Table des matières

I Généralités sur les fonctions numériques

1. Opérations sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Dans l'étude des fonctions numériques, on rencontre des applications f à valeurs réelles, définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ appelée *domaine de définition* de f.

L'ensemble $\mathcal{D}$ consiste le plus souvent en une réunion d'intervalles d'intérieur non vide.

Par exemple, le domaine de définition de l'application *tangente* est la réunion des intervalles $I_k =]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, pour tout entier relatif k.

L'étude d'une fonction f (continuité, monotonie, extrémums, etc.) doit cependant s'effectuer *intervalle par intervalle*. C'est pourquoi, dans ce chapitre, on se limitera à des applications à valeurs réelles, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, ou $\mathbb{R}^I$, l'ensemble des applications $f : I \to \mathbb{R}$.

On rappelle que si f et g appartiennent à $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$: $f = g \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) = g(x)$.

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On définit les applications $f+g$ et fg par :

$$\begin{cases} \forall x \in I, (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ \forall x \in I, (fg)(x) = f(x)g(x) \end{cases}$$

Muni de ces deux opérations $+$ et $\times$, $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ a une structure d'anneau commutatif :
- Le neutre additif est l'application constante $x \to 0$.
- L'opposée d'une application f est l'application $-f$ définie par : $\forall x \in I, (-f)(x) = -f(x)$.
- Le neutre multiplicatif est l'application constante $x \mapsto 1$.
- Une application f est inversible pour le produit $\Leftrightarrow$ elle ne prend pas la valeur 0.
  Son inverse pour $\times$ est alors $\dfrac{1}{f}$, définie par : $\forall x \in I, \dfrac{1}{f}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

Soit α un réel. On note encore α l'application constante $x \mapsto \alpha$.

La notation αf désigne l'application définie par : $\forall x \in I, (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.

(c'est le produit de f par l'application constante α).

2. Relation d'ordre sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Définition

> Pour tous f et g de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, on pose $f \leqslant g \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) \leqslant g(x)$.
> On définit ainsi une relation d'ordre *partiel* sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
> On note comme d'habitude $f \geqslant g \Leftrightarrow g \leqslant f$.

Définition

> Soient f et g dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
> On définit les applications $\inf(f, g)$ et $\sup(f, g)$ de la manière suivante :
> $\begin{cases} \forall x \in I, \inf(f,g)(x) = \min(f(x), g(x)) \\ \forall x \in I, \sup(f,g)(x) = \max(f(x), g(x)) \end{cases}$

Remarques et propriétés

f, g et h désignent ici trois applications quelconques de I dans $\mathbb{R}$.

– $\inf(f,g) = f \Leftrightarrow f \leqslant g \Leftrightarrow \sup(f,g) = g$.

– $\begin{cases} \inf(f+h, g+h) = \inf(f,g) + h \\ \sup(f+h, g+h) = \sup(f,g) + h \end{cases}$

– Si $\alpha > 0$ $\begin{cases} \inf(\alpha f, \alpha g) = \alpha \inf(f,g) \\ \sup(\alpha f, \alpha g) = \alpha \sup(f,g) \end{cases}$ et si $\alpha < 0$ $\begin{cases} \inf(\alpha f, \alpha g) = \alpha \sup(f,g) \\ \sup(\alpha f, \alpha g) = \alpha \inf(f,g) \end{cases}$

En particulier $\begin{cases} \inf(-f, -g) = -\sup(f,g) \\ \sup(-f, -g) = -\inf(f,g) \end{cases}$

– $\begin{cases} \inf(f,g) \leqslant f \leqslant \sup(f,g) \\ \inf(f,g) \leqslant g \leqslant \sup(f,g) \end{cases}$ $\begin{cases} (h \leqslant f \text{ et } h \leqslant g) \Leftrightarrow h \leqslant \inf(f,g) \\ (h \geqslant f \text{ et } h \geqslant g) \Leftrightarrow h \geqslant \sup(f,g) \end{cases}$

Autrement dit, dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ muni de la relation d'ordre $\leqslant$:

$\begin{cases} \inf(f,g) \text{ est le plus grand des minorants (la } \textit{borne inférieure}\text{) de la paire } \{f,g\}. \\ \sup(f,g) \text{ est le plus petit des majorants (la } \textit{borne supérieure}\text{) de la paire } \{f,g\}. \end{cases}$

– Les opérations inf et sup sont des lois de composition associatives sur $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
On peut donc généraliser et définir les applications $\inf(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ et $\sup(f_1, f_2, \ldots, f_n)$.

Définition *(Notations f^+, f^-, $|f|$)*

> Soit f un élément de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
> On définit les applications $|f|$, f^+ et f^- de la façon suivante :
>
> – $\forall\, x \in I, |f|(x) = |f(x)|$.
>
> – $\forall\, x \in I, f^+(x) = \max(f(x), 0) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$
>
> – $\forall\, x \in I, f^-(x) = \max(-f(x), 0) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}$

Remarques et propriétés

– Une définition équivalente de f^+ et de f^- est : $\begin{cases} f^+ = \sup(f, 0) \\ f^- = \sup(-f, 0) \end{cases}$

– Les applications f^+ et f^- sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

– On vérifie les égalités : $\begin{cases} f = f^+ - f^- \\ |f| = f^+ + f^- \end{cases}$ et on en en déduit $\begin{cases} f^+ = \dfrac{1}{2}(|f| + f) \\ f^- = \dfrac{1}{2}(|f| - f) \end{cases}$

– Plus généralement : $\forall\,(f,g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $\begin{cases} \sup(f,g) = \dfrac{1}{2}(f + g + |f-g|) \\ \inf(f,g) = \dfrac{1}{2}(f + g - |f-g|) \end{cases}$

3. Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
On dit que f est *majorée* s'il existe un réel β tel que : $\forall\, x \in I,\ f(x) \leqslant \beta$.
Cela revient à dire que $f(I) = \{f(x), x \in I\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$.
On note alors $\sup_I f$, ou $\sup_{x\in I} f(x)$ la borne supérieure de l'ensemble image $f(I)$.
On dit que cette quantité est la borne supérieure de f sur l'intervalle I.

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
On dit que f est *minorée* s'il existe un réel α tel que : $\forall\, x \in I, f(x) \geqslant \alpha$.
Cela revient à dire que $f(I) = \{f(x), x \in I\}$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$.
On note alors $\inf_I f$, ou $\inf_{x\in I} f(x)$ la borne inférieure de l'ensemble $f(I)$.
On dit que cette quantité est la borne inférieure de f sur l'intervalle I.

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. On dit que f est *bornée* si f est majorée et minorée.
f est donc bornée s'il existe deux réels α et β tels que : $\forall\, x \in I, \alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$.

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. Soit J un sous-intervalle de I, d'intérieur non vide.
On dit que f est majorée (resp. minorée, resp. bornée) sur J si la restriction de f à J est majorée (resp. minorée, resp. bornée).
On a alors les inégalités : $\begin{cases} \inf\limits_{x\in I} f(x) \leqslant \inf\limits_{x\in J\subset I} f(x) \\ \sup\limits_{x\in I} f(x) \geqslant \sup\limits_{x\in J\subset I} f(x) \end{cases}$

Remarques

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

- f est bornée $\Leftrightarrow |f|$ est majorée.
- Si f et g sont majorées, alors $f+g$ est majorée et $\sup\limits_I(f+g) \leqslant \sup\limits_I f + \sup\limits_I g$.
  Si f et g sont minorées, alors $f+g$ est minorée et $\inf\limits_I(f+g) \geqslant \inf\limits_I f + \inf\limits_I g$.
- f majorée (resp. minorée) $\Leftrightarrow -f$ minorée (resp. majorée).
  On a alors : $\inf\limits_I(-f) = -\sup\limits_I f$, et $\sup\limits_I(-f) = -\inf\limits_I f$.
- Soit α un réel strictement positif.
  Si f est majorée alors αf est majorée et $\sup\limits_I(\alpha f) = \alpha \sup\limits_I f$.
  De même, si f est minorée alors αf est minorée et $\inf\limits_I(\alpha f) = \alpha \inf\limits_I f$.
- Si f et g sont bornées, alors : $\forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ est bornée.

4. Extremums absolus (ou globaux)

Définition

Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
On dit que f présente un *maximum absolu* (ou *global*) en a si : $\forall x \in I, f(x) \leqslant f(a)$.
On dit que f présente un *minimum absolu* (ou *global*) en a de I si : $\forall x \in I, f(x) \geqslant f(a)$.
Dans l'un ou l'autre cas, on dit que f présente un *extrémum absolu* en a.

Remarques

– f présente un maximum absolu en $a \Leftrightarrow f$ est majorée sur I et $f(a) = \sup\limits_I f$.
 On exprime cela en disant que la borne inférieure de f sur I est *atteinte* en a.
 On peut alors noter $f(a) = \max\limits_I f$ plutôt que $f(a) = \sup\limits_I f$.

– De même, f a un minimum absolu en $a \Leftrightarrow f$ est minorée sur I et $f(a) = \inf\limits_I f$.
 On dit alors que f atteint sa borne inférieure en a et on note $f(a) = \min\limits_I f$.

Définition *(Maximum local)*

Soit f appartenant à $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I.
On dit que f présente un *maximum local* en a si :
$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in I \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon], f(x) \leqslant f(a)$.
($\Leftrightarrow$ au voisinage de a, f prend des valeurs toutes inférieures ou égales à $f(a)$)

Définition *(Minimum local)*

Soit f appartenant à $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I.
De même on dit que f présente un *minimum local* en a si :
$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in I \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon], f(x) \geqslant f(a)$.

Remarques

– Un minimum ou un maximum local est aussi appelé un *extrémum local*.

– Un extrémum global (absolu) est bien sûr un extrémum local. La réciproque est fausse.

5. Applications monotones

Définition

Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs réelles. On dit que f est :

– *croissante* si : $\forall (x, y) \in I^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
 décroissante si : $\forall (x, y) \in I^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.

– *strictement croissante* si : $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
 strictement décroissante si : $\forall (x, y) \in I^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

– *monotone* si f est croissante ou décroissante.
 strictement monotone si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarques

– Seules les applications constantes sont à la fois croissantes et décroissantes.

– Pour exprimer qu'une application f n'est pas monotone, on peut écrire :
$\exists\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tq : $z\in[x,y]$ mais $f(z)\notin[f(x),f(y)]$.

– Soit f une application monotone. Dire que f n'est pas strictement monotone signifie qu'il existe un segment $[a,b]$ inclus dans I (avec $a<b$) sur lequel f garde une valeur constante.

Proposition *(Sommes d'applications monotones)*

Soient f et g deux applications monotones de I dans $\mathbb{R}$.
Si f et g ont même monotonie, alors $f+g$ est monotone de même monotonie.
Si de plus f ou g est strictement monotone, alors $f+g$ est strictement monotone.

Proposition *(Produits d'applications monotones)*

Soient f et g deux applications monotones de I dans $\mathbb{R}$.

– Si f et g sont positives croissantes, fg est positive croissante.
Si f et g sont positives décroissantes, fg est positive décroissante.

– Si f et g sont négatives croissantes, fg est positive décroissante.
Si f et g sont négatives décroissantes, fg est positive croissante.

– Si f est positive croissante et g négative décroissante, fg est négative décroissante.
Si f est positive décroissante et g négative croissante, fg est négative croissante.

Remarques

– Dans les cas autres que ceux énumérés ci-dessus, on ne peut rien dire.

– Soit f une application monotone de I dans $\mathbb{R}$.
Si $\alpha\geqslant 0$, αf et f ont la même monotonie.
Si $\alpha\leqslant 0$, αf et f sont de monotonies contraires. C'est le cas en particulier pour $-f$ et f.

Proposition *(Inverse d'une application monotone)*

Soit f une application monotone de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f ne s'annule pas sur I, et qu'elle garde un signe constant.
Alors $\dfrac{1}{f}$ est monotone sur I, de monotonie contraire à celle de f.

Proposition *(Compositions d'applications monotones)*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.
Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$, telle que $f(I)$ soit inclus dans J.
Soit g une application de J dans $\mathbb{R}$. L'application $g\circ f$ est donc définie sur I.

– Si f et g ont la même monotonie, alors $g\circ f$ est croissante.

– Si f et g sont de monotonies contraires, alors $g\circ f$ est décroissante.

Les deux propriétés précédentes restent vraies pour des monotonies strictes.

6. Applications paires ou impaires

On considère ici des applications définies sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

On suppose que l'ensemble $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 ($x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow -x \in \mathcal{D}$).

Le cas le plus courant est celui d'un intervalle de centre 0, et notamment $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Définition

On dit que f est *paire* si : $\forall\, x \in \mathcal{D}, f(-x) = f(x)$.
On dit que f est *impaire* si : $\forall\, x \in \mathcal{D}, f(-x) = -f(x)$.

Proposition *(Parties paire et impaire d'une application)*

Soit f une application de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$.
f s'écrit de manière unique $f = p + i$, où p est paire et i est impaire.
p et i sont définies par : $\forall\, x \in \mathcal{D}$, $p(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ et $i(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$
On dit que p est la *partie paire* de f et que i en est la *partie impaire*.

Remarques

La seule application à la fois paire et impaire est l'application nulle.
Soient les applications ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ et $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$.
ch et sh sont respectivement la partie paire et la partie impaire de $x \mapsto e^x$.

Proposition *(Opérations entre applications paires ou impaires*

Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, paires ou impaires.
- Si f, g ont même parité, fg est paire. Si elles sont de parités contraires, fg est impaire.
- L'application $\dfrac{1}{f}$ est de même parité que f.
- Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$: Si f, g sont paires (resp. impaires), $\alpha f + \beta g$ est paire (resp. impaire).
- Si f est bijective de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}$ et impaire, alors sa bijection réciproque f^{-1} est impaire.
- Si f est paire, alors $h \circ f$ est paire (quelque soit l'application h).
  Si f est impaire, et si g est paire ou impaire, alors $g \circ f$ a la même parité que g.

7. Applications périodiques

Définition

Soient $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Soit T un réel strictement positif.
L'application f est dite *T-périodique* si : $\forall\, x \in \mathcal{D}, x + T \in \mathcal{D}$ et $f(x + T) = f(x)$

Propriétés

Si f est T-périodique, alors pour tout n de $\mathbb{N}$, f est nT-périodique.
Si f et g sont T-périodiques, alors $\alpha f + \beta g$ et fg sont T-périodiques.
Si f est périodique, alors $\dfrac{1}{f}$ est T-périodique.
Si f est T-périodique, alors pour toute application g, $g \circ f$ est T-périodique.

Remarques

– Si f est périodique, il vaut mieux utiliser sa plus petite période positive (si elle existe).
  Cette plus petite période n'existe pas toujours.
  Par exemple, la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ admet tout rationnel comme période.

– Soit f une application T_1-périodique, et g une application T_2-périodique.
  On suppose que le rapport $\dfrac{T_1}{T_2}$ est rationnel. Alors $f+g$ et fg sont encore périodiques.
  Par exemple : si $T_1 = \dfrac{3\pi}{4}$ et $T_2 = \dfrac{\pi}{2}$, alors $f+g$ et fg sont $\dfrac{3\pi}{2}$-périodiques.

– Si f est T-périodique, alors l'application $g : x \mapsto f(\alpha x + \beta)$ est $\dfrac{T}{|\alpha|}$-périodique.

8. Axes et centres de symétrie

Proposition *(Parité, imparité et symétrie)*

Soit f une application f à valeurs réelles, définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.
La courbe représentative Γ de f (on dit aussi le *graphe* de f) est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ dans le plan affine $\mathcal{P}$ (muni d'un repère O, i, j), x décrivant le domaine de f.
– L'application f est paire $\Leftrightarrow$ son graphe Γ est symétrique par rapport à l'axe Oy.
– De même, f est impaire $\Leftrightarrow$ son graphe Γ est symétrique par rapport à l'origine O.

Proposition *(Axes de symétrie)*

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, le domaine $\mathcal{D}$ étant symétrique par rapport au réel a.
La droite $x = a$ est axe de symétrie du graphe Γ de f
$\Leftrightarrow$ Pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(2a - x) = f(x)$.
$\Leftrightarrow$ Pour tout h tel que $a \pm h$ appartienne à $\mathcal{D}$, $f(a+h) = f(a-h)$.
$\Leftrightarrow$ L'application g définie par $g(x) = f(a+x)$ est paire.

Proposition *(Centres de symétrie)*

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, le domaine $\mathcal{D}$ étant symétrique par rapport au réel a.
Le point $\Omega(a, b)$ est centre de symétrie du graphe Γ de f
$\Leftrightarrow$ Pour tout x de $\mathcal{D}$, $f(2a - x) = 2b - f(x)$.
$\Leftrightarrow$ Pour tout h tel que $a \pm h$ appartienne à $\mathcal{D}$, $f(a+h) - b = b - f(a-h)$.
$\Leftrightarrow$ L'application g définie par $g(x) = f(a+x) - b$ est impaire.

Proposition *(Périodicité)*

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, le domaine $\mathcal{D}$ étant tel que : $x \in \mathcal{D} \Leftrightarrow x + T \in \mathcal{D}$ ($T > 0$ donné).
L'application f est T-périodique
$\Leftrightarrow$ son graphe Γ est invariant dans toute translation de vecteur $kT(1,0)$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Proposition *(Graphe de la bijection réciproque)*

Soit f une application bijective de $\mathcal{D}$ sur $f(\mathcal{D})$.
Les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à $y = x$.

II Limites des fonctions numériques

1. Propriétés vraies "au voisinage d'un point"

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide.
Soit a un élément de I ou une extrémité de I (éventuellement $a = \pm\infty$).
Soit $\mathcal{P}$ un prédicat (une propriété) de la variable réelle x, défini sur I.
$\mathcal{P}(x)$ désigne donc une proposition, vraie ou fausse selon les valeurs de x dans I.
On dit que $\mathcal{P}$ est vraie *au voisinage de a* si l'une des situations suivantes est réalisée :

– a est réel et $\exists\,\delta > 0$ tel que : $\forall\,x \in I \cap]a-\delta, a+\delta[$, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.
– $a = +\infty$ et $\exists\,M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\,x > M, \mathcal{P}(x)$ est vraie.
– $a = -\infty$ et $\exists\,M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall\,x < M, \mathcal{P}(x)$ est vraie.

Remarques

Dans le premier cas, la clause $x \in I$ n'est utile que si a est une extrémité de I.
En effet si a est intérieur à I, alors pour tout δ *assez petit*, $]a-\delta, a+\delta[\subset I$.
Si f et g sont des applications définies sur I, on pourra par exemple écrire des propositions du genre : *si $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, alors ...*

2. Limite en un point

Définition *(Limite en un point de $\mathbb{R}$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soit a un réel, élément ou extrémité de I.
Soit ℓ un réel. On dit que ℓ est limite de f en a si :
$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0$ tq $(x \in I$ et $|x-a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
On dit que $+\infty$ est limite de f en a si :
$\forall\,M \in \mathbb{R}, \exists\,\delta > 0$ tel que $(x \in I$ et $|x-a| \leqslant \delta) \Rightarrow f(x) \geqslant M$.
On dit que $-\infty$ est limite de f en a si :
$\forall\,M \in \mathbb{R}, \exists\,\delta > 0$ tel que $(x \in I$ et $|x-a| \leqslant \delta) \Rightarrow f(x) \leqslant M$.

Remarques

Dans les trois cas, la clause $x \in I$ n'est pas nécessaire si a est intérieur à I.
Si $a \in I$ et donc si f est définie en a, la seule limite *possible* de f en a est le réel $f(a)$.

Définition *(Limite en $+\infty$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que $I =]\alpha, +\infty[$, ou $I = [\alpha, +\infty[$, ou $I = \mathbb{R}$.
Soit ℓ un réel. On dit que ℓ est limite de f en $+\infty$ si :
$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.
On dit que $+\infty$ est limite de f en $+\infty$ si :
$\forall\,M \in \mathbb{R}, \exists\,A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M$.
On dit que $-\infty$ est limite de f en $+\infty$ si :
$\forall\,M \in \mathbb{R}, \exists\,A \in \mathbb{R}$ tel que $x \geqslant A \Rightarrow f(x) \leqslant M$.

Définition *(Limite en $-\infty$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que $I =]-\infty, \alpha[$, ou $I =]-\infty, \alpha]$, ou $I = \mathbb{R}$.

Soit ℓ un réel. On dit que ℓ est limite de f en $-\infty$ si :

$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$.

On dit que $+\infty$ est limite de f en $-\infty$ si :

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant A \Rightarrow f(x) \geqslant M$.

On dit que $-\infty$ est limite de f en $-\infty$ si :

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}$ tel que $x \leqslant A \Rightarrow f(x) \leqslant M$.

Proposition *(Unicité de la limite)*

Les définitions précédentes permettent de donner un sens à la phrase ℓ *est limite de* f *en* a, où ℓ et a sont des éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (droite numérique achevée), à condition que a soit élément de l'intervalle I ou qu'il en soit une extrémité.

Si un tel élément ℓ existe, alors il est unique.

On l'appelle *la* limite de f en a, et on dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a.

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a} f = \ell$ ou $\begin{array}{c} f(x) \to \ell \\ x \to a \end{array}$

Remarque

Il se peut qu'une application ne possède pas de limite en un point. Par exemple

- ◇ L'application $x \mapsto \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$.
- ◇ L'application $x \mapsto \mathrm{E}[x]$ n'a pas de limite en 0.

Importance des limites nulles ou des limites en 0

Si ℓ est un réel, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} (f(x) - \ell) = 0$.

Si a est un réel, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} f(a + h) = \ell$.

Proposition *(Caractérisation séquentielle des limites)*

Soit f une application définie sur l'intervalle I, à valeurs réelles.

Soit a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ (élément de I ou extrémité de I). Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow$ pour toute suite (u_n) de I tendant vers a, $\lim\limits_{n \to \infty} f(u_n) = \ell$.

Définition *(Limite par valeurs supérieures ou inférieures)*

On suppose que la limite de f en a (élément de $\overline{\mathbb{R}}$) est le réel ℓ.

Quand x tend vers a, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ par valeurs supérieures (resp. inférieures) si, au voisinage de a, $f(x) \geqslant \ell$ (resp. $f(x) \leqslant \ell$).

On peut alors éventuellement noter : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell^+$ (resp. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell^-$).

3. Limite à gauche ou à droite

Définition *(Limite à gauche)*

On suppose que a est réel et est intérieur à l'intervalle I. Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap]-\infty, a[$.

Le réel a est donc l'extrémité droite de J, et n'appartient pas à J.

On dit que f admet ℓ pour limite en a à gauche si g admet ℓ pour limite en a.

On note alors $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a^-} f = \ell$, ou $\begin{array}{c} f(x) \to \ell \\ x \to a^- \end{array}$

Définitions équivalentes

Soit ℓ un nombre réel.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell & \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (a - \delta \leqslant x < a) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a - \delta \leqslant x < a) \Rightarrow f(x) \geqslant M \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a - \delta \leqslant x < a) \Rightarrow f(x) \leqslant M \end{cases}$$

Définition *(Limite à droite)*

On suppose que a est réel et est intérieur à l'intervalle I. Soit ℓ un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap]a, +\infty[$.

Le réel a est donc l'extrémité gauche de J, et n'appartient pas à J.

On dit que f admet ℓ pour limite en a à droite si g admet ℓ pour limite en a.

On note alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$, ou $\lim\limits_{a^+} f = \ell$, ou $\begin{array}{c} f(x) \to \ell \\ x \to a^+ \end{array}$

Définitions équivalentes

Soit ℓ un nombre réel.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell & \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (a < x \leqslant a + \delta) \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a < x \leqslant a + \delta) \Rightarrow f(x) \geqslant M \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty & \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, (a < x \leqslant a + \delta) \Rightarrow f(x) \leqslant M \end{cases}$$

Remarque

La limite de f en a, à gauche ou à droite, si elle existe, est unique. De même, la plupart des propriétés vraies pour les limites le sont encore s'il s'agit de limites à gauche ou à droite.

4. Opérations sur les limites

Proposition

On suppose que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).

Alors $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = \ell + \ell'$ (si $\ell + \ell'$ n'est pas une forme indéterminée $\infty - \infty$.)

De même, $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = \ell\ell'$(si $\ell\ell'$ n'est pas une forme indéterminée $0 \times \infty$.)

Cas particulier

Si λ est un réel non nul, alors $\lim_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda \ell$.

Proposition *(Limite de l'inverse d'une fonction)*

On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$.

Si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$.

Si $\ell = \pm\infty$, alors $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Si $\ell = 0$ et si, au voisinage de a, $f(x) > 0$, alors $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

Si $\ell = 0$ et si, au voisinage de a, $f(x) < 0$, alors $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Proposition *(Composition des limites)*

On suppose que l'application $g \circ f$ est définie au voisinage de a.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim_{x \to b} g(x) = \ell$, alors $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \ell$.

5. Limites et relation d'ordre

Proposition *(Limite et valeur absolue)*

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, alors $\lim_{x \to a} |f|(x) = |\ell|$.

La réciproque est fausse, mais : $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} |f|(x) = 0$.

Proposition *(Conséquences de l'existence d'une limite finie)*

Si f admet une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a (réciproque fausse).

Si f admet en a une limite réelle non nulle ℓ , alors au voisinage de a : $|f(x)| \geqslant \dfrac{|\ell|}{2}$.

Plus précisément : $\begin{cases} \text{Si } \ell > 0, \text{ alors au voisinage de } a,\ f(x) > \dfrac{\ell}{2} > 0. \\ \text{Si } \ell < 0, \text{ alors, au voisinage de } a,\ f(x) < \dfrac{\ell}{2} < 0. \end{cases}$

Remarque

Les propriétés précédentes sont utiles parce qu'elles précisent le signe de f au voisinage de a et permettent de majorer $\dfrac{1}{|f(x)|}$ au voisinage de ce point par $\dfrac{2}{|\ell|}$.

Proposition

On suppose que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).

Si on a $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, alors $\ell \leqslant \ell'$.

En particulier, si λ est un nombre réel :
– Si $f(x) \leqslant \lambda$ au voisinage de a, alors $\ell \leqslant \lambda$.

– Si $f(x) \geqslant \lambda$ au voisinage de a, alors $\ell \geqslant \lambda$.

Remarque

Si $f(x) < g(x)$ au voisinage de a, alors on peut seulement affirmer que $\ell \leqslant \ell'$.

Par passage à la limite, les inégalités strictes "deviennent" donc des inégalités larges.

Proposition *(Principe des gendarmes)*

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.)

Si $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a, alors $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$.

Cas particuliers

– Si $|f(x)| \leqslant g(x)$ au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

– Si f est bornée au voisinage de a et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = 0$.

– Supposons $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de a : $\begin{cases} \text{Si } \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty, \text{ alors } \lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty. \\ \text{Si } \lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty, \text{ alors } \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty. \end{cases}$

Proposition

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).

Si $\ell < \ell'$, alors, au voisinage de a on a l'inégalité $f(x) < g(x)$.

En particulier, si λ est un nombre réel :

– Si $\ell < \lambda$, alors on a l'inégalité $f(x) < \lambda$ au voisinage de a.

– Si $\ell > \lambda$, alors on a l'inégalité $f(x) > \lambda$ au voisinage de a.

Proposition *(Limite aux bornes, pour une application monotone)*

Soit f une application monotone de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ ($a < b, a \in \overline{\mathbb{R}}, b \in \overline{\mathbb{R}}$).

Alors la limite ℓ de f en a et la limite ℓ' de f en b existent dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément :

– Supposons f croissante.
  Si elle est majorée, ℓ' est un réel, sinon $\ell' = +\infty$.
  Si elle est minorée, ℓ est un réel, sinon $\ell = -\infty$.

– Supposons f décroissante.
  Si elle est minorée, ℓ' est un réel, sinon $\ell' = -\infty$.
  Si elle est majorée, ℓ est un réel, sinon $\ell = +\infty$.

Proposition *(Limite en un point intérieur, pour une application monotone)*

Soit f une application monotone de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ ($a < b, a \in \overline{\mathbb{R}}, b \in \overline{\mathbb{R}}$).

Soit c un réel de l'intervalle $]a, b[$.

L'application f admet en c une limite à gauche et une limite à droite, toutes deux finies.

Plus précisément :

– Si f est croissante : $\lim\limits_{x\to c-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{x\to c+} f(x)$.

– Si f est décroissante : $\lim\limits_{x\to c-} f(x) \geqslant f(c) \geqslant \lim\limits_{x\to c+} f(x)$.

6. Formes indéterminées

On suppose que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell'$ (avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$).

On dit qu'on a affaire à la forme indéterminée :

$$\begin{cases} \infty - \infty \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } f+g \text{ et si } \ell = +\infty \text{ , } \ell' = -\infty. \\ 0 \times \infty \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } fg \text{ et si } \ell = 0, \ \ell' = \pm\infty. \\ \dfrac{0}{0} \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } \dfrac{f}{g} \text{ et si } \ell = \ell' = 0. \\ \dfrac{\infty}{\infty} \text{ si on veut calculer la limite en } a \text{ de } \dfrac{f}{g} \text{ et si } \ell = \pm\infty \text{ et } \ell' = \pm\infty. \end{cases}$$

Le calcul de $\lim\limits_{a}(f^g)$ donne lieu aux formes indéterminées : $\begin{cases} 1^\infty \text{ si } \ell = 1 \text{ et } \ell' = \pm\infty. \\ \infty^0 \text{ si } \ell = +\infty \text{ et } \ell' = 0. \\ 0^0 \text{ si } \ell = \ell' = 0. \end{cases}$

Toutes ces formes indéterminées peuvent se ramener à $\infty - \infty$ ou à $0 \times \infty$.

Pour les trois dernières il suffit en effet de poser $f^g = \exp(g \ln f)$.

Dans une forme indéterminée, tous les résultats sont possibles.

Chaque problème doit donc être résolu individuellement.

Comme on dit, il faut *lever* la forme indéterminée.

III Comparaisons locales

Dans ce paragraphe, on considère un intervalle I de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, et des applications qui sont définies sur I et à valeurs réelles.

On désigne par a un élément ou une extrémité de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$).

1. Définitions

Définition *(Fonction dominée par une autre)*

Soient f, g deux applications de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est *dominée* par g au voisinage du point a (ou en a) si :

Il existe un réel positif ou nul M tel que, au voisinage de a, $|f(x)| \leqslant M|g(x)|$.

On note alors $f = \mathrm{O}(g)$, ou éventuellement $f = \mathrm{O}_a(g)$.

Définition *(Fonction négligeable devant une autre)*

Soient f, g deux applications de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f est *négligeable* devant g au voisinage du point a (ou en a) si :

Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité $|f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|$ est vraie au voisinage de a.

On note alors $f = \mathrm{o}(g)$, ou éventuellement $f = \mathrm{o}_a(g)$.

Définition *(Fonction équivalente à une autre)*

On dit que f est équivalente à g au voisinage de a (ou en a) si :

L'application $f - g$ est négligeable devant g au voisinage de a.

On note alors $f \sim g$, ou éventuellement $f \underset{a}{\sim} g$.

Définitions équivalentes

On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a).

f est dominée par g au voisinage de $a \Leftrightarrow \dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

f est négligeable devant g au voisinage de $a \Leftrightarrow \dfrac{f}{g}$ tend vers 0 en a.

f est équivalente à g au voisinage de $a \Leftrightarrow \dfrac{f}{g}$ tend vers 1 en a.

Remarques

– $f \sim g$ définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{R}$.
  La symétrie permet donc dire : *f et g sont équivalentes au voisinage de a.*

– Dans les notations $f = \mathrm{o}(g)$, $f = \mathrm{O}(g)$ et $f \sim g$, le point a n'apparait pas en général.
  Le contexte doit donc être clair.

2. Propriétés des relations $f = \mathrm{o}(g)$ et $f = \mathrm{O}(g)$

Dans les résultats suivants, les relations de comparaison sont établies au voisinage de a.

Proposition *(Fonctions dominées par 1 ou négligeables devant 1)*

$f = \mathrm{O}(1) \Leftrightarrow f$ est bornée au voisinage de a.
$f = \mathrm{o}(1) \Leftrightarrow$ la limite de f au point a est 0.

Proposition *(Propriétés de transitivité)*

Si $f = \mathrm{o}(g)$, alors $f = \mathrm{O}(g)$.
Si $f = \mathrm{O}(g)$ et $g = \mathrm{O}(h)$, alors $f = \mathrm{O}(h)$.
Si $f = \mathrm{o}(g)$ et $g = \mathrm{O}(h)$, ou si $f = \mathrm{O}(g)$ et $g = \mathrm{o}(h)$, alors $f = \mathrm{o}(h)$.

Proposition *(Sommes de fonctions dominées ou négligeables devant une autre)*

Si $f = \mathrm{O}(h)$ et $g = \mathrm{O}(h)$, alors $f + g = \mathrm{O}(h)$, et pour tout réel α, $\alpha f = \mathrm{O}(h)$.
Si $f = \mathrm{o}(h)$ et $g = \mathrm{o}(h)$, alors $f + g = \mathrm{o}(h)$, et pour tout réel α, $\alpha f = \mathrm{o}(h)$.

Proposition *(Produits de fonctions dominées ou négligeables devant une autre)*

Si $f = \mathrm{O}(h)$ et $g = \mathrm{O}(k)$, alors $fg = \mathrm{O}(hk)$.
Si $f = \mathrm{o}(h)$ et $g = \mathrm{O}(k)$, alors $fg = \mathrm{o}(hk)$.
Si $f = \mathrm{o}(h)$, alors pour tout $\alpha > 0$, $f^\alpha = \mathrm{o}(h^\alpha)$ (en supposant $f, h > 0$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$).

3. Propriétés des équivalents

Dans les résultats suivants, les relations de comparaison sont établies au voisinage de a.

Proposition *(Propriétés de transitivité)*

Si $f \sim g$ et $g = \mathrm{O}(k)$, alors $f = \mathrm{O}(k)$.
Si $f \sim g$ et $g = \mathrm{o}(k)$, alors $f = \mathrm{o}(k)$.
Si $f \sim g$ et si $g \sim h$, alors $f \sim h$.

Proposition *(Conservation du signe)*

Si $f \sim g$, alors f et g gardent le même signe au voisinage de a.

Proposition *(Conservation de la limite)*

Si $f \sim g$, et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ($\ell \in \overline{\mathbb{R}}$).
Réciproquement : si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$, avec ℓ réel non nul, alors $f \sim g$.

Proposition *(Equivalences dans un produit)*

Si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$, alors $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$.

Proposition *(Equivalences dans un quotient)*

On suppose que g_1 et g_2 ne s'annulent pas au voisinage de a (sauf peut-être en a).
Si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$, alors $\dfrac{f_1}{g_1} \sim \dfrac{f_2}{g_2}$.

Généralisation

Les deux propriétés précédentes peuvent être généralisées à des produits ou des quotients de fonctions en nombre quelconque. Dans un tel produit (ou quotient), on peut remplacer tout ou partie des fonctions par un équivalent : l'expression obtenue est équivalente à l'expression initiale (en particulier, la limite éventuelle en a est la même).

Proposition *(Puissances d'équivalents)*

Si $f \sim g$ alors $\forall \alpha, f^\alpha \sim g^\alpha$ (si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, on suppose $f, g > 0$). En particulier, $\dfrac{1}{f} \sim \dfrac{1}{g}$.

Proposition *(Equivalents dans une somme)*

Attention !! Si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$, alors on n'a pas, en général, $f_1 + g_1 \sim f_2 + g_2$.
Cependant : si $f \sim h$ et $g = \mathrm{o}(f)$, alors $f + g \sim h$.
Plus simplement : $g = \mathrm{o}(f) \Rightarrow f + g \sim f$.
Généralisation : si $f_2, f_3, \ldots, f_n$ sont des $\mathrm{o}(f_1)$ alors $f_1 + f_2 + \cdots + f_n \sim f_1$.

Proposition *(Changement de variable)*

Soit φ une application de J dans I, qui tend vers a quand x tend vers b dans J.
Si f est dominée par g en a, alors $f \circ \varphi$ est dominée par $g \circ \varphi$ en b.
Si f est négligeable devant g en a, $f \circ \varphi$ est négligeable devant $g \circ \varphi$ en b.
Si f et g sont équivalentes en a, $f \circ \varphi$ et $g \circ \varphi$ sont équivalentes en b.

Remarque

C'est surtout cette dernière propriété qui est utilisée.
Par exemple, du fait que $\sin x \sim x$ en 0, on a : $\sin x^2 \sim x^2$ en 0.
Toujours grâce à $\sin x \sim x$ en 0, on trouve : $\sin \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ en $\pm\infty$.
Sachant que $\ln(1 + x) \sim x$ en 0, alors $\ln x \sim x - 1$ en 1.

4. Quelques conseils

– Les équivalents servent essentiellement au calcul de limites :

  On transforme une expression $f(x)$, dont on cherche la limite ℓ en un point a, en une expression équivalente $g(x)$ dont la limite en ce point est évidente (si la limite ℓ est réelle, il est courant qu'on aboutisse à $g(x) = \ell$).

  Les outils essentiels sont les équivalents classiques (voir plus loin) et la possibilité qu'on a de remplacer les facteurs d'un produit (d'un quotient) par des équivalents.

– L'erreur la plus fréquente consiste à utiliser les équivalents dans des sommes. La seule propriété concernant les équivalents et les sommes peut s'écrire : $g = \mathrm{o}(f) \Rightarrow f + g \sim f$.

– On évitera d'utiliser un équivalent d'une fonction f sous la forme $f \sim g + h$, avec $h = \mathrm{o}(g)$, et surtout de donner un rôle à h : on se contentera de $f \sim g$.

  Ecrire par exemple $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ (en 0) n'est pas faux mais dangereux si on utilise $-\frac{x^2}{2}$.
  En effet, on a aussi : $\cos(x) \sim 1 + x^2 \sim 1 - 36x^2 \ldots$
  Pour cet exemple, la solution est sans doute d'écrire : $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$.

– Soit ℓ un réel non nul, et si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, alors $f(x) \sim \ell$ en ce point.
Mais si $\ell = 0$, on n'écrira pas $f(x) \sim 0$!
En effet, seule la fonction nulle au voisinage de a est elle-même équivalente à 0 en a.

– Si $f \sim g$ (f et g étant positives et ne tendent pas vers 1) alors $\ln(f) \sim \ln(g)$.
C'est faux si f et g tendent vers 1.
Par exemple, $(1+x) \sim (1+x^2)$ en $x = 0$, mais en ce point $\begin{cases} \ln(1+x) \sim x \\ \ln(1+x^2) \sim x^2 \end{cases}$

– On évitera surtout de prendre des " exponentielles " d'équivalents :
En effet $e^f \sim e^g \Leftrightarrow f - g \to 0$, ce qui n'équivaut pas du tout à $f \sim g$.
Exemples : x et x^2 en 0, ou encore x et $x+1$ en $+\infty$.

5. Comparaisons usuelles

Proposition *(Exponentielles, puissances et logarithmes)*

Soient α, β et γ des réels strictement positifs.
On a : $\lim_{+\infty} x^\beta e^{-\alpha x} = 0$, $\lim_{-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$, $\lim_{+\infty} x^{-\beta} \ln^\gamma(x) = 0$, $\lim_{0+} x^\beta |\ln^\gamma(x)| = 0$.
Autrement dit :
◇ $x^\beta = o(e^{\alpha x})$ en $+\infty$ $\quad$ $e^{\alpha x} = o(|x|^{-\beta})$ en $-\infty$.
◇ $\ln(x)^\gamma = o(x^\beta)$ en $+\infty$ $\quad$ $|\ln(x)|^\gamma = o(x^{-\beta})$ au voisinage de 0.

Proposition *(Equivalents classiques)*

Si f est dérivable en 0 et vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, alors $f(x) \sim x$ en 0.
En particulier, en 0 : $\sin(x) \sim x$, $\tan(x) \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, et $e^x - 1 \sim x$.
Toujours à l'origine : $(1+x)^m - 1 \sim mx$, et $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$.
On peut aussi écrire, au voisinage de $x = 1$: $x^m - 1 \sim m(x-1)$ et $\ln(x) \sim x - 1$.

Proposition *(Polynômes et fractions rationnelles)*

Soit $P(x) = a_m x^m + a_{m+1} x^{m+1} + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ un polynôme ($a_n \neq 0$, $a_m \neq 0$).
Au voisinage de l'origine, $P(x) \sim a_m x^m$ (monôme de plus bas degré).
Au voisinage de $\pm\infty$, $P(x) \sim a_n x^n$ (monôme de plus haut degré).
Soit $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle (P et Q deux polynômes).
Au voisinage de 0, $f(x)$ est équivalente au quotient des monômes de plus bas degré.
Au voisinage de ∞, $f(x)$ est équivalente au quotient des monômes de plus haut degré.

IV Continuité

1. Continuité en un point

Définition

Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On dit que f est *continue* en a si la limite de f en a existe.

Au vu des définitions cette limite ne peut être égale qu'à $f(a)$.

Autrement dit : f est continue en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $(x \in I$ et $|x - a| \leqslant \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.

Définition *(Continuité à gauche en un point)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Soit a un élément de I, qui ne soit pas l'extrémité gauche de I.

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap] - \infty, a]$

On dit que f est *continue à gauche* en a si g est continue en a.

Cela équivaut à dire que : $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$ ou encore :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $(a - \delta \leqslant x \leqslant a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.

Définition *(Continuité à droite en un point)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un élément de I qui n'est pas l'extrémité droite de I.

Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = I \cap [a, +\infty[$.

On dit que f est *continue à droite* en a si g est continue en a.

Cela équivaut à dire que : $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(x)$ ou encore :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $(a \leqslant x \leqslant a + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.

Remarque

Soit a un point intérieur à l'intervalle I. Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$.

f est continue en $a \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en a.

Définition *(Discontinuité de première espèce)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un point de I.

Si f n'est pas continue en a, on dit que f est *discontinue* en ce point.

Si a est intérieur à I, si f est discontinue en a, mais si les limites à gauche et à droite en a existent et sont finies, on dit que f présente en a une *discontinuité de première espèce*.

Définition *(Prolongement par continuité)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit a un réel, extrémité de I mais n'appartenant pas à I.

On dit que f est prolongeable par continuité en a si $\ell = \lim\limits_{a} f$ existe et est finie.

Cela signifie que g définie par $g(x) = f(x)$ sur I, et par $g(a) = \ell$ est continue en a.

On dit que l'application g est le *prolongement par continuité* de f en a.

2. Propriétés

Proposition *(Opérations sur applications continues en un point)*

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. Soit a un élément de I.

Si f et g sont continues en a, il en est de même pour fg et $\alpha f + \beta g$ ($\alpha\beta \in \mathbb{R}$).

Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en a.

Si f est continue en a et si g est continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Proposition *(Caractérisation séquentielle de la continuité)*

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. Soit a un élément de I.

f est continue en a si et seulement si, pour toute suite (u_n) de I convergeant vers a, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers $f(a)$.

Remarques

La propriété précédente est utile pour montrer qu'une application f n'est pas continue en un point a : on construit une suite (u_n) convergeant vers a, mais telle que la suite de terme général $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(a)$.

De même si le réel a est une extrémité de I (n'appartenant pas à I), si la suite (u_n) converge vers a, mais si la suite de terme général $f(u_n)$ n'a pas de limite (ou si sa limite est infinie), on peut dire que f n'est pas prolongeable par continuité au point a.

3. Continuité sur un intervalle

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

On note $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}(I)$) l'ensemble des applications continues sur I, à valeurs réelles.

Propriétés et exemples

- Toute application constante est continue sur $\mathbb{R}$.
  Il en est de même des applications $x \mapsto x$ et $x \mapsto |x|$.
- Soient f et g deux applications continues sur I.
  Pour tous scalaires α et β, $\alpha f + \beta g$ est continue sur I.
  Il en est de même de l'application fg.
  Si g ne s'annule pas sur I, $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.
- Les applications polynômiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
  Une application rationnelle (quotient de deux applications polynômiales) est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition.
- Les applications usuelles $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \tan(x)$, $x \mapsto \exp(x)$, $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto x^\alpha$ sont continues sur chaque intervalle de leur domaine.
- Soient $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$, avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$.

- Si f est continue sur I, alors les applications $|f|$, f^+ et f^- sont continues sur I.
  Si f et g sont continues sur I, alors $\inf(f,g)$ et $\sup(f,g)$ sont continues sur I.
- Si f est continue sur I, alors la restriction de f à tout intervalle $J \subset I$ est continue sur J.

Remarques

Pour démontrer qu'une application est continue sur un intervalle I, on ne revient pratiquement jamais à la définition *epsilonesque*.

Le plus souvent, la fonction à étudier est en effet un *cocktail* de fonctions continues classiques et les propriétés précédentes permettent de conclure.

La continuité, même sur un intervalle, reste une *propriété locale*, ce qui signifie qu'elle n'est que le bilan de la continuité de f en chacun des points de I.

Théorème *(Théorème des valeurs intermédiaires)*

Soit f une application continue sur l'intervalle I.
Soient a, b deux éléments de I ($a < b$).
Soit y un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Alors il existe un réel x, compris entre a et b, tel que $f(x) = y$.

Proposition *(énoncé équivalent au TVI)*

Soit f une application continue sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
Alors $f(I)$ est un intervalle.

Proposition

Soit f une application continue sur l'intervalle I, à valeurs réelles.
On suppose qu'il existe a et b dans I tels que $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$.
Alors il existe c dans I, compris entre a et b, tel que $f(c) = 0$.

Théorème *(Fonction continue sur un segment)*

Soit f une application continue sur un segment $[a,b]$ (a, b deux réels, $a \leqslant b$).
Alors $f([a,b])$ est un segment $[m,M]$.

Proposition

Toute application continue sur un segment y est bornée et y atteint ses bornes :
Il existe x_0 dans $[a,b]$ tel que $f(x_0) = m = \min\{f(x), a \leqslant x \leqslant b\}$.
Il existe x_1 dans $[a,b]$ tel que $f(x_1) = M = \max\{f(x), a \leqslant x \leqslant b\}$.

4. Théorème de la bijection réciproque

Théorème

Soit f dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, continue et strictement monotone sur I.
Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle image $J = f(I)$.
De plus, la bijection réciproque f^{-1}, de J vers I, est continue et strictement monotone (avec la même monotonie que f).

Remarques

– Les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre dans la symétrie par rapport à la droite $y = x$, parallèlement à la droite $y = -x$ (si le repère est orthonormé, il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$).

– Le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence d'une solution à $f(x) = 0$.
Le théorème de la bijection réciproque assure l'unicité de cette solution.

– Si f est continue sur l'intervalle I, l'intervalle $J = f(I)$ n'a pas toujours les mêmes propriétés que I (ouvert ou fermé, borné ou non borné), sauf si I est un segment. Mais si f est strictement monotone, le caractère ouvert, semi-ouvert, ou fermé de I est conservé.

Exemples d'inversions d'applications continues

– L'application $x \mapsto \exp(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
La bijection réciproque est $x \mapsto \ln(x)$.

– Pour tout α de $\mathbb{R}^{+*}$, les applications $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto x^{1/\alpha}$ sont deux bijections de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même, réciproques l'une de l'autre.

– L'application $x \mapsto \sin(x)$ réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arcsin(x)$ (*arc sinus de x*).

– L'application $x \mapsto \cos(x)$ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arccos(x)$ (*arc cosinus de x*).

– L'application $x \mapsto \tan(x)$ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arctan(x)$ (*arc tangente de x*).

5. Continuité uniforme

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que f est *uniformément continue* sur I si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in I \times I, |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Remarque

Pour montrer qu'une application $f : I \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue, on doit montrer l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, on puisse trouver x et y dans I tels que $|x - y| < \delta$, mais cependant tels que $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$.

Il revient au même de trouver deux suites (x_n) et (y_n) de I telles que $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$ mais telles que $\lim\limits_{n\to\infty}(f(y_n) - f(x_n)) \neq 0$.

Continuité et continuité uniforme

Rappelons la définition de la continuité de f en un point a de I :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que : $\forall x \in \mathrm{I}, |x - a| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$.

Dans cette définition, le réel δ dépend de ε et du point a.

La continuité uniforme exprime l'existence d'un réel δ ne dépendant plus du point a.

En particulier : si f est uniformément continue sur l'intervalle I, f est continue sur I.

La réciproque est fausse, comme le montrent ces exemples : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \text{ sur }]0, 1]. \\ f(x) = \sin(x^2) \text{ sur } \mathbb{R}. \end{cases}$

Le théorème suivant donne une condition où la continuité implique la continuité uniforme.

Théorème *(Théorème de Heine)*

Soit f une application continue sur un segment $[a, b]$ (a, b deux réels, $a \leqslant b$).
Alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

6. Applications lipschitziennes

Définition

Soit f un élément de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit λ un réel strictement positif.
On dit que f est $\lambda -$ *lipschitzienne* (ou encore lipschitzienne de rapport λ) sur I si :
$\forall (x, y) \in I \times I, |f(x) - f(y)| \leqslant \lambda |x - y|$.

Remarques et propriétés

– Dire que f est λ-lipschitzienne sur I, c'est dire que les taux d'accroissement de f sur I (entre deux points quelconques) sont majorés en valeur absolue par λ.

– Si f est λ -lipschitzienne sur I, alors f est uniformément continue sur I.
La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur le segment $[0, 1]$.

– Si f est λ-lipschitzienne sur I, alors, pour tout $\mu > \lambda$, f est μ-lipschitzienne sur I.

– Si f est λ-lipschitzienne sur I, avec $\lambda < 1$, on dit que f est *contractante* sur I.

– L'inégalité des accroissements finis (cours de Terminale) indique que si f est dérivable sur I, et si, pour tout x de I, $|f'(x)| \leqslant \lambda$, alors f est λ-lipschitzienne sur I.

Opérations entre applications lipschitziennes

– Si f est λ-lipschitzienne sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$, alors f est λ-lipschitzienne sur $[a, c]$.

– Si f et g sont λ-lipschitziennes sur I, alors $f + g$ est λ-lipschitzienne sur I.

– Si f est λ-lipschitzienne sur I, alors αf est $|\alpha|\lambda$-lipschitzienne sur I.

– Si f et g sont lipschitziennes et bornées sur I, alors fg est lipschitzienne sur I.

– Si f est λ-lipschitzienne sur I, si g est μ-lipschitzienne sur J, et si $f(I) \subset J$, alors l'application $g \circ f$ est $\lambda\mu$-lipschitzienne sur I.

Les notions d'applications uniformément continue ou lipschitzienne sur un intervalle I sont des notions globales (contrairement à la continuité, qui est une notion locale). En particulier, cela n'a aucun sens de dire que f est uniformément continue ou lipschitzienne en un point !