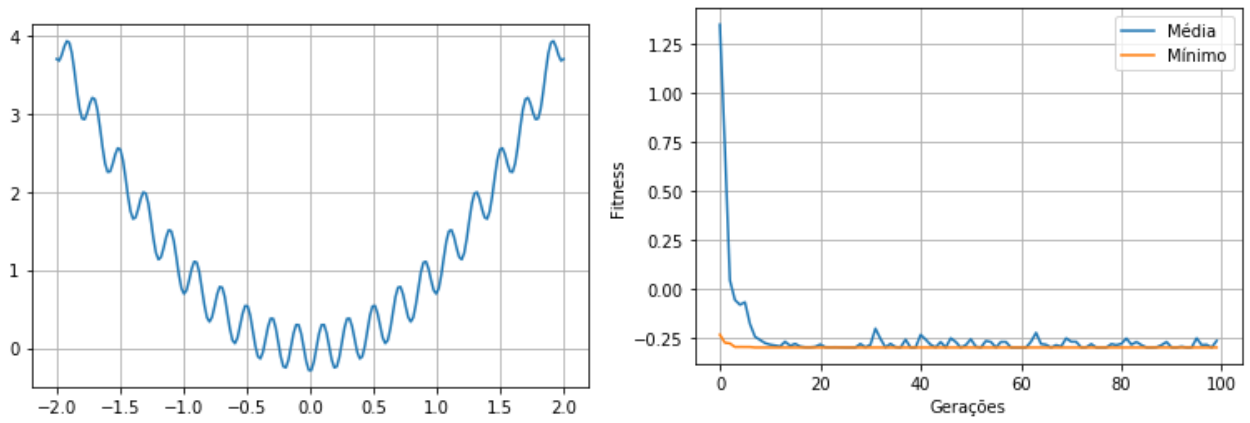
CPE-723 – Otimização Natural
Lista de Exercícios #4

Amanda Isabela de Campos (DRE 120074842)

UFRJ – COPPE – PEE / Programa de Engenharia Elétrica – CPE723 – Otimização Natural
2020/1 – Edição Remota – Lista de Exercícios 4

1. Escreva um algoritmo genético simples (SGA) para minimização da função $y(x) = x^2 - 0.3\cos(10\pi x)$ no intervalo $x \in [-2, +2]$, utilizando um genótipo de representação binária com pelo menos 16 bits. Utilizando inicialização aleatória, execute cinco vezes o algoritmo. Comente sobre os resultados obtidos.

A Figura 1 (a) apresenta a função de minização do problema, onde observa-se que o ponto de mínimo (resultado esperado) é o ponto (0,-0.3). Na Figura 1 (b) está o resultado de execução do código de algoritmo genético simples (SGA) criado para minimizar a função, como forma de curva de progresso, onde observa-se que com 100 gerações o algoritmo converge para o valor esperado de aptidão de -0.3. O código criado para esse problema está reproduzido a seguir.



(a) (b)

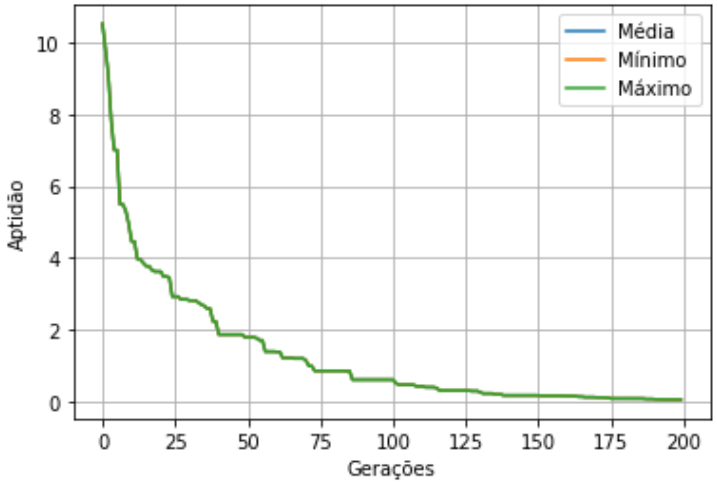
Figura 1

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
BITS = 16             #tamanho do cromossomo
POPULAÇÃO = 30           # tamanho da população
TAXA_CROSS = 0.8         # probabilidade de crossover
TAXA_MUTAÇÃO = 0.003   #probabilidade de mutação
N_GENERAÇÕES = 50
X_LIMITES = [-2,2]         #limites de x


def F(x): return -(x**2-0.3*np.cos(10*x*math.pi))    #máximo da função


# encontra as fitness diferentes de zero para seleção
def get_fitness(pred): return pred + 1e-3 - np.min(pred)


# conversão binário para decimal normalizado no limite de X
def codificação(pop): return pop.dot(2 ** np.arange(BITS)[::-1]) / float(2**BITS-
1) * X_LIMITES[1]
```

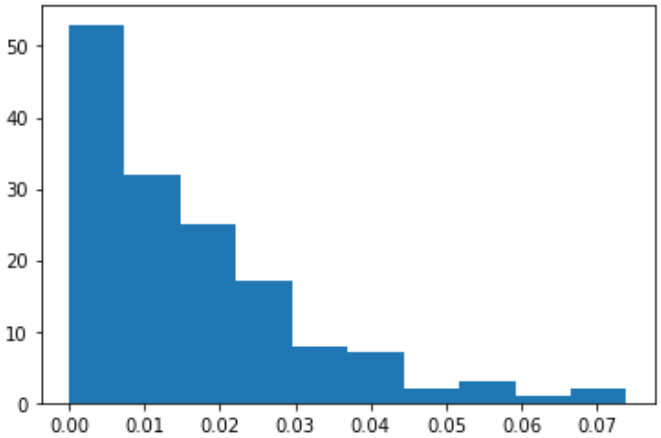
```
def seleção(pop, fitness):    # SELEÇÃO
    idx = np.random.choice(np.arange(POPULAÇÃO), size=POPULAÇÃO, replace=True,
                           p=fitness/fitness.sum())
    return pop[idx]


def crossover(pai, pop):     #CROSSOVER
    if np.random.rand() < TAXA_CROSS:
        i_ = np.random.randint(0, POPULAÇÃO, size=1)
#seleciona outro indivíduo da população
        cross_points = np.random.randint(0, 2, size=BITS).astype(np.bool)   # pontos do c
rossover
        pai[cross_points] = pop[i_, cross_points]                            # produz 1 f
ilho
    return pai


def mutação(filho): # inversão de 1 bit
    for point in range(BITS):
        if np.random.rand() < TAXA_MUTAÇÃO:
            filho[point] = 1 if filho[point] == 0 else 0
    return filho


pop = np.random.randint(2, size=(POPULAÇÃO, BITS))   #População inicial

i = 0
menor = np.zeros([N_GENERAÇÕES])
media = np.zeros([N_GENERAÇÕES])

for _ in range(N_GENERAÇÕES):

    F_values = F(codificação(pop))
    fitness = get_fitness(F_values)
    pop = seleção(pop, fitness)
    pop_copy = pop.copy()
    for pai in pop:
        filho = crossover(pai, pop_copy)
        filho = mutação(filho)
        pai[:] = filho       # pai é substituído por seu filho
    menor[i] = -np.max(F_values)
    media[i] = -np.mean(F_values)
    i = i + 1

plt.plot(media, label='Média')
plt.plot(menor, label='Mínimo')
plt.legend()
plt.xlabel('Gerações')
plt.ylabel('Fitness')
plt.grid()

print ('Média:', -np.mean(F_values))
print ('Menor:', -np.max(F_values))
```

2. **Escreva um algoritmo de estratégia de evolução (ES) para encontrar o ponto ótimo global da função de Ackley com 20 (ou mais) variáveis. Execute o algoritmo muitas vezes (150 execuções com inicialização independente, por exemplo) e guarde o melhor resultado de cada execução. No final, faça um histograma dos 150 valores armazenados.**

Um algoritmo de estratégia de evolução (ES) foi criado para encontrar o ponto de ótimo global da função Ackley com 20 variáveis. A curva de progresso para a primeira execução do algoritmo está apresenta a seguir, onde observa-se que o algoritmo com 200 gerações consegue convergir para o ponto de mínimo, como esperado.



A seguir o algoritmo foi executado 150 vezes com inicializações independentes e aleatórias, o histograma com os resultados está reproduzido a seguir, onde observa-se que a maior frequência de resultados está próxima de zero, como esperado. O código adotado neste problema está indicado na sequência.



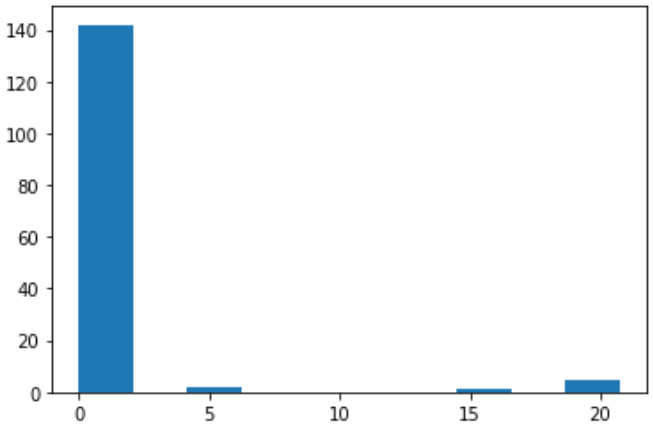

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Tue Sep  8 16:06:04 2020

@author: Amanda
"""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math

N_execuções = 150
hist = np.zeros([N_execuções])
for ii in range(N_execuções):
```

```
    DNA_SIZE = 20            # DNA (real number)
    LIMITES = [-32.768, 32.768]        # limites superior e inferior da função
    N_GERAÇÕES = 200
    TAM_POP = 30           # tamanho da população
    N_FILHOS = 200


    def F(x):

        firstSum = 0.0
        secondSum = 0.0
        for c in x:
            print(c)

            firstSum += c**2
            secondSum += math.cos(2*math.pi*c)
        n = float(len(x))
        return -(-20.0*math.exp(-
0.2*math.sqrt(firstSum/n)) - math.exp(secondSum/n) + 20 + math.e)


    def recombinação(pop, n_filhos):


        filhos = {'DNA': np.empty((n_filhos, DNA_SIZE))}
        filhos['sigma'] = np.empty_like(filhos['DNA'])
        for X_filhos, Sigma_filhos in zip(filhos['DNA'], filhos['sigma']):
            # Recombinação
            p1, p2 = np.random.choice(np.arange(TAM_POP), size=2, replace=False)
            cp = np.random.randint(0, 2, DNA_SIZE, dtype=np.bool)  # pontos de crossover
            X_filhos[cp] = pop['DNA'][p1, cp]
            X_filhos[~cp] = pop['DNA'][p2, ~cp]
            Sigma_filhos[cp] = pop['sigma'][p1, cp]
            Sigma_filhos[~cp] = pop['sigma'][p2, ~cp]

            # Mutação

            Sigma_filhos[:] = np.exp(1/np.sqrt(20) * np.random.randn(*Sigma_filhos.shape)
)*Sigma_filhos    # > 0
            X_filhos += Sigma_filhos * np.random.randn(*X_filhos.shape)
            X_filhos[:] = np.clip(X_filhos, *LIMITES)
        return filhos


    def seleção(pop, filhos):

        for key in ['DNA', 'sigma']:
            pop[key] = np.vstack((pop[key], filhos[key]))
        for i in range(230):
            fitness[i] = F(pop['DNA'][i,:])

        # fitness = custo_fitness(F(pop['DNA']))
        ind = np.arange(pop['DNA'].shape[0])
        otim_ind = ind[fitness.argsort()][-TAM_POP:]
        for k in ['DNA', 'sigma']:
```

```
            pop[k] = pop[k][otim_ind]
        return pop

    ## População inicial
    pop = dict(DNA=5 * np.random.rand(1, DNA_SIZE).repeat(TAM_POP, axis=0),
               sigma=np.random.rand(TAM_POP, DNA_SIZE))
    # x = np.linspace(*DNA_BOUND, 200)
    # plt.plot(x, F(x))

    i = 0
    menor = np.zeros([N_GERAÇÕES])
    media = np.zeros([N_GERAÇÕES])
    maior = np.zeros([N_GERAÇÕES])
    n = TAM_POP + N_FILHOS
    fitness = np.zeros([n])

    for i in range(N_GERAÇÕES):

        filhos = recombinação(pop, N_FILHOS)
        pop = seleção(pop, filhos)


        for k in range(TAM_POP):
            menor[i] = -np.max(F(pop['DNA'][k,:]))
            maior[i] = -np.min(F(pop['DNA'][k,:]))
            media[i] = -np.mean(F(pop['DNA'][k,:]))


    # plt.plot(media, label='Média')
    # plt.plot(menor, label='Mínimo')
    # plt.plot(maior, label='Máximo')
    # plt.legend()
    # plt.xlabel('Gerações')
    # plt.ylabel('Aptidão')
    # plt.grid()

    hist[ii] = min(maior)

plt.hist(hist)
```

3. Repita o Exercício 2, usando um algoritmo de programação evolucionária (EP).

O problema anterior foi solucionado com um algoritmo de programação evolucionária (EP), a seguir está indicado o histograma dos resultados de 150 execuções e o código criado. Observa-se que a maior parte das execuções convergiram para o ponto de mínimo igual a zero para todas as variáveis, porém em alguns casos o problema ficou preso em ótimos locais distantes do esperado, como 20 por exemplo, o que não aconteceu no problema anterior.




```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
N_execuções = 150
hist = np.zeros([N_execuções])
for ii in range(N_execuções):

    DNA_SIZE = 20            # DNA (real number)
    LIMITES = [-32.768, 32.768]        # limites superior e inferior da função
    N_GERAÇÕES = 50
    TAM_POP = 200           # tamanho da população

    def F(x):

        firstSum = 0.0
        secondSum = 0.0
        for c in x:
            print(c)

            firstSum += c**2
            secondSum += math.cos(2*math.pi*c)
        n = float(len(x))
        return -(-20.0*math.exp(-
0.2*math.sqrt(firstSum/n)) - math.exp(secondSum/n) + 20 + math.e)

    def mutação(pop):

        filhos = {'DNA': np.empty((TAM_POP, DNA_SIZE))}
        filhos['sigma'] = np.empty_like(filhos['DNA'])

        for X_filhos, Sigma_filhos in zip(filhos['DNA'], filhos['sigma']):

            X_filhos = pop['DNA']
            Sigma_filhos = pop['sigma']
```

```
            X_filhos = X_filhos + Sigma_filhos*np.random.randn(*X_filhos.shape)
            Sigma_filhos[:] = np.exp(1/np.sqrt(2*20) * np.random.randn(*X_filhos.shape))*
np.exp(1/np.sqrt(2*np.sqrt(20)) * np.random.randn(*X_filhos.shape))*Sigma_filhos


            X_filhos[:] = np.clip(X_filhos, *LIMITES)
        return filhos


    def seleção(filhos):

        for key in ['DNA', 'sigma']:
            pop[key] = (filhos[key])


        return pop

    ## População inicial
    pop = dict(DNA=5 * np.random.rand(1, DNA_SIZE).repeat(TAM_POP, axis=0),
               sigma=np.random.rand(TAM_POP, DNA_SIZE))
    # x = np.linspace(*DNA_BOUND, 200)
    # plt.plot(x, F(x))

    i = 0
    menor = np.zeros([N_GERAÇÕES])
    media = np.zeros([N_GERAÇÕES])
    maior = np.zeros([N_GERAÇÕES])


    for i in range(N_GERAÇÕES):

        filhos = mutação(pop)
        pop = seleção(filhos)
        for k in range(TAM_POP):
            menor[i] = -np.max(F(pop['DNA'][k,:]))
            maior[i] = -np.min(F(pop['DNA'][k,:]))
            media[i] = -np.mean(F(pop['DNA'][k,:]))

    plt.plot(media, label='Média')
    plt.plot(menor, label='Mínimo')
    plt.plot(maior, label='Máximo')
    plt.legend()
    plt.xlabel('Gerações')
    plt.ylabel('Aptidão')
    plt.grid()


    hist[ii] = min(maior)

plt.hist(hist)
```

4. **Escreva e execute um algoritmo genético simples (SGA) para resolver um dos três problemas a seguir:**

   - **Problema de *N* rainhas, em um tabuleiro de tamanho *N* por *N* ;**

O algoritmo a seguir resolve o problema de N rainhas, em um tabuleiro N por N. Este foi executado com N = 8 e obteve como resultado

Aptidão máxima = 28

Solucionado na geração 4641!

Uma das soluções:

Cromossomo = [3, 5, 2, 8, 1, 7, 4, 6], Aptidão = 28

Forma do tabuleiro:

x x x Q x x x x

x x x x x Q x x

x x x x x x x Q

x Q x x x x x x

x x x x x x Q x

Q x x x x x x x

x x Q x x x x x

x x x x Q x x x

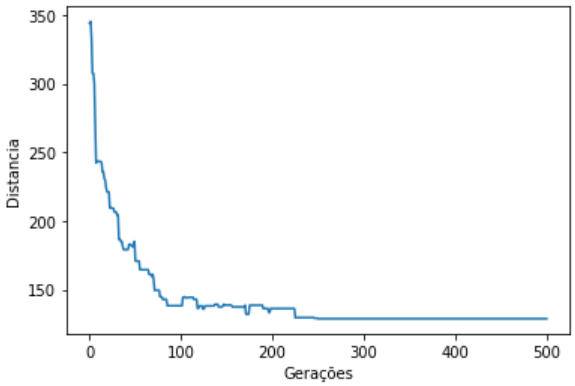
```
import random

def x(tamanho): #População inicial
    return [ random.randint(1, N_rainhas) for _ in range(N_rainhas) ]

def fitness(cromossomo):
    colisoes_horiz = sum([cromossomo.count(rainha)-1 for rainha in cromossomo])/2
    colisoes_diag = 0

    n = len(cromossomo)
    diagonal_esq = [0] * 2*n
    diagonal_dir = [0] * 2*n
    for i in range(n):
        diagonal_esq[i + cromossomo[i] - 1] += 1
        diagonal_dir[len(cromossomo) - i + cromossomo[i] - 2] += 1

    colisoes_diag = 0
    for i in range(2*n-1):
        cont = 0
        if diagonal_esq[i] > 1:
            cont += diagonal_esq[i]-1
        if diagonal_dir[i] > 1:
            cont += diagonal_dir[i]-1
        colisoes_diag += cont / (n-abs(i-n+1))

    return int(maxFitness - (colisoes_horiz + colisoes_diag)) #28-(2+3)=23
```

```
def prob(cromossomo, fitness):
    return fitness(cromossomo) / maxFitness

def seleção(população, probs):
    populaçãoWithProbabilty = zip(população, probs)
    total = sum(w for c, w in populaçãoWithProbabilty)
    r = random.uniform(0, total)
    upto = 0
    for c, w in zip(população, probs):
        if upto + w >= r:
            return c
        upto += w
    assert False, "Shouldn't get here"

def recombinação(x, y): #crossover de 2 cromossomos
    n = len(x)
    c = random.randint(0, n - 1)
    return x[0:c] + y[c:n]

def mutação(x):  #mutação de 1 valor aleatório
    n = len(x)
    c = random.randint(0, n - 1)
    m = random.randint(1, n)
    x[c] = m
    return x

def AG_rainha(população, fitness):
    taxa_mutação = 0.03
    nova_população = []
    probs = [prob(n, fitness) for n in população]
    for i in range(len(população)):
        x = seleção(população, probs) #melhor cromossomo 1
        y = seleção(população, probs) #melhor cromossomo 2
        filhos = recombinação(x, y) #riação do filho
        if random.random() < taxa_mutação:
            filhos = mutação(filhos)
        print_cromossomo(filhos)
        nova_população.append(filhos)
        if fitness(filhos) == maxFitness: break
    return nova_população

def print_cromossomo(crom):
    print("cromossomo = {},  Fitness = {}"
        .format(str(crom), fitness(crom)))

if __name__ == "__main__":
    N_rainhas = int(input("N° de rainhas: "))
    maxFitness = (N_rainhas*(N_rainhas-1))/2  # 8*7/2 = 28
    população = [x(N_rainhas) for _ in range(100)]

    geração = 1

    while not maxFitness in [fitness(crom) for crom in população]:
        print("=== geração {} ===".format(geração))
        população = AG_rainha(população, fitness)
```

```
        print("")
        print("Máxima Aptidão = {}".format(max([fitness(n) for n in população])))
        geração += 1
    crom_saida = []
    print("Resolvido na geração {}!".format(geração-1))
    for crom in população:
        if fitness(crom) == maxFitness:
            print("");
            print("One of the solutions: ")
            crom_saida = crom
            print_cromossomo(crom)

    tab = []

    for x in range(N_rainhas):
        tab.append(["x"] * N_rainhas)

    for i in range(N_rainhas):
        tab[N_rainhas-crom_saida[i]][i]="Q"


    def tabuleiro(tab):
        for row in tab:
            print (" ".join(row))

    print()
    tabuleiro(tab)
```

- **Problema do caixeiro viajante, com *K* cidades;**

O código a seguir resolve o problema do caixeiro viajante com 30 cidades, o resultado da curva de progresso está representado a seguir.




```
import numpy as np, random, operator, pandas as pd, matplotlib.pyplot as plt

class Cidades:
    def __init__(self, x, y):
        self.x = x
        self.y = y

    def distancia(self, city):
        xDis = abs(self.x - city.x)
        yDis = abs(self.y - city.y)
        distancia = np.sqrt((xDis ** 2) + (yDis ** 2))
```

```
        return distancia

    def __repr__(self):
        return "(" + str(self.x) + "," + str(self.y) + ")"

class Fitness:
    def __init__(self, rota):
        self.rota = rota
        self.distancia = 0
        self.fitness= 0.0

    def routeDistance(self):
        if self.distancia ==0:
            pathDistancia = 0
            for i in range(0, len(self.rota)):
                fromCity = self.rota[i]
                toCity = None
                if i + 1 < len(self.rota):
                    toCity = self.rota[i + 1]
                else:
                    toCity = self.rota[0]
                pathDistancia += fromCity.distancia(toCity)
            self.distancia = pathDistancia
        return self.distancia

    def routeFitness(self):
        if self.fitness == 0:
            self.fitness = 1 / float(self.routeDistance())
        return self.fitness

# Rota inicial aleatória
def CriaçãoRota(Listacidades):
    rota = random.sample(Listacidades, len(Listacidades))
    return rota

#População inicial
def PopulaçaoInicial(Tamanho_população, Listacidades):
    população = []

    for i in range(0, Tamanho_população):
        população.append(CriaçãoRota(Listacidades))
    return população

#Rank dos indivíduos
def rankRotas(população):
    aptidão = {}
    for i in range(0,len(população)):
        aptidão[i] = Fitness(população[i]).routeFitness()
    return sorted(aptidão.items(), key = operator.itemgetter(1), reverse = True)

#Seleção dos pais
def seleção(popRanked, taxaElit):
    selecionados = []
    df = pd.DataFrame(np.array(popRanked), columns=["Index","Fitness"])
    df['cum_sum'] = df.Fitness.cumsum()
```

```
    df['cum_perc'] = 100*df.cum_sum/df.Fitness.sum()

    for i in range(0, taxaElit):
        selecionados.append(popRanked[i][0])
    for i in range(0, len(popRanked) - taxaElit):
        pick = 100*random.random()
        for i in range(0, len(popRanked)):
            if pick <= df.iat[i,3]:
                selecionados.append(popRanked[i][0])
                break
    return selecionados

#Recombinação
def matingPool(população, selecionados):
    matingpool = []
    for i in range(0, len(selecionados)):
        index = selecionados[i]
        matingpool.append(população[index])
    return matingpool

#Crossover: dois pais geram um filho
def Crossover(pai1, pai2):
    filho = []
    filho1 = []
    filho2 = []

    geneA = int(random.random() * len(pai1))
    geneB = int(random.random() * len(pai1))

    startGene = min(geneA, geneB)
    endGene = max(geneA, geneB)

    for i in range(startGene, endGene):
        filho1.append(pai1[i])

    filho2 = [item for item in pai2 if item not in filho1]

    filho = filho1 + filho2
    return filho

#Aplicação do crossover em toda a população
def CrossoverPopulação(matingpool, taxaElit):
    filhos = []
    length = len(matingpool) - taxaElit
    pool = random.sample(matingpool, len(matingpool))

    for i in range(0,taxaElit):
        filhos.append(matingpool[i])

    for i in range(0, length):
        filho = Crossover(pool[i], pool[len(matingpool)-i-1])
        filhos.append(filho)
    return filhos

#Mutação
```

```
def mutação(indivíduo, taxaMutação):
    for trocado in range(len(indivíduo)):
        if(random.random() < taxaMutação):
            trocar_com = int(random.random() * len(indivíduo))

            cidade1 = indivíduo[trocado]
            cidade2 = indivíduo[trocar_com]

            indivíduo[trocado] = cidade2
            indivíduo[trocar_com] = cidade1
    return indivíduo

#Aplicação da mutação em toda a população
def mutaçãoPop(população, taxaMutação):
    mutaçãoPop = []

    for ind in range(0, len(população)):
        mutatedInd = mutação(população[ind], taxaMutação)
        mutaçãoPop.append(mutatedInd)
    return mutaçãoPop

#Seleção dos sobreviventes
def prox_Geração(Ger_atual, taxaElit, taxaMutação):
    popRanked = rankRotas(Ger_atual)
    Resultados_selec = seleção(popRanked, taxaElit)
    matingpool = matingPool(Ger_atual, Resultados_selec)
    filho = CrossoverPopulação(matingpool, taxaElit)
    Prox_ger = mutaçãoPop(filho, taxaMutação)
    return Prox_ger

#Algoritmo genético principal
def geneticAlgorithm(população, Tamanho_população, taxaElit, taxaMutação, gerações):
    pop = PopulaçaoInicial(Tamanho_população, população)
    print("Initial distance: " + str(1 / rankRotas(pop)[0][1]))

    for i in range(0, gerações):
        pop = prox_Geração(pop, taxaElit, taxaMutação)

    print("Final distance: " + str(1 / rankRotas(pop)[0][1]))
    melhorRotaIndex = rankRotas(pop)[0][0]
    melhorRota = pop[melhorRotaIndex]
    return melhorRota

#Criação da lista de cidades
Listacidades = []
N_cidades = 30
for i in range(0,25):
    Listacidades.append(Cidades(x=int(random.random() * N_cidades), y=int(random.random()
 * N_cidades)))

#Execução do código
geneticAlgorithm(população=Listacidades, Tamanho_população=30, taxaElit=20, taxaMutação=0
.001, gerações=200)

#Gráfico de execução
```

```
def geneticAlgorithmPlot(população, Tamanho_população, taxaElit, taxaMutação, gerações):
    pop = PopulaçaoInicial(Tamanho_população, população)
    Progresso = []
    Progresso.append(1 / rankRotas(pop)[0][1])

    for i in range(0, gerações):
        pop = prox_Geração(pop, taxaElit, taxaMutação)
        Progresso.append(1 / rankRotas(pop)[0][1])

    plt.plot(Progresso)
    plt.ylabel('Distancia')
    plt.xlabel('Gerações')
    plt.show()

geneticAlgorithmPlot(população=Listacidades, Tamanho_população=100, taxaElit=20, taxaMuta
ção=0.01, gerações=500)
```