Table des matières

I Fonctions logarithmes et exponentielles

Définition *(logarithme népérien)*

On appelle fonction *logarithme népérien*, et on note $x \mapsto \ln x$, la primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qui s'annule en $x = 1$ de l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Autrement dit : $\forall x > 0, \ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Propriétés

– L'application ln est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\forall\, x > 0,\ \ln' x = \dfrac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$.

– Cette application est strictement croissante et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

– Pour $x > 0$ et $y > 0$, on a : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$, $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$.

Plus généralement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on a : $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$.

– Limites usuelles : $\left\{\begin{array}{lll} \displaystyle\lim_{0^+} \ln x = -\infty & \displaystyle\lim_{+\infty} \ln x = +\infty & \displaystyle\lim_{0^+} x \ln x = 0^- \\ \displaystyle\lim_{+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ & \displaystyle\lim_{0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 & \displaystyle\lim_{1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \\ \forall\, \alpha > 0, \forall\, \beta > 0 & \displaystyle\lim_{0^+} x^\alpha \left|\ln x\right|^\beta = 0 & \displaystyle\lim_{+\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0 \end{array}\right.$

– L'application $x \mapsto \ln x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.

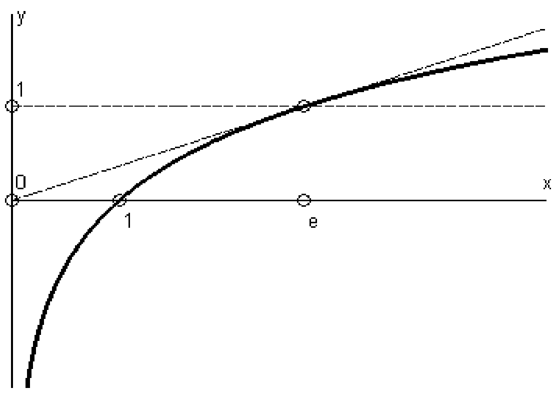
On note e l'unique réel strictement positif tel que $\ln \mathrm{e} = 1$. On a : $\mathrm{e} \approx 2.718281828$.

– L'application $x \mapsto \ln x$ est concave (sa dérivée seconde est $-\dfrac{1}{x^2} < 0$.)

Pour tout $x > 0$, on a l'inégalité $\ln x \leqslant x - 1$ (avec égalité$\Leftrightarrow x = 1$.)

– Courbe représentative :

y = ln x



Remarques

– Si x, y sont deux réels non nuls et de même signe, alors $\ln(xy) = \ln|x| + \ln|y|$.

En particulier, pour tout $x \neq 0$, on a : $\ln x^2 = 2 \ln|x|$.

– L'application $x \mapsto \ln|x|$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

– Soit f une application dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}^*$.

On appelle *dérivée logarithmique* de f la dérivée $\dfrac{f'}{f}$ de l'application $\ln|f|$.

– Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des applications dérivables et strictement positives sur l'intervalle I.
Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels, et $g = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \ldots f_n^{\alpha_n}$.
Alors la dérivée logarithmique de g est $\dfrac{g'}{g} = \alpha_1 \dfrac{f_1'}{f_1} + \alpha_2 \dfrac{f_2'}{f_2} + \cdots + \alpha_n \dfrac{f_n'}{f_n}$.

– La dérivée logarithmique peut donc être un moyen commode de calculer la dérivée d'une application qui s'exprime essentiellement à l'aide de quotients, de produits, de puissances.
Soit par exemple $f : x \mapsto \sqrt{|x(x+2)|} \exp \dfrac{1}{x}$, qui est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$.
Pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, on a : $\ln f(x) = \dfrac{1}{2} \ln |x(x+2)| + \dfrac{1}{x}$.
En dérivant, on obtient : $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x+1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-2}{x^2(x+2)}$. Ainsi $f' = \dfrac{x^2-2}{x(x+2)} f$.
En redérivant sur $\mathbb{R} - \{-2, 0\}$, on trouve l'expression de f'' :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2-2}{x^2(x+2)} f'(x) + \frac{-x^4+6x^2+8x}{x^4(x+2)^2} f(x) \\ &= \frac{(x^2-2)^2 + (-x^4+6x^2+8x)}{x^4(x+2)^2} f(x) = \frac{2(x^2+4x+2)}{x^4(x+2)^2} f(x) \end{aligned}$$

On pourra comparer ce calcul de f'' avec celui obtenu par les méthodes habituelles de dérivation (où la présence d'une valeur absolue n'arrange rien).

Définition *(fonction exponentielle)*

On sait que l'application $x \mapsto \ln x$ est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est appelée *fonction exponentielle* et est notée $x \mapsto \exp x$.

Propriétés

– L'application $x \mapsto \exp x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, continue et strictement croissante.
On a l'équivalence : $\begin{cases} y = \exp x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln y \\ y > 0 \end{cases}$

– L'application $x \mapsto \exp x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp' x = \exp x$.
Plus généralement, $x \mapsto \exp x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exp^{(n)} = \exp$.

– Propriétés fonctionnelles :
Pour tous x, y on a : $\exp(x+y) = \exp x \ \exp y \quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}, \quad \exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$.

– L'application $x \mapsto \exp x$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (sa dérivé seconde est $\exp x > 0$.)
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a l'inégalité $\exp(x) \geqslant 1 + x$ (égalité $\Leftrightarrow x = 0$).

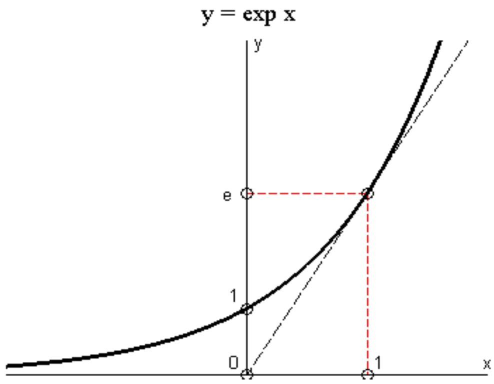
– Limites usuelles : $\left\{\begin{array}{lll} \lim\limits_{-\infty} \exp x = 0^+ & \lim\limits_{+\infty} \exp x = +\infty & \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\exp x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{-\infty} x \exp x = 0 & \lim\limits_{0} \dfrac{\exp x - 1}{x} = 1 & \\ \forall \alpha, \beta > 0 & \lim\limits_{-\infty} |x|^\alpha \exp^\beta x = 0 & \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\exp^\beta x}{x^\alpha} = +\infty \end{array}\right.$

– Notation $x \mapsto \mathrm{e}^x$:
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\exp(n) = \exp(1)^n = \mathrm{e}^n$.
Cette propriété se généralise aux exposants rationnels.

On décide d'étendre encore cette définition en posant : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = \exp x$.

On définit ainsi les puissances de e avec exposant réel quelconque. Toutes les propriétés de la fonction exponentielle peuvent alors se réécrire en utilisant cette notation.

– Courbe représentative :



Définition *(fonctions exponentielles de base quelconque)*

Pour tout réel $a > 0$, et pour tout réel x, on pose $a^x = \exp(x \ln a)$.
L'application $x \mapsto a^x$ est appelée *fonction exponentielle de base a.*

Définition *(fonctions puissances)*

Soit α un nombre réel quelconque. On appelle *fonction puissance d'exposant* α l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$.

Propriétés des fonctions exponentielles

– Pour $a = \mathrm{e}$, on retrouve l'application $x \mapsto \exp x$, déjà notée $x \mapsto \mathrm{e}^x$.
L'application $x \mapsto \exp x = \mathrm{e}^x$ est donc l'application exponentielle de base e.

– La notation a^x étend la définition de a^r pour tout rationnel r.

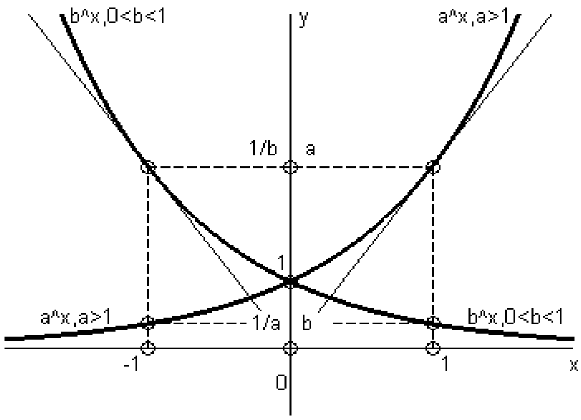
– Pour tout réel $a > 0$, l'application $x \mapsto a^x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Elle est même indéfiniment dérivable : $\forall\, x \in \mathbb{R}, (a^x)' = (\ln a)a^x$.

– L'application $x \mapsto a^x$ est $\begin{cases} \text{strictement croissante si } a > 1 \\ \text{strictement décroissante si } 0 < a < 1 \\ \text{constante égale à 1 si } a = 1 \end{cases}$

– Si $a \neq 1$, l'application $x \mapsto a^x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
La bijection réciproque est $x \mapsto \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ appelée fonction logarithme de base a.
Ainsi la fonction logarithme de base 10 est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\log_{10} x = \log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ et elle est la bijection réciproque de l'application $x \mapsto 10^x$.

– Pour tout x de $\mathbb{R}$ et tout $a > 0$, on a $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$. Les courbes représentatives de $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.

– Courbes représentatives :



Propriétés des fonctions puissances

– Quant l'exposant α est entier ou rationnel, cette définition de l'application $x \mapsto x^\alpha$ est compatible avec celle qu'on connaissait déjà (sur un domaine parfois plus large que $\mathbb{R}^{+*}$).

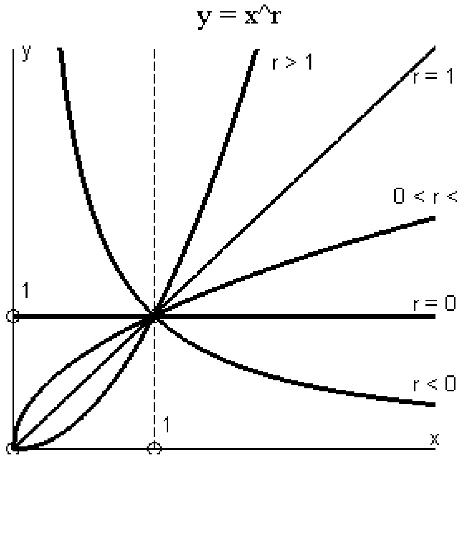
– La dérivée de $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
Sur son domaine $\mathbb{R}^{+*}$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est $\begin{cases} \text{strictement croissante si } \alpha > 0 \\ \text{strictement décroissante si } \alpha < 0 \\ \text{constante en 1 si } \alpha = 0 \end{cases}$

– Si $\alpha \neq 0$, l'application $x \mapsto x^\alpha$ est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur lui-même, dont la bijection réciproque est l'application $x \mapsto x^{1/\alpha}$

– Si $\alpha > 0$, $x \mapsto x^\alpha$ est prolongeable par continuité à l'origine en lui donnant la valeur 0.
En $(0,0)$, la courbe présente alors une tangente horizontale si $\alpha > 1$ et verticale si $0 < \alpha < 1$.
Toutes les courbes représentatives des applications $x \mapsto x^\alpha$ passent par le point $(1,1)$.

– Le placement des différentes courbes est le suivant :
$\forall\, x > 0,\ \forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, avec $\alpha < \beta$: $\begin{cases} \text{Si } 0 < x < 1 \text{ alors } x^\alpha > x^\beta \\ \text{Si } x > 1 \text{ alors } x^\alpha < x^\beta \end{cases}$

– Courbes représentatives :



Propriétés fonctionnelles et limites usuelles

– Propriétés fonctionnelles :

Pour tous x, y de $\mathbb{R}$, pour tout a, b de $\mathbb{R}^{+*}$, on a : $\begin{cases} a^{x+y} = a^x\, a^y & a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} & a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y} \\ (a^x)^y = a^{xy} & a^x\, b^x = (ab)^x & \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x \end{cases}$

– Limites usuelles :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0 \text{ si } a > 1 \\ +\infty \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases} & \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 1 \\ 0 \text{ si } 0 < a < 1 \end{cases} & \\ \forall\,\alpha > 0, \forall\, a > 1 & \lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha\, a^x = 0 & \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^\alpha} = +\infty \\ \forall\,\alpha > 0, \forall\, a \in]0,1[& \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{a^x}{|x|^\alpha} = +\infty & \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha a^x = 0 \end{cases}$$

II Fonctions hyperboliques

Définition *(applications $x \mapsto \operatorname{sh} x$ et $x \mapsto \operatorname{ch} x$)*

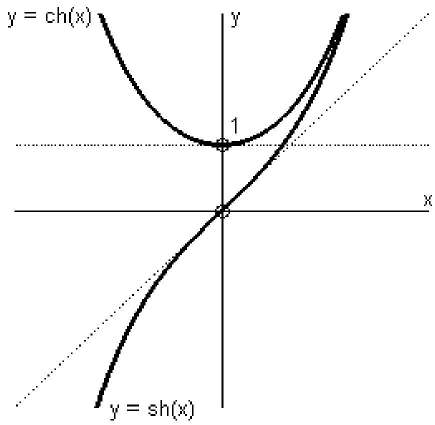
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\operatorname{ch} x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ (fonction “cosinus hyperbolique”)

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\operatorname{sh} x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ (fonction “sinus hyperbolique”)

Propriétés

– Les applications $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto \operatorname{sh} x$ sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$ et $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$.
Les deux applications $x \mapsto y = \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto y = \operatorname{sh} x$ sont donc solutions de $y'' = y$.
L’application $x \mapsto \operatorname{ch} x$ est paire, et l’application $x \mapsto \operatorname{sh} x$ est impaire.

– Courbes représentatives :



– $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^x \\ \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$, $\begin{cases} \operatorname{ch} x \geqslant 1 \\ \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \end{cases}$

– $\forall\, x \geqslant 0,\ \forall\, y \in \mathbb{R},\ x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, t \in \mathbb{R} \\ \operatorname{ch} t = x,\ \operatorname{sh} t = y \end{cases}$

L'application $t \mapsto (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ est un paramétrage de l'arc d'hyperbole $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

- Au voisinage de l'origine, on a : $\operatorname{sh} x \sim x$ (la droite $y = x$ est tangente d'inflexion).

  Toujours au voisinage de 0, on a : $\operatorname{ch} x - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$.
- Au voisinage de $+\infty$, on a : $\operatorname{ch} x \sim \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$ et $\operatorname{sh} x \sim \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$.

  Les deux courbes $y = \operatorname{ch} x$ et $y = \operatorname{sh} x$ sont asymptotes à $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$ (avec $\operatorname{sh} x < \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} < \operatorname{ch} x$.)
- Au voisinage de $-\infty$, on a : $\operatorname{ch} x \sim \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x \sim -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Définition *(application $x \mapsto \operatorname{th} x$)*

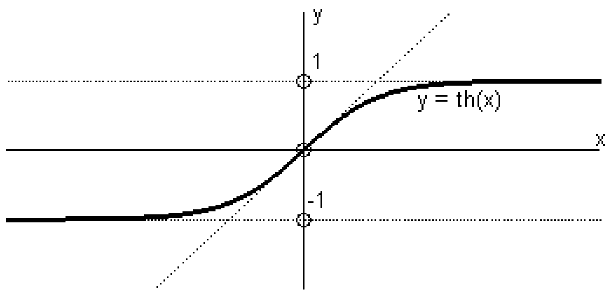
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (fonction “tangente hyperbolique”)

Propriétés

- L'application $x \mapsto \operatorname{th} x$ est impaire. $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{th} x = 1$.

  Au voisinage de 0, on a : $\operatorname{th} x \sim x$ (la droite $y = x$ est tangente d'inflexion.)
- L'application $x \mapsto \operatorname{th} x$ est indéfiniment dérivable : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\operatorname{th} x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$.

  Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $|\operatorname{th} x| \leqslant 1$.
- Courbe représentative :



III Trigonométrie hyperbolique

- ch , sh et th d'une somme ou d'une différence :

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{ch} 2x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x \\ \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \end{cases}$$

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \quad \operatorname{th}(x-y) = \frac{\operatorname{th} x - \operatorname{th} y}{1 - \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \quad \operatorname{th} 2x = \frac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$$

– Transformations de produits en sommes et de sommes en produits.

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)) \\ \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)) \\ \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)) \\ \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch} 2x) \\ \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2\operatorname{ch}\frac{p+q}{2}\operatorname{ch}\frac{p-q}{2} \\ \operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2\operatorname{sh}\frac{p+q}{2}\operatorname{sh}\frac{p-q}{2} \\ \operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh}\frac{p+q}{2}\operatorname{ch}\frac{p-q}{2} \\ \operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh}\frac{p-q}{2}\operatorname{ch}\frac{p+q}{2} \end{cases}$$

– Changement de variable $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$: $\quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2}$

– Changement de variable $u = \mathrm{e}^x$: $\quad \operatorname{ch} x = \frac{u^2+1}{2u}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{u^2-1}{2u}, \quad \operatorname{th} x = \frac{u^2-1}{u^2+1}$

– Linéarisation.

On écrit $\operatorname{ch}^n x = \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^n$ et $\operatorname{sh}^n x = \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^n$.

On développe (formule du binôme), on groupe les termes équidistants des extrémités, et on réutilise les définitions pour retrouver des $\operatorname{ch}(px)$ et/ou des $\operatorname{sh}(px)$. Par exemple :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^4 x &= \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(\mathrm{e}^{4x} - 4\mathrm{e}^{2x} + 6 - 4\mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-4x}\right) = \frac{1}{8}\left(\operatorname{ch} 4x - 4\operatorname{ch} 2x + 3\right) \\ \operatorname{sh}^5 x &= \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^5 = \frac{1}{16}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{5x} - 5\mathrm{e}^{3x} + 10\mathrm{e}^{x} - 10\mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{-3x} - \mathrm{e}^{-5x}) \\ &= \frac{1}{16}\left(\operatorname{sh} 5x - 5\operatorname{sh} 3x + 10\operatorname{sh} x\right) \end{aligned}$$

– Opération inverse de la linéarisation.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = (\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx} = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx$

On peut ainsi exprimer $\operatorname{ch}(nx), \operatorname{sh}(nx)$ en fonction de puissances de $\operatorname{ch} x$ et/ou de $\operatorname{sh} x$.

Pour cela on développe $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n$ par la formule du binôme.

La partie paire (resp. impaire) du résultat est alors égale à $\operatorname{ch}(nx)$ (resp. $\operatorname{sh}(nx)$).

$$(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^4 = \operatorname{ch}^4 x + 4\operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + 6\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x + 4\operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh}^4 x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{ch} 4x = \operatorname{ch}^4 x + 6\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh}^4 x \\ \operatorname{sh} 4x = 4\operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} x + 4\operatorname{ch} x \operatorname{sh}^3 x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{ch} 4x = \operatorname{ch}^4 x + 6\operatorname{ch}^2 x(\operatorname{ch}^2 x - 1) + (\operatorname{ch}^2 x - 1)^2 \\ \operatorname{sh} 4x = 4\operatorname{ch} x((1 + \operatorname{sh}^2 x)\operatorname{sh} x + \operatorname{sh}^3 x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{ch} 4x = 8\operatorname{ch}^4 x - 8\operatorname{ch}^2 x + 1 \\ \operatorname{sh} 4x = 4\operatorname{ch} x(2\operatorname{sh}^3 x + \operatorname{sh} x) \end{cases}$$

– Liens entre la trigonométrie hyperbolique et la trigonométrie circulaire.

Les formules de la trigonométrie hyperbolique peuvent être retrouvées à partir de celles de la trigonométrie circulaire, avec : $\quad \cos(ix) = \operatorname{ch} x, \quad \sin(ix) = i\operatorname{sh} x, \quad \tan(ix) = i\operatorname{th} x.$

Par exemple : $\begin{cases} \sin^3 x = \frac{1}{4}(-\sin 3x + 3\sin x) \Rightarrow \sin^3(ix) = \frac{1}{4}(-\sin(3ix) + 3\sin(ix)) \\ \qquad \Rightarrow -i\operatorname{sh}^3 x = \frac{1}{4}(-i\operatorname{sh}(3x) + 3i\operatorname{sh} x) \Rightarrow \operatorname{sh}^3 x = \frac{1}{4}(\operatorname{sh}(3x) - 3\operatorname{sh} x) \end{cases}$

IV Fonctions circulaires réciproques

Définition *(fonction arcsin)*

La restriction à $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de $x \mapsto \sin x$ est une bijection de I sur $J = [-1, 1]$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arcsin x$ (fonction "arc sinus").

Propriétés

– L'application $x \mapsto \arcsin x$ est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
  Elle est continue, strictement croissante, et impaire.

– Pour tout x de $[-1, 1]$, $\arcsin x$ est l'angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est égal à x :

$$\begin{cases} y = \arcsin x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

– Quelques valeurs particulières

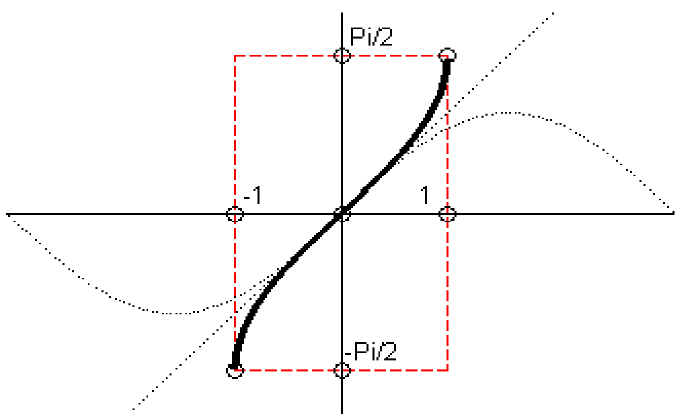
x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

– Pour tout x de $[-1, 1]$, $\sin(\arcsin x) = x$.
  Pour tout x de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin x) = x$ (attention au domaine !)
  Pour tout x de $[-1, 1]$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.
  Pour tout x de $]-1, 1[$, $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

– Dérivée : pour tout x de $]-1, 1[$, $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

– Courbe représentative :

y = arcsin x



Définition *(fonction arccos)*

La restriction à $I = [0, \pi]$ de $x \mapsto \cos x$ est une bijection de I sur $J = [-1, 1]$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arccos x$ (fonction "arc cosinus").

Propriétés

- L'application $x \mapsto \arccos x$ est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$.
  Elle est continue et strictement décroissante.
- Pour tout x de $[-1, 1]$, $\arccos x$ est l'angle compris entre 0 et π dont le cosinus est égal à x :

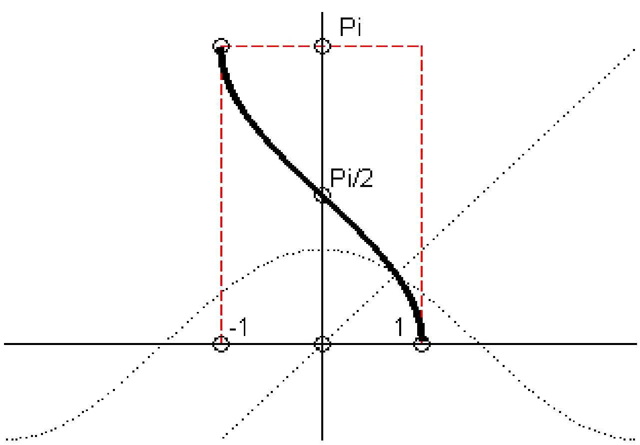
$$\begin{cases} y = \arccos x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

- Quelques valeurs particulières

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

- Pour tout x de $[-1, 1]$, $\cos(\arccos x) = x$.
  Pour tout x de $[0, \pi]$, $\arccos(\cos x) = x$ (attention au domaine !)
  Pour tout x de $[-1, 1]$, $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.
  Pour tout x de $[-1, 0\,[\cup]\,0, 1]$, $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$.
- Pour tout x de $[-1, 1]$, $\arccos(-x) + \arccos x = \pi$.
  Pour tout x de $[-1, 1]$, $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.
- Dérivée : pour tout x de $]-1, 1[$, $\arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.
- Courbe représentative :

y = arccos x



Définition *(fonction arctan)*

La restriction à $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de $x \mapsto \tan x$ est une bijection de I sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \arctan x$ (fonction “arc tangente”).

Propriétés

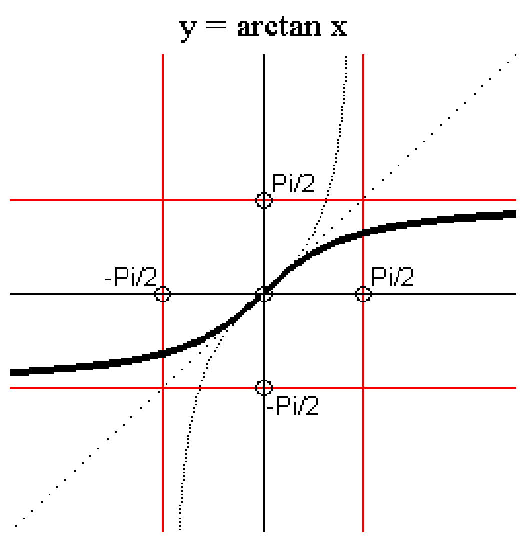
- L'application $x \mapsto \arctan x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
  Elle est continue, strictement croissante, et impaire.
- Pour tout x réel, $\arctan x$ est l'angle de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dont la tangente est égale à x :

$$\begin{cases} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

- Quelques valeurs particulières

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$.
  Pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan x) = x$ (attention au domaine !).
  Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
  Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \varepsilon \dfrac{\pi}{2}$, avec $\varepsilon = \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$
- Dérivée : pour tout x de $\mathbb{R}$, $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.
- Courbe représentative :



V Fonctions hyperboliques réciproques

Définition *(fonction argsh)*

L'application $x \mapsto \operatorname{sh} x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \operatorname{argsh} x$ (fonction "argument sh").

Propriétés

- L'application $x \mapsto \operatorname{argsh} x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
  Elle est continue, strictement croissante, et impaire.
- Pour tous x, y réels : $y = \operatorname{sh} x \Leftrightarrow x = \operatorname{argsh} y$.
- Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) = x$, $\operatorname{argsh}(\operatorname{sh} x) = x$, $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1+x^2}$.
- Dérivée : pour tout x de $\mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- Expression en fonction du logarithme : pour tout x de $\mathbb{R}$, $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
  En effet $y = \operatorname{argsh} x \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sh} y = x \\ \operatorname{ch} y = \sqrt{1+x^2} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{e}^y = x + \sqrt{1+x^2} \Rightarrow y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Définition *(fonction argch)*

L'application $x \mapsto \operatorname{ch} x$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \operatorname{argch} x$ (fonction "argument sh").

Propriétés

- L'application $x \mapsto \operatorname{argch} x$ est une bijection de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$.
  Elle est continue et strictement croissante.
- On a l'équivalence $(y = \operatorname{ch} x,\ x \geqslant 0) \Leftrightarrow (x = \operatorname{argch} y,\ y \geqslant 1)$.
- Pour tout $x \geqslant 0$, $\operatorname{argch}(\operatorname{ch} x) = x$. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\operatorname{argch}(\operatorname{ch} x) = |x|$.
  Pour tout $x \geqslant 1$, $\operatorname{ch}(\operatorname{argch} x) = x$ et $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{x^2-1}$.
- Dérivée : pour tout $x > 1$, $\operatorname{argch}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
- Expression en fonction du logarithme : pour tout $x \geqslant 1$, $\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
  En effet $y = \operatorname{argch} x \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{ch} y = x \\ \operatorname{sh} y = \sqrt{x^2-1} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{e}^y = x + \sqrt{x^2-1} \Rightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

Définition *(fonction argth)*

L'application $x \mapsto \operatorname{th} x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.
La bijection réciproque est notée $x \mapsto \operatorname{argth} x$ (fonction "argument th").

Propriétés

- L'application $x \mapsto \operatorname{argth} x$ est une bijection de $]-1, 1[$ sur $\mathbb{R}$.
  Elle est continue, strictement croissante, et impaire.
- On a l'équivalence $(y = \operatorname{th} x,\ x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow (x = \operatorname{argth} y,\ 1 < y < 1)$.

– Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\operatorname{argth}(\operatorname{th} x) = x$. Pour tout x de $]-1,1[$, $\operatorname{th}(\operatorname{argth} x) = x$.
  Pour tout x de $]-1,1[$, $\operatorname{ch}(\operatorname{argth} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\operatorname{sh}(\operatorname{argth} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
– Dérivée : pour tout x de $]-1,1[$, $\operatorname{argth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$.
– Expression en fonction du logarithme : pour tout x de $]-1,1[$, $\operatorname{argth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.
  En effet $y = \operatorname{argth} x \Rightarrow x = \operatorname{th} y = \dfrac{e^{2y}-1}{\mathrm{e}^{2y}+1} \Rightarrow \mathrm{e}^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$.
– Courbes représentatives :