Table des matières

I Dérivabilité d'une fonction numérique

Dans tout ce chapitre, on considère des applications qui sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I.1 Dérivabilité en un point

Définition *(Nombre dérivé en un point)*

On dit que f est *dérivable* en un point a de I si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbb{R}$.
Cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a et est notée $f'(a)$, ou $D(f)(a)$, ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Interprétation géométrique

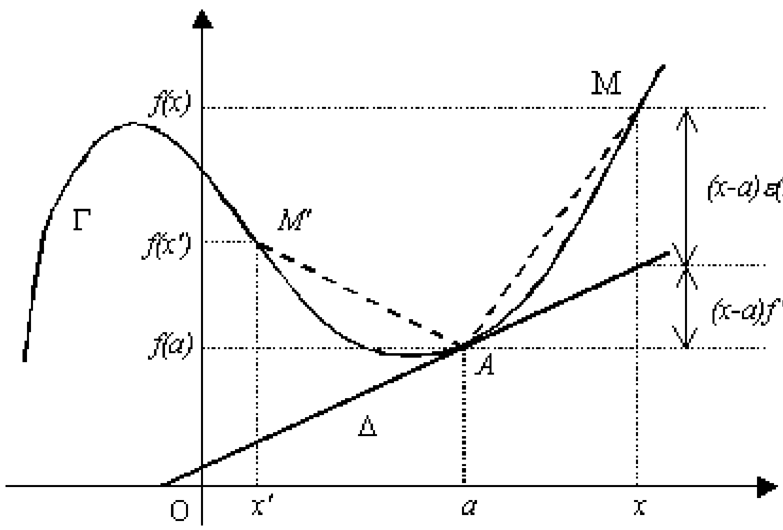
Soient $A=(a,f(a))$ et $M(x,f(x))$ sur la courbe représentative Γ de f.

Le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la *corde* AM.

Dire que f est dérivable en a, c'est dire que la corde AM possède une position limite non verticale Δ, de coefficient directeur $f'(a)$, quand x tend vers a, c'est-à-dire quand M tend vers A sur Γ. On dit que Δ est la *tangente* à Γ en son point d'abscisse a.

Dire que f est dérivable en a, c'est donc dire que la courbe représentative Γ de f présente au point $A(a,f(a))$ une tangente Δ non verticale.

L'équation de Δ est $y=f(a)+(x-a)f'(a)$.



Proposition *(Une autre définition de la dérivabilité)*

f est dérivable en un point a de I $\Leftrightarrow$ il existe un réel ℓ et une application $x\mapsto\varepsilon(x)$ de I dans $\mathbb{R}$, vérifiant $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ et $\varepsilon(a)=0$, et tels que :

$$\forall\, x\in I,\ f(x)=f(a)+(x-a)\ell+(x-a)\varepsilon(x)$$

Le réel ℓ est alors égal à $f'(a)$.

La figure ci-dessus montre les quantités $(x-a)f'(a)$ et $(x-a)\varepsilon(x)$, relatives à un point $M(x,f(x))$ assez “éloigné” de A. Au voisinage de A, et si $f'(a)\neq 0$ (c'est-à-dire si la tangente Δ n'est pas horizontale), alors $(x-a)\varepsilon(x)$ est négligeable devant $(x-a)f'(a)$.

Remarques et exemples

– Une translation permet de se ramener à un calcul à l'origine : $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

– Si f dérivable en a, f est continue en a. La réciproque est fausse.

Exemple : si $f(0) = 0$ et $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, f est continue mais non dérivable en 0.

– Si f est constante sur I, alors : $\forall\, a \in I,\ f'(a) = 0$.

– Si f est l'application $x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) alors : $\forall\, a \in \mathbb{R},\ f'(a) = na^{n-1}$.

– Pour tout a de $\mathbb{R}$, $\exp'(a) = \exp(a)$ et $\ln'(a) = \frac{1}{a}$.

– Pout tout a de $\mathbb{R}$, $\sin'(a) = \cos(a)$ et $\cos'(a) = -\sin(a)$.

Si $a \neq \frac{\pi}{2}\,(\pi)$, alors $\tan'(a) = 1 + \tan^2(a)$.

I.2 Dérivabilité à gauche ou à droite en un point

On complète les définitions précédentes avec la notion de nombre dérivé à gauche ou à droite.

Définition *(Nombre dérivé à gauche)*

Soit a un point de I, distinct de l'extrémité gauche de I.

On dit que f est dérivable à gauche en a si $\lim\limits_{x\to a,\, x<a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Cette limite est appelée nombre dérivé à gauche de f en a et est notée $f'_g(a)$.

Définition *(Nombre dérivé à droite)*

Soit a un point de I, distinct de l'extrémité droite de I.

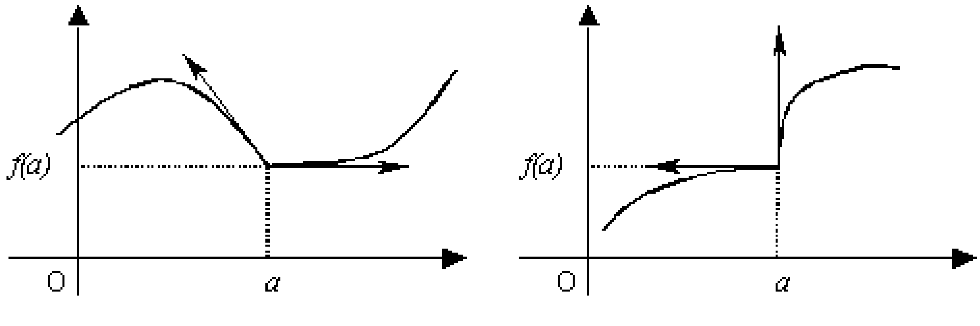
On dit que f est dérivable à droite en a si $\lim\limits_{x\to a,\, x>a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbb{R}$.

Cette limite est appelée nombre dérivé à droite de f en a et est notée $f'_d(a)$.

Interprétation géométrique

Dire que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a, c'est dire que la courbe Γ de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente à droite (resp. à gauche) non verticale.

Le coefficient directeur de cette demi-tangente est $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$.)



Sur l'exemple de gauche, f est dérivable à gauche et à droite en a, avec $f'_g(a) = -1$ (demi-tangente oblique, parallèle à $y = -x$) et $f'_d(a) = 0$ (demi-tangente horizontale.)

Sur l'exemple de droite, on a $f'_g(a) = 0$ (demi-tangente horizontale), mais f n'est pas dérivable à droite en a (il y a bien une demi-tangente mais elle est verticale).

Remarques

– Soit a un point de I qui ne soit pas une extrémité de I.
 f est dérivable en a $\Leftrightarrow$elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
 On a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

– Si f dérivable en a, alors f est continue en a.
 La réciproque est fausse (comme le montre l'exemple de $x \mapsto |x|$ en 0.)
 Si f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a, elle y est continue à gauche (resp. à droite.)

– Si f coïncide en a et à droite de a avec une application g définie au voisinage de a et dérivable en a, alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = g'(a)$ (remarque analogue à gauche de a.)
 Par exemple, si f est définie par $f(x) = |x| + \exp(x)$, elle coïncide en 0 et à droite de 0 avec $g(x) = x + \exp(x)$ qui est telle que $g'(0) = 2$.
 De même f coïncide en 0 et à gauche de 0 avec $h(x) = -x + \exp(x)$ qui est telle que $h'(0) = 0$.
 On en déduit que f est dérivable à droite et à gauche en 0, avec $f'_d(0) = 2$ et $f'_g(0) = 0$.

I.3 Opérations sur les applications dérivables en un point

Proposition *(Linéarité de la dérivation en un point)*

Soient f et g deux applications dérivables au point a. Pour tous scalaires α, β, l'application $h = \alpha f + \beta g$ est dérivable en a et $h'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$.

Proposition *(Produit d'applications dérivables en un point)*

Soient f et g deux applications dérivables en un point a.
Alors l'application $h = fg$ est dérivable en a et $h'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Proposition *(Dérivée de l'inverse)*

Si g est dérivable en a, avec $g(a) \neq 0$, alors $h = \dfrac{1}{g}$ est dérivable en a, et $h'(a) = -\dfrac{g'(a)}{g^2(a)}$.
Supposons de plus que f soit dérivable en a.
Alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Proposition *(Composition et dérivation)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une application dérivable en un point a de I.
Soit J un intervalle contenant $f(I)$ et non réduit à un point.
Soit $g : J \to \mathbb{R}$, une application dérivable au point $b = f(a)$ de J.
Alors $g \circ f$ est dérivable au point a et $(g \circ f)'(a) = f'(a)(g' \circ f)(a)$.

Proposition *(Dérivation et bijection réciproque)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable, strictement monotone.
f est donc bijective de I sur un intervalle J. Soit a dans I tel que $f'(a) \neq 0$.
Alors $g = f^{-1}$ est dérivable en $b = f(a)$ et $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}$.

II Dérivabilité sur un intervalle

II.1 Applications dérivables, applications de classe C1

Définition

On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.
L'application $f' : I \to \mathbb{R}$ qui à tout a associe $f'(a)$ est appelée *application dérivée* de f.
Cette application est également notée $\mathrm{D}f$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\,x}$.
On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications dérivables de I dans $\mathbb{R}$.

Définition *(Applications de classe $\mathcal{C}^1$)*

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.
On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces applications.

Opérations sur applications dérivables sur un intervalle I

– Soient f et g deux applications dérivables sur l'intervalle I.
  Pour tous α, β dans $\mathbb{R}$, $h = \alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et $h' = \alpha f' + \beta g'$.
  L'application fg est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.
  Si g ne s'annule pas sur I, alors $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$
– Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables, avec $f(I) \subset J$.
  Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \cdot (g' \circ f)$
– Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable, strictement monotone.
  L'application f réalise donc une bijection de I sur un intervalle J.
  Si f' ne s'annule pas sur I, alors $g = f^{-1}$ est dérivable sur J et $g' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.
– Tous les résultats précédents s'énoncent à l'identique pour des applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Dérivation des fonctions trigonométriques inverses

– La dérivée de $x \to \sin x$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est $x \to \cos x$, nulle en $\pm\frac{\pi}{2}$. On en déduit :

$$\forall\, x \in]-1, 1[,\ \arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

– La dérivée de $x \to \cos x$ sur $[0, \pi]$ est $x \to \sin x$, nulle en $x = 0$ et $x = \pi$. On en déduit :

$$\forall\, x \in]-1, 1[,\ \arccos' x = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

– La dérivée de $x \to \tan x$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est $x \to 1 + \tan^2 x$, toujours non nulle. On en déduit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Dérivation des fonctions puissances

– Par récurrence sur $n \geqslant 1$, on sait que $(x^n)' = nx^{n-1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

– Si n est un entier négatif, $(x^n)' = \left(\dfrac{1}{x^{-n}}\right)' = -\dfrac{-nx^{-n-1}}{x^{-2n}} = nx^{n-1}$.

  L'égalité $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ est donc vraie pour les exposants α de $\mathbb{Z}$.

– Soit $f : x \to \sqrt[n]{x}$, bijection réciproque de $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $g(x) = x^n$.

  L'application g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et sa dérivée $g'(x) = nx^{n-1}$ est non nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$.

  Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(x) = \dfrac{1}{g'(\sqrt[n]{x})} = \dfrac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \dfrac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1}$.

  La formule $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ est donc encore valable quand α est de la forme $\alpha = \dfrac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

  Si $\alpha = \dfrac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*)$, alors : $(x^\alpha)' = ((x^p)^{1/q})' = \frac{1}{q}(x^p)'(x^p)^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q}x^{p-1+\frac{p}{q}-p} = \alpha x^{\alpha-1}$.

  La formule $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ est donc encore valable quand α est un rationnel.

– Dans le cas d'un exposant α quelconque, en particulier non rationnel :

$$\forall\, x > 0,\ (x^\alpha)' = (\exp(\alpha \ln x))' = \frac{\alpha}{x} \exp(\alpha \ln x) = \frac{\alpha}{x}\, x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

II.2 Extremums d'une fonction dérivable

Proposition

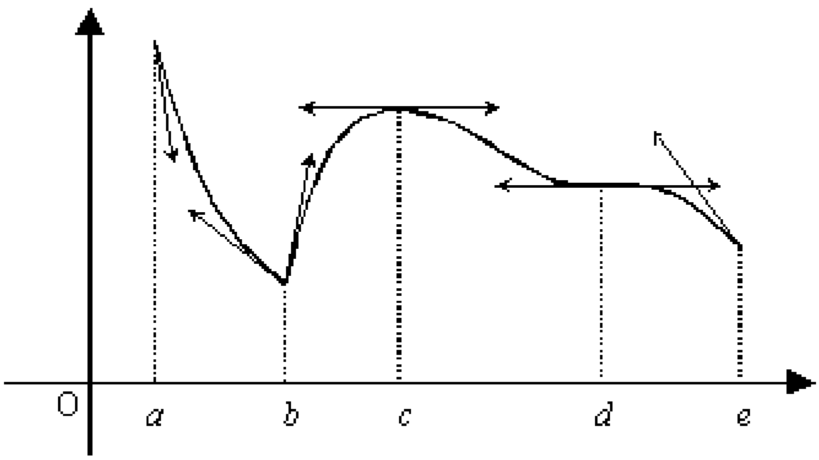
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Soit a un point intérieur à I.
Si f possède un extrémum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarques

– La réciproque est fausse : si $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais f n'a pas d'extrémum en 0.

– En fait, les extrémums locaux d'une application f sur un intervalle I doivent être recherchés parmi les points où f n'est pas dérivable, parmi les extrémités de I, et parmi les points intérieurs à I où f est dérivable de dérivée nulle.

– Le graphe ci-dessous montre quelques cas possibles :



II.3 Rolle et accroissements finis

Théorème *(Théorème de Rolle)*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$, à valeurs réelles.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème *(Egalité des accroissements finis)*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application définie sur le segment $[a, b]$, avec $a < b$, à valeurs réelles.
On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Propriétés et remarques

- Il n'y a pas nécessairement unicité du point c de $]a, b[$ qui figure dans les deux théorèmes.
- Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ $(a < b)$.

  On suppose que : $\forall\, x \in]a, b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$. Alors $m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a)$.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M\,|b - a|$, avec $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.
- On peut aussi écrire, en posant $b = a + h$:

  Soit f une application continue sur $[a, a + h]$ et dérivable sur $]a, a + h[$.

  Alors il existe θ dans $]0, 1[$ tel que : $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$.

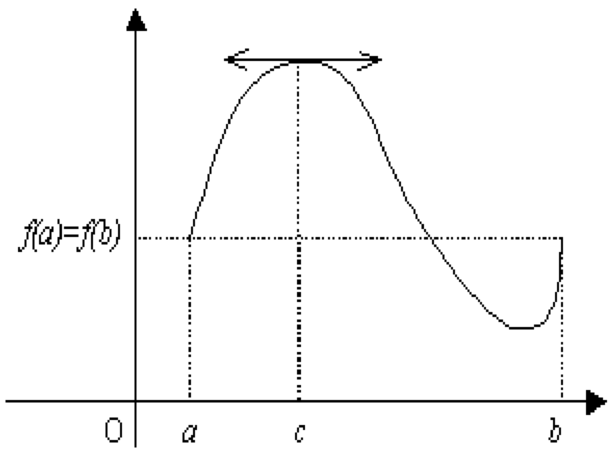
  Dans cette version du "TAF", le signe de h est quelconque (si f est dérivable sur un voisiange de a) et on peut considérer θ comme une fonction de h.

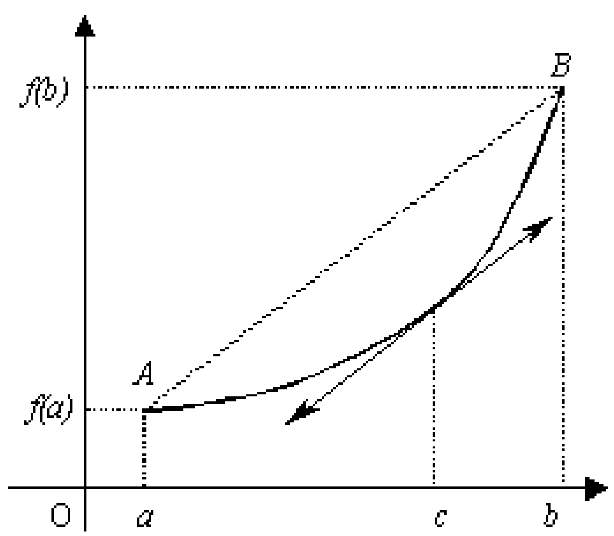
Interprétation géométrique

Soit Γ la courbe de f. Soient A, B les points d'abscisse a, b de Γ.

Avec les hypothèses du théorème de Rolle, il y a un point de Γ où la tangente est horizontale.

Avec les hypothèses du théorème des accroissements finis, il existe un point de Γ où la tangente est parallèle à la corde AB.





Proposition *(Caractérisation des applications lipschitziennes)*

Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$, dérivable sur l'intérieur de I.
f est k-lipschitzienne sur $I \Leftrightarrow$ pour tout x de I, $|f'(x)| \leqslant k$.

Proposition *(Prolongement d'une application de classe $\mathcal{C}^1$)*

Soit f une application continue de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$.
On suppose que f' possède une limite finie ℓ en a à droite.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$, avec $f'(a) = \ell$.
On a bien sûr un résultat analogue au point b.

Remarque

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$. On suppose que $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \infty$.

Alors la courbe représentative de f admet au point $(a, f(a))$ une demi-tangente verticale.

II.4 Monotonie des applications dérivables

Proposition *(Caractérisation des applications constantes)*

Toute application constante f de I dans $\mathbb{R}$ est dérivable sur I et $\forall\, x \in I,\ f'(x) = 0$.
Réciproquement, si f est continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I et si f' est l'application nulle, alors f est constante sur I.

Proposition *(Caractérisation des applications monotones)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable.
- L'application f est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall\, x \in I, f'(x) \geqslant 0$.
- L'application f est décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall\, x \in I, f'(x) \leqslant 0$.

Proposition *(Caractérisation des applications strictement monotones)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable et monotone.
L'application f est strictement monotone sur I si et seulement si sa dérivée f' n'est identiquement nulle sur aucun sous-intervalle de I d'intérieur non vide (ou encore si et seulement si f' ne s'annule qu'en des points isolés de I.)

Proposition *(Applications ayant la même dérivée)*

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, dérivables sur I. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
- Pour tout x de I, on a $f'(x) = g'(x)$.
- Il existe une constante λ telle que : $\forall x \in I,\ g(x) = f(x) + \lambda$.

Remarque

Tout ce qui découle de Rolle est valable sur un intervalle, et pas sur une réunion d'intervalles.

Par exemple, si $f(x) = \frac{1}{x}$ alors $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ sur $\mathbb{R}^*$, mais f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^*$.

De même, si deux applications dérivables sur $\mathbb{R}^*$ vérifient $f' = g'$ sur $\mathbb{R}^*$, alors elles diffèrent d'une constante λ sur $\mathbb{R}^{-*}$ et d'une constante μ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

III Applications de classe $\mathcal{C}^k$

On rappelle que I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

III.1 Dérivées successives

Définition *(Applications n fois dérivables sur un intervalle)*

Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. On pose $f^{(0)} = f$.

On suppose que l'application $f^{(n-1)}$ existe et est dérivable de I dans $\mathbb{R}$.

On définit alors l'application $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Si l'application $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ existe, on dit que f est n fois dérivable sur l'intervalle I, et $f^{(n)}$ est appelée *application dérivée n-ième* de f sur I.

L'application $f^{(n)}$ est peut également être notée $\mathrm{D}^n f$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}\, x^n}$.

Remarques

– On note souvent f'' et f''' les applications dérivée seconde et dérivée troisième de f.

– *Nombre dérivé n-ième en un point :*

Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$, a un point de I et n un entier naturel.

On dit que f est n fois dérivable en a si f est $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de a et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a.

On note encore $f^{(n)}(a)$ cette dérivée, appelée *nombre dérivé n-ième* de f au point a de I (il n'est pas nécessaire que $f^{(n)}$ existe sur I tout entier.)

– Si f est n fois dérivable sur I, alors pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$, l'application $f^{(k)}$ est $n-k$ fois dérivable sur I (et en particulier continue si $k < n$).

Pour tout k de $\{0, \ldots, n\}$, on a alors l'égalité : $f^{(n)} = (f^{(k)})^{(n-k)}$.

Définition *(Applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$, k fois dérivable.

Si de plus l'application $f^{(k)}$ est continue sur I, on dit que f est *de classe* $\mathcal{C}^k$ sur I.

On note $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est k fois dérivable sur I pour tout entier naturel k (c'est-à-dire en fait si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k).

On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de ces applications.

Remarques

– $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications continues de I dans $\mathbb{R}$.

On a les inclusions $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

De même on a : $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \displaystyle\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$.

– On dit souvent d'une application de classe $\mathcal{C}^k$ qu'elle est k fois continûment dérivable.

– On a $f^{(n)} \equiv 0$ sur $I \Leftrightarrow f$ est une application polynomiale de degré $\leqslant n-1$ sur I.

III.2 Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$

Dans les énoncés suivants, k est un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Les propriétés de ce paragraphe pourraient être énoncées de façon analogue en termes de fonctions k fois dérivables sur un intervalle I.

Proposition *(Combinaisons linéaires d'applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$. Soient α, β deux réels.
Alors $\alpha f + \beta g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et : $(\alpha f + \beta g)^{(k)} = \alpha f^{(k)} + \beta g^{(k)}$.

Proposition *(Formule de Leibniz)*

Soit k un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.

Alors fg est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et : $(fg)^{(k)} = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}$.

Proposition *(Inverse d'une application de classe $\mathcal{C}^k$)*

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Proposition *(Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.
Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point et contenant $f(I)$.
Soit g une application de classe $\mathcal{C}^k$ de J dans $\mathbb{R}$.
Alors l'application $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.

Proposition *(Bijection réciproque d'une application de classe $\mathcal{C}^k$)*

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $f'(x) > 0$ pour tout x de I, ou que $f'(x) < 0$ pour tout x de I.
L'application f réalise donc une bijection de I sur un intervalle J.
Dans ces condtions, la bijection réciproque f^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^k$.

Exemples d'applications de classe $\mathcal{C}^\infty$

- Les fonctions polynômiales sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  Il en est de même des fonctions rationnelles sur leur domaine de définition.
- L'application $x \mapsto \exp x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  L'application $x \mapsto \ln x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- De même les égalités $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$ montrent que les applications $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il en découle que l'application $x \mapsto \tan x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition.
- Les applications $x \mapsto x^\alpha$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Les applications $x \mapsto \operatorname{ch} x$, $x \mapsto \operatorname{sh} x$ et $x \mapsto \operatorname{th} x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Les applications $x \mapsto \arcsin x$, et $x \mapsto \arccos x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.
  L'application $x \mapsto \arctan x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions qui se déduisent des précédentes par somme, produit, quotient, puissance et composition sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

III.3 Formules de Taylor

Proposition *(formule de Taylor avec reste intégral)*

Soit $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On a l'égalité :

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}\,f^{(k)}(a)+\underbrace{\int_a^b\frac{(b-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}_{R_n}.$$

R_n est appelé le *reste intégral d'ordre* n de la formule de Taylor de f sur $[a,b]$.

Proposition *(inégalité de Taylor-Lagrange)*

Soit $f:\ I\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Soient a et b deux points de I.

Alors : $\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}\,f^{(k)}(a)\right|\leqslant M\,\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$, où $M=\sup_{[a,b]}\left|f^{(n+1)}\right|$.

Exemples

– Pour $n=0$, on retrouve l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(b)-f(a)|\leqslant M_1\ |b-a|\ \text{ où } M_1=\sup_{[a,b]}|f'|$$

Pour $n=1$, on trouve :

$$|f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)|\leqslant M_2\,\frac{(b-a)^2}{2!}\ \text{ où } M_2=\sup_{[a,b]}|f''|$$

– Voici des exemples d'application de l'inégalité de Taylor-Lagrange aux fonctions $t\mapsto\sin t$ et $t\mapsto\cos t$ sur l'intervalle $[0,x]$:

$$\left|\sin x-x\right|\leqslant\frac{|x|^3}{3!}\qquad\left|\sin x-x+\frac{x^3}{3!}\right|\leqslant\frac{|x|^5}{5!}\qquad\left|\sin x-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}\right|\leqslant\frac{|x|^7}{7!}$$

$$\left|\cos x-1\right|\leqslant\frac{x^2}{2!}\qquad\left|\cos x-1+\frac{x^2}{2!}\right|\leqslant\frac{x^4}{4!}\qquad\left|\cos x-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}\right|\leqslant\frac{x^6}{6!}$$

– En posant $h=b-a$, l'inégalité de Taylor-Lagrange au rang n s'écrit :

$$\left|f(a+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}\,f^{(k)}(a)\right|\leqslant M\,\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!},\ \text{ où } M=\sup_{[a,a+h]}\left|f^{(n+1)}\right|$$

Proposition *(formule de Taylor-Young)*

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans $\mathbb{R}$, et soit a un point de I.

Alors il existe une application ε définie sur I, telle que :

$\forall\,x\in I,\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}\,f^{(k)}(a)+(x-a)^n\varepsilon(x)$, avec $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.

IV Applications convexes

IV.1 Définitions équivalentes de la convexité

Comme d'habitude, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

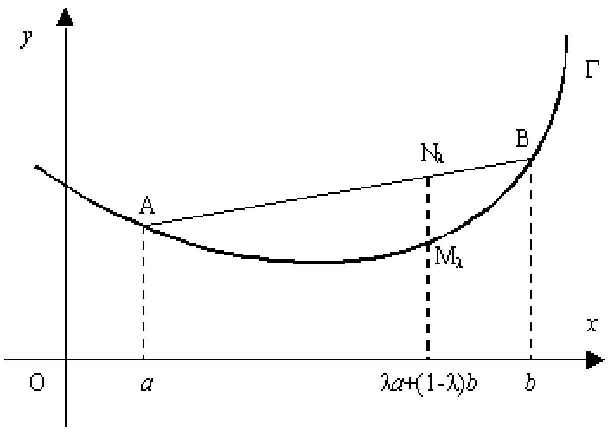
Définition (application convexe)

Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si :
$\forall\,(a,b) \in I^2,\ \forall\,\lambda \in [0,1],\ f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$.

Interprétation géométrique

Sur le schéma ci-dessous, on a fait figurer deux points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ de la courbe Γ de f, ainsi que les points M_λ et N_λ d'abscisse $x_\lambda = \lambda a + (1-\lambda)b$ et d'ordonnées respectives $f(x_\lambda)$ et $\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$.

La convexité de f signifie que pour tout λ de $[0,1]$, l'ordonnée de M_λ est inférieure ou égale à celle de N_λ. Or quand λ décrit $[0,1]$, le point M_λ décrit l'arc (AB) de la courbe Γ, alors que le point N_λ (qui est le barycentre de A et B affectés des poids respectifs λ et $1-\lambda$) parcourt la corde $[AB]$:



Dire que l'application f est convexe sur I, c'est donc dire que pour tous points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ de la courbe Γ de f, la corde $[AB]$ est "au-dessus" de l'arc (AB) de Γ.

Exemples et remarques

- Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *concave* si l'application $-f$ est convexe.

  Dans toute la suite de cette section on considérera surtout des applications convexes, les propriétés des applications concaves s'en déduisant de manière évidente.

- L'application $x \mapsto |\,x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car $|\ \lambda a + (1-\lambda)b\ | \leqslant \lambda \mid a \mid + (1-\lambda) \mid b \mid$

- Les fonctions affines $f : x \mapsto \alpha x + \beta$ sont à la fois convexes et concaves sur $\mathbb{R}$, car elles vérifient en effet $f(\lambda a + (1-\lambda)b) = \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$. Réciproquement si une application est à la fois convexe et concave alors elle est affine (sa courbe représentative est une droite.)

- Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des applications convexes, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels $\geqslant 0$.
  Alors l'application $g = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_n f_n$ est convexe.

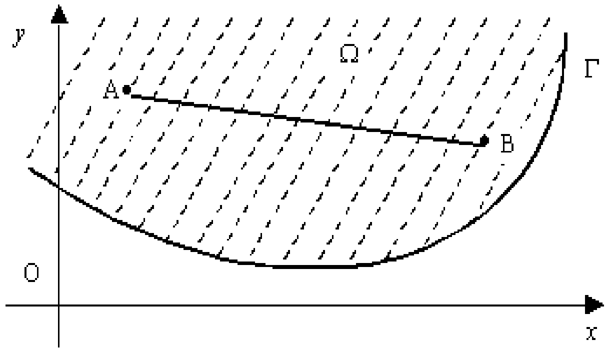
Définition *(partie convexe du plan)*

Soit Ω une partie non vide du plan $\mathbb{R}^2$. On dit que Ω est une partie *convexe* si, pour tous points M, N de Ω, le segment $[M,N]$ est inclus dans Ω.

Proposition *(caractérisation par la convexité de l'épigraphe)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application.
L'ensemble $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geqslant f(x)\}$ est appelé *épigraphe* de f sur I.
L'application f est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

On a représenté ici l'épigraphe Ω d'une application convexe f, deux points A et B de cet épigraphe, et le segment qui les joint, tout entier inclus dans Ω.

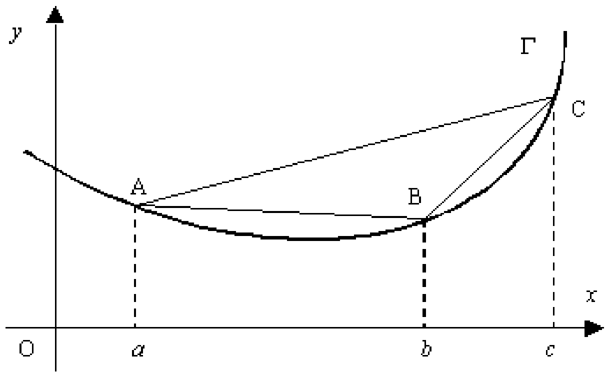


Remarque : f est concave sur $I \Leftrightarrow$ la partie située *sous* la courbe $y = f(x)$ est convexe.

Proposition *(une autre caractérisation de la convexité)*

Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si :
Pour tout $a < b < c$ de I, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

Le schéma ci-dessous illustre la propriété précédente : l'application f est convexe si et seulement si, pour tous points A, B, C de la courbe Γ (avec $a < b < c$), alors la pente de la corde $[AB]$ est inférieure à celle de la corde $[AC]$, elle même inférieure à la pente de la corde $[BC]$.



Proposition *(encore une caractérisation de la convexité)*

Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si, pour tout a de I, l'application T_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par $T_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante.

IV.2 Régularité des applications convexes

Proposition *(dérivabilité à gauche et à droite)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application convexe. Soit a un point intérieur à I.
Alors f est dérivable à droite et à gauche au point a, et $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.
De plus les applications f'_g et f'_d sont croissantes sur l'intérieur de I.

Proposition *(continuité des applications convexes)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application convexe. Alors f est continue en tout point intérieur à I.

Un contre-exemple

Une application convexe sur un intervalle I peut ne pas être continue aux extrémités de I.

On le voit bien avec l'application f définie sur $[0,1]$ par $\begin{cases} f(0) = f(1) = 1 \\ f(x) = 0 \text{ si } x \in]0,1[\end{cases}$

Proposition *(caractérisation de la convexité par la dérivée première)*

Soit f une application dérivable de I dans $\mathbb{R}$.
Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I.

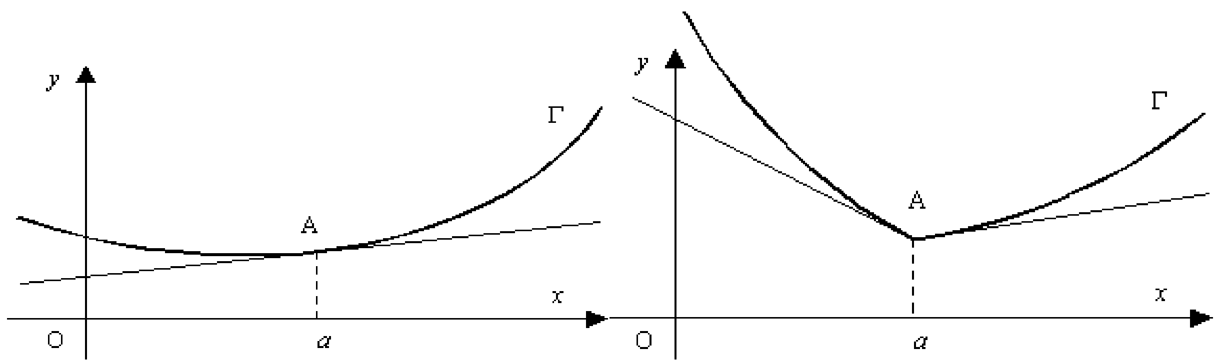
Proposition *(Tangente à la courbe d'une application convexe)*

Soit f une application dérivable et convexe de I dans $\mathbb{R}$.
Alors pour tout a de I, on a : $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(a) + (x-a)f'(a)$.

Interprétation géométrique

La courbe représentative de f est, sur tout l'intervalle I, située "au-dessus" de n'importe laquelle de ses tangentes.

On a en fait un résultat plus général. On sait en effet qu'une application convexe sur I est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur à I. La courbe $y = f(x)$ est alors partout au-dessus de chacune de ses demi-tangentes à gauche ou à droite.



Pour les applications concaves

– Une application concave sur I est continue en tous les points intérieurs à I.

– Si f est dérivable, f est concave$\Leftrightarrow$ f' est *décroissante*.

– Si f est dérivable et concave, la courbe $y = f(x)$ est partout *en dessous* de ses tangentes.

Proposition *(caractérisation de la convexité par la dérivée seconde)*

> Soit f une application deux fois dérivable de I dans $\mathbb{R}$.
> Alors f est convexe si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout x de I.

Propriétés et remarques

– Une application $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable est concave sur $I \Leftrightarrow \forall\, x \in I,\ f''(x) \leqslant 0$.

– L'application $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$. L'application $x \mapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$.

– Les applications $x \mapsto a^x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.
L'application $x \mapsto x^\alpha$ est concave si $\alpha \in [0, 1]$ et convexe si $\alpha \in \mathbb{R}^- \cup [1, +\infty[$.

– L'application $x \mapsto \sin x$ est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Il en découle : $\forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}\, x \leqslant \sin x \leqslant x$.

– Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. Soit a un point intérieur à I.
On suppose que f'' s'annule et change de signe au point a.
Il y a donc un changement de concavité en a : la courbe $y = f(x)$ "traverse" sa tangente.
On dit que le point $A(a, f(a))$ est un *point d'inflexion*.

IV.3 Inégalités de convexité

Proposition

> Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application convexe. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une famille de n points de I.
> On se donne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans $[0, 1]$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Alors $f\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\Big) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.

Remarques et exemples

– Cas particulier classique : $\lambda_k = \dfrac{1}{n}$ pour tout k. On obtient alors $f\Big(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big) \leqslant \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$.

– Si les $\lambda_k \geqslant 0$ et non tous nuls : $f\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k}\right) \leqslant \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k}$.

– Si f est concave, les inégalités sont dans l'autre sens.
Par exemple, l'application $x \mapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On en déduit que pour tous $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}^{+*}$, on a : $\ln\Big(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\Big) \geqslant \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(x_k)$.
On en déduit $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \geqslant \Big(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\Big)^{1/n}$ en prenant l'exponentielle membre à membre.
La *moyenne arithmétique* des x_k est donc supérieure ou égale à leur *moyenne géométrique*.

– Des arguments de convexité permettent de démontrer l'inégalité de Minkowski :
Pour tous x_k, y_k dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $p > 1$, on a : $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^p\Big)^{1/p}$