktu yang cukup lama untuk menghasilkan satu tanaman hias dengan kualitas super. Oleh karena itu agen besar memiliki aturan bahwa setiap pemesanan tanaman hias A paling sedikit 20% dari seluruh pesanan tanaman hias lain. Pemilik usaha tanaman hias memiliki lahan yang hanya cukup untuk 10 tanaman hias A saja atau 15 tanaman hias S. Dalam keadaan demikian, berapa banyak tanaman hias A dan S sebaiknya dipesan (per semester) jika diketahui bahwa pada akhir semester tanaman hias lama pasti habis terjual dan pemilik usaha tersebut ingin memaksimumkan laba total?

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan kita dalam membahas masalah ini,

misalkan x : banyak tanaman hias A yang dipesan

y : banyak tanaman hias S yang dipesan.

Pernyataan "Oleh karena itu agen besar memiliki aturan bahwa setiap pemesanan tanaman hias A paling sedikit 20% dari seluruh pesanan tanaman hias lain", dapat dituliskan sebagai berikut.

$$x \geq \frac{1}{5}(x + y) \text{ atau } 4x - y \geq 0.$$

Untuk memperoleh laba, pemilik harus mempertimbangkan keterbatasan lahan sebagai daya tampung untuk tiap-tiap tanaman hias.

Misal, L : luas kebun tanaman hias,

L_x : luas kebun yang diperlukan untuk 1 tanaman hias A,

L_y : luas kebun yang diperlukan untuk 1 tanaman hias S.



Sesuai keterangan pada masalah di atas, luas kebun hanya dapat menampung 10 tanaman hias A atau 15 tanaman hias S. Pernyataan ini, dimodelkan sebagai berikut:

$$L_x = \frac{1}{10}L \text{ dan } L_y = \frac{1}{15}L$$

Tentu luas kebun yang diperlukan untuk x banyak tanaman hias A dan y banyak tanaman hias S tidak melebihi luas kebun yang ada. Oleh karena itu, dapat dituliskan;

$$x \cdot \left(\frac{1}{10}L \right) + y \cdot \left(\frac{1}{15}L \right) \leq L \text{ atau } 3x + 2y \leq 30$$

Selanjutnya, pemilik kebun mengharapkan laba sebesar Rp5.000.000,00 dari 1 tanaman hias A yang terjual dan Rp3.500.000,00 dari 1 tanaman hias S yang terjual. Oleh karena itu, untuk sebanyak x tanaman hias A yang terjual dan sebanyak y tanaman hias S yang terjual, dapat dituliskan sebagai laba total pemilik kebun; yaitu:

$$Z = 5x + 3.5y \text{ (dalam juta rupiah).}$$

Jadi secara lengkap, model matematika masalah program linear pemilik kebun tanaman hias dinyatakan sebagai berikut.

Menentukan x dan y yang memenuhi kendala:

$$\begin{cases} 4x - y \geq 0 \\ 3x + 2y \leq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Dengan fungsi tujuan:

Maksimumkan: $Z = 5x + 3.5y$ (dalam juta rupiah).

Selanjutnya, kita akan menentukan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan linear (1). Tentunya, diharapkan keterampilan kamu dalam menggambarkan daerah penyelesaian sistem tersebut sudah makin meningkat. Sekaligus juga, kamu harus makin terampil dalam memilih titik dalam daerah penyelesaian untuk menentukan nilai maksimum fungsi sasaran.

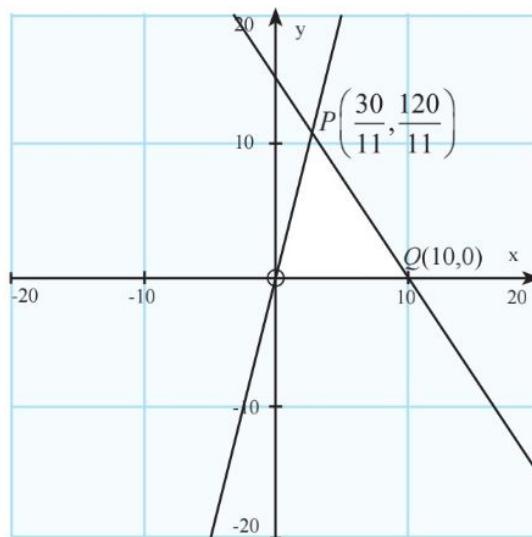
Mari kita cermati gambar berikut ini.

➤ Dengan menemukan persamaan garis selidik terlebih dahulu, periksa bahwa titik



$P\left(\frac{30}{11}, \frac{120}{11}\right)$ merupakan titik optimum masalah program linear tersebut.

Dengan nilai maksimum $Z = 51.818.181,818$ atau sekitar Rp51.818.200,00.
Bandingkan hasil kerjamu dengan temanmu.



Gambar 1.7: Daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (1)

Namun, pada kenyataannya, ditemukannya titik $P\left(\frac{30}{11}, \frac{120}{11}\right)$ sebagai titik optimum masalah di atas mengakibatkan hal yang tidak mungkin terjadi untuk menemukan $2\frac{8}{11}$ tanaman hias A dan $10\frac{10}{11}$ tanaman hias S. Cara yang mungkin diterapkan adalah dengan metode pembulatan.

Mari kita cermati hasil pembulatan (ke atas atau ke bawah)

$$\text{titik } P\left(2\frac{8}{11}, 10\frac{10}{11}\right)$$

- i $P_1(2,10)$: ternyata di luar daerah penyelesaian OPQ .
- ii $P_2(2,11)$: ternyata di luar daerah penyelesaian OPQ .
- iii $P_3(3,10)$: merupakan titik di daerah penyelesaian, tetapi nilai Z pada titik $(3, 10)$ hanya sebesar Rp50.000.000,00, memiliki selisih sebesar Rp1.800.000,00 dengan nilai optimum di titik P .
- iv $P_4(3,11)$: ternyata di luar daerah penyelesaian OPQ .



Artinya, metode pembulatan (ke atas atau ke bawah) juga tidak memberikan jawaban optimum terhadap masalah program linear tersebut.

- Dalam kertas berpetak, di dalam daerah penyelesaian cermati titik-titik yang dekat dengan titik $P\left(2\frac{8}{11}, 10\frac{10}{11}\right)$. Tetapi titik yang kita inginkan, yaitu (x, y) harus untuk x dan y merupakan bilangan bulat.

Sebagai petunjuk buat kamu, nilai optimum fungsi sasaran adalah Rp51.500.000,00.

- Untuk kesimpulan, dari hasil titik optimum yang kamu peroleh, interpretasikan nilai yang kamu peroleh.

Masalah 1.5 mengingatkan kita bahwa tidak selamanya penentuan nilai optimum dengan menggunakan garis selidik. Terdapat beberapa kasus yang memerlukan ketelitian yang tinggi dalam menyelesaikan masalah program linear.

Dari beberapa masalah yang telah dibahas di atas, masalah program linear memiliki nilai optimum (maksimum atau minimum) terkait dengan eksistensi daerah penyelesaian. Oleh karena itu terdapat tiga kondisi yang akan kita selidiki, yaitu:

1. tidak memiliki daerah penyelesaian
2. memiliki daerah penyelesaian (fungsi sasaran hanya memiliki nilai maksimum atau hanya memiliki nilai minimum)
3. memiliki daerah penyelesaian (fungsi sasaran memiliki nilai maksimum dan minimum).

1. Tidak memiliki daerah penyelesaian

Mari kita cermati, grafik berikut ini.

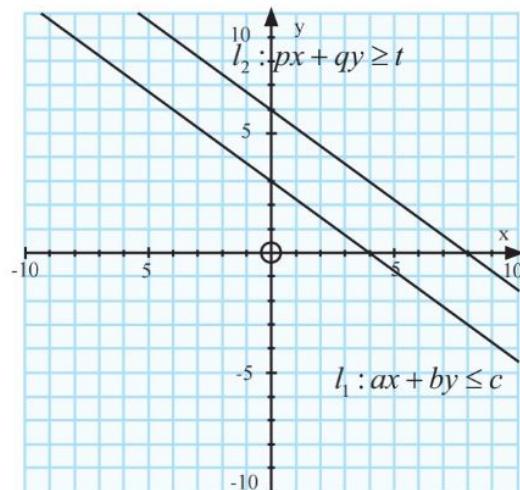
Diberikan sistem:

$$\begin{cases} ax + by \leq c; a \neq 0, b \neq 0 \\ px + qy \geq t; p \neq 0, q \neq 0 \end{cases}$$

Untuk setiap

a, b, c, p, q dan $t \in R$

- Selidiki hubungan antar koefisien variabel (x dan y) serta konstanta c dan t pada sistem tersebut, hingga kamu menemukan syarat bahwa suatu sistem pertidaksamaan linear tidak memiliki daerah penyelesaian.



Gambar 1.8



2. Memiliki daerah penyelesaian (fungsi sasaran hanya memiliki nilai maksimum atau hanya memiliki nilai minimum).

Grafik berikut ini, mendeskripsikan bahwa walaupun kendala suatu program linear memiliki daerah penyelesaian, ternyata belum tentu memiliki nilai fungsi sasaran. Mari kita cermati.

- Dari Gambar 1.9, tentukan sistem pertidaksamaan yang bersesuaian dengan grafik daerah penyelesaian seperti pada gambar.

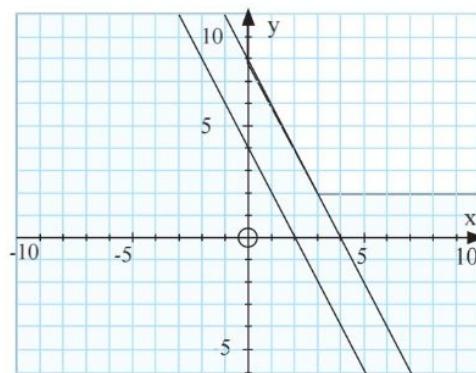
Selanjutnya, dengan sistem pertidaksamaan yang telah kamu temukan, misalnya diketahui fungsi sasaran;

- a. Maksimumkan:

$$Z = mx + ny; m, n \in R^+$$

- b. Minimumkan: $Z = mx + ny; m, n \in R^+$

- Dengan demikian, tentu kamu dapat menemukan kondisi suatu program linear yang memiliki daerah penyelesaian tetapi fungsi sasarannya hanya memiliki nilai maksimum dan tidak memiliki nilai minimum.



Gambar 1.9

3. Memiliki daerah penyelesaian (fungsi sasaran memiliki nilai maksimum dan minimum).

Pertidaksamaan:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 12 \geq 0 \\ 3x + 2y - 12 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

merupakan kendala yang bersesuaian dengan grafik daerah penyelesaian pada Gambar 1.10 di samping.

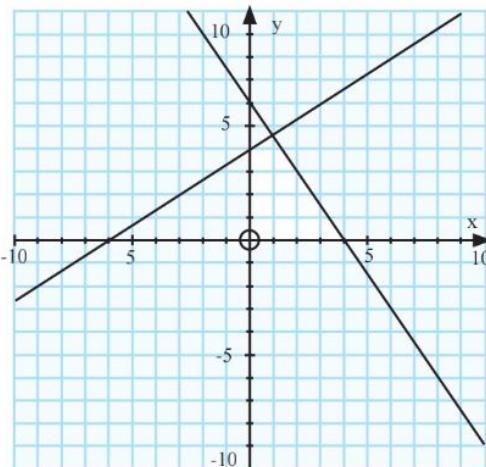
- Misalnya, diberikan fungsi sasaran berikut ini:

- a) Maksimumkan:

$$Z = 3x + 2y$$

- b) Minimumkan:

$$Z = 3x + 2y$$



Gambar 1.10



Dengan teliti, coba kamu tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi sasaran tersebut. Bandingkan hasil yang kamu temukan dengan temanmu.

Latihan

Diketahui sistem pertidaksamaan linear suatu masalah program linear.

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + by (\geq, \leq) c; a \neq 0, b \neq 0 \\ px + qy (\geq, \leq) t; p \neq 0, q \neq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right. \quad (1)$$
$$(2)$$

a, b, c, p, q dan t merupakan bilangan real, dan $c < t$.

Dengan memperhatikan hubungan koefisien variabel (x dan y) pada kendala (1) dan (2), selidiki syarat agar sistem pertidaksamaan linear tersebut:

- i tidak memiliki daerah penyelesaian;
- ii memiliki daerah penyelesaian
- iii memiliki daerah penyelesaian berupa suatu garis atau segmen garis
- iv memiliki daerah penyelesaian hanya satu titik.



Uji Kompetensi 1.2

1. Sebuah perusahaan akan membeli paling sedikit 8 mesin untuk perluasan pabriknya. Harga mesin baru Rp15.000.000,00 per unit. Selain itu dapat juga dibeli mesin bekas dengan umur dua tahun, tiga tahun, dan empat tahun yang harganya diukur dari harga baru akan susut Rp3.000.000,00 per tahunnya. Keempat jenis mesin di atas, yaitu baru, umur dua tahun, umur tiga tahun, umur empat tahun mempunyai ukuran yang berbeda-beda, berturut-turut memerlukan tempat 3 meter persegi, 4 meter persegi, 5 meter persegi, dan 6 meter persegi per unitnya. Sedangkan ongkos perawatannya berturut-turut 0, Rp1.000.000,00, Rp2.000.000,00, dan Rp4.000.000,00 per tahunnya. Bila tempat yang tersedia untuk semua mesin yang dibeli tersebut hanya 35 meter persegi dan ongkos



perawatan total yang disediakan hanya Rp7.000.000,00 per tahun, bentuk model matematika masalah program linear perusahaan tersebut.

2. Alkohol dapat dihasilkan dari 3 macam buah-buahan, A, P dan V yang dapat diolah dengan 2 macam proses, misalnya A_1 : buah A diolah menurut cara -1, dan A_2 : buah A diolah dengan cara-2, dan seterusnya. Berturut-turut $A_1, A_2, P_1, P_2, V_1, V_2$ dapat menghasilkan alkohol sebanyak 3%; 2,5%; 3,5%; 4%; 5%; dan 4,5% dari buah sebelumnya. Kapasitas mesin adalah 1 ton buah-buahan per hari dan selalu dipenuhi. Pemborong yang memasok buah A hanya mau melayani jika paling sedikit 600 kilogram per hari. Sebaliknya buah P dan V masing-masing hanya dapat diperoleh paling banyak 450 kilogram per hari.
Buatlah model matematika masalah di atas!
3. Untuk melayani konferensi selama 3 hari harus disediakan serbet makanan. Untuk hari ke-1, -2, -3 berturut-turut diperlukan 50, 80, 70 helai serbet makanan. Harga beli yang baru Rp 1.200 sehelai, ongkos mencuci kilat (satu malam selesai) Rp 800 per helai, cucian biasa (satu hari satu malam selesai) Rp 200 per helai. Untuk memminimumkan biaya pengadaan serbet, berapa helai serbet yang harus dibeli, berapa helai serbet bekas hari ke-1 harus dicuci kilat (untuk hari ke-2) dan berapa helai serbet bekas hari ke-2 harus dicuci kilat (untuk hari ke-3)?
Buatlah model matematika masalah di atas!
4. Sebuah peternakan unggas mempunyai kandang-kandang untuk 600 ekor yang terdiri dari ayam (A), itik (I), dan mentok (M). Kapasitas maksimum kandang selalu dipenuhi. Pemilik menginginkan banyak itik tidak melebihi 400 ekor, demikian pula mentok paling banyak 300 ekor. Ongkos pemeliharaan sampai laku terjual untuk A, I, M berturut-turut 3500, 2500, dan 6000 rupiah per ekor. Harga jual A, I, M, berturut-turut adalah 7.000, 5.500 dan 10.500 rupiah per ekornya. Rumuskan model matematika program beternak yang memaksimumkan keuntungan jika keuntungan adalah selisih harga jual dari ongkos pemeliharaan. (Dalam masalah di atas dianggap tidak ada ongkos pembelian).



9. Seorang agen perusahaan alat elektronik rumah tangga menjual kulkas ke suatu pusat perbelanjaan. Pada bulan Juli, 25 unit kulkas terjual. Untuk tiga bulan berikutnya, setiap agen membeli 65 kulkas per bulan dari pabrik, dan mampu menjual hingga 100 unit per bulan dengan rincian harga sebagai berikut:

Kulkas	Harga Beli (\$)	Harga Jual (\$)
Agustus	60	90
September	65	110
Oktober	68	105

Agen menyimpan 45 unit kulkas tetapi harus membayar \$7/unit/bulan dan akan dijual pada bulan berikutnya. Tentukan nilai optimum pembelian, penjualan dan biaya penyimpanan kulkas tersebut.

10. Perhatikan masalah program linear berikut ini:

a) Tentukan nilai minimum dari $3x + 4y$ dengan kendala:

$$x \geq 1; y \geq 2; x + y \leq 6, \text{ dan } 2x + 3y \leq 15$$

b) Tentukan interval nilai $Z(x, y) = y - 2x + 2$ dengan kendala:

$$x \geq 0; y \geq 0; 2x + 5y \leq 10, \text{ dan } 4x + 3y \leq 12$$

11. Tentukan titik yang mengakibatkan fungsi linear $f(x, y) = 2x - y - 4$ bernilai optimum (maksimum atau minimum) jika daerah asal dibatasi sebagai berikut $-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1$. (Periksa nilai fungsi di beberapa titik daerah asal dan periksa bahwa nilai optimum tercapai pada suatu titik sudut daerah asal).



Projek

Setiap manusia memiliki keterbatasan akan tenaga, waktu, dan tempat. Misalnya, dalam aktivitas belajar yang kamu lakukan setiap hari tentu kamu memiliki keterbatasan dengan waktu belajar di rumah, serta waktu yang kamu perlukan untuk membantu orang tuamu. Di sisi lain, kamu juga membutuhkan waktu yang cukup untuk istirahat setelah kamu melakukan aktivitas belajar dan aktivitas membantu orang tua. Dengan kondisi tersebut, rumuskan model matematika untuk masalah waktu yang kamu perlukan setiap hari, hingga kamu dapat mengetahui waktu istirahat yang peroleh setiap hari (minggu).

Selesaikan proyek di atas dalam waktu satu minggu.

Susun hasil kinerja dalam suatu laporan, sehingga kamu, temanmu dan gurumu dapat memahami dengan jelas.

D. PENUTUP

Beberapa hal penting yang perlu dirangkum terkait dengan konsep dan sifat-sifat program linear.

1. Masalah dalam kehidupan sehari-hari menjadi model suatu program linear. Konsep program linear didasari oleh konsep persamaan dan pertidaksamaan bilangan real, sehingga sifat-sifat persamaan linear dan pertidaksamaan linear dalam sistem bilangan real banyak digunakan sebagai pedoman dalam menyelesaikan suatu masalah program linear.
2. Model matematika merupakan cara untuk menyelesaikan masalah real yang dikaji. Pembentukan model tersebut dilandasi oleh konsep berpikir logis dan mampu menalar keadaan masalah nyata ke bentuk matematika.
3. Dua pertidaksamaan linear atau lebih dikatakan membentuk kendala program linear linear jika dan hanya jika variabel-variabelnya saling terkait dan variabel yang sama memiliki nilai yang sama sebagai penyelesaian setiap pertidaksamaan linear pada sistem tersebut. Sistem pertidaksamaan ini disebut sebagai kendala.
4. Fungsi tujuan/sasarana (fungsi objektif) merupakan tujuan suatu masalah program linear, yang juga terkait dengan sistem pertidaksamaan program linear.



5. Nilai-nilai variabel (x, y) yang memenuhi kendala pada masalah program linear ditentukan melalui konsep perpotongan dua garis, sedemikian sehingga memenuhi setiap pertidaksamaan yang terdapat pada kendala program linear.
6. Suatu fungsi objektif terdefinisi pada suatu daerah penyelesaian atau daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan (kendala) masalah program linear. Fungsi objektif memiliki nilai jika sistem kendala memiliki daerah penyelesaian atau irisan.
7. Konsep sistem pertidaksamaan dan persamaan linear berlaku juga untuk sistem kendala masalah program linear. Artinya jika sistem tersebut tidak memiliki solusi, maka fungsi sasaran tidak memiliki nilai.
8. Garis selidik merupakan salah satu cara untuk menentukan nilai objektif suatu fungsi sasaran masalah program linear dua variabel. Garis selidik ini merupakan persamaan garis fungsi sasaran, $ax + by = k$, yang digeser di sepanjang daerah penyelesaian