Ejercicios Teórico-Prácticos: Conceptos Básicos y Serie de Fourier
Señales y Sistemas - 2025

Profesor: Andrés Marino Álvarez Meza, Ph.D.
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación
Universidad Nacional de Colombia - sede Manizales

1. Nivelación Python

1.1 Realizar y aprobar los cursos Intro to Programming y Python de Kaggle.

1.2 Consultar y realizar los ejercicios de los cuadernos 1 al 8 del repositorio Python Basics.

2. Conceptos básicos de señales

2.1 Consultar y realizar los ejercicios propuestos en el cuaderno de Colab IntroNumpy SyS

2.2 Consultar y realizar los ejercicios propuestos en el cuaderno de Colab Señales estandar

2.3 Consultar y realizar los ejercicios propuestos en el cuaderno de Colab Operaciones señales continuas

2.4 Evaluar la expresión: $\int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-\cos(t)} \cos(-2t)\delta(2t-5\pi)dt$. Nota: Consultar las propiedas de selectividad y escala en el tiempo de la función impulso unitario. Comprobar el resultado en simulación con la librería SymPy.

2.5 Sea $x(t) = u(t-t_o) - u(t-nt_o) - 3k\delta(t-mt_o)$. Determine el valor de k para el cual $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = A$, con $A \in \mathbb{R}$. Comprobar el resultado en simulación con la librería SymPy.

2.6 Consultar y realizar los ejercicios propuestos en el cuaderno de Colab Señales periódicas aperiódicas

2.7 Consulte en qué consisten las señales cuasiperiódicas. Luego, demuestre la periodicidad o no de las siguientes señales :

- $x(t) = 3\cos(\omega t)$.
- $x(t) = 2\sin(\omega t + \pi)$.
- $x(t) = 3\sin(\sqrt{3}t) + 3\sin(5t) - 2\cos(t/\sqrt{3})$.
- $x(t) = 3\sin(4t) - 2\cos(50t) + 2\cos(10t)$.
- $x(t) = e^{j\omega t}$.

Grafique cada una de las señales anteriores en Python utilizando arreglos de numpy (dibuje tres periodos si es el caso).

3. Señales de energía y potencia

3.1 Consultar y realizar los ejercicios propuestos en el cuaderno de Colab Señales Energía Potencia

3.2 Clasifique según su tipo (energía o potencia):

- $x(t) = 3t + 2; \forall t \in [0, 5]$.
- $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t); A, B, \omega \in \mathbb{R}^+$.
- $x(t) = ae^{-|t|k}(u(t-t_o) - u(t-t_1)); a, k \in \mathbb{R}$ y $0 < t_o < t_1$.
- $x(t) = ate^{-tk}\left(u(t) - u(t-t_o)\right); a, k, t_o \in \mathbb{R}^+$.
- $x[n] = nu[n]; n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}$.
- $x[n] = |n|; n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}$.
- $x[n] = A\cos[n\pi]u[n-n_o]; A \in \mathbb{R}^+$ y $n \in \{0 \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}; 0 < n_o < N$.

Grafique cada una de las señales anteriores en Python (considere simulaciones tipo sympy para tiempo continuo y numpy para tiempo discreto).

3.3 Consulte los procedimientos básicos para el análisis de circuitos mediante el manejo de impedancias y fasores. Ver cuaderno Potencia Circutios

3.4 Realice un simulador sobre Python (Colab) para el cálculo de la potencia instantánea y media en circuitos RLC serie y paralelo utilizando fasores.

4. Discretización de señales

4.1 Se pretende muestrear la señal $x(t) = 10\cos(\Omega t)$, con $t \in [0, T]$, $\Omega = 2\pi F$, $F = 1/T$ y $F = 50$ Hz. Se emplea un sistema de discretización con frecuencia de muestreo $F_s = 80$ Hz. Demuestre si el sistema utilizado es apropiado para la señal $x(t)$ y estime la señal capturada. Realice una simulación en Python del proceso de discretización.

4.2 Se tiene un microprocesador de 4 bits con entrada análoga entre -3.3 y 3.3 [v]. Describa las condiciones necesarias para que el microprocesador pueda digitalizar la señal $x(t) = 30\cos(100\pi t)$. Presente una simulación en Python de dicho proceso para tres ciclos de la señal $x(t)$. Ver cuaderno IntroNumpy SyS.

4.3 Se tiene un sistema de discretización con frecuencia de muestreo $F_s = 40$ Hz, aplicado a las señales $x_1(t) = \cos(20\pi t)$ y $x_2(t) = \cos(100\pi t)$. Las versiones discretizadas de las señales son distinguibles entre si?. Implemente una simulación en Python del proceso de discretización.

4.4 Cuál es la frecuencia de muestreo límite apropiada para discretizar la señal $x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(6000\pi t) + 10\cos(14000\pi t)$?. Si se utiliza una frecuencia de muestreo de 5kHz, cuál es la señal discreta obtenida?.

4.5 Demuestre que funciones cosenoidales con frecuencia de oscilación $F_k = F_o + kF_s$; con $k \in \mathbb{Z}$, no son distinguibles de la función $\cos(2\pi F_o t)$ al utilizar un sistema de discretización con frecuencia de muestreo F_s. Realice simulaciones para $k \in \{0, \pm 1, \pm, 2, \pm 3\}$.

5. Serie de Fourier

5.1 Consultar y realizar los ejercicios propuestos en el cuaderno de Colab Serie de Fourier.

5.2 Encuentre el valor de $\omega_o \in \mathbb{R}$ para que el conjunto $\{e^{jn\omega_o t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sea ortogonal en el intervalo $t\in[-T/2, T/2]$, con $T\in\mathbb{R}^+$.

5.3 Demuestre la ortogonalidad del conjunto $\{\cos(n\omega_o t), \sin(m\omega_o t)\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$.

5.4 Encuentre el espectro $c_n \in \mathcal{C}$ de la señal $x(t) = u(t)$ a través de la representación generalizada $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi_n(t)$, para $\phi_n(t) = e^{jn\omega_o t}$. Realice una simulación en Python para $t \in [0, 2]$ y determine el error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$.

5.5 Calcular los coeficientes de la serie compleja, trignométrica y compacta de Fourier para las siguientes funciones, con $t \in [-\pi/2, \pi/2]$: a) $3t + 4$, b) $|\sin(t)|$, c) $\operatorname{sgn}(3t)$, d) $|\cos^2(t/3)|$, e) e^{jt}, f) $2t^2$. Para cada señal representada encuentre el error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 5\}$. Implemente las simulaciones en Python para graficar la parte real del espectro, la parte imaginaria del espectro, la magnitud del espectro, la fase del espectro y la señal reconstruida. Ver cuaderno Serie de Fourier.

5.6 Sea $x^{''}(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$c_n = \frac{1}{(ti - tf)n^2 w_o^2} \int_{t_i}^{t_f} x^{''}(t) e^{-jnw_o t} dt; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n desde $x^{''}(t)$ en la serie trigonométrica de Fourier?.

5.7 Encuentre el espectro de Fourier, su magnitud y el error relativo para $n\in\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, a partir de $x^{''}(t)$ para la señal $x(t)$ en la Figura 1 . Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$ mediante una simulación en Python.

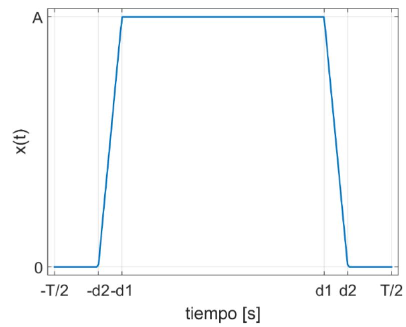

Figura 1: Espectro de Fourier desde $x^{''}(t)$.

5.8 ¿Cómo se puede simplificar el cálculo de la serie trigonométrica de Fourier para señales con simetría de media onda y de cuarto de onda?. En dichos casos, ¿cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n con $n \in \mathbb{N}$?. Ver material de apoyo Simetría en serie de Fourier.

Referencias

https://github.com/amalvarezme/SenalesSistemas

Hsu, H., (2014). Signals and systems (Vol. 8). New York: McGraw-Hill Education.

Castellanos-Dominguez et. al (2010), *Teoría de señales: fundamentos*, Universidad Nacional de Colombia - sede Manizales.

Hsu, H. (2003), *Theory and problems of analog and digital communications*, Schaum's Outline series, McGraw-Hill.

Hsu, H. (1995), *Schaum's outlines of theory and problems of signals and systems*, McGraw Hill.

Hsu, H. (1970), *Análisis de Fourier*, Prentice Hall.