Table des matières

I Le corps des nombres complexes

I.1 Définition de C

Définition

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des deux lois suivantes :
$\forall\,(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4,\ \begin{cases}(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')\\(x,y)(x',y')=(xx'-yy',xy'+yx')\end{cases}$

Proposition

Muni de ces deux lois, $\mathbb{R}^2$ possède une structure de corps. Plus précisément :
- Le neutre pour la loi $+$ est $(0,0)$.
- L'opposé de (x,y) est $(-x,-y)$.
- Le neutre pour le produit est $(1,0)$.
- Pour tout $z=(x,y)$ non nul, l'inverse de z est : $\dfrac{1}{z}=(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{-y}{x^2+y^2})$.

Définition

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ avec les deux lois précédentes.
Ses éléments $z=(x,y)$ sont appelés *nombres complexes*.

Proposition

L'ensemble $\mathbb{K}=\{(x,0),x\in\mathbb{R}\}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
L'application $f : x \to (x,0)$ est un isomorphisme de corps de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{K}$.

Conséquence

De cette manière $(\mathbb{R},+,\times)$ apparait comme un sous-corps de $(\mathbb{C},+,\times)$.
Cet isomorphisme permet d'identifier le complexe $(x,0)$ avec le réel x.

I.2 Notation cartésienne

Dans le corps $(\mathbb{C},+,\times)$, on note $i=(0,1)$.

Pour tout $z=(x,y)$ de $\mathbb{C}$, on constate que $z=(x,0)+(0,1)(y,0)$.

Avec l'identification de $\mathbb{R}$ avec un sous-corps de $\mathbb{C}$, on peut écrire : $z=x+iy$.

On a ainsi obtenu la notation *cartésienne* (ou *algébrique*) des nombres complexes.

Définition

Pour tout z de $\mathbb{C}$, il existe un couple unique (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $z=x+iy$.
Le réel x est appelé *partie réelle* de z et est noté $\mathrm{Re}\,(z)$.
Le réel y est appelé *partie imaginaire* de z et est noté $\mathrm{Im}\,(z)$.
Un nombre complexe z est dit *réel* si $\mathrm{Im}\,(z)=0$.
z est dit *imaginaire pur* si $\mathrm{Re}\,(z)=0$, c'est-à-dire si $z=iy$, avec y réel.

Remarques

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes, avec $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$.

Les lois de $\mathbb{C}$ s'écrivent maintenant : $\begin{cases} z + z' = (x + x') + i(y + y') \\ zz' = (xx' - yy') + i(xy' + yx') \end{cases}$

$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ (on *identifie* les parties réelles et les parties imaginaires.)

En particulier : $z = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ (attention à vérifier que x et y sont réels !).

Puissances du nombre i

On constate que $i^2 = -1$. Donc $\dfrac{1}{i} = -i$.

En fait, $z^2 = -1 \Leftrightarrow z \in \{i, -i\}$.

Plus généralement $i^3 = -i$, et $i^4 = 1$.

Le sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$ engendré par i est cyclique d'ordre 4 : $(i) = \{1, i, -1, -i\}$.

Remarque

Si ω est un complexe non réel, alors on peut encore effectuer l'identification suivante :
$\forall\, (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4 : x + \omega y = x' + \omega y' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$.

I.3 Conjugaison

Définition

Soit $z = x + iy$ (x et y réels) un nombre complexe quelconque.
Le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$ est appelé le *conjugué* de z.
On nomme *conjugaison* l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par $z \to \overline{z}$.

Proposition

La conjugaison est un automorphisme involutif du corps $(\mathbb{C}, +, \times)$.
Cela signifie que :
- $\overline{1} = 1$; $\forall\, z \in \mathbb{C}, \overline{\overline{z}} = z$.
- $\forall\, (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ et $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

Propriétés

- Pour tous complexes $z_1, \ldots, z_n$, $\overline{\sum\limits_{k=1}^{n} z_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{z_k}$ et $\overline{\prod\limits_{k=1}^{n} z_k} = \prod\limits_{k=1}^{n} \overline{z_k}$
- Pour tout z complexe : $\mathrm{Re}\,(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}\,(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
- z est réel $\Leftrightarrow \overline{z} = z$.
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

I.4 Module

Définition

Soit $z = x + iy$ (x et y réels) un nombre complexe quelconque.
On appelle *module* de z la quantité, notée $|\, z \,|$, égale à $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarques

On constate que $z\overline{z} = |\, z \,|^2$ (utile pour se “débarrasser” du module).

En particulier, si z est non nul, l'inverse de z est $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|\, z \,|^2}$.

Si z est réel, le module de z est égal à sa valeur absolue.

Les notations $|\ |$ (valeur absolue ou module) sont donc compatibles.

Propriétés

L'application “module” vérifie les propriétés suivantes, pour tous (z, z') de $\mathbb{C}^2$:

- $|\, z \,| \geqslant 0\,;\quad |\, z \,| = 0 \Leftrightarrow z = 0\,;\quad |\, zz' \,| = |\, z \,|\,|\, z' \,|$.
  Si z est non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|\, z' \,|}{|\, z \,|}$.
- $|\, z + z' \,| \leqslant |\, z \,| + |\, z' \,|$. Il y a égalité $\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z' = \lambda z$ ou $z = \lambda z'$.
  $|\, |\, z \,| - |\, z' \,|\, | \leqslant |\, z \pm z' \,|$. Si $|\, z \,| \leqslant k < 1$, alors $1 - k \leqslant |\, 1 + z \,| \leqslant 1 + k$.
- $\forall\, (u, v) \in \mathbb{C}^2, |\, u + v \,|^2 = |\, u \,|^2 + 2\mathrm{Re}\,(u\overline{v}) + |\, v \,|^2$.
- $\forall\, z \in \mathbb{C}, \max(|\, \mathrm{Re}\,(z) \,|, |\, \mathrm{Im}\,(z) \,|) \leqslant |\, z \,| \leqslant |\, \mathrm{Re}\,(z) \,| + |\, \mathrm{Im}\,(z) \,|$.

Généralisation

Pour tous complexes $z_1, \ldots, z_n$: $\left|\prod\limits_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod\limits_{k=1}^{n} |\, z_k \,|$ et $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |\, z_k \,|$.

En particulier $\forall\, n \in \mathbb{N}, |\, z^n \,| = |\, z \,|^n$.

On a $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum\limits_{k=1}^{n} |\, z_k \,| \Leftrightarrow$ les z_k sont produits de l'un d'entre eux par des réels positifs.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{U}$ des complexes de module 1 est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Pour tout z de $\mathcal{U}$, $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

Proposition *(Distance dans $\mathbb{C}$)*

Soit d l'application $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $\forall\, (z, z') \in \mathbb{C}^2, d(z, z') = |\, z - z' \,|$.

d est une *distance* sur $\mathbb{C}$, ce qui signifie qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

Pour tous nombres complexes u, v et w :

- $d(u, v) \geqslant 0\,;\quad d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v\,;\quad d(u, v) = d(v, u)$.
- $d(u, v) \leqslant d(u, w) + d(w, v)$ (inégalité triangulaire.)

I.5 Fonctions à valeurs complexes

Soit X un ensemble quelconque non vide.

$\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ désigne l'ensemble des applications définies sur X et à valeurs complexes.

Le plus souvent X désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, ou l'ensemble $\mathbb{N}$ (dans ce dernier cas, on obtient l'ensemble des suites à valeurs complexes).

On sait que $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ est un anneau commutatif pour les lois déduites de $\mathbb{C}$, et définies par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(X, \mathbb{C}), \forall x \in X : \begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (fg)(x) = f(x)g(x) \end{cases}$$

Le neutre de $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ pour la loi $+$ (resp. la loi $\times$) est l'application constante 0 (resp. 1).

Si f appartient à $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$, on définit les éléments $\mathrm{Re}\,(f)$, $\mathrm{Im}\,(f)$, $\overline{f}$ et $|\,f\,|$ de $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$:

$$\forall x \in X : \begin{cases} \mathrm{Re}\,(f)(x) = \mathrm{Re}\,(f(x)) & \mathrm{Im}\,(f)(x) = \mathrm{Im}\,(f(x)) \\ \overline{f}(x) = \overline{f(x)} & |\,f\,|(x) = |\,f(x)\,| \end{cases}$$

On a, pour les opérations "partie réelle", "partie imaginaire", "conjugaison" et "module", des propriétés dans $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ analogues à celles qui ont été rencontrées dans $\mathbb{C}$.

I.6 Le plan complexe

Définition

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé direct $(0, e_1, e_2)$.

L'application qui à $z = x + iy$ (x, y réels) associe le point M de coordonnées (x, y) est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathcal{P}$.

On dit que M est le *point image* de z, ou encore que z est l'*affixe* de M.

On note $M(z)$ pour désigner simultanément M et son affixe z.

Le plan $\mathcal{P}$, muni de cette correspondance, est appelé le *plan complexe*.

Le vecteur $OM = xe_1 + ye_2$ est appelé *vecteur image* du nombre complexe $z = x + iy$ (et on dit que z est l'affixe de ce vecteur).

Remarques

- $|\,z\,|$ est la distance $d(O, M)$ (ou la norme du vecteur OM).
  Un argument de z est une mesure de l'angle (Ox, OM).
- L'axe Ox est l'ensemble des points images des nombres réels.
  L'axe Oy est l'ensemble des points images des imaginaires purs.
- Si on se donne deux points $A(a)$ et $M(z)$, le vecteur image de $z - a$ est AM.
  Le module $|\,z - a\,|$ représente la distance $d(A, M)$.
- Le point N image de $a + z$ est le quatrième sommet du parallélogramme $OANM$ bâti sur les points O, A, M.

II Argument, exponentielle complexe

II.1 Notation $\exp(i\theta)$

Définition

Pour tout réel θ, on pose $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Théorème

L'application $\theta \to \mathrm{e}^{i\theta}$ est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(\mathcal{U}, \times)$ des nombres complexes de module 1, de noyau $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

- $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, |\,\mathrm{e}^{i\theta}\,| = 1$.
- $\forall\,(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{i\varphi} = \mathrm{e}^{i(\theta+\varphi)}$.
- $\forall\,z \in \mathcal{U}$ (càd $|\,z\,| = 1$), $\exists\,\theta \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{i\theta} = z$.
- $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists\,k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta \equiv 0\ (2\pi)$.

Propriétés

- L'application $\theta \to \mathrm{e}^{i\theta}$ est 2π-périodique : $\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\varphi} \Leftrightarrow \exists\,k \in \mathbb{Z}, \theta - \varphi = 2k\pi \Leftrightarrow \theta \equiv \varphi\ (2\pi)$.
- $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{\mathrm{e}^{i\theta}}$.
- Valeurs particulières :
  $\mathrm{e}^{i\pi/2} = i, \qquad \mathrm{e}^{i\pi} = -1, \qquad \mathrm{e}^{i3\pi/2} = -i, \qquad \mathrm{e}^{i2\pi/3} = j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

II.2 Formules de Moivre et d'Euler

Proposition *(Formule de Moivre)*

Pour tout réel θ, et pour tout entier n : $(\mathrm{e}^{i\theta})^n = \mathrm{e}^{in\theta}$.
Autrement dit : $\forall\,\theta \in \mathbb{R}, \forall\,n \in \mathbb{Z}, (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Proposition *(Formules d'Euler)*

Pour tout réel θ : $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}$, et $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$.

Utilisation

- "Moivre" permet, en développant $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ et en identifiant les parties réelles et imaginaires, d'exprimer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de puissances de $\cos\theta$ et/ou $\sin\theta$.
- Les formules d'Euler permettent, par utilisation de la formule du binôme et regroupement des termes équidistants des extrémités, de *linéariser* $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$, pour $n \geqslant 2$, c'est-à-dire de les exprimer en fonction de quantités du type $\cos k\theta$ et/ou $\sin k\theta$.

II.3 Forme trigonométrique

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe une unique classe de réels θ définie modulo 2π, telle que $z = |\, z\,| \mathrm{e}^{i\theta}$.

Cette classe de réels modulo 2π est appelée l'*argument* de z.

Chacun des réels θ de cette classe est appelée une *détermination* de l'argument de z (ou, par abus de langage, *un* argument de z), et on note : $\arg z = \theta\ (2\pi)$.

Remarque

L'argument d'un nombre complexe non nul z possède une unique détermination dans tout intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi[$, et en particulier dans les intervalles $[0, 2\pi[$ et $[-\pi, \pi[$.

Proposition

Tout nombre complexe non nul s'écrit de manière unique : $z = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$, avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

ρ est le module de z et θ est une détermination de l'argument de z.

On dit alors que $z = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ est écrit sous forme *trigonométrique*.

Remarques

– $0 = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$, avec $\rho = 0$ et θ réel quelconque. Parler de l'argument de 0 n'a donc aucun sens.

– Soit $z = x + iy = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ $(\rho > 0)$. Alors : $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$ et $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\rho}, \quad \sin\theta = \dfrac{y}{\rho} \end{cases}$

Si $x \neq 0$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ (ce qui détermine θ modulo π.)

Si $x \neq -1$, $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{y}{x + \rho}$ (ce qui détermine θ modulo 2π.)

– Si $z \neq 0$, mais si on n'est pas certain du signe du réel ρ :

$z = \rho \mathrm{e}^{i\theta} \Leftrightarrow \Big(\rho = |\, z\,| \text{ et } \arg z = \theta\ (2\pi)\Big)$ ou $\Big(\rho = -|\, z\,| \text{ et } \arg z = \theta + \pi\ (2\pi)\Big)$

Argument et opérations dans $\mathbb{C}$

Soient u et v, non nuls : $u = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ et $v = r \mathrm{e}^{i\varphi}$ $(\rho > 0, r > 0)$.

$uv = \rho r \mathrm{e}^{i(\theta + \varphi)}$. En particulier : $\arg uv = \arg u + \arg v\ (2\pi)$.

$\overline{u} = \rho \mathrm{e}^{-i\theta}$. En particulier : $\arg \overline{u} = -\arg u\ (2\pi)$.

$\dfrac{1}{u} = \dfrac{1}{\rho}\, \mathrm{e}^{-i\theta}$. En particulier : $\arg \dfrac{1}{u} = -\arg u\ (2\pi)$.

$\dfrac{u}{v} = \dfrac{\rho}{r}\, \mathrm{e}^{i(\theta - \varphi)}$. En particulier : $\arg \dfrac{u}{v} = \arg u - \arg v\ (2\pi)$.

$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ u^n = \rho^n \mathrm{e}^{in\theta}$. En particulier : $\arg u^n = n \arg u\ (2\pi)$.

$|\, u + v\,| = |\, u\,| + |\, v\,| \Leftrightarrow \arg u = \arg v\ (2\pi)$.

Argument et cas particuliers

Soit u un nombre complexe non nul.

$u \in \mathbb{R}^{+*} \Leftrightarrow \arg u = 0\ (2\pi)\,;$ $\quad u \in \mathbb{R}^{-*} \Leftrightarrow \arg u = \pi (2\pi)$.

u est réel $\Leftrightarrow \arg u = 0\ (\pi)\,;$ $\quad u$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg u = \pi/2\ (\pi)$.

$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}^{+*},\ \arg \lambda u = \arg u\ (2\pi)\,;$ $\quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^{-*},\ \arg \lambda u = \arg u + \pi\ (2\pi)$.

II.4 Fonction exponentielle complexe

Définition

Soit $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) un nombre complexe.
On pose $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{iy}$, encore noté $\exp z$.
On définit ainsi une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, appelée *exponentielle complexe*.

Remarques

– La restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction $z \rightarrow \exp z$ est l'exponentielle réelle déjà connue.
  Sa restriction aux imaginaires purs est : $z = i\theta \rightarrow \mathrm{e}^{i\theta}$ définie précédemment.

– Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) :
  $\exp z = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$. Ainsi $\begin{cases} |\exp z| = \exp x \\ \arg \exp z = y \ (2\pi) \end{cases}$

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z' :

– $\exp(z + z') = \exp z \ \exp z'$.

– $\exp z = 1 \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2ik\pi$ (en particulier, $\exp 0 = 1$).

– $\exp z \in \mathbb{C}^*$ et $\dfrac{1}{\exp z} = \exp(\text{-}z)$.

– $\overline{\exp z} = \exp \overline{z}$.

– $\exp z = \exp z' \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = z' + 2ik\pi \Leftrightarrow z \equiv z' \ (2i\pi)$.
  L'application exponentielle est donc périodique de période $2i\pi$.

Résolution de l'équation $\exp z = a$

Soit $a = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$ un nombre complexe non nul ($\rho > 0$ est le module de a).
Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) :
$\exp z = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln \rho \\ y \equiv \theta \ (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}, z = ln(\rho) + i(\theta + 2k\pi)$.
L'équation $\exp z = a$ possède donc une infinité de solutions.
Toutes se déduisent de l'une d'entre elles par ajout d'un multiple entier de $2i\pi$.

Remarques

– D'apès les résultats précédents, l'application exponentielle est un morphisme surjectif du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ dont le noyau est $2i\pi\mathbb{Z}$.

– L'équation $\exp z = a$ (a non nul, z cherché sous la forme $x + iy$) possède une solution unique si on se limite à $y \in [\alpha, \alpha + 2\pi[$ (par exemple $y \in [0, 2\pi[$, ou $y \in [-\pi, \pi[$).

III Equations polynômiales dans $\mathbb{C}$

III.1 Théorème de d'Alembert

Théorème

Tout polynôme P non constant (c'est-à-dire de degré supérieur ou égal à 1), à coefficients complexes, admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Proposition

Tout polynôme P non constant, à coefficients dans $\mathbb{C}$, se factorise en un produit de polynômes du premier degré. Le nombre de racines de P est donc n, chacune étant comptée autant de fois que sa multiplicité.

Proposition *(Racines complexes d'un polynôme à coefficients réels)*

Soit $P = a_n \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1 \mathrm{X} + a_0$ un polynôme à coefficients réels.

Soit α une racine non réelle de P, avec la multiplicité m.

Alors $\overline{\alpha}$ est racine de P avec la même multiplicité.

III.2 Racines carrées d'un nombre complexe non nul

Proposition

Tout nombre complexe non nul Z admet exactement 2 racines carrées, qui sont opposées.

La méthode est la suivante, en posant $Z = A + iB$, et en cherchant z sous la forme $z = x + iy$:

$$z^2 = Z \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = A \\ 2xy = B \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = A \\ xy = \dfrac{B}{2} \\ x^2 + y^2 = |Z| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{|Z| + A}{2} \\ y^2 = \dfrac{|Z| - A}{2} \\ xy = \dfrac{B}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varepsilon \sqrt{\dfrac{|Z| + A}{2}} \\ y = \varepsilon' \sqrt{\dfrac{|Z| - A}{2}} \\ \varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\},\ \varepsilon\varepsilon' \text{ du signe de } B \end{cases}$$

III.3 Equation du second degré

Soit (E) l'équation : $az^2 + bz + c = 0$, d'inconnue z, avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, et $a \neq 0$.

Le *discriminant* de cette équation est le nombre complexe : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation (E) admet une racine double $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, soit δ une des deux racines carrées de Δ.

  L'équation (E) admet deux racines complexes, $z = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ et $z = \dfrac{-b + \delta}{2a}$.

  Dans tous les cas, la somme des racines est $-\dfrac{b}{a}$ et leur produit est $\dfrac{c}{a}$.

– Si $b = 2b'$, on peut utiliser le *discriminant réduit* $\Delta' = b'^2 - ac$.
  Les solutions s'écrivent alors : $z = \dfrac{-b' - \delta'}{a}$ et $z = \dfrac{-b' + \delta'}{a}$ où $\delta'^2 = \Delta'$.

– Si (a, b, c) sont réels, on peut distinguer les deux cas $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$:
  Si $\Delta > 0$, les deux solutions de (E) sont réelles et s'écrivent : $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  Si $\Delta < 0$, elles sont non réelles, conjuguées l'une de l'autre et s'écrivent : $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

III.4 Racines N-ièmes d'un nombre complexe non nul

Définition

Soit Z un nombre complexe non nul, et n un entier naturel non nul.
On appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Proposition

Soit $Z = \rho e^{i\theta}$ la forme trigonométrique de Z (avec $\rho > 0$).
Z possède exactement n racines n-ièmes, données par :
$z_k = \rho^{1/n} \exp i \left(\dfrac{\theta}{n} + 2k\dfrac{\pi}{n}\right)$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.

La méthode est la suivante, en cherchant z sous la forme $z = re^{i\varphi}$ $(r > 0)$:

$$z^n = Z \Leftrightarrow r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\varphi \equiv \theta \ (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi \equiv \dfrac{\theta}{n} \ (\dfrac{2\pi}{n}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n} \\ 0 \leqslant k \leqslant n - 1 \end{cases}$$

Remarques

– Les points images M_k de ces n racines n-ièmes sont les sommets d'un polygône régulier convexe inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\rho^{1/n}$.

– Les n racines n-ièmes z_k de Z apparaissent dans la factorisation : $z^n - Z = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(z - z_k)$.

– En particulier, par identification des termes de degré $n - 1$ et des termes constants :

  ◇ La somme des n racines n-ièmes z_k de Z est nulle (si $n \geqslant 2$).

  ◇ Leur produit vaut $(-1)^{n-1}Z$.

III.5 Racines n-ièmes de l'unité

Proposition

On appelle racines n-ièmes de l'unité les racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$ du nombre 1.
Elles sont données par par $\omega_k = \exp \dfrac{2ik\pi}{n}$, avec $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.
Si on note $\omega = \omega_1 = \exp \dfrac{2i\pi}{n}$, alors pour tout k : $\omega_k = \omega^k$ (en particulier $\omega_0 = 1$).

Proposition *(Structure de groupe cyclique)*

L'ensemble des n racines n-ièmes de l'unité s'écrit $\{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\}$.
C'est un sous-groupe cyclique d'ordre n du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$. Il est noté $\mathcal{U}_n$.
ω_k est un générateur de $\mathcal{U}_n \Leftrightarrow \mathcal{U}_n = (\omega_k) = \{1, \omega_k, \omega_k^2, \ldots, \omega_k^{n-1}\}$
$\Leftrightarrow$ les entiers k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ et n sont premiers entre eux.

Propriétés

– -1 est une racine n-ième de l'unité si n est pair : c'est $\omega_{n/2}$.

– Les racines n-ièmes de 1 apparaissent dans la factorisation : $z^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(z - \omega_k)$.

  Par identification, on en déduit :
  $\begin{cases} \text{La somme des racines } n\text{-ièmes de l'unité est nulle (si } n \geqslant 2). \\ \text{Le produit des racines } n\text{-ièmes de l'unité vaut } (-1)^{n-1}. \end{cases}$

– Considérons l'équation (E) : $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1 = 0$
  Les $n-1$ racines de (E) sont les $n-1$ racines n-ièmes de l'unité distinctes de 1.

– Pour $n \geqslant 2$, les points images Ω_k des n racines n-ièmes de l'unité sont les sommets d'un polygône régulier convexe inscrit dans le cercle unité (un sommet est le point d'affixe 1.)

– Si Z est un nombre complexe non nul, et si z_0 est l'une de ses racines n-ièmes, alors les n racines n-ièmes de Z sont les $z_k = \omega_k z_0$, avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Cas particuliers

– Les deux racines carrées de l'unité sont 1 et -1 : $\mathcal{U}_2 = \{1, -1\} = (-1)$.

– Les racines cubiques de l'unité sont :
  $1, \quad j = \exp\dfrac{2i\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{et} \quad j^2 = \exp\dfrac{4i\pi}{3} = \; = 1/j.$
  Elles vérifient $1 + j + j^2 = 0$. D'autre part, $j^2 = \overline{j}$. $\mathcal{U}_3 = \{1, j, j^2\} = (j) = (j^2)$.

– Les racines quatrièmes de l'unité sont : 1, i, -1, et $-i$.
  On a : $\mathcal{U}_4 = \{1, i, -1, -i\} = (i) = (-i)$.
  Les trois racines de $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ sont i, -1, et $-i$.

– Les racines cinquièmes de l'unité sont $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$, avec $\omega = \exp\dfrac{2i\pi}{5}$.
  Compte tenu du fait que 5 est premier, $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ engendrent tous $\mathcal{U}_5$.

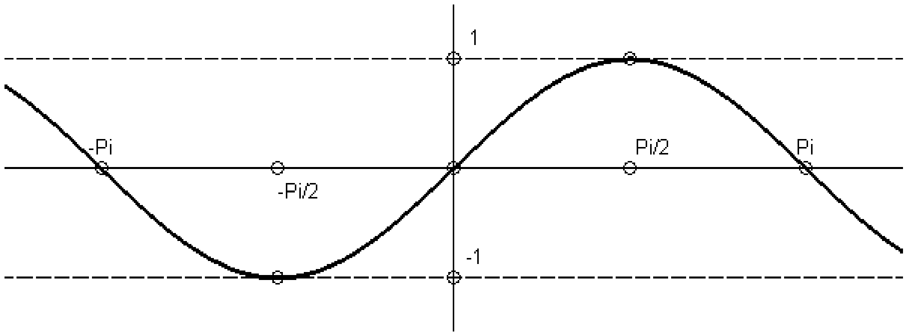
– Les racines sixièmes de l'unité sont : 1, $-j^2 = \exp\dfrac{i\pi}{3}$, j, -1, j^2, et $-j$.
  On a : $\mathcal{U}_6 = (-j^2) = (-j)$.

IV Trigonométrie

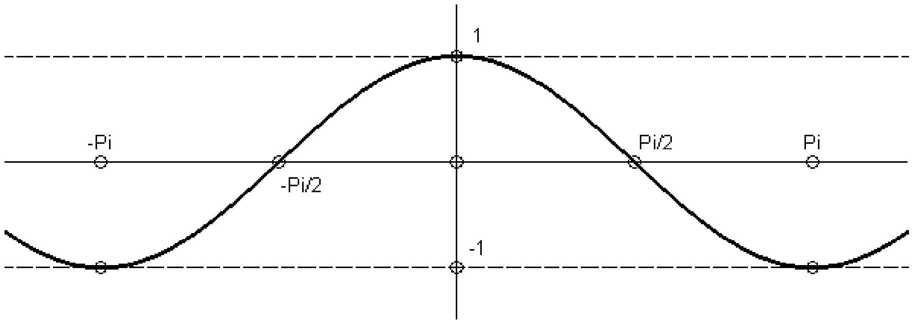
IV.1 Applications sinus et cosinus

– Les applications $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

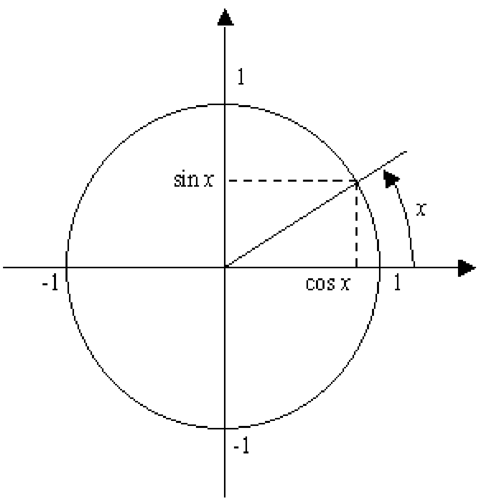
– Représentation graphique de $y = \sin x$:

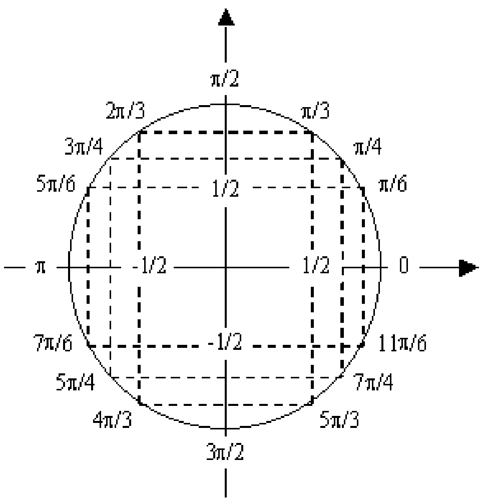


– Représentation graphique de $y = \cos x$:



– Représentations utilisant le cercle trigonométrique :
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $|\cos x| \leqslant 1$, $|\sin x| \leqslant 1$.
$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R},\ \begin{cases} a = \cos\alpha \\ b = \sin\alpha \end{cases}$





– Valeurs particulières de $\sin x$ et de $\cos x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

– Les applications $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont 2π-périodiques.
L'application $x \mapsto \sin x$ est impaire et l'application $x \mapsto \cos x$ est paire.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sin(x+2\pi) = \sin x \\ \cos(x+2\pi) = \cos x \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \cos(-x) = \cos x \end{cases}$$

– Passage de x à $\pi \pm x$ et à $\frac{\pi}{2} \pm x$:

$$\begin{array}{llll} \sin(\pi+x) = -\sin x & \cos(\pi+x) = -\cos x & \sin(\pi-x) = \sin x & \cos(\pi-x) = -\cos x \\ \sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos x & \cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin x & \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x & \cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x \end{array}$$

– Dans les notations suivantes, k est un entier relatif quelconque :

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \text{ ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \qquad \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \text{ ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

– Dérivées successives :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \sin' x = \cos x \\ \cos' x = -\sin x \end{cases} \quad \begin{cases} \sin^{(n)} x = \sin(x + n\frac{\pi}{2}) \\ \cos^{(n)} x = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

– Cosinus et sinus d'une somme ou d'une différence. Pour tous réels x et y :

$$\begin{cases} \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{cases}$$

– Transformations de produits en sommes et de sommes en produits. Pour tous réels x, y, p, q :

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) \\ \sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)) \\ \sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \\ \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \\ \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \end{cases}$$

IV.2 Applications tangente et cotangente

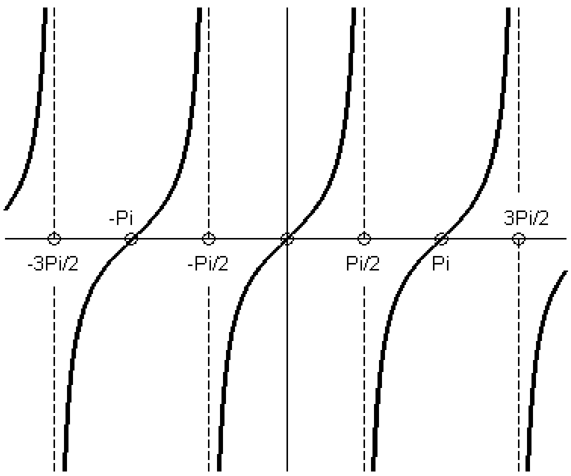
– L'application $x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est indéfiniment dérivable sur $\left\{x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2}\ (\pi)\right\}$.

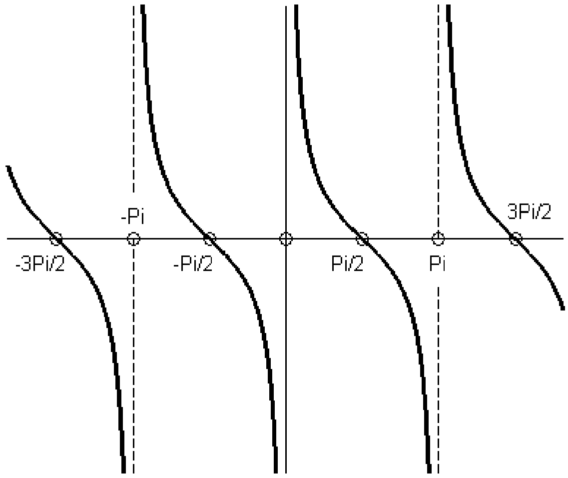
L'application $x \mapsto \operatorname{cotan} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ est indéfiniment dérivable sur $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\ (\pi)\}$.

– Les applications $x \mapsto \tan x$ et $x \mapsto \operatorname{cotan} x$ sont impaires et π-périodiques :

$$\begin{cases} \tan(-x) = -\tan x \\ \operatorname{cotan}(-x) = -\operatorname{cotan} x \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan(x+\pi) = \tan x \\ \operatorname{cotan}(x+\pi) = \operatorname{cotan} x \end{cases}$$

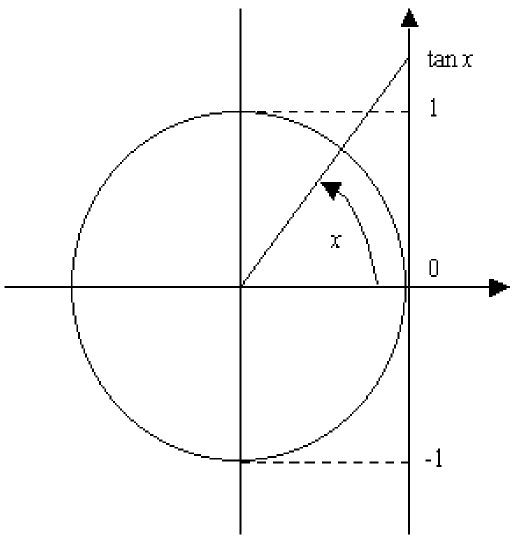
– Représentations graphiques de $y = \tan x$ (à gauche), et $y = \operatorname{cotan} x$ (à droite)

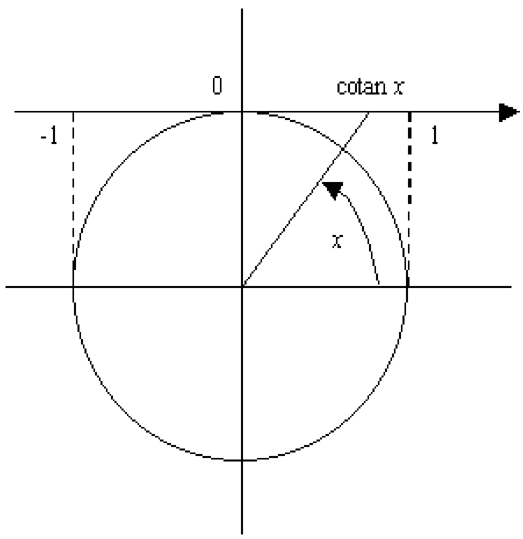




– Trois valeurs particulières : $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$, $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

– Interprétation de $\tan x$ et $\operatorname{cotan} x$ sur le cercle trigonométrique :





– Passage de x à $\pi - x$ ou à $\frac{\pi}{2} \pm x$:

$$\tan(\pi - x) = -\tan x, \quad \tan(\tfrac{\pi}{2} + x) = -\frac{1}{\tan x}, \quad \tan(\tfrac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x}$$

– Pour tout réel $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(\pi)$: $\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = \alpha\ (\pi)$. En particulier :

$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = 0\ (\pi), \quad \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \tfrac{\pi}{4}\ (\pi), \quad \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\tfrac{\pi}{4}\ (\pi)$$

– Dérivées : $\tan' x = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\operatorname{cotan}' x = -1 - \operatorname{cotan}^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

– Tangente d'une somme ou d'une différence :

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}, \quad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

– Utilisation du changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

IV.3 Linéarisation

– Formules d'Euler : $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

– Ces formules permettent de calculer les puissances de $\cos x$ et de $\sin x$ en fonction de quantités du type $\cos(px)$ et/ou $\sin(px)$. Cette opération est appelée *linéarisation*.

  Pour cela on écrit $\cos^n x = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n$, $\sin^n x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n$. On développe ensuite ces puissances par la formule du binôme, et on regroupe les termes équidistants des extrémités.

  On réutilise alors les formules d'Euler pour retouver des $\cos(px)$ et/ou des $\sin(px)$.

– Exemples :

$$\begin{aligned}
\sin^4 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right) = \frac{1}{8}\left(\cos 4x - 4\cos 2x + 3\right)\\
\cos^5 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\left(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}\right)\\
&= \frac{1}{16}\left(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x\right)\\
\sin^5 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{16}\,\frac{1}{2i}\left(e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}\right)\\
&= \frac{1}{16}\left(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right)\\
\cos^6 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}\left(e^{6ix} + 6e^{4ix} + 15e^{2ix} + 20 + 15e^{-2ix} + 6e^{-4ix} + e^{-6ix}\right)\\
&= \frac{1}{32}\left(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10\right)
\end{aligned}$$

IV.4 Opération inverse de la linéarisation

- Formule de Moivre : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$.
- Elle permet d'exprimer $\cos(nx), \sin(nx)$ en fonction de puissances de $\cos x$ et/ou de $\sin x$.

  On développe $(\cos x + i \sin x)^n$ par la formule du binôme. La partie réelle (resp. imaginaire) du résultat est alors égale à $\cos(nx)$ (resp. $\sin(nx)$).

  Si on cherche à obtenir un résultat où figurent surtout des puissances de $\cos x$ (resp. de $\sin x$) il convient de remplacer les puissances paires de $\sin x$ (resp. de $\cos x$) par des puissances de $(1-\cos^2 x)$ (resp. de $(1-\sin^2 x)$) puis de développer.
- Exemples :

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos^4 x + 4i\cos^3 x \sin x - 6\cos^2 x \sin^2 x - 4i \cos x \sin^3 x + \sin^4 x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x \\ \sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x(1-\cos^2 x) + (1-\cos^2 x)^2 \\ \sin 4x = 4\cos x((1-\sin^2 x)\sin x - \sin^3 x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \\ \sin 4x = 4\cos x(-2\sin^3 x + \sin x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^5 &= \cos^5 x + 5i\cos^4 x \sin x - 10\cos^3 x \sin^2 x \\ &\quad -10i\cos^2 x \sin^3 x + 5\cos x \sin^4 x + i\sin^5 x\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x \\ \sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x(1-\cos^2 x) + 5\cos x(1-\cos^2 x)^2 \\ \sin 5x = 5(1-\sin^2 x)^2 \sin x - 10(1-\sin^2 x)\sin^3 x + \sin^5 x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x \\ \sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x \end{cases}$$

- Dans ce dernier cas, la formule donnant $\sin 5x$ se déduit facilement de celle donnant $\cos 5x$.

  En effet, en posant $x = \frac{\pi}{2} - y$, on trouve :

$$\begin{aligned}\sin 5x &= \sin\Big(\frac{5\pi}{2} - 5y\Big) = \sin\Big(\frac{\pi}{2} - 5y\Big) \\ &= \cos 5y = 16\cos^5 y - 20\cos^3 y + 5\cos y = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x\end{aligned}$$

V Géométrie du plan

V.1 Propriétés géométriques liées au module

- M appartient au cercle de centre A et de rayon $r \geqslant 0 \Leftrightarrow d(A,M) = r \Leftrightarrow |\, z - a \,| = r$.
  M appartient au disque fermé de centre A et de rayon $r \geqslant 0 \Leftrightarrow |\, z - a \,| \leqslant r$.
  M appartient au disque ouvert de centre A et de rayon $r > 0 \Leftrightarrow |\, z - a \,| < r$.
  M est à l'extérieur du disque fermé de centre A et de rayon $r \geqslant 0 \Leftrightarrow |\, z - a \,| > r$.

- Le cercle unité (centre en O, rayon 1) est formé des points images des complexes de module 1 (des éléments de $\mathcal{U}$).
  Le disque unité ouvert est l'ensemble images des z de $\mathbb{C}$ tels que $|\, z \,| < 1$.
  Le disque unité fermé est l'ensemble des points images des z de $\mathbb{C}$ tels que $|\, z \,| \leqslant 1$.

- Etant donnés $A(a)$, $B(b)$, et $M(z)$:
  M appartient à la médiatrice Δ du segment AB
  $\Leftrightarrow d(A,M) = d(B,M) \Leftrightarrow |\, z - a \,| = |\, z - b \,|$.
  L'inégalité $|\, z - a \,| < |\, z - b \,|$ définit le demi-plan ouvert délimité par Δ et contenant A.

V.2 Propriétés géométriques liées à la conjugaison

$N(\overline{z})$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe Ox.
$P(-z)$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'origine.
$Q(-\overline{z})$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe Oy.

Soient A et B deux points d'affixes respectifs a et b.
Le produit scalaire des vecteurs OA et OB est $Re(\overline{a}b)$.

V.3 Propriétés géométriques liées à l'argument

- Soient $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts de l'origine :
  O, A, B sont alignés $\Leftrightarrow \arg(a) = \arg(b)\ (\pi)$.
  A et B sont alignés avec O et du même coté de O
  $\Leftrightarrow |\, a \,| + |\, b \,| = |\, a + b \,| \Leftrightarrow \arg(a) = \arg(b)\ (2\pi)$.

- Soient a et z deux nombres complexes non nuls. On pose $a = \rho e^{i\theta}$, avec $(\rho > 0)$, et $b = e^{i\theta}$.
  On définit les points $M(z)$, $N(bz)$, $P(\rho z)$, $Q(az)$.
  On passe de $M(z)$ à $P(\rho z)$ par l'homothétie h de centre O de rapport ρ.
  On passe de $M(z)$ à $N(e^{i\theta} z)$ par la rotation r de centre O et d'angle θ.
  On passe de $M(z)$ à $Q(az)$ par la composée $f = h \circ r = r \circ h$.
  f est la *similitude directe* de centre 0, de rapport ρ, d'angle θ.
  En particulier, $R(iz)$ se déduit de $M(z)$ par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

V.4 Transformations du plan complexe

Définition

Soit g une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (définie éventuellement sur une partie de $\mathbb{C}$.)
Il lui correspond de façon unique une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$, de la manière suivante :
Au point m d'affixe z, on associe le point M d'affixe $Z = g(z)$.
L'application $f : m(z) \to M(Z)$ est appelée *transformation du plan complexe.*

Cas particuliers simples

$f : m(z) \to M(Z = z + a)$ ($a \in \mathbb{C}$) est la translation de vecteur le vecteur image de a.

$f : m(z) \to M(Z = -z)$ est la symétrie par rapport au point O.

$f : m(z) \to M(Z = \overline{z})$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe Ox.

$f : m(z) \to M(Z = -\overline{z})$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe Oy.

$f : m(z) \to M(Z = \lambda z)$, avec λ réel, est l'homothétie de centre O et de rapport λ.

$f : m(z) \to M(Z = e^{i\theta} z)$ est la rotation de centre O et d'angle θ.
$f : m(z) \to M(Z = iz)$ est la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
$f : m(z) \to M(Z = jz)$ est la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$.

Soit a un complexe non nul et $f : m(z) \to M(Z = az)$: f est la composée commutative ($f = h \circ r = r \circ h$) de l'homothétie h de centre O et de rapport $|\,a\,|$, et de la rotation r de centre O et d'angle $\arg(a)$ (2π).

V.5 Similitudes directes

Proposition

Soient a et b deux nombres complexes, a étant non nul.
Soit f la transformation de $\mathcal{P}$ définie par $m(z) \to M(Z = az + b)$.
- Si $a = 1$, f est la translation dont le vecteur est le vecteur image de b.
- Si $a \neq 1$, l'application f possède un point invariant unique Ω d'affixe $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

  f est alors la composée commutative de la rotation r de centre Ω et d'angle $\arg(a)$ et de l'homothétie h de centre Ω et de rapport $|\,a\,|$: $f = h \circ r = r \circ h$.
  On dit que f est la *similitude directe* de centre Ω, de rapport $|\,a\,|$, d'angle $\arg(a)$.

Remarques

- Si a est réel, f est l'homothétie de centre Ω et de rapport a.
- Supposons $|\,a\,| = 1$ (et toujours $a \neq 1$), et posons $a = e^{i\theta}$.
  Alors f est la rotation de centre Ω et d'angle θ (2π).
- Soit f une similitude de rapport ρ.
  Pour tous points M et N images respectives de m et n, on a : $d(M, N) = \rho d(m, n)$.
  Les distances sont donc multipliées par le facteur ρ.
- L'ensemble des transformations $f : m(z) \to M(Z) = az + b$ (avec $a \neq 0$) est un sous-groupe du groupe $\mathcal{B}(E)$ des bijections du plan $\mathcal{P}$.

V.6 Configurations géométriques

Soient A, B, C, D, quatre points distincts, d'affixes respectifs a, b, c, d.

Mesure d'angle

Une mesure de l'angle de vecteurs (AC, AD) est : $\arg(d-a) - \arg(c-a) = \arg\dfrac{d-a}{c-a}\ (2\pi)$.

Condition d'alignement

Les points (A, a), (B, b), (C, c) sont alignés
$\Leftrightarrow \arg(b-a) = \arg(c-a)\ (\pi)$
$\Leftrightarrow \dfrac{b-a}{c-a}$ est réel
$\Leftrightarrow (b-a)(\overline{c}-\overline{a})$ est réel.

Condition d'orthogonalité

Les vecteurs AB et AC sont orthogonaux
$\Leftrightarrow \arg(b-a) = \arg(c-a) + \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$
$\Leftrightarrow \dfrac{b-a}{c-a}$ est imaginaire pur
$\Leftrightarrow (b-a)(\overline{c}-\overline{a})$ est imaginaire pur.

Condition de cocyclicité

Les points (A, a), (B, b), (C, c) et (D, d) sont sur un même cercle (sont cocycliques)
$\Leftrightarrow$ les angles de vecteurs (AC, AD) et (BC, BD) sont égaux (modulo π)
$\Leftrightarrow \arg\dfrac{d-a}{c-a} = \arg\dfrac{d-b}{c-b}\ (\pi)$
$\Leftrightarrow \arg\dfrac{(d-a)(c-b)}{(c-a)(d-b)} = 0\ (\pi)$
$\Leftrightarrow (d-a)(c-b)(\overline{c}-\overline{a})(\overline{d}-\overline{b})$ est réel.

Triangle équilatéral

Les points A, B, C forment un triangle équilatéral
$\Leftrightarrow a + jb + j^2c = 0$ ou $a + jc + j^2b = 0$
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Barycentre

L'isobarycentre des points $M_k(z_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ est le point G d'affixe $g = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k$.

VI Similitudes du plan

VI.1 Nombres complexes et géométrie du plan

Structure de plan affine

– L'ensemble $\mathbb{C}$ est un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$.
  Les translations de $\mathbb{C}$ sont les applications $t_\omega : z \mapsto Z = z + \omega$.
  L'homothétie de centre z_0 et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est donnée par $z \mapsto Z = z_0 + \lambda(z - z_0)$.

– Soit z_0 un élément de $\mathbb{C}$ et ω un élément de $\mathbb{C}^*$.
  Soit $\mathcal{D}$ la droite affine passant par z_0 et dirigée par ω.
  Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est : $z \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ z = z_0 + \lambda\omega$.
  On désignera par Ox la droite passant par 0 et dirigée par 1 (son équation est $\overline{z} = z$: c'est la droite des nombres réels) et on désignera par Oy la droite passant par 0 et dirigée par i (son équation est $\overline{z} = -z$: c'est la droite des nombres imaginaires purs).

– Soient a, b deux éléments distincts de $\mathbb{C}$, et soit $\mathcal{D}$ la droite qui les contient.
  Le point z est dans $\mathcal{D} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z & a & b \\ \overline{z} & \overline{a} & \overline{b} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
  Plus généralement trois points a, b, c de $\mathbb{C}$ sont alignés$\Leftrightarrow$ $a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a}$ est un réel.

– Puisque $\mathbb{C}$ est un plan, $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4.
  Les applications $z \mapsto z$, $z \mapsto iz$, $z \mapsto \overline{z}$ et $z \mapsto i\overline{z}$ en forment une base.
  Ainsi les endomorphismes du plan $\mathbb{C}$ sont les applications $z \mapsto Z = uz + v\overline{z}$, avec $(u, v) \in \mathbb{C}^2$.
  Les applications affines de $\mathbb{C}$ sont les applications $z \mapsto Z = uz + v\overline{w} + c$, avec $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$.

Structure de plan euclidien

– Pour tous $\begin{cases} u = x + iy \\ v = x' + iy' \end{cases}$ de $\mathbb{C}$, on pose $(u \mid v) = xx' + yy' = \mathrm{Re}\,(\overline{u}\,v) = \frac{1}{2}(u\overline{v} + v\overline{u})$.
  On définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{C}$ pour lequel la base $1, i$ est orthonormale.
  La norme associée à ce produit scalaire est l'application "module" : $z \mapsto |z|$.
  La distance euclidienne associée est donc définie par : $d(u, v) = |v - u|$.
  Deux éléments u, v de $\mathbb{C}$ sont orthogonaux$\Leftrightarrow$ $u\overline{v}$ est imaginaire$\Leftrightarrow$ $u\overline{v} + v\overline{u} = 0$.
  Les bases orthonormées sont les bases (u, v), avec $|u| = 1$ et $v = \pm iu$.

– Voici la représentation $z \mapsto Z = f(z)$ de quelques applications simples :
  - ◇ La projection orthogonale sur la droite Ox est donnée par $z \mapsto Z = \mathrm{Re}\,(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$.
  - ◇ La projection orthogonale sur Oy est donnée par $z \mapsto Z = \mathrm{Im}\,(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
  - ◇ La symétrie orthogonale par rapport à Ox est donnée par $z \mapsto Z = \overline{z}$.
  - ◇ La symétrie orthogonale par rapport à Oy est donnée par $z \mapsto Z = -\overline{z}$.

Structure de plan euclidien orienté

– On oriente $\mathbb{C}$ en décidant que la base orthonormée $1, i$ est directe.
  Les bases orthonormées directes sont alors les bases (u, v), avec $|u| = 1$ et $v = iu$.

– Soient $u = x + iy$ et $v = x' + iy'$ deux éléments de $\mathbb{C}$.
  Leur produit mixte est : $[u, v] = xy' - yx' = \mathrm{Im}\,(\overline{u}\,v)$. Rappelons que $(u \mid v) = \mathrm{Re}\,(\overline{u}\,v)$.

– On vérifie que l'aire du triangle de sommets a, b, c est $\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\,(a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a})\right|$.
  Ce résultat concorde avec le fait que a, b, c sont alignés$\Leftrightarrow$ $a\overline{b} + b\overline{c} + c\overline{a}$ est réel.

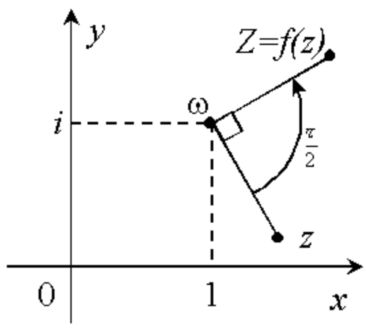
Rotations affines et déplacements dans $\mathbb{C}$

– La rotation vectorielle d'angle θ $[2\pi]$ est définie par : $z \mapsto Z = \mathrm{e}^{i\theta}\,z$.
  La rotation affine de centre ω et d'angle θ $[2\pi]$ est définie par : $z \mapsto Z = \omega + \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$.
  Soient u, v deux éléments non nuls dans $\mathbb{C}$. On a $\widehat{(u, v)} = \arg v - \arg u \ \ [2\pi]$.

– Réciproquement, soit f l'å définie par $z \mapsto f(z) = az + b$, où $|a| = 1$.
  ◇ Si $a = 1$, l'application f est la translation de vecteur b.
  ◇ Si $a \neq 1$, il y a un point fixe unique ω défini par $\omega = a\omega + b$ donc $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.
  On a alors $Z = az + b \Leftrightarrow Z - \omega = a(z - \omega)$.
  En posant $a = \mathrm{e}^{i\theta}$, avec $\theta \neq 0$ $[2\pi]$, on trouve la rotation de centre ω d'angle θ $[2\pi]$.

– Conclusion :
  Les déplacements de $\mathbb{C}$ sont les applications $f : z \mapsto Z = az + b$, avec $|a| = 1$.
  On obtient les translations si $a = 1$ et les rotations distinctes de Id si $a \neq 1$.

– Exemple :
  Considérons l'application $z \mapsto f(z) = iz + 2$.
  C'est un déplacement de $\mathbb{C}$.
  On a $\omega = i\omega + 2 \Leftrightarrow \omega = 1 + i$.
  L'application f est donc la rotation
  de centre ω et d'angle $\arg\omega = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.



Réflexions et projections orthogonales

Soit D la droite vectorielle d'angle polaire θ (π).

◇ La réflexion par rapport à D est donnée par $z \mapsto Z = \mathrm{e}^{2i\theta}\,\overline{z}$.

◇ La projection orthogonale sur D est donnée par $z \mapsto Z = \frac{1}{2}(z + \mathrm{e}^{2i\theta}\,\overline{z})$.

Soit $\mathcal{D}$ la droite affine passant par a, d'angle polaire θ (π).

◇ La réflexion s par rapport à $\mathcal{D}$ s'écrit $z \mapsto Z = a + \mathrm{e}^{2i\theta}\,\overline{z - a} = \mathrm{e}^{2i\theta}\,\overline{z} + a - \mathrm{e}^{2i\theta}\,\overline{a}$.

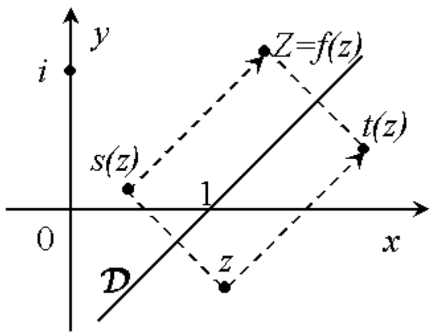
◇ La projection orthogonale r sur $\mathcal{D}$ est : $z \mapsto Z = \frac{1}{2}(z + \mathrm{e}^{2i\theta}\,\overline{z}) + \frac{1}{2}(a - \mathrm{e}^{2i\theta}\,\overline{a})$.
  Pour trouver s, r, il suffit de compléter les formules obtenues dans le cas vectoriel : on ajoute une constante ω déterminée par le fait que le point a est invariant.

Classification des antidéplacements de $\mathbb{C}$

– Réciproquement, soit f l'å définie par $z \mapsto f(z) = a\overline{z} + b$, avec $|a| = 1$.
  L'application f est la composée de la réflexion $z \mapsto \overline{z}$ et du déplacement $z \mapsto az + b$.
  Ainsi l'application f est un antidéplacement.
  Posons $a = \mathrm{e}^{i\theta}$.
  L'application $\widetilde{f} : z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta}\,\overline{z}$ est la réflexion par rapport à la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$.
  - ◇ L'application $f \circ f$ est définie par $f \circ f(z) = a\overline{(a\overline{z} + b)} + b = z + a\overline{b} + b$.
    Donc $f \circ f$ est une réflexion si et seulement si $a\overline{b} + b = 0$.
  - ◇ f est la composée de la réflexion par rapport à une droite $\mathcal{D}$ d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$ et d'une translation de vecteur u parallèle à $\mathcal{D}$.
    Le point $\frac{b}{2}$ est un point de $\mathcal{D}$ ce qui achève de déterminer cette droite.
    On trouve le vecteur de translation en écrivant $u = \frac{1}{2}(f \circ f(z) - z) = \frac{1}{2}(a\overline{b} + b)$.

– Conclusion :
  Les antidéplacements de $\mathbb{C}$ sont les applications $f : z \mapsto Z = a\overline{z} + b$, avec $|a| = 1$.
  On obtient les réflexions quand $a\overline{b} + b = 0$ (c'est-à-dire quand $f \circ f(0) = 0$.)

– Exemple :
  Considérons l'application $z \mapsto f(z) = i\overline{z} + 2$.
  C'est un antidéplacement de $\mathbb{C}$.
  On a $f \circ f(0) = f(2) = 2(1 + i)$.
  f est donc la composée de la translation t de vecteur $1 + i$ et de la réflexion s par rapport à la droite $\mathcal{D}$ passant par 1 et dirigée par $1 + i$.



VI.2 Similitudes du plan

Définition *(Similitudes vectorielles)*

Soit f un endomorphisme de l'espace euclidien E.
Soit k un réel strictement positif.
On dit que f est une *similitude vectorielle de rapport* k si $\forall\, u \in E,\ \|f(u)\| = k\ \|u\|$.

Définition *(Similitudes)*

Soit $f : E \to E$ une å de E euclidien, d'application linéaire associée $\widetilde{f}$.
Soit k un réel strictement positif.
On dit que f est une *similitude de rapport* k si $\widetilde{f}$ est une similitude vectorielle de rapport k.
Cela équivaut à : $\forall\,(M, N) \in E^2,\ d(f(M), f(N)) = k\, d(M, N)$.
Autrement dit, f multiplie les distances par le facteur constant k.

Remarques

- Une similitude vectorielle est un automorphisme de E, car $f(u) = \overrightarrow{0} \Rightarrow u = \overrightarrow{0}$.
- Les isométries sont les similitudes de rapport 1.
  Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.
- L'inverse d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.
  La composée de deux similitudes de rapport k, k' est une similitude de rapport k, k'.
  Les similitudes forment donc un sous-groupe du groupe affine de E.

Proposition

Soit $f : E \to E$ une similitude de rapport $k > 0$.
Alors f est la composée d'une homothétie h de rapport k et d'une isométrie g.

◇ Si g est un déplacement, on dit que f est une *similitude directe*.

◇ Si g est un antidéplacement, on dit que f est une *similitude indirecte*.

Remarques

- La décomposition de f évoquée ci-dessus n'est pas unique.
  Plus précisément, si h est une homothétie quelconque de rapport $k > 0$, alors il existe une isométrie unique g et une isométrie unique g' telles que $f = h \circ g = g' \circ h$.
  Avec ces notations, et si $\dim E = n$, on a $\det(\widetilde{f}) = k^n \det g = k^n \det g'$, ce qui prouve que g et g' sont des isométries de même "genre".
- On aurait pu adopter la définition équivalente suivante :
  Une similitude f est dite directe (resp. indirecte) si $\det(\widetilde{f}) > 0$ (resp. $\det(\widetilde{f}) < 0$.)
  Si E est orienté, les similitudes directes sont celles qui *conservent* l'orientation, et les similitudes indirectes sont celles qui inversent l'orientation.

Dans la suite de ce paragraphe, on ne considère que des similitudes d'un plan euclidien.

Proposition *(Similitudes et mesures d'angles dans le plan)*

Soit f une similitude vectorielle d'un plan euclidien orienté E.
Soient u, v deux vecteurs non nuls de E.

◇ Si f est directe, alors $(\widehat{f(u), f(v)}) = (\widehat{u, v})\ [2\pi]$

◇ Si f est indirecte, alors $(\widehat{f(u), f(v)}) = -(\widehat{u, v})\ [2\pi]$

Si f est une similitude (affine) et si A, B, C sont trois poins distincts, alors :

◇ Si f est directe, alors $(\widehat{\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})\ [2\pi]$

◇ Si f est indirecte, alors $(\widehat{\overrightarrow{f(A)f(B)}, \overrightarrow{f(A)f(C)}}) = -(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})\ [2\pi]$

Ainsi les similitudes directes conservent les mesures d'angles, et les similitudes indirectes les changent en leur opposé.

Proposition *(Repésentation analytique dans un repère orthonormé du plan)*

Soit E soit un plan euclidien, muni d'un repère orthonormal.

◇ Les similitudes directes sont sont représentées par les systèmes $\begin{cases} x' = ax - by + x_0 \\ y' = bx + ay + y_0 \end{cases}$

◇ Les systèmes $\begin{cases} x' = ax + by + x_0 \\ y' = bx - ay + y_0 \end{cases}$ caractérisent les similitudes indirectes.

◇ Dans ces deux cas on suppose $(a, b) \neq (0, 0)$ (sinon l'application est constante.)
Le rapport de la similitude est alors $k = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposition *(Similitudes du plan complexe)*

L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni de sa structure canonique de plan vectoriel euclidien orienté.
Soit f une application de $\mathbb{C}$ dans lui-même.

◇ f est une similitude directe$\Leftrightarrow \exists\,(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C},\ \forall\, z \in \mathbb{C},\ f(z) = az + b$.

◇ f est une similitude indirecte$\Leftrightarrow \exists\,(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C},\ \forall\, z \in \mathbb{C},\ f(z) = a\overline{z} + b$.

Dans les deux cas précédents, le rapport de la similitude est $k = |a|$.

Proposition *(Classification des similitudes directes du plan)*

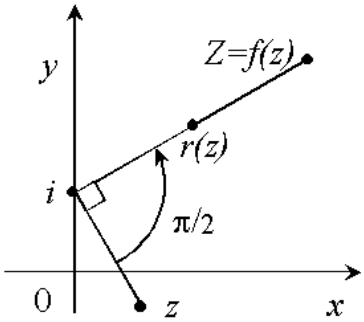
Soit E un plan euclidien orienté.
Soit f une similitude directe de E, de rapport $k > 0$.

◇ Si $k = 1$, alors f est un déplacement (une translation t ou une rotation $r \neq \mathrm{Id}$).

◇ Si $k \neq 1$, l'application f possède un point fixe unique Ω.
Alors $f = h \circ r = r \circ h$, où $\begin{cases} h \text{ est l'homothétie de centre } \Omega \text{ et de rapport } k \\ r \text{ est une rotation de centre } \Omega\text{, d'angle } \theta\ [2\pi] \end{cases}$
On dit alors que f est la similitude directe de rapport k, de centre Ω, et d'angle θ $[2\pi]$.

Exemple :

Considérons l'application $z \mapsto f(z) = 2iz + 2 + i$.
C'est une similitude directe de $\mathbb{C}$.
On a $\omega = f(\omega) \Leftrightarrow \omega = i$.
L'application f est la composée de la rotation r de centre i et d'angle $\arg(2i) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$ et de l'homothétie h de centre i et de rapport $|2i| = 2$.



Proposition *(Similitude directe définie par l'image d'un segment)*

Dans le plan euclidien E, soient $[A, B]$ et $[A', B']$ deux segments non réduits à un point.
Il existe une unique similitude directe f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.
L'image du segment $[A, B]$ est alors égale au segment $[A', B']$.
L'angle de la similitude f est $(\widehat{\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}})$ $[2\pi]$ et son rapport est égal à $\dfrac{d(A', B')}{d(A, B)}$.

Proposition *(Classification des similitudes indirectes du plan)*

Soit E un plan euclidien orienté.

Soit f une similitude indirecte de E, de rapport $k > 0$.

- ◇ Si $k = 1$, alors f est un antidéplacement (une réflexion d'axe $\mathcal{D}$, ou la composée d'une telle réflexion par une translation de vecteur parallèle à $\mathcal{D}$.)
- ◇ Si $k \neq 1$, l'application f possède un point fixe unique Ω.

  Alors $f = h \circ s = s \circ h$, où $\begin{cases} h \text{ est l'homothétie de centre } \Omega \text{ et de rapport } k \\ s \text{ est la réflexion par rapport à une droite passant par } \Omega \end{cases}$

Exemple :

Considérons $z \mapsto f(z) = 2i\overline{z} + 2 - i$.
On a $\omega = f(\omega) \Leftrightarrow \omega = -i$.
f est la composée de la réflexion s par rapport à la droite $\mathcal{D}$ passant par $-i$ et d'angle polaire $\frac{1}{2}\arg(2i) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$
et de l'homothétie h de centre $-i$
et de rapport $|2i| = 2$.