# PROVA 1

SCC0205 - Métodos do Cálculo Numérico I

Amanda Araujo - Nº USP: 10260441

Prof. Antonio Castelo Filho

ICMC-USP (2024)

## 1 Decomposição LU

### 1.1 Manualmente

**Q1.** Decomposição $LU$ : forma de fatoração de uma matriz não singular ($\det \neq 0$)

$$A = \begin{pmatrix} 31 & 05 & 19 & 99 \\ 12 & 06 & 19 & 40 \\ 05 & 06 & 19 & 64 \\ 13 & 01 & 20 & 00 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 07 \\ 19 \\ 98 \end{pmatrix}$$

$L$ : $\Delta$r inferior (diag $=1$)
$U$ : $\Delta$r superior

Cálculo da decomposição $LU$ da matriz através do método de eliminação de Gauss : [encontraremos a matriz $U$]

$$[A \mid b]^{(0)} = \left[\begin{array}{cccc|c} 31 & 05 & 19 & 99 & 10 \\ 12 & 06 & 19 & 40 & 07 \\ 05 & 06 & 19 & 64 & 19 \\ 13 & 01 & 20 & 0 & 98 \end{array}\right]$$

; Matriz aumentada do sistema

* NOTE QUE: Nesse contexto, precisamos apenas de $A$ (não precisamos calcular para $b$)

Etapa de zerar elementos abaixo da diagonal principal.

Para 1ª coluna, temos :

$$L_2^{(1)} \leftarrow L_2^{(0)} - k \cdot L_1^{(0)} \qquad k = a_{21}/a_{11} = \underline{12/31}$$
$$L_3^{(1)} \leftarrow L_3^{(0)} - w \cdot L_1^{(0)} \qquad w = a_{31}/a_{11} = \underline{5/31}$$
$$L_4^{(1)} \leftarrow L_4^{(0)} - j \cdot L_1^{(0)} \qquad j = a_{41}/a_{11} = 13/31$$

$$[A]^{(1)} = \begin{bmatrix} 31 & 05 & 19 & 99 \\ 0 & 6-5K & 19-19K & 40-99K \\ 0 & 6-5w & 19-19w & 64-99w \\ 0 & 1-5j & 20-19j & -99j \end{bmatrix}$$

Para 2ª coluna, temos :

$$L_3^{(2)} \longleftarrow L_3^{(1)} - K_2 \cdot L_2^{(1)} \quad ; \quad \overset{q}{K_2} = a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)} = (6-5w)/(6-5K)$$
$$L_4^{(2)} \longleftarrow L_4^{(1)} - W_2 \cdot L_2^{(1)} \quad ; \quad \underset{r}{W_2} = a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)} = (1-5j)/(6-5K)$$

$$[A]^{(2)} = \begin{bmatrix} 31 & 05 & 19 & 99 \\ 0 & 6-5K & 19-19K & 40-99K \\ 0 & 0 & (19-19w)-K_2\cdot(19-19K) & (64-99w)-K_2(40-99K) \\ 0 & 0 & (20-19j)-W_2\cdot(19-19K) & (-99j)-K_2(40-99K) \end{bmatrix}$$

Para 3ª coluna, temos :

$$L_4^{(3)} \longleftarrow L_4^{(2)} - w_3 \cdot L_3^{(2)} \quad ; \quad \overset{t}{w_3} = a_{43}^{(2)}/a_{33}^{(2)}$$
$$= [(20-19j)-w_2(19-19K)] / [(19-19w)-K_2(19-19K)]$$

$$[A]^{(3)} = \begin{bmatrix} 31 & 5 & 19 & 99 \\ 0 & 4,0645 & 11,6452 & 1,6774 \\ 0 & 0 & 1,0556 & 45,8889 \\ 0 & 0 & 0 & -700,7594 \end{bmatrix}$$

$$a_{44}^{(3)} = (-99j)-K_2(40-99K) - w_3 \cdot [(64-99w)-K_2(40-99K)]$$

Ou seja, ao final do processo iterativo de eliminação de Gauss obtém-se a matriz triangular superior da decomposição $LU$ :

$$U = [A]^{(3)}$$

Sendo a decomposição: $A = LU$, a matriz $L$ pode ser obtida a partir dos multiplicadores utilizados na eliminação de Gauss:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ w & k_2 & 1 & 0 \\ j & w_2 & w_3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3871 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1613 & 1,2778 & 1 & 0 \\ 0,4194 & -0,2698 & 14,3759 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolução do sistema linear...

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (LU)x &= b \\ LUx &= b \end{aligned} \Longrightarrow \begin{cases} Ly = b & \text{(forward)} \\ Ux = y & \text{(backward)} \end{cases}$$

Trocamos a resolução do sistema $Ax = b$ pela resolução de 2 sistemas lineares mais fáceis.

- Resolvendo $Ly = b$:

$$\begin{cases} y_1 = 10 \\ ky_1 + y_2 = 7 \Rightarrow y_2 = 7 - 0,3871 \cdot 10 = 3,1290 \\ wy_1 + k_2 y_2 + y_3 = 19 \Longrightarrow y_3 = 19 - 0,1613 \cdot 10 - 1,2778 \cdot 3,1290 = 13,3888 \\ jy_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3 + y_4 = 98 \Longrightarrow y_4 = 98 - 0,4194 \cdot 10 - (-0,2698 \cdot 3,1290) - 14,3759 \cdot 13,3888 = -97,8258 \end{cases}$$

- Resolvendo $Ux = y$:

$$\begin{cases} -700,7594\, x_4 = -97,8258 \\ 45,8889\, x_4 + 1,0556\, x_3 = 13,3888 \\ 1,6774\, x_4 + 11,6452\, x_3 + 4,0645\, x_2 = 3,1290 \\ 99\, x_4 + 19\, x_3 + 5 x_2 + 31 x_1 = 10 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{aligned} x_4 &= 0,14 \\ x_3 &= (13,3889 - 45,8889 \cdot 0,14) / 1,0556 = 6,6150 \\ x_2 &= (3,1290 - 1,6774 \cdot 0,14 - 11,6452 \cdot 6,6150) / 4,0645 = -18,2406 \\ x_1 &= (10 - 99 \cdot 0,14 - 19 \cdot 6,6150 - 5 \cdot (-18,2406)) / 31 = -1,237 \end{aligned}$$

Portanto, o sistema $Ax = b$ foi resolvido e apresenta como solução o vetor dado por:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,237 \\ -18,2406 \\ 6,6150 \\ 0,14 \end{pmatrix} \blacksquare$$

## 1.2 MATLAB - Calculadora

```
A = [31 05 19 99; 12 06 19 40; 05 06 19 64; 13 01 20 00]

A =

    31     5    19    99
    12     6    19    40
     5     6    19    64
    13     1    20     0

M1 = A;
L1 = eye(4);
L1(2,1) = -M1(2,1)/M1(1,1);
L1(3,1) = -M1(3,1)/M1(1,1);
L1(4,1) = -M1(4,1)/M1(1,1);
L1

L1 =

    1.0000         0         0         0
   -0.3871    1.0000         0         0
   -0.1613         0    1.0000         0
   -0.4194         0         0    1.0000

M2 = L1*M1

M2 =

   31.0000    5.0000   19.0000   99.0000
         0    4.0645   11.6452    1.6774
         0    5.1935   15.9355   48.0323
         0   -1.0968   12.0323  -41.5161

L2 = eye(4);
L2(3,2) = -M2(3,2)/M2(2,2);
L2(4,2) = -M2(4,2)/M2(2,2);
L2

L2 =

    1.0000         0         0         0
         0    1.0000         0         0
         0   -1.2778    1.0000         0
         0    0.2698         0    1.0000

M3 = L2*M2

M3 =

   31.0000    5.0000   19.0000   99.0000
         0    4.0645   11.6452    1.6774
         0         0    1.0556   45.8889
         0         0   15.1746  -41.0635
```

```

L3 = eye(4);
L3(4,3) = -M3(4,3)/M3(3,3);
L3

L3 =

    1.0000         0         0         0
         0    1.0000         0         0
         0         0    1.0000         0
         0         0  -14.3759    1.0000

M4 = L3*M3

M4 =

   31.0000    5.0000   19.0000   99.0000
         0    4.0645   11.6452    1.6774
         0         0    1.0556   45.8889
         0         0         0 -700.7594

L = L1 + L2 + L3;
L = -1*L;
L(1,1) = 1.0000;
L(2,2) = 1.0000;
L(3,3) = 1.0000;
L

L =

    1.0000         0         0         0
    0.3871    1.0000         0         0
    0.1613    1.2778    1.0000         0
    0.4194   -0.2698   14.3759    1.0000

U = M4

U =

   31.0000    5.0000   19.0000   99.0000
         0    4.0645   11.6452    1.6774
         0         0    1.0556   45.8889
         0         0         0 -700.7594

b = [10 7 19 98];
y = L \ b'

y =

   10.0000
    3.1290
   13.3889
  -97.8271

```

```
x = U \ y

x =

   -1.2357
  -18.2409
    6.6152
    0.1396

diary off
```

### 1.3 Programa em MATLAB

```
% Solucao do sistema linear: ax = b

% Leitura de dados
%prompt = "Qual a matriz A do sistema linear?";
%A = input(prompt);
%prompt = "Qual o vetor b do sistema linear?";
%b = input(prompt);

A = [31 05 19 99; 12 06 19 40; 05 06 19 64; 13 01 20 00];
b = [10 7 19 98];


% Decomposicao LU: A = LU
[L, U] = lu_decomp(A);
% Substituicao forward: Ly = b
y = sub_forward(L, b);
% Substituicao backward: Ux = y
x = sub_backward(U, y);

% Solucao
disp(x);

% FUNCOES
% Etapa substituicao progressiva: matriz triangular inferior
function x=sub_forward(L,b)
% L: matriz triangular inferior
% b: termo independente
% x: vetor solucao

n=length(b);
x=zeros(n,1);

for i=1:n
    x(i)=(b(i)-L(i,1:i-1)*x(1:i-1))/L(i,i);
end
end

% Etapa substituicao regressiva: matriz triangular superior
function x=sub_backward(U,y)
% U: matriz triangular superior
```

```
% y: termo independente
% x: vetor solucao
n=length(y);
x=zeros(n,1);
for i=n:-1:1
    x(i)=(y(i)-U(i,i+1:n)*x(i+1:n))/U(i,i);
end
end

% decomposicao LU
function [L,U]=lu_decomp(A)
% A: matriz quadrada
% L, U: matrizes triang. inf. e sup., respectivamente.
n=size(A,1); L=eye(n); U=zeros(n);
for k=1:n
    for j=k:n
        U(k,j)=A(k,j);
        for s=1:k-1
            U(k,j)=U(k,j)-L(k,s)*U(s,j);
        end
    end
    for i=k+1:n
        L(i,k)=A(i,k);
        for s=1:k-1
            L(i,k)=L(i,k)-L(i,s)*U(s,k);
        end
        L(i,k)=L(i,k)/U(k,k);
    end
end
end
```

```
>> decomp_lu_solver
   -1.2357
   -18.2409
   6.6152
   0.1396
```

Observa-se que todas as três formas de resolução levaram à mesma solução, como esperado, e é gritante como o uso de métodos numéricos em MATLAB facilitam o problema de se resolver sistemas lineares.

## 2 Método dos gradientes

Encontrando uma matriz simétrica para os autovalores dados, através da decomposição garantida pelo Teorema Espectral ($A = QDQ^T$):

```
B = [5 42 9 8; 4 9 67 1; 9 5 1 3; 5 7 4 1]

B =

     5    42     9     8
     4     9    67     1
     9     5     1     3
     5     7     4     1

Q = orth(B)

Q =

   -0.3268    0.9174    0.2086   -0.0894
   -0.9392   -0.3412    0.0138   -0.0362
   -0.0502    0.1457   -0.8970   -0.4143
   -0.0928    0.1437   -0.3895    0.9050

D = eye(4);
D(1,1) = 1;
D(2,2) = 10;
D(3,3) = 100;
D(4,4) = 1000;
D

D =

            1            0            0            0
            0           10            0            0
            0            0          100            0
            0            0            0         1000

A = Q*D*Q'

A =

   20.8592    0.6954   19.6649  -87.6414
    0.6954    3.3732   13.2975  -33.6684
   19.6649   13.2975  252.3526 -339.8287
  -87.6414  -33.6684 -339.8287  834.4150

eig(A)

ans =

   1.0e+03 *

    1.0000
    0.1000
```

```
        0.0100
        0.0010

diary off
```

## 2.1 Manualmente

Q2. Método dos Gradientes

$$A = \begin{bmatrix} 20,8592 & 0,6954 & 19,6649 & -87,6414 \\ 0,6954 & 3,3732 & 13,2975 & -33,6684 \\ 19,6649 & 13,2975 & 252,3526 & -339,8287 \\ -87,6414 & -33,6684 & -339,8287 & 834,4150 \end{bmatrix}$$

Matriz simétrica positiva definida (SPD), cujos autovalores são dados por 1, 10, 100 e 1000.

↳ garantido pela decomposição (bem sucedida) de Cholesky

$$x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^t$$

Processo iterativo

$$\boxed{\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \alpha^{(k)} \cdot r^{(k)} \text{ ; sendo :} \\ r^{(k)} &= b - Ax^{(k)} \\ \alpha^{(k)} &= \frac{r^{(k)} \cdot r^{(k)}}{r^{(k)} \cdot (Ar^{(k)})} \end{aligned} \quad \text{MÉTODO DOS GRADIENTES}}$$

Aplicaremos o método dos gradientes para resolver numericamente o sistema linear: $Ax = b$, sendo A dada acima e $b = (1\ 2\ 3\ 4)^t$.

ITERAÇÃO 1: $r^{(0)} = b - A.x^{(0)} = b$, pois $x^{(0)}$ é nulo.

$$\alpha^{(0)} = \frac{r^{(0)} \cdot r^{(0)}}{r^{(0)} \cdot (Ar^{(0)})} = \frac{\langle b, b \rangle}{\langle b, Ab \rangle} = \frac{30}{6540,8} = 0,0046$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha^{(0)} \cdot r^{(0)} = 0 + 0,0046 \cdot b =$$
$$= (0,0046 \quad 0,0092 \quad 0,0138 \quad 0,0183)^t$$

ITERAÇÃO 2: $r^{(1)} = b - Ax^{(1)} = (2,2353 \quad 2,4006 \quad 5,5501 \quad -5,9217)^t$

$$\alpha^{(1)} = \frac{r^{(1)} \cdot r^{(1)}}{r^{(1)} \cdot (Ar^{(1)})} = \frac{\langle r^{(1)}, r^{(1)} \rangle}{\langle r^{(1)}, Ar^{(1)} \rangle} = \frac{76,6300}{63622} = 0,0012$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha^{(1)} \cdot r^{(1)}$$
$$= (0,0073 \quad 0,0121 \quad 0,0204 \quad 0,0112)^t$$

▷ Erro relativo: $\dfrac{\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \|}{\| x^{(k+1)} \|}$

ITERAÇÃO 1: $\dfrac{\| x^{(1)} - x^{(0)} \|}{\| x^{(1)} \|} = \dfrac{\| x^{(1)} - 0 \|}{\| x^{(1)} \|} = 1$

ITERAÇÃO 2: $\dfrac{\| x^{(2)} - x^{(1)} \|}{\| x^{(2)} \|} = \dfrac{0,0105}{0,0272} = 0,3870$

## 2.2 MATLAB - Calculadora

```
A

A =

   20.8592    0.6954   19.6649  -87.6414
    0.6954    3.3732   13.2975  -33.6684
   19.6649   13.2975  252.3526 -339.8287
  -87.6414  -33.6684 -339.8287  834.4150

b = [1 2 3 4]'

b =

     1
     2
     3
     4

x0 = [0 0 0 0]'

x0 =

     0
     0
     0
     0

r0 = b - A*x0

r0 =

     1
     2
     3
     4

a0 = dot(r0, r0)/dot(r0, A*r0)

a0 =

    0.0046

x1 = x0 + a0*r0

x1 =

    0.0046
    0.0092
    0.0138
    0.0183

r1 = b - A*x1
```

```

r1 =

    2.2353
    2.4006
    5.5501
   -5.9217

a1 = dot(r1, r1)/dot(r1, A*r1)

a1 =

    0.0012

x2 = x1 + a1*r1

x2 =

    0.0073
    0.0121
    0.0204
    0.0112

e_rel1 = norm(x1 - x0)/norm(x1)

e_rel1 =

     1

e_rel2 = norm(x2 - x1)/norm(x2)

e_rel2 =

    0.3870

diary off
```

Continuando até a iteração 5:

```
>> r2 = b - A*x2

r2 =

    1.4205
    2.0599
    1.3480
    2.6347

>> a2 = dot(r2, r2)/dot(r2, A*r2)

a2 =

    0.0050

>> x3 = x2 + a2*r2
```

```

x3 =

    0.0143
    0.0223
    0.0271
    0.0243

>> r3 = b - A*x3

r3 =

    2.2812
    2.3720
    3.8299
   -5.0439

>> a3 = dot(r3, r3)/dot(r3, A*r3)

a3 =

    0.0012

>> x4 = x3 + a3*r3

x4 =

    0.0171
    0.0252
    0.0318
    0.0181

>> r4 = b - A*x4

r4 =

    1.5874
    2.0899
    0.4541
    2.0456

>> a4 = dot(r4, r4)/dot(r4, A*r4)

a4 =

    0.0052

>> x5 = x4 + a4*r4

x5 =

    0.0253
    0.0360
    0.0342
```

```
    0.0287
```

Ao comparar o obtido até a iteração 5 com a solução para o sistema $Ax = b$ calculado pelo MATLAB, nota-se que de fato $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}, x^{(5)}$ estão se aproximando de $x$:

```
>> A \ b

ans =

    0.9969
    2.5177
    0.1900
    0.2885
```

## 2.3 Programa em MATLAB

```
%% Metodo dos gradientes

% Sistema linear: Ax = b
A = [20.8592    0.6954   19.6649  -87.6414;
    0.6954    3.3732   13.2975  -33.6684;
   19.6649   13.2975  252.3526 -339.8287;
  -87.6414  -33.6684 -339.8287  834.4150];
b = [1 2 3 4]';

% Parametros
x0 = [0 0 0 0]';
tol = 1e-10;

% Solucao do sistema linear:
[x, k] = grad(A, b, x0, tol);
disp(x);
disp(k);

function [x, k] = grad(A, b, x0, tol)
% A: matriz SPD
kmax = 10000;
for k=1:kmax
    r = b - A*x0;
    alpha = dot(r, r)/dot(r, A*r);
    x_ant = x0;
    x0 = x0 + alpha*r;

    % calcular erro relativo
    errorel = norm(x0 - x_ant)/norm(x0);
    if errorel < tol
        x = x0;
        k = k - 1;
        return;
    end
    x = x0;
end
```

```
disp('Erro: o metodo nao converge.');
end
```

```
>> met_grad
   0.9969
   2.5177
   0.1900
   0.2885

      5277
```

Por fim, ao rodar o método iterativo com um número maior de passos, obtém-se a convergência do método dos gradientes a uma tolerância de $10^{-10}$ após 5277 iterações, e solução é igual a apresentada pelo comando direto do MATLAB, logo podemos concluir que o método foi bem sucedido na tarefa de resolução do sistema linear.