

Ex IV
Sommersemester 2017

Amanda Matthes

22. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Relativistische Kinematik	6
2	Vielelektronensysteme	9
2.1	Wasserstoff	9
2.2	Helium	9
2.3	Vielelektronensysteme	11
2.4	Schalenstruktur und das Periodensystem der Elemente	12
2.5	Energieniveaus von Atomen	14
2.6	Kohlenstoff	14
2.7	LS und jj Kopplung	15
2.8	Elektronenkonfiguration und Atomzustände leichter Atome . .	17
2.9	Angeregte Atomzustände	18
2.9.1	Einfachanregung	18
2.9.2	Mehrfachanregung	19
2.9.3	Innerschalenanregung	19
3	Werkzeuge der Kern- und Teilchenphysik	20
3.1	Zerfallsgesetz	20
3.2	Fermis Goldene Regel und Phasenraum	21
3.3	Reaktionsrate	22
3.4	Wirkungsquerschnitt	23
3.5	Feynman - Diagramme	24
4	Wechselwirkung von Teilchen mit Materie	26
4.1	Schwere Teilchen in Materie	26
4.2	Elektronen in Materie	27
4.3	Hadronen hoher Energie in Materie	28
4.4	Photonen in Materie	28
5	Teilchendetektoren	31
5.1	Impulsmessung	31
5.2	Energiemessung	31
6	Charakterisierung von Elementarteilchen	32
6.1	Masse	32
6.2	Spin	33
6.3	Wechselwirkungen	34
6.4	Zerfallsbreite	34

7	Strukturinformationen aus Streuexperimenten	36
7.1	Elastische Streuung	36
7.1.1	Rutherford Wirkungsquerschnitt	36
7.2	Mott Wirkungsquerschnitt	36
7.3	Formfaktoren	38
7.4	Ladungsverteilung in Atomkernen	39
7.5	Struktur der Nukleonen	39
7.6	Inelastische Streuung	40
8	Der Teilchenzoo	42
8.1	Elementarteilchen	42
8.1.1	Leptonen	42
8.1.2	Quarks	43
8.1.3	Austauschteilchen (Eichbosonen)	44
8.1.4	Higgs-Boson	45
8.2	Zusammengesetzte Teilchen	45
8.2.1	Hadronen	45
9	Farbladungen	46
9.1	Confinement	46
10	Mehr zu Gluonen	47
11	Mehr zu Hadronen	48
11.1	Zu Baryonen	48
11.1.1	Baryonen-Multipletts	48
11.1.2	Nomenklatur	50
11.2	Zu Mesonen	50
11.2.1	Mesonen-Multipletts	50
11.2.2	Wichtige Mesonen	51
11.2.3	Quarkonium	52
11.3	Ungewöhnliche Quark-Gluon-Materie	52
12	Symmetrien und Erhaltungssätze	53
12.1	Allgemeine Betrachtungen	53
12.2	Additive Erhaltungssätze	54
12.3	Multiplikative Erhaltungssätze	56
12.3.1	Parität	56
12.3.2	Ladungskonjugation	58
12.3.3	Zeitumkehrinvarianz	58

12.3.4 CPT-Symmetrie	58
12.4 Zusammenfassung	59
13 Bindung und Anregung von Atomkernen	60
13.1 Tröpfchenmodell	60
13.2 Fermigasmodell	62
13.3 Magische Zahlen	62
13.4 Schalenmodell	63
13.5 Spin-Bahn-Kopplung	64
13.6 Deformierte Kerne	64
14 Kernspaltung und Fusion	65
14.1 Kernspaltung	65
14.2 Elementsynthese im Universum	65
15 Schwache Wechselwirkung	69
15.1 Betazerfall	69
15.2 Schwache Ströme	71
16 Anhang	73
16.1 V-Teilchen	73
16.2 Jets	73
16.3 Helizität	73
16.4 Majorana- und Dirac- Fermionen	73
16.5 Streuung	74
16.6 Magneton	74
16.7 Lande Faktor	74
16.8 Gyromagnetisches Verhältnis	74
16.9 Clebsch Gordan Koeffizienten	75
16.10 Propagator	75
16.11 Stuff	75

Ich halte die Vorlesungsnotizen für unübersichtlich. Außerdem fehlen Einführungen zu wichtigen Themen. Gleichzeitig ist es zu ausführlich, wenn es um Schlüsselexperimente geht. Dies sind zwar interessante Geschichten haben jedoch in einer Einführung ins Thema nichts verloren.

Dieses Skript basiert deshalb zwar inhaltlich auf den Vorlesungsnotizen, enthält allerdings sehr viele Ergänzungen und lässt gleichzeitig hier und da Trivia aus. Die Ergänzungen wurden größtenteils mit Wikipedia und diversen Büchern zusammengestellt, die hier nicht zitiert werden, da dieses Skript zum privaten Gebrauch gedacht ist.

Dieses Skript ist noch sehr unvollständig.

1 Relativistische Kinematik

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (1.1)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1 \quad (1.2)$$

Im Folgenden

$$c = 1 \quad (1.3)$$

Orts-Zeit-Vierervektor:

$$s = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Skalarprodukt zweier Vierervektoren:

$$ab = a_0 b_0 - \vec{a} \vec{b} \quad (1.5)$$

Das Skalarprodukt von 4er-Vektoren ist invariant unter Lorentz-Transformationen:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Lorentz-Kontraktion: Ein bewegtes Objekt erscheint verkürzt

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \quad (1.7)$$

Zeitdilatation: Uhren in bewegten Systemen gehen langsamer aus dem Ruhesystem gesehen.

$$t = \gamma t_0 \quad (1.8)$$

Relativistischer Impuls:

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (1.9)$$

Relativistische Energie:

$$E = \gamma m = \sqrt{p^2 + m^2} \quad (1.10)$$

Energie-Impuls-4er-Vektor:

$$p = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Für ihn gilt insbesondere:

$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (1.12)$$

Beispiel 1: Zerfallendes Teilchen

Mittlere Flugstrecke eines Teilchens mit einem Impuls p , Masse m und mittlerer Lebensdauer τ :

$$\langle L \rangle = \gamma \tau v = \gamma \tau \frac{p}{\gamma m} = \frac{\tau p}{m} \quad (1.13)$$

Wie viele Teilchen sind nach x noch nicht zerfallen?

$$\frac{n}{n_0} = \exp\left(-\frac{t}{\gamma \tau}\right) = \exp\left(-\frac{L}{\langle L \rangle}\right) \quad (1.14)$$

In einem **Schwerpunktsystem** verschwindet die Summe der 3er-Impulse. Die Schwerpunktsenergie oder invariante Masse \sqrt{s} ist die Summe der Ruheenergien und der kinetischen Energien aller Teilchen bezüglich des Schwerpunktsystems:

$$\sqrt{s} = \sqrt{(k_1 + k_2)^2} \quad (1.15)$$

Sie ist invariant unter Lorentztransformationen und erhalten (also vor und nach der Kollision gleich). Sie ist nur ein Teil der insgesamt vom Beschleuniger aufgebrauchten Energie, der Rest steckt in der Bewegung des Schwerpunktsystems. Nur die Schwerpunktsenergie steht zur Verfügung um neue Teilchen zu erzeugen.

Weil im Schwerpunktsystem der Schwerpunkt trivialerweise ruht $p_{cm}^* = 0 = \gamma(p_{cm} + E_{cm}\beta_{cm})$ (Lorentztrafo) gilt für die Geschwindigkeit des Schwerpunkts:

$$\beta_{cm} = \frac{p_{cm}}{E_{cm}} \quad (1.16)$$

Beispiel 2: Kollision zweier Teilchen

$$k_1 = (E_1, 0, 0, p_1)$$

$$k_2 = (E_2, 0, 0, p_2)$$

$$s = (k_1 + k_2)^2 = m_1^2 + 2k_1k_2 + m_2^2 \quad (1.17)$$

Wenn $m_i \approx 0$, dann $p_i \approx E_i$ und

$$s = 4E_1E_2 \quad (1.18)$$

$$\sqrt{s} = 2\sqrt{E_1E_2} \quad (1.19)$$

Für die Geschwindigkeit des CM-Systems im Laborsystem gilt:

$$\beta_{cm} = \frac{p_{cm}}{E_{cm}} \approx \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2} \quad (1.20)$$

Beispiel 3: Target

$$k_1 = (E, p_x, p_y, p_z) \quad k_2 = (m, 0, 0, 0)$$

$$\sqrt{s} = \sqrt{\begin{pmatrix} E + m \\ p_x^2 \\ p_y^2 \\ p_z^2 \end{pmatrix}} = \sqrt{2Em + 2m^2} \quad (1.21)$$

2 Vielelektronensysteme

2.1 Wasserstoff

Lösen der 3D - Schrödingergleichung mit dem Coulomb-Potential $V = \frac{-Ze^2}{r}$ liefert für die Energieniveaus im Wasserstoffatom:

$$E_n = \frac{1}{n^2} \frac{m_e c^2 Z^2 e^4}{2(\hbar c)^2} = \frac{1}{n^2} \frac{m_e c^2 \alpha^2}{2} Z^2 = \frac{1}{n^2} E_0 Z^2 \quad (2.1)$$

Hierbei wird $e^2 = 1.44 \text{ eV nm} = 1.44 \text{ MeV fm}$ verwendet. Die Größe

$$E_0 = \frac{m_e c^2 \alpha^2}{2} = 13.605698 \text{ eV} \quad (2.2)$$

ist die sog. Rydberg-Energie.

Zur Beschreibung der Wellenfunktion dienen die 3 Quantenzahlen n, l, m_l . Die Energieniveaus hängen nur von n ab.

Für das Spektrum gilt:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{\hbar c} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (2.3)$$

Das Elektron hat Spin $s = \frac{1}{2}$. Damit sind 2 Orientierungen $m_s = \pm \frac{1}{2}$ möglich. Durch Spin-Bahn(drehimpuls)kopplung kommt es zur **Feinstrukturaufspaltung** im Spektrum. Der totale Drehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ liefert die Quantenzahlen j, m_j . Hier kann j also die Werte $l \pm \frac{1}{2}$ annehmen. Zu (2.1) muss dann der Korrekturterm

$$\Delta E_{FS} = \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) E_n \quad (2.4)$$

addiert werden.

Außerdem heben quantenelektrodynamische Effekte (Wechselwirkung des Elektrons mit dem Vakuum) l-Entartungen auf. Dies ist der sog. **Lambshift**.

Betrachtet man zusätzlich die Wechselwirkung des magnetischen Moments des Elektrons mit dem Kernspin kommt es zur **Hyperfeinstrukturaufspaltung**.

2.2 Helium

Bei Systemen mit mehr als einem Elektron muss die Coulomb-Wechselwirkung der Elektronen mit berücksichtigt werden. Angeregte Zustände können näherungsweise beschrieben werden durch:

$$E = E_0 \left(Z^2 + \frac{(Z-1)^2}{n^2} \right) \quad (2.5)$$

Hierbei ist n die Hauptquantenzahl des “zweiten” Elektrons. Das “erste” befindet sich immer in $n = 1$. Z ist die Kernladungszahl, sie wird nicht auf 2 gesetzt, damit die Formel auch für heliumähnliche Systeme(, die auch zwei Elektronen haben, aber andere Kernladung) verwendet werden kann.

Die Schrödingergleichung für das Heliumatom lautet:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_2 + E_{pot}\right)\Psi(r_1, r_2) = E\Psi(r_1, r_2) \quad (2.6)$$

mit

$$E_{pot} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Z}{r_1} + \frac{Z}{r_2} - \frac{1}{r_{12}} \right) \quad (2.7)$$

Es existiert keine analytische Lösung der Schrödingergleichung. Das Problem kann numerisch gelöst werden, indem über die räumliche Verteilung der Elektronen integriert wird. Dies setzt allerdings eine Kenntnis der Wellenfunktionen voraus. Dazu kann das **Rayleigh-Ritzsche Variationsverfahren** verwendet werden. Hier wird ein Ansatz für Ψ gemacht und dessen Parameter so optimiert, dass die Energieeigenwerte minimiert werden.

Elektronen sind Fermionen. Die totale Wellenfunktion muss deshalb antisymmetrisch bezüglich Teilchenvertauschung sein. Ist der Ortsanteil der Wellenfunktion symmetrisch, so muss der Spinanteil antisymmetrisch sein und umgekehrt.

Die Bahndrehimpulse und Spins koppeln jeweils zu einem totalen Bahndrehimpuls $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$ und einem totalen Spin $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$. Damit ergeben sich zwei Möglichkeiten für die drei möglichen Spinwellenfunktionen schreibt man: Beim **symmetrischen Triplet** ist $S = 1$ und $M_S = 1, 0, -1$. Für die Spinwellenfunktion schreibt man:

$$\chi_s = \begin{cases} \uparrow\uparrow = \chi^+(1) + \chi^+(2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi^+(1)\chi^-(2) + \chi^-(1)\chi^+(2)) \\ \downarrow\downarrow = \chi^-(1) + \chi^-(2) \end{cases} \quad (2.8)$$

Beim **antisymmetrischen Singulett** ist $S = 0$ und $M_S = 0$:

$$\chi_{as} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi^+(1)\chi^-(2) - \chi^-(1)\chi^+(2)) \quad (2.9)$$

Im Grundzustand sind beide Elektronen im 1s Zustand. Hier muss nach Pauli $S = 0$ sein. Die Spinwellenfunktion ist also antisymmetrisch. Man schreibt:

$$1^1S_0 \quad (2.10)$$

nach dem Schema:

$$n^{2S+1}L_J \quad (2.11)$$

Hier muss für L nicht die Drehimpulsquantenzahl sondern der entsprechende Buchstabe (S für $L = 0$, P für 1 , D für 2 , F für 3 und G für 4) eingesetzt werden.

Für angeregte Zustände gibt es jetzt aber zwei Termsysteme. Bei Zuständen mit $S = 0$ spricht man von **Parahelium** und bei $S = 1$ von **Orthohelium**.

Die Energie der Singulett-Terme (Parahelium) sind höher als die entsprechenden Triplett-Terme (Orthohelium). Dies kann qualitativ dadurch erklärt werden, dass im Orthohelium der Ortsteil der Wellenfunktion antisymmetrisch ist, was den mittleren Abstand der beiden Elektronen in der Regel größer macht. Dies liegt daran, dass eine antisymmetrischen Ortswellenfunktion bei $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ verschwindet, sodass im Allgemeinen für kleine Abstände die Aufenthaltswahrscheinlichkeit (= Quadrat der Ortswellenfunktion) kleiner ist als bei einer symmetrischen Ortswellenfunktion. Ist ein Elektron weiter entfernt, so ist die Coulombabstoßung geringer, es ist stärker gebunden und die Energie geringer.

Bei Überlegungen zum Heliumspektrum müssen Auswahlregeln für Übergänge beachtet werden. Sie ergeben sich aus Erhaltungssätzen:

$$\Delta L = \pm 1 \quad (2.12)$$

$$\Delta M_L = 0, \pm 1 \quad (2.13)$$

$$\Delta S = 0 \quad (2.14)$$

$$\Delta J = 0, \pm 1 \quad (\text{ausser } 0 \rightarrow 0) \quad (2.15)$$

2.3 Vielelektronensysteme

Im Jahr 1913 untersuchte Henry Moseley die Röntgenspektren der damals bekannten Elemente. Dazu verwendete er das Phänomen der **Bragg-Streuung**. Trifft Röntgenstrahlung auf ein Kristallgitter unter einem Winkel θ , so wird ein kleiner Teil reflektiert, wobei die Strahlung nur an Stellen nachgewiesen werden kann, an denen sich die Reflexionen der verschiedenen Gitterebenen (vor Allem den ersten beiden) konstruktiv überlagern. Aus geometrischen Überlegungen ergibt sich für die Interferenzbedingung die Gleichung:

$$n\lambda = 2d \sin(\theta), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.16)$$

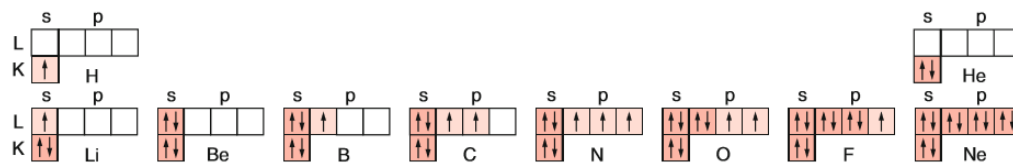


Abbildung 6.14 Aufbau der Elektronenkonfigurationen für die Grundzustände der zehn leichtesten Elemente

Abbildung 2: Elektronenkonfigurationen der ersten zehn Elemente

Hierbei ist d der Abstand der Gitterebenen und λ die Wellenlänge der Röntgenstrahlung. Ist die Gitterkonstante bekannt so kann mit genauer Winkelmessung die Wellenlänge der Röntgenstrahlung bestimmt werden.

Moseley beobachtete für jedes Element zwei charakteristische Röntgenlinien K_α und K_β , für schwere Elemente konnte er weitere Linien finden. Er verwendete die Daten um jedem Element eine Ordnungszahl Z zuzuordnen und folgerte, dass die bohrsche Atomtheorie, nach der der Kern von Elektronen in diskreten Quantenzuständen umgeben ist korrekt ist. Es fand außerdem "Lücken" in der Liste an bekannten Elementen und sagte akkurat noch nicht entdeckte Elemente voraus.

2.4 Schalenstruktur und das Periodensystem der Elemente

Jede Hauptquantenzahl kann als Schale interpretiert werden. Die Schalen haben Buchstaben (K, L, M, N, O für 1, 2, 3, 4, 5).

Jetzt stellt sich natürlich die Frage, wie die Schalen gefüllt werden. Die richtige Konfiguration ist immer die, die am energetisch günstigsten ist. Das bedeutet schon mal, dass eine neue Schale erst angefangen wird, wenn die unter ihr voll ist. Das gleiche gilt für die Unterschalen, die die möglichen l "aufspannen". Für die Reihenfolge des Füllens der Unterschalen gilt

Abbildung (1). Die empirisch gefundenen **Hundschen Regeln** erklären wie die Schalen dann konkret zu füllen sind:

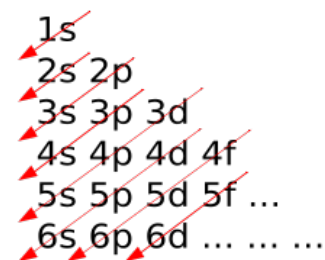


Abbildung 1: Füllen der Unterschalen

1. Der Zustand mit dem maximalem Spin hat die niedrigste Energie
2. Die m_l -Unterkonfigurationen werden (bei maximalem Spin) so besetzt, dass L maximal wird.

3. Ist eine Unterschale höchstens bis zur Hälfte gefüllt, dann ist der Zustand mit minimalem J der energetisch günstigste, bei mehr als halbvoller der mit maximalem J .

Man erhält so für die Elektronenkonfigurationen der ersten sechs Elemente (im Grundzustand) die in Abbildungen (2) gezeigte Verteilung. Die ersten zwei Zeilen geben an welchem l und welchem m_l die Zellen in der jeweiligen Spalte angehören. Die Buchstaben in der zweiten Spalte geben die Schale der Zellen in der jeweiligen Zeile an.

Durch die Schalenstruktur treten periodische Eigenschaften auf, wie Atomradius und Ionisierungsenergie. Die Radien nehmen innerhalb einer Gruppe zu, da immer weiter außen liegende Schalen besetzt werden. Allerdings nehmen sie innerhalb einer Periode zu, weil keine neue Schale "geöffnet" wird aber die Kernladung und damit die Anziehung immer größer wird. Die Ionisierungsenergie ist maximal für Edelgase und minimal für Alkalimetalle. Sie geben das äußerste 1s-Elektron besonders leicht ab.

Bei der Angabe eines Elements wird meistens folgende Nomenklatur verwendet:

$$\begin{array}{c} \text{Massenzahl} \\ \text{Ordnungszahl} \end{array} X \quad (2.17)$$

Hierbei ist die Massenzahl die durchschnittliche Masse des Elements in u^1 . Dazu werden die Massen der verschiedenen Isotope² mit ihrer Häufigkeit gewichtet gemittelt werden. X ist das Symbol des Elements. Die Ordnungszahl ist die Anzahl der Protonen. Sie definiert um welches Element es sich handelt und wird häufig weggelassen, da diese Information bereits im Symbol steckt. Damit sagt einem zum Beispiel

$${}^{6.941}_{3}\text{Li} \quad (2.18)$$

, dass Lithium 3 Protonen und eine mittlere Masse von $6.941u$ hat.

Das schwerste in der Natur vorkommende Element ist ${}_{94}\text{Pu}$ (Plutonium). Schwerere Elemente existieren, müssen aber künstlich hergestellt werden und haben kurze Lebenszeiten.

¹ $1u \approx 1.661e-27kg \approx 931.5 \frac{MeV}{c^2}$ ist definiert als $\frac{1}{12}$ der Masse des ungebundenen ${}^{12}\text{C}$ und damit ungefähr die Masse eines Protons oder Neutrons

²Isotope eines Elements haben die gleiche Protonenzahl aber unterschiedliche Neutronenzahl

2.5 Energieniveaus von Atomen

Die einfachsten Atome sind die der Alkalimetalle (Li, Na, K, Rb, Cs, Fr), denn sie haben nur ein Elektron in der äußersten Schale. Bei kleinem r “spürt” das Elektron die gesamte Kernladung für $r \rightarrow \infty$ schirmen die $Z - 1$ Elektronen die Kernladung bis auf eine Einheit ab. Damit sind sie wasserstoffähnlich mit dem **effektiven Potential**

$$V_{eff} = -\frac{e^2 Z_{eff}}{r}, \quad \text{mit} \quad Z \geq Z_{eff} \geq 1 \quad (2.19)$$

Für große n (und damit große r) lassen sich die Energieniveaus beschreiben durch

$$E_{n,l} = -\frac{E_0}{n_{eff}^2} = -\frac{E_0}{(n - \delta_{n,l})^2} = -\frac{E_0}{n^2} \frac{1}{(1 - \frac{\delta}{n})^2} \quad (2.20)$$

Dabei wurde die Hauptquantenzahl n durch eine effektive Quantenzahl

$$n_{eff} = n - \delta_{n,l} \quad (2.21)$$

ersetzt, die um den von n und l abhängigen **Quantendefekt** δ vermindert ist. Der Quantendefekt beschreibt also die Änderung der Energiewerte gegenüber denen des H-Atoms ($\delta = 0$). Hier spielen mit rein:

- Modifikation des Coulombpotentials
- Polarisierung der ursprünglich kugelsymmetrischen abgeschlossenen Schalen durch das äußerste Elektron. Dies hängt von dessen Bahndrehimpuls l ab.
- Austauschwechselwirkung. Es ist möglich, dass das äußerste Elektron beim “Eintauchen” in die Elektronenhülle mit einem anderen Elektron wechselwirkt.

Weil δ nur schwach von n abhängt, wird die Abweichung der Termenergien von $-\frac{E_0}{n^2}$ mit zunehmendem n kleiner, wie man aus dem letzten Term in (2.20) entnehmen kann.

2.6 Kohlenstoff

Kohlenstoff hat im Grundzustand die Konfiguration $1s^2 2s^2 2p^2$. Nach den Hundschen Regeln befindet sich die beiden Elektronen im $2p$ in verschiedenen m_l -Zuständen und $S = 1$, $L = 1$ und $J = 0$. Also ist das entsprechende

Termsymbol 3P_0 .

Aus $2p^2$ können eine ganze Reihe an angeregten Zuständen gebildet werden: $S = 1$ $L = 1$ und $J = 0, 1, 2$, also $^3P_0, ^3P_1$ und 3P_2 außerdem $S = 0$ und $L = 0, 2$ und $J = 0, 2$, also 1S_0 und 1D_2 . Aus Symmetriegründen gibt es die anderen Möglichkeiten nicht.

Das Spektrum zerfällt ähnlich wie das des Heliums in einen Singulett und einen Triplettteil zwischen denen es keine Übergänge unter Emission eines Photons gibt. (Auswahlregel $\Delta S = 0$)

2.7 LS und jj Kopplung

Die Reihenfolge, in der die Bahndrehimpulse \vec{l}_i und die Spins \vec{s}_i der einzelnen Elektronen zum Gesamtdrehimpuls \vec{J} der Elektronenhülle zusammengesetzt werden, wird bestimmt durch die energetische Reihenfolge der verschiedenen Kopplungsenergien. Wir diskutieren zuerst zwei Grenzfälle:

LS Kopplung:

Wenn die Kopplungsenergien

$$W_{l_i, l_j} = a_{ij} \vec{l}_i \vec{l}_j \quad (2.22)$$

zwischen den magnetischen Bahnmomenten der einzelnen Elektronen und

$$W_{s_i, s_j} = b_{ij} \vec{s}_i \vec{s}_j \quad (2.23)$$

zwischen ihren Spinmomenten **groß** sind gegen die Kopplungsenergie

$$W_{l_i, s_i} = c_{ii} \vec{l}_i \vec{s}_i \quad (2.24)$$

zwischen dem magnetischen Bahnmoment $\vec{\mu}_{l_i} = -\mu_B \vec{l}_i / \hbar$ eines Elektrons und seinem magnetischen Spinmoment $\vec{\mu}_{s_i} = -g_s \mu_B \vec{s}_i / \hbar$, dann koppeln die einzelnen Drehimpulse zu einem Gesamtbahndrehimpuls

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i \quad (2.25)$$

$$|\vec{L}| = \sqrt{L(L+1)}\hbar \quad (2.26)$$

und einem Gesamtspin

$$\vec{S} = \sum_i \vec{s}_i \quad (2.27)$$

$$|\vec{S}| = \sqrt{S(S+1)}\hbar. \quad (2.28)$$

Der Gesamtdrehimpuls der Elektronenhülle ist dann

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (2.29)$$

$$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar \quad (2.30)$$

Dieser Grenzfall der Drehimpulskopplung heißt LS Kopplung. In diesem Fall führt eine Elektronenkonfiguration mit Gesamtdrehimpuls \vec{L} und Gesamtspin \vec{S} je nach Kopplung von \vec{L} und \vec{S} zu verschiedenen Feinstrukturkomponenten eines Term-Multipletts, die sich nur in ihrer Quantenzahl J unterscheiden. Die Termbezeichnung einer Feinstrukturkomponente ist

$$n^{2S+1}L_J \quad (2.31)$$

wobei für L S,P,D... eingesetzt werden muss statt 0,1,2.... Die Zahl der Feinstrukturkomponenten ist gleich der kleineren der beiden Zahlen $(2S+1)$ und $(2L+1)$, so viele Kopplungsmöglichkeiten gibt es nämlich.

$$J \in |L-S|, |L-S|+1, \dots, L+S$$

Beispiel:

Eine Elektronenkonfiguration mit $L=2$ und $S=1$ führt zu 3 Feinstrukturkomponenten mit den Quantenzahlen $J=1, 2, 3$.

Die LS Kopplung gilt vor allem für leichte Atome mit kleiner Kernladungszahl.

jj Kopplung:

Wenn die Wechselwirkungsenergie zwischen magnetischem Bahnmoment und Spinmoment desselben Elektrons **groß** gegen die magnetischen Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Elektronen ist, dann koppeln \vec{l}_i und \vec{s}_i zum Drehimpuls $\vec{j}_i = \vec{l}_i + \vec{s}_i$ des i ten Elektrons. Die einzelnen Drehimpulse \vec{j}_i koppeln dann zum Gesamtdrehimpuls

$$\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i \quad (2.32)$$

Dies tritt vorallem bei schweren Atomen mit großer Kernladungszahl auf.

In diesem Grenzfall sind Gesamtdrehimpuls \vec{L} und Gesamtspin \vec{S} nicht mehr definiert. Die Spektren solcher Atome sind sehr unübersichtlich und lassen sich

nicht in einfache Termserien ordnen.

Die Terme der meisten Atome liegen zwischen den beiden Grenzfällen der LS und der jj Kopplung. Die Gesamtzahl aller möglichen Terme eines Atoms für eine gegebene Elektronenkonfiguration ist für beide Grenzfälle gleich groß.

2.8 Elektronenkonfiguration und Atomzustände leichter Atome

Im Falle einer LS Kopplung sind bei einer voll besetzten Schale Gesamtdrehimpuls und Gesamtsピン null. Daraus folgt insbesondere: Alle Edelgase haben im Grundzustand die Drehimpulsquantenzahlen $L = S = J = 0$. D.h. ihr Grundzustand ist ein 1S_0 -Zustand.

Für alle anderen Atome braucht man zur Ermittlung von L und S nur die Elektronen

Tabelle 6.6 Mögliche Gesamtdrehimpulse und Atomterme für verschiedene Zweielektronenkonfigurationen

Elektronenkonfiguration	Drehimpulsquantenzahlen			Term
	L	S	J	
s	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$^2S_{1/2}$
s^2	0	0	0	1S_0
	0	1	1	3S_1 für $n_1 \neq n_2$
sp	1	0	1	1P_1
	1	1	0, 1, 2	$^3P_0, ^3P_1, ^3P_2$
p^2	0	0	0	1S_0
	1	1	0, 1, 2	$^3P_0, ^3P_1, ^3P_2$
	2	0	2	1D_2
	0	1	1	3S_1 nur für $n_1 \neq n_2$
	1	0	1	1P_1 nur für $n_1 \neq n_2$
	2	1	1, 2, 3	$^3D_{1,2,3}$ nur für $n_1 \neq n_2$

Abbildung 3: Gesamtdrehimpulsmöglichkeiten für Atome mit zwei Valenzelektronen

in nicht geschlossenen Schalen zu berücksichtigen.

Aus einer für ein Atom charakteristischen Elektronenkonfiguration (z.B. $1s^2 2s^2 2p^2$ für den Grundzustand des Kohlenstoffatoms) können im Allgemeinen verschiedene Atomzustände gebildet werden, die sich energetisch unterscheiden. Dies liegt daran, dass je nach der relativen Orientierung der Einzeldrehimpulse \vec{l}_i , \vec{s}_i und \vec{j}_i , im Falle der LS Kopplung verschiedene Gesamtdrehimpulse \vec{L}, \vec{S} und \vec{J} gebildet werden können.

Um festzustellen, welche Kopplungsmöglichkeiten bestehen, braucht man für das Beispiel des Kohlenstoffs nur die beiden p-Elektronen betrachten.

Geachtet werden muss hier vor allem auf das Pauliprinzip und Symme-

triebedingungen gerachtet werden. Zum Beispiel ist der 1P_1 Zustand der p^2 -Konfiguration $l_1 = l_2 = 1$, $m_{l_1} = 1$, $m_{l_2} = 0$ und $m_{s_1} = +1/2$, $m_{s_2} = -1/2$ trotz $(m, l)_1 \neq (m, l)_2$ nicht möglich für $n_1 = n_2$, weil der Spinanteil der Wellenfunktion antisymmetrisch ist aber der Ortsanteil nicht symmetrisch ist.

Der energetisch tiefste Zustand der np^2 -Konfiguration ist der 3P -Zustand, da dann der Spin maximal wird (hundsche Regeln).

2.9 Angeregte Atomzustände

Anregungen von Atomen können durch Absorption von Photonen oder durch inelastische Stoßprozesse bewirkt werden. Man spricht von Einelektronen-Anregung, wenn mit einem Modell unabhängiger Elektronen gearbeitet wird, in dem die Wechselwirkung zwischen den Elektronen vernachlässigt oder nur summarisch berücksichtigt wird, sich also die Quantenzahlen von nur einem Elektron ändern.

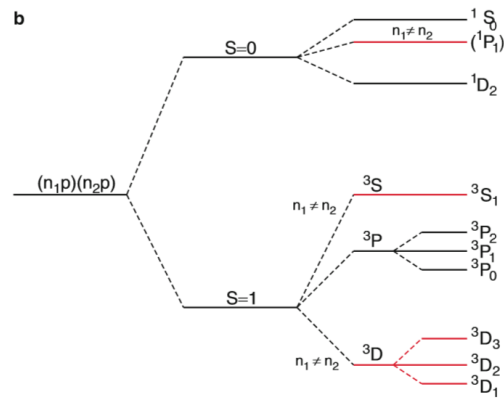


Abbildung 6.35 a Vektormodell der p^2 -Konfiguration. b Mögliche Atomterme der p^2 -Konfiguration. Die rot gezeichneten Terme sind nur für $n_1 \neq n_2$ möglich

2.9.1 Einfache Anregung

Die geringste Energie braucht man, wenn ein Elektron aus der äußersten besetzten Schale in höhere Energiezustände angeregt wird. Die Anregungsenergien dieser Valenzelektronen liegen im Bereich $1 - 10\text{eV}$.

Der angeregte Zustand ist nicht stabil. Er geht spontan durch Aussendung eines Photon in tiefere Zustände über. Die mittlere Lebensdauer eines angeregten Zustandes hängt von der Wahrscheinlichkeit für solche Übergänge in tiefere Zustände ab.

Wenn die Anregungsenergie oberhalb der Ionisierungsgrenze liegt verlässt das Elektron das Atom.

Abbildung 4: Mögliche Atomterme der p^2 Konfiguration

2.9.2 Mehrfachanregung

Unter geeigneten Anregungsbedingungen können zwei oder mehr Elektronen gleichzeitig angeregt werden.

Ein doppelt angeregter Zustand kann entweder durch Emission von zwei Photonen wieder in den Grundzustand zurückkehren, oder eines der beiden angeregten Elektronen kann seine Anregungsenergie auf das andere Elektron übertragen. Dadurch geht ein Elektron zurück in den Grundzustand, das andere wird weiter angeregt. Da die Gesamtenergie erhalten bleiben muss, ist dieser letzte Prozess im Allgemeinen nur möglich, wenn ein hoch angeregter Zustand existiert, der genau die richtige Energie hat. Dies ist für die diskreten Energien $E < 0$ sehr unwahrscheinlich. Für $E > 0$ ist jeder Energiezustand möglich, weil das freie Elektron ein kontinuierliches Energiespektrum hat. Deshalb wird der Prozess der Energieübertragung von zwei angeregten Elektronen auf ein hoch angeregtes Elektron erst wahrscheinlich, wenn die Gesamtanregungsenergie oberhalb der Ionisierungsenergie eines einfach angeregten Elektrons liegt. Dann kann die Übertragung der Energie auf das zweite Elektron zur Ionisation führen. Dieser Prozess heißt Autoionisation.

2.9.3 Innerschalenanregung

Wird ein Elektron aus einer inneren Schale angeregt auf ein höheres, nicht besetztes Energieniveau, so braucht man dazu höhere Energien als bei der Anregung von Valenzelektronen aus der äußeren Schale, weil die Bindungsenergie der Elektronen in den inneren Schalen viel größer ist (da weniger Abschirmung der Kernladung). Die Anregung kann entweder durch Absorption von Photonen im Vakuum UV oder Röntgenbereich oder durch Elektronenstoß erfolgen. In das durch die Anregung entstandene Loch in der inneren Schale kann ein Elektron aus einem höheren Energiezustand fallen. Die entsprechende Energiedifferenz kann in Form eines Photons abgestrahlt werden. Dieser Prozess ist die Quelle für die **charakteristische Röntgenstrahlung**.

Die Energiedifferenz kann aber auch direkt auf ein anderes Elektron der Hülle übertragen werden, dass dann bei genügend hoher Energie die Hülle verlassen kann. Dieser Vorgang heißt **Auger-Effekt**.

3 Werkzeuge der Kern- und Teilchenphysik

3.1 Zerfallsgesetz

Wenn ein Zustand X energetisch in der Lage ist den Übergang nach Y zu machen kommt es zum Zerfall. Es gibt verschiedene Arten von Zerfällen.

Ein angeregtes Atom kann unter Emission von Licht in den Grundzustand übergehen:

$$A^* \rightarrow A + \gamma \quad (3.1)$$

Bei Photonen im $100\text{keV} - 10\text{MeV}$ Bereich spricht man vom **Gammazerfall**. Kerne mit zu vielen Protonen oder Neutronen zerfallen unter Aussendung von Elektronen oder Positronen. Dies nennt man **Betazerfall**:

$${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e \quad (\beta^- - \text{Zerfall}) \quad (3.2)$$

$${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e \quad (\beta^+ - \text{Zerfall}) \quad (3.3)$$

Kerne mit zu vielen Nukleonen zerfallen unter Aussendung eines Heliumkerns. Das ist der **Alphazerfall**:

$${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He} (+\Delta E) \quad (3.4)$$

Es gibt einige andere mögliche Zerfälle, wie zum Beispiel der Zerfall eines neutralen Pions:

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad (3.5)$$

Hier sollen aber die oben genannten Zerfallsarten genügen.

Die meisten bekannten Teilchen zerfallen spontan, also ohne Einwirkung von außen. Für die Zerfallsrate gilt dann:

$$\frac{d}{dt} N(t) = -\lambda N(t) \quad (3.6)$$

λ ist die sog. Zerfallskonstante. Sie bestimmt die Zerfallsrate und hat die Dimension $[\frac{1}{s}]$. Gleichung (3.6) wird gelöst durch:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (3.7)$$

Man nennt

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad (3.8)$$

die **Lebensdauer**. Nach dieser Zeit ist die Anzahl der Teilchen auf $\frac{1}{e}$ der ursprünglichen Anzahl abgesunken. Außerdem manchmal sinnvoll ist die Größe

$$T_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2 \quad (3.9)$$

Dies ist die sogenannte **Halbwertszeit**. Analog zu τ gibt sie die Zeit an, nach der die Anzahl auf die Hälfte abgefallen ist.

$N(t)$ wird meist über die **Zerfallsintensität** gemessen:

$$I(t) = -\frac{d}{dt}N = N_0 \lambda e^{-\lambda t} = I_0 e^{-\lambda t} \quad (3.10)$$

(Dies hat eine ähnliche Form, wie das Lambert-Beersche Gesetz für die Absorption von Photonen $I(x) = I_0 e^{-\mu x}$)

Zerfall ist ein statistischer Prozess. Betrachtet man ein einzelnes Teilchen, so bezieht sich τ auf die mittlere Zeit, bis der Zerfall stattfindet. (Genauso, wie $\frac{1}{\mu}$ die mittlere Distanz ist nach der das Photon absorbiert wird.) Die wahrscheinlichste Zeit für den Zerfall ist trotzdem $t = 0$!

Die Wahrscheinlichkeit in einem bestimmten Zeitintervall n Zerfälle zu beobachten wird durch die Poissonverteilung:

$$P(n, \bar{n}) = \frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!} \quad (3.11)$$

, wobei \bar{n} die mittlere Anzahl von Zerfällen im Intervall ist.

Charakteristisch für die Poissonverteilung ist, dass die Standardabweichung durch

$$\sigma = \sqrt{\bar{n}} \quad (3.12)$$

gegeben ist.

3.2 Fermis Goldene Regel und Phasenraum

Im Folgenden soll basierend auf der Störungstheorie (\rightarrow PTP4) die Übergangsrate von Zustand α nach Zustand β berechnet werden. Vorausgesetzt wird dabei, dass die Wechselwirkung, die für den Übergang verantwortlich ist schwach ist. Es soll also

$$H = H_0 + H_{int} \quad (3.13)$$

$$\text{mit } H_{int} \ll H_0 \quad (3.14)$$

für den Hamiltonoperator gelten. So können α und β in der von H_0 gegebenen Basis entwickelt werden.

Für die Übergangsrate $|\alpha\rangle \rightarrow |\beta\rangle$ gilt dann

$$W_{\alpha\beta} = \frac{dP}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Psi_\beta | H_{int} | \Psi_\alpha \rangle|^2 \rho(E) \quad (3.15)$$

$\rho(E)$ ist die Anzahl von Endzuständen pro Energieintervall. $\frac{1}{W_{\alpha\beta}}$ ist die Lebensdauer(, wenn nicht noch andere Zustände möglich sind). Die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit (W) kann also über die Messung der Lebensdauer oder der Energiebreite $\delta E = \frac{\hbar}{\tau}$ gemessen werden.

Nochmal zur Größe $\rho(E)$: Im 6-dimensionalen Phasenraum (x, y, z, p_x, p_y, p_z) werden wegen der Unschärferelation Punkte durch kleine Volumina $(2\pi\hbar)^3$ ersetzt. Für ein Teilchen in 3 Dimensionen, dass sich im Volumen V befindet ergibt sich dann für die Zustände pro Energieintervall:

$$\rho(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{V E p c}{2\pi^2 (\hbar c^3)} \quad (3.16)$$

3.3 Reaktionsrate

Fermis goldene Regel gibt einem also die Übergangsrate und damit τ bzw. λ für das entsprechende Zerfallsgesetz.

Wenn Teilchen durch Kollision reagieren, wie zum Beispiel bei **Rutherford-streuung** unter einem Winkel θ , so ist die Rate an Streuereignissen gegeben durch:

- den einfallenden Teilchenfluss N_b (b für beam)
- die Anzahl von Streuzentren pro Flächeneinheit N_t (t für target)
- den Wirkungsquerschnitt σ

Nach der mittleren freien Weglänge

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} \quad (3.17)$$

kommt es typischerweise zur Streuung. Hier ist n die Dichte der Streuzentren. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einfallendes Teilchen gestreut wird ist dann:

$$P = 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (3.18)$$

Für “dünne Targets” ($x \ll \lambda$) kann dann genähert werden:

$$P \approx \frac{x}{\lambda} = \sigma n x \quad (3.19)$$

Die **Reaktionsrate** ist definiert als:

$$R = N_b N_t \sigma = \frac{\# \text{Beamteilchen}}{\text{Zeit}} \frac{\# \text{Targetteilchen}}{\text{Fläche}} \sigma = \mathcal{L} \sigma \quad (3.20)$$

wobei \mathcal{L} die sog. Luminosität ist. Die Luminosität $\mathcal{L} [\frac{1}{m^2 s}]$ eines Speicherrings ergibt sich aus den Anzahlen N_1 und N_2 der Teilchen in den aufeinandertreffenden Bunches und der Anzahl n der Bunches, die mit der Frequenz f zur Kollision gebracht werden. Die Teilchenpakete haben die Querschnittsfläche A :

$$\mathcal{L} = \frac{n N_1 N_2 f}{A} \quad (3.21)$$

Die Luminosität mal den Wirkungsquerschnitt ergibt die Reaktionsrate

$$\mathcal{L} \sigma = R \quad (3.22)$$

Die integrierte Luminosität mal den Wirkungsquerschnitt gibt einem dann die Anzahl an Reaktionen:

$$(\int \mathcal{L} dt) \sigma = \# Rkt \quad (3.23)$$

3.4 Wirkungsquerschnitt

Der Wirkungsquerschnitt σ kann für alle möglichen Prozesse (Streuung, Absorption, Reaktion...) definiert werden. Sind mehrere Prozesse möglich so addieren sich die Wirkungsquerschnitte:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{inel} + \dots \quad (3.24)$$

Typischerweise ist der Wirkungsquerschnitt winkelabhängig. Man betrachtet deshalb häufig den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und differentielle Raten $\frac{dR}{d\Omega}$. Für inelastische Prozesse ist dann der doppelt differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE}$. Es gilt dann

$$\sigma_{tot} = \int_0^\infty \int_{4\pi} \frac{d\sigma(E, \theta)}{d\Omega dE} d\Omega dE \quad (3.25)$$

Der **geometrische Wirkungsquerschnitt** ist die effektive Querschnittsfläche die die Targetteilchen zur Verfügung stellen. Sie ist manchmal eine gute Näherung für den Wirkungsquerschnitt, wenn die involvierten Abstände ungefähr der Wechselwirkungslänge entsprechen (z.B. bei hochenergetischen Proton-Proton-Streuungen).

Der totale Wirkungsquerschnitt ist definiert als

$$\sigma_{tot} = \frac{\#Rkt/Zeit}{(\#Beamteilchen/Zeit)(\#Targeteilchen/Flaeche)} \quad (3.26)$$

Er wird häufig in der Einheit barn angegeben. Es gilt

$$1b = 10^{-28}m^2 \quad (3.27)$$

3.5 Feynman - Diagramme

Feldquanten sind Quanten, die Wechselwirkung vermitteln. Photonen (γ) vermitteln die elektromagnetische Wechselwirkung, W- und Z- Bosonen die schwache und Gluonen (g) die starke Wechselwirkung.

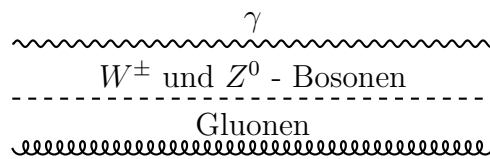


Abbildung 5: Austauschteilchen

Das Konzept kann anschaulich durch sogenannte **Feynman Diagramme** visualisiert werden. Sie wurden in den 1940ern von Richard Feynman entwickelt und sind eine elegante Methode, Übergänge und Wechselwirkung bildhaft und eindeutig darzustellen.

Die Zeitachse zeigt im folgenden nach unten. Reelle Teilchen sind Strahlen in positive Zeitrichtung. Antiteilchen sind Strahlen in negative Zeitrichtung. Die inneren Linien(, die im Diagramm beginnen und enden) nennt man Propagatoren und deutet sie als virtuelle Teilchen (Abbildung (5)). Für sie muss die Energie-Impuls Beziehung nicht erfüllt sein.

Punkte an denen drei oder mehr Linien zusammenkommen heißen **Vertex**. Ein Vertex mit angrenzende Linien beschreibt Absorption oder Emission eines Teilchens, wobei Erhaltungssätze gelten. Jeder Vertex ist durch eine Kopplungskonstante charakterisiert, die durch die Wechselwirkung gegeben ist. Für die elektromagnetische WW ist zum Beispiel $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$. Das Übergangsmatrixelement ist proportional zu $\sqrt{\alpha}$ und damit die Übergangswahrscheinlichkeit proportional zu α für jeden Vertex.

Abbildung (6) zeigt eine mögliche Wechselwirkung zwischen einem Elektron und einem Positron.

Zwei Ereignisse haben ein **raumartiges** Verhältnis zueinander, wenn man ein Bezugssystem findet(, das sich mit $v < c$ bewegt) in dem die Ereignisse gleichzeitig passieren(, aber an unterschiedlichen Punkten im Raum). Zwischen Elek-

tron und Positron ist auch so ein Prozess möglich, wie im nächsten Bild in (6) verdeutlicht ist.

Zwei Ereignisse haben ein **zeitartiges** Verhältnis zueinander, wenn es ein Bezugssystem gibt indem die Ereignisse am selben Punkt im Raum passieren, aber immer zu verschiedenen Zeiten.

Für einen Prozess kann es (unendliche) viele mögliche Feynman-Diagramme geben, die alle im Übergangsmatrixelement mitberücksichtigt werden müssen. Kompliziertere Diagramme sind dabei weniger wichtig(, da unwahrscheinlicher) und werden als **Diagramme höherer Ordnung** bezeichnet. Ausgetauschte Teilchen tragen zusätzlich einen Propagator-Term

$$\frac{1}{Q^2 + M^2 c^2} \quad (3.28)$$

bei, wobei Q^2 das Quadrat des Viererimpulses ist, der übertragen wird und M die Masse des Austauschteilchens. Beim Austausch eines virtuellen Photons bewirkt dies einen Faktor $\frac{1}{Q^2}$ im Übergangsmatrixelement und damit einen Faktor $\frac{1}{Q^4}$ im Wirkungsquerschnitt. Aufgrund der großen Masse des ausgetauschten Vektorbosons bei schwacher Wechselwirkung ist der Wirkungsquerschnitt für die schwache Wechselwirkung sehr viel geringer als die für die elektromagnetische, außer man geht zu sehr hohen Impulsüberträgen, die in der Größenordnung der Masse der Vektorbosonen liegen.

4 Wechselwirkung von Teilchen mit Materie

Bewegen sich Ladungen in Materie so übt das E-Feld Kraft auf gebundene Elektronen aus und überträgt Impuls, sie können also ionisieren. Das Integral über den Impulsübertrag ergibt dann den Energieverlust.

4.1 Schwere Teilchen in Materie

Im Folgenden interessieren uns v.A. schwere geladene Teilchen, wie Protonen, Atomkerne oder Myonen ($mc^2 \gg m_e c^2$). Die wichtigste Art des Energieverlusts liegt bei $T \ll$ einige hundert MeV.

Die klassische Herleitung hat Bohr (1913) veröffentlicht. Die quantenmechanische Herleitung stammt von H. Bethe und Bloch (1930/33). Die **Bethe-Bloch Formel** lautet:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{n4\pi z^2 e^4}{m_e c^2 \beta^2} \left(\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} - \beta^2 \right) \quad (4.1)$$

Sie besagt, dass die Energie dE über die Distanz dx abgegeben wird, wenn Teilchen mit Ladung ze und Geschwindigkeit β durch Medium mit Elektronendichte $n = \frac{\rho Z N_A}{M}$ und Ionisationsenergie I propagiert.

Bei kleinen β erfolgt der Abfall mit $\frac{1}{\beta^2}$. Der Energieverlust erreicht ein breites Minimum bei $\beta\gamma = \frac{pc}{m_e c^2} \approx 3 - 3.5$.

Rechnet man die Lorentzkontraktion des elektrischen Felds und die Polarisaton des Mediums mit ein so ergibt dies eine Dämpfung des logarithmischen Anstiegs. Die Polarisaton ist größer (und damit der logarithmische Anstieg kleiner) in Flüssigkeiten & Festkörpern ($\approx 20\%$) als in Gasen ($\approx 50\%$). Teilchen mit $\beta\gamma \approx 3$ (minimal ionisierende Teilchen) verlieren etwa $1.2 - 1.8 \frac{\text{MeV cm}^2}{g}$.

i.A wird $\frac{dE}{dx}$ nicht in $\frac{\text{MeV}}{\text{cm}}$ angegeben, da es dann sehr starke Unterschiede je nach Material gibt, sondern es wird durch die Dichte dividiert und in der Einheit $\frac{\text{MeV cm}^2}{g}$ angegeben.

Bei sehr kleiner Energie fällt $\frac{dE}{dx}$ wegen Elektroneneinfang wieder ab und schließlich ist keine Ionisation mehr möglich.

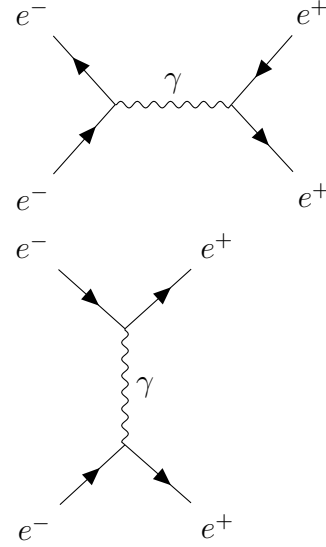


Abbildung 6: Elektron-Positron Wechselwirkung

4.2 Elektronen in Materie

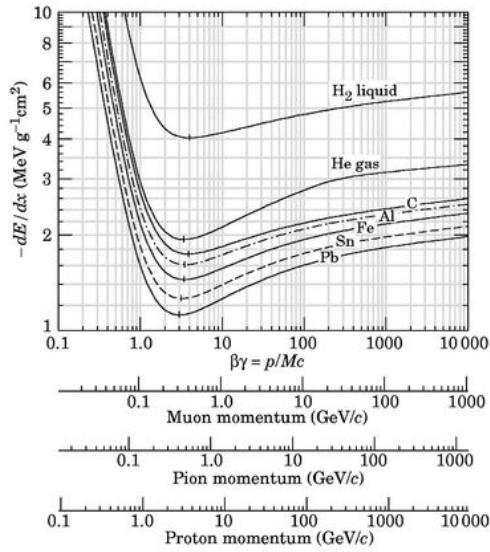


Abbildung 7: Bethe-Bloch Formel

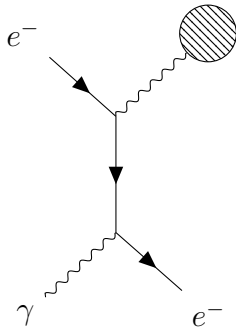


Abbildung 8: Bremsstrahlung. Hier wird die Bewegung des Kerns vernachlässigt

Die Bethe-Bloch Formel muss wegen dem Pauliprinzip und relativistischer Effekte(, die wegen ihrer kleinen Masse leichter auftreten) für Elektronen korrigiert werden. Die Energieverluste von Elektronen und Protonen sind trotzdem bei gleichem β innerhalb von etwa 10% gleich.

Für Elektronen mit hoher Energie überwiegt ein anderer Mechanismus - die **Bremsstrahlung**. Im Medium wird das Elektron im Coulombfeld eines Atomkerns beschleunigt und emittiert dabei Photonen. Das Feynman-Diagramm in Abbildung (8) zeigt diesen Prozess.

Dies wird beschrieben durch:

$$-\left(\frac{dE}{dx}\right)_{Brems} = \frac{E}{X_0} \quad (4.2)$$

, wobei X_0 die materialabhängige charakteristische Länge ist, über die die Energie auf $\frac{1}{e}$ abgefallen ist. Die Bremsstrahlung dominiert für Energien $\geq 580 MeV/Z$.

4.3 Hadronen hoher Energie in Materie

Ist es für Protonen energetisch möglich Hadronen zu produzieren, dominiert die starke Wechselwirkung über die elektromagnetische. Das leichteste Hadron ist das Pion mit $m_\pi c^2 \approx 140 \text{ MeV}$.

$$p + p \rightarrow p + p + \pi \quad (4.3)$$

und bei höheren Energien:

$$p + p \rightarrow p + p + n\pi \quad (4.4)$$

Bei höheren Energien dominiert der inelastische Wirkungsquerschnitt. dafür is that supposed to mean?

$$\sigma \approx 30 \text{ mb} \quad \text{bei} \quad \sqrt{s} \approx 10 \text{ GeV} \quad (4.5)$$

$$\sigma \approx 80 \text{ mb} \quad \text{bei} \quad \sqrt{s} \approx 10 \text{ TeV} \quad (4.6)$$

Dies ist für alle stark wechselwirkenden Teilchen (Hadronen) möglich. Die entstehenden Partonen wechselwirken selber stark im Medium und produzieren mehr Pionen und es kommt zum sog. **Hadronischer Schauer** aus hauptsächlich Nukleonen und Pionen. Die Ausdehnung ist durch die Weglänge charakterisiert, auf der typischerweise eine starke Wechselwirkung passiert, die sog. **nukleare Wechselwirkungslänge**:

$$\lambda_{int} = \frac{1}{\rho\sigma} \quad (4.7)$$

mit der Teilchendichte des Targets ρ .

4.4 Photonen in Materie

Hier gilt das Lambert-Beersche Gesetz:

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (4.8)$$

Das Verhalten ist also durch den Absorptionskoeffizienten μ gegeben. Auch hier dividiert man typischerweise durch die Dichte und erhält den Massenabsorptionskoeffizienten $\mu' = \frac{\mu}{\rho}$. In den Koeffizienten spielen hauptsächlich drei Prozesse mit ein:

Wechselwirkung von Photonen:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{tot}} &= \sigma_{ph} + \sigma_c + \sigma_p \\ \mu &= \mu_{ph} + \mu_c + \mu_p \\ \mu_i &= n\sigma_i = \frac{N_A \rho}{A} \sigma_i\end{aligned}$$

kohärente Streuung am ganzen Atom, weder Ionisation noch Anregung, nicht wichtig als Energieverlustmechanismus

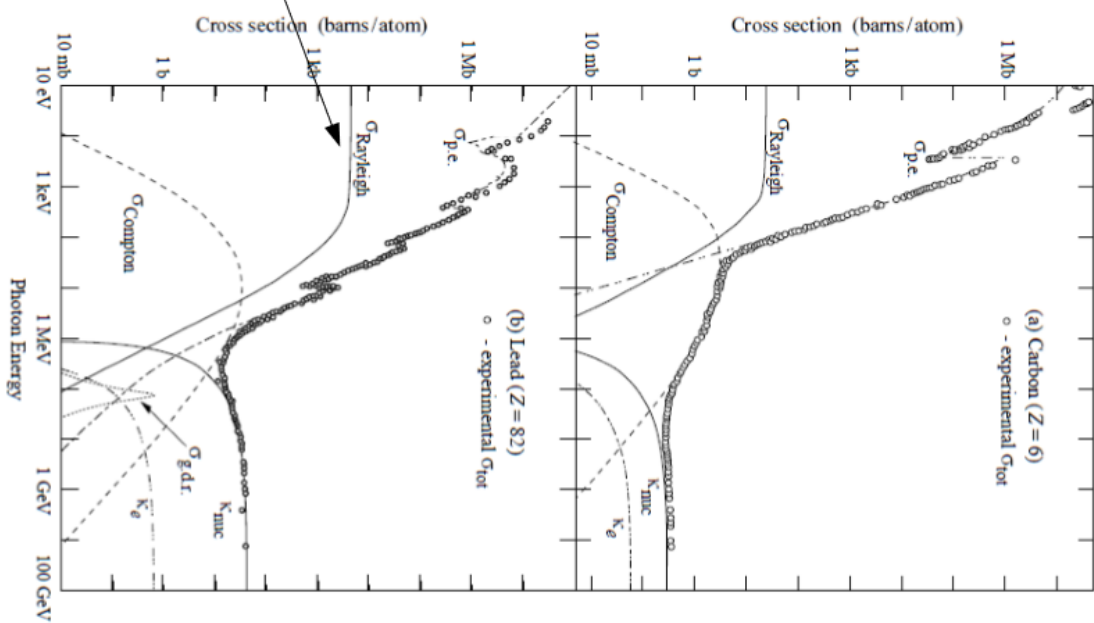
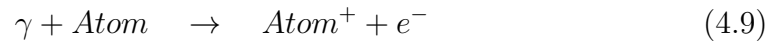


Fig. 3.3

Abbildung 9: Wechselwirkung von Photonen mit Materie

Beim **Photoeffekt** schlägt ein Photon ein Elektron aus der Atomhülle:



Dies ist natürlich nur möglich, wenn die Photonenenergie größer als die Bindungsenergie des Elektrons ist. Es kommt zu Absorptionskanten, wie sie in Abbildung (9) zu sehen sind. Sie treten immer auf, wenn die Photonenenergie ausreicht um eine neue Schale anzuregen.

Beim **Comptoneffekt** wird das Photon an einem quasifreien Elektron gestreut.

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta) \leq \frac{2}{m_e c^2} \quad (4.10)$$

Bei totaler Rückstreuung kommt es zum maximalen Energieverlust.

Der Wirkungsquerschnitt ergibt sich aus der QED für $E_\gamma \gg m_e c^2$:

$$\sigma_c \approx \frac{\alpha^2 Z (\hbar c)^2}{E_{cm}^2} \quad (4.11) \quad \text{Abbildung 10:}$$

Der Compton Effekt dominiert für etwa $0.1 - 10 MeV$ bei kleinen Kernladungszahlen Z und $1 - 3 MeV$ bei großen Z .

Außerdem kann es zur **Paarbildung** kommen. Dies ist (wegen Impulserhaltung) im freien Raum nicht möglich, allerdings in der Umgebung eines Atomkerns, der den Rückstoß aufnimmt.

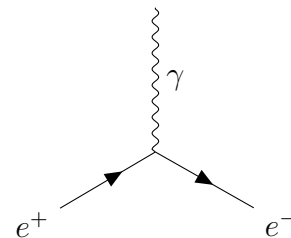
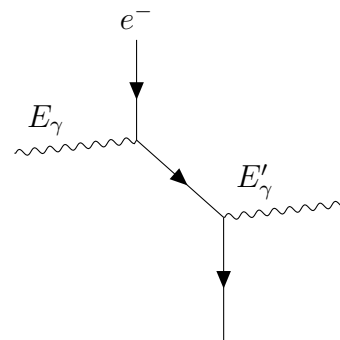
Hierbei zerfällt ein Photon in ein Elektron - Positron - Paar. Dies ist möglich für

$$E_\gamma \geq 2m_e c^2 + 2 \frac{(m_e c^2)^2}{m_k c^2} \approx 1.022 MeV \quad (4.12) \quad \text{Abbildung 11:}$$

Paarbildung

Damit dominiert der Prozess ab etwa $10 - 100 MeV$.

Bei hoher Energie bildet sich dann ein sog. elektromagnetischer Schauer. Photonen zerfallen in $e^+ e^-$ -Paare und diese emittieren Bremsstrahlungsphotonen, die dann wieder Paare bilden usw. bis die Energie nicht mehr reicht. ($\approx 10 X_0$)



5 Teilchendetektoren

Experimente in der Kern und Teilchenphysik weisen gestreute oder produzierte Teilchen nach und bestimmen dessen Impuls oder Energie und Identität.

5.1 Impulsmessung

Um den Impuls geladener Teilchen zu messen kann ein einfaches homogenes Magnetfeld verwendet werden. Geladene Teilchen beschreiben unter der Lorentzkraft eine Kreisbahn³ mit Krümmungsradius ϱ . Durch Messung der Spur an mindestens zwei Punkten (z.B. vor und nach dem Magnetfeld) kann ϱ und damit der Impuls senkrecht zum Magnetfeld bestimmt werden.

5.2 Energiemessung

³Spiralbahn, wenn die Teilchen nicht ganz senkrecht zum Magnetfeld fliegen

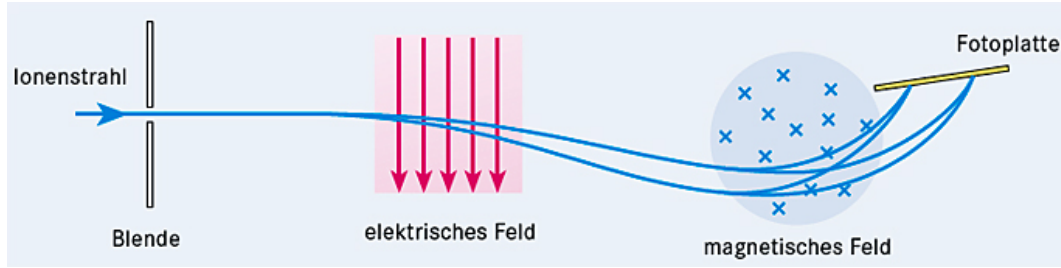


Abbildung 12: Astonsches Massenspektrometer

6 Charakterisierung von Elementarteilchen

6.1 Masse

Die Masse ist charakteristisch für jede Teilchensorte. Je nach Teilcheneigenschaften wird sie anders gemessen: Für stabile geladene Teilchen kann das **Aston'sches Massenspektrometer** verwendet werden. Man betrachte dazu Abbildung 12. Hier werden die Teilchen (in x-Richtung) mit hohen Geschwindigkeiten nacheinander zuerst durch ein senkrecht zum Teilchenstrahl stehendes E-Feld (in y-Richtung) und anschließend durch ein senkrecht dazu stehendes B-Feld (in z-Richtung) geschickt. Im E-Feld werden die Teilchen in y-Richtung abgelenkt und haben wenn sie in das B-Feld eintreten eine Geschwindigkeit in y-Richtung von:

$$v_y = \frac{qEL_E}{mv_x} \quad (6.1)$$

Im B-Feld erfahren die Teilchen dann eine weitere Ablenkung in der x-y-Ebene. Für den Winkel unter dem die Teilchen dann im Detektor eintreffen gilt dann:

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{q}{m} \left(\frac{EL_E}{v_x^2} + \frac{BL_B}{v_x} \right) \quad (6.2)$$

Für genaueste Messungen von Kernmassen werden Teilchen heute in Ionenfallen gefangen. In einem Magnetfeld mit einem elektrischen Quadrupolfeld kann bei sehr genauer Kenntnis des Feldes aus genauer Messung der Oszillationsfrequenz die Masse bestimmt werden.

Für instabile Teilchen kann aus der mittleren Lebensdauer und Messung des Impulses und der Flugzeit auf die Masse geschlossen werden.

Für instabile Teilchen, die sehr kurzlebig sind kann die invariante Masse aus den Impulsen der Zerfallsprodukte rekonstruiert werden.

Ist die Masse eines Mutter- oder Tochterteilchens bekannt so kann über die Messung der Zerfallsenergie auf die Masse geschlossen werden.

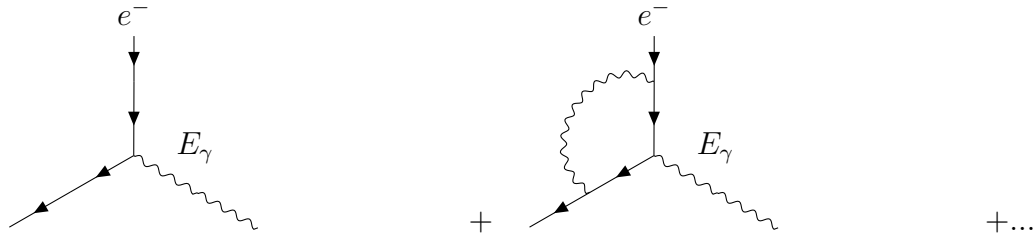


Abbildung 13: Korrekturen aus der QED

6.2 Spin

Mit dem Spin \vec{S} eines Teilchens ist ein magnetisches Moment verbunden:

$$\vec{\mu}_s = \frac{g_s \mu}{\hbar} \vec{S} \quad (6.3)$$

Hierbei ist g_s der Lande Faktor (auch gyromagnetischer Faktor oder g-Faktor genannt)⁴, und $\mu = \frac{q\hbar}{2mc}$ das Magneton des Teilchens.

Aus der relativistischen Beschreibung des Elektrons durch die Dirac-Gleichung erhielt man theoretisch $g_e = 2$. Experimente zeigten jedoch geringe Abweichungen, die damals nicht erklärt werden konnten. Die Dirac-Gleichung berücksichtigt nicht die mögliche Erzeugung und Vernichtung von Photonen und Elektron-Positron-Paaren. Die Quantenelektrodynamik berücksichtigt diese Phänomene und kommt damit auf $g_s = 2.002319...$ Wenn ein Teilchen zudem Bahndrehimpuls hat, dann gilt:

$$\vec{\mu} = \vec{\mu}_s + \vec{\mu}_l \quad (6.4)$$

Dies kann für Elektronen in Atomen in Form des Zeeman-Effekts beobachtet werden, wenn sich Spektrallinien in Anwesenheit eines äußeren Magnetfelds aufspalten.

Teilchen mit halbzahligen Spin heißen **Fermionen**. Sie folgen der **Fermi-Dirac Statistik**:

$$\rho(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1} \quad (6.5)$$

⁴Achtung! Fehler im Originalskript. Das gyromagnetische Verhältnis ist was anderes. Siehe Anhang

Teilchen mit ganzzahligem Spin heißen **Bosonen**. Sie werden durch die **Bose-Einstein Statistik** beschrieben:

$$\rho(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} - 1} \quad (6.6)$$

Wellenfunktionen für Systeme aus Fermionen sind antisymmetrisch für Systeme aus Bosonen symmetrisch unter Teilchenvertauschung.

6.3 Wechselwirkungen

Es gibt vier fundamentale Kräfte. Die Stärke ist jeweils durch eine dimensionslose Kopplungskonstante gegeben. Die folgende Tabelle zeigt eine Übersicht über diese Kräfte:

	Starke WW	Elektromagnetismus	Schwache WW	Gravitation
Eichboson	Gluonen	Photonen	W^+, W^- und Z^0 -Bosonen	Graviton ?
Ladung	Farbladung	Elektrische Ladung	(Schwacher) Isospin	Masse
Reichweite	$\approx 10^{-15}$	∞	$\approx 10^{-18}$	∞
α	$\alpha_S = \alpha_S(Q)$ (impulsabh.)	$\alpha_{EM} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$	$\alpha_W = \frac{g^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$???

6.4 Zerfallsbreite

In der Kern- und Elementarteilchenphysik ist die Zerfallsbreite eine Größe, die aus der Lebensdauer kurzlebiger Teilchenzustände (Resonanzen⁶) bestimmt werden kann. Sie gibt die Breite des betreffenden Maximums in der Anregungsfunktion ($\sigma(E)$) an, ist also eine Energieunschärfe.

Nach der Energie-Zeit-Unschärferelation ist die Energie eines Zustandes um-

⁵Die Kopplungsstärke g der schwachen Wechselwirkung ist mit der Elementarladung e über $e = g \sin \Theta_W$ verbunden. Dabei ist $\Theta_W = \arccos\left(\frac{m_W}{m_Z}\right) \approx 28.74^\circ$ der Weinbergwinkel

⁶In der Kernphysik bedeutet **Resonanz**, dass bei einem Stoßvorgang mit bestimmter kinetischer Energie die Stoßpartner kurzzeitig einen *Compoundkern* bilden. Der Wirkungsquerschnitt zeigt bei dieser Energie ein Maximum in der Form einer Lorentz- oder **Breit-Wigner Verteilung**:

$$p(e) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(E - E_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (6.7)$$

Der Peak ist bei E_r und die $FWHM = \Gamma$

so schärfer, je länger seine Lebensdauer ist. Für die Energieunschärfe Γ gilt deshalb:

$$\Gamma = \hbar\lambda = \frac{\hbar}{\tau} \quad (6.8)$$

7 Strukturinformationen aus Streuexperimenten

Bei Streuexperimenten ist man in der Regel an der Verteilung von Masse und Ladung in einem Teilchen interessiert.

Dazu misst man den Wirkungsquerschnitt als Funktion vom Streuwinkel oder Impulsübertrag.

Das Teilchen mit dem man an dem aufzulösenden Teilchen streut muss eine de Brogliewellenlänge haben, die in der Größenordnung der aufzulösenden Struktur liegt.

Quantenmechanisch wird der Wirkungsquerschnitt durch eine Streuamplitude $f(q^2)$ beschrieben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (7.1)$$

7.1 Elastische Streuung

7.1.1 Rutherford Wirkungsquerschnitt

Die Rutherford Streuformel kann angewendet werden, wenn punktförmige Teilchen der Ladung ze mit kinetischer Energie T gegen sehr viel schwerere Teilchen geschossen werden: (Vernachlässige Rückstoß und Spin und rechne nicht-relativistisch)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{(zZe^2)^2}{(4\pi\epsilon_0)^2(4T)^2} \frac{1}{\sin^4 \theta/2} \quad (7.2)$$

θ ist der Streuwinkel. Diese Beziehung kann unter Anderem mit Fermis Goldener Regel erhalten werden.

Relativistisch gilt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} = \frac{Z^2\alpha^2(\hbar c)^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (7.3)$$

wobei jetzt $E = |\vec{p}|c$

7.2 Mott Wirkungsquerschnitt

Der Mott-Wirkungsquerschnitt berücksichtigt den Spin der einfallenden Teilchen (Elektronen).

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott ohne Rueckstoss}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (7.4)$$

Der Mott Wirkungsquerschnitt fällt bei großen Streuwinkeln sehr viel schneller ab als der Rutherford Wirkungsquerschnitt. Für $\beta \rightarrow 1$ kann man nähern:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott ohne Rueckstoss fuer } \beta \rightarrow 1} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (7.5)$$

7.3 Formfaktoren

Tabelle 5.1. Zusammenhang zwischen Ladungsverteilung und Formfaktor für einige kugelsymmetrische Ladungsverteilungen in Born'scher Näherung.

Ladungsverteilung $f(r)$		Formfaktor $F(q^2)$	
Punkt	$\delta(r)/4\pi$	1	konstant
exponentiell	$(a^3/8\pi) \cdot \exp(-ar)$	$(1 + q^2/a^2\hbar^2)^{-2}$	Dipol
Gauß	$(a^2/2\pi)^{3/2} \cdot \exp(-a^2r^2/2)$	$\exp(-q^2/2a^2\hbar^2)$	Gauß
homogene Kugel	$\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$	$3\alpha^{-3}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$ mit $\alpha = q R/\hbar$	oszillierend

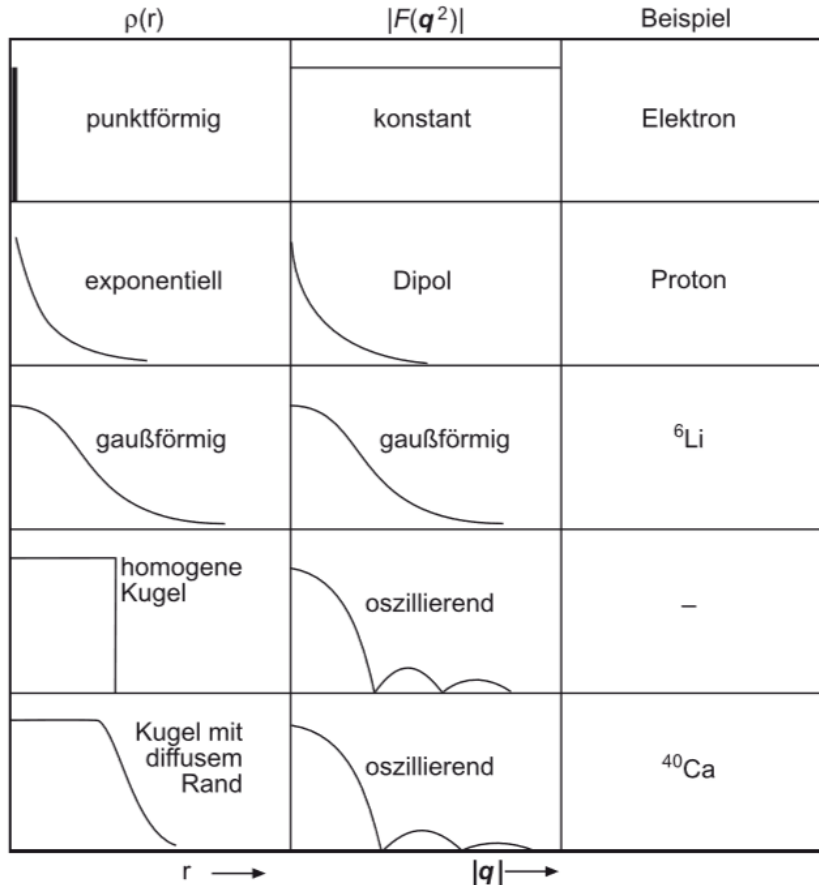


Abbildung 5.6. Zusammenhang zwischen radialer Ladungsverteilung und Formfaktor in Born'scher Näherung. Einem konstanten Formfaktor entspricht eine punktförmige Ladung (z. B. Elektron), einem sogenannten Dipol-Formfaktor eine exponentiell abfallende Ladungsverteilung (z. B. beim Proton), einem gaußförmigen Formfaktor eine ebensolche Ladungsverteilung (z. B. ${}^6\text{Li}$ -Kern) und einem oszillierenden Formfaktor eine homogene Kugel mit mehr oder minder scharfem Rand. Alle Kerne, mit Ausnahme der ganz leichten, haben einen oszillierenden Formfaktor.

Wenn man Streuexperimente an Kernen oder Nukleonen durchführt, stellt man fest, dass der experimentelle Wirkungsquerschnitt nur für $|\vec{q}| \rightarrow 0$ (Impuls)

durch den Mott Wirkungsquerschnitt beschrieben wird. Bei größerem $|\vec{q}|$ sind sie systematisch kleiner. Dies liegt an der Ausdehnung des Targets.

Die räumliche Ausdehnung wird durch den **Formfaktor**

$$F(\vec{q}) = \int e^{i\vec{q}\vec{x}/\hbar} f(\vec{x}) d^3x \quad (7.6)$$

beschrieben, wobei $f(\vec{x})$ die Ladungsverteilung ist. Der Formfaktor ist also die Fourier-Transformierte der Ladungsverteilung und hängt vom Impuls ab, der während der Streuung übertragen wird. Der Formfaktor gibt an, wie die Streuung vom Impulsübertrag abhängt. Durch messung des Formfaktors bei unterschiedlichen Impulsüberträgen lassen sich dann Rückschlüsse auf die Ladungsverteilung des Targets ziehen.

Wenn die Ladungsverteilung kugelsymmetrisch ist, so wird häufig auch $F(\vec{q}^2)$ geschrieben, um zu symbolisieren, dass der Formfaktor nur vom Betrag und nicht von der Richtung abhängt.

Experimentell wird der Betrag des Formfaktors über

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} |F(\vec{q}^2)|^2 \quad (7.7)$$

bestimmt. Für spinlose Teilchen kann hier der Rutherford-Wirkungsquerschnitt verwendet werden.

7.4 Ladungsverteilung in Atomkernen

Die Ladungsverteilung im Atomkern kann in guter Näherung durch die Fermiverteilung

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-c}{a}\right)} \quad (7.8)$$

beschrieben werden. Damit erhält man eine gute Näherung für den Radius von Kernen:

$$R \approx 1.2 A^{\frac{1}{3}} fm \quad (7.9)$$

, wobei A die Massenzahl ist.

7.5 Struktur der Nukleonen

Um die innere Struktur von Nukleonen aufzuklären wurden hauptsächlich Elektronen an Nukleonen gestreut. Es ergeben sich 3 Beiträge zum Wirkungsquerschnitt:

- Wechselwirkung der Ladungen von Nukleon und Elektron

- Wechselwirkung vom Strom des Nukleons mit dem magnetischen Moment des Elektrons
- Wechselwirkung vom Strom des Elektrons mit dem magnetischen Moment des Nukleons

Die ersten beiden Aspekte berücksichtigt der Mott-Wirkungsquerschnitt. Der Dirac-Wirkungsquerschnitt behandelt zusätzlich den letzten Punkt für ein punktförmiges Dirac-Nukleon ($g = 2$) mit Masse m und einem relativistisches Elektron:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rutherford}} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (7.10)$$

Um für die Ausdehnung der Nukleonen zu kompensieren wird der Streuquerschnitt wieder durch Formfaktoren modifiziert. Allerdings muss hier sowohl ein elektrischer als auch ein magnetischer Formfaktor berücksichtigt werden. Rosenbluth-Formel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \left[\frac{G_E^2(q^2) + (q^2/(4M^2c^2))G_M^2(q^2)}{1 + q^2/(4M^2c^2)} + 2\frac{q^2}{2M^2c^2}G_M^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (7.11)$$

(\vec{q} ist der Viererimpulsübertrag)

Um G_E^2 und G_M^2 separat bestimmen zu können, muss man den Wirkungsquerschnitt für feste Werte von q^2 bei verschiedenen Streuwinkeln und damit Strahlenergien messen

7.6 Inelastische Streuung

Bei elastischer Streuung gibt es bei vorgegebener Einschussenergie E nur einen freien Parameter. Ist zum Beispiel der Winkel θ vorgegeben dann sind damit auch das Quadrat des Viererimpulses q^2 , der Energieübertrag ν ... festgelegt. Es gilt

$$2M\nu - q^2 = 0 \quad (7.12)$$

Bei inelastischer Streuung hingegen kommt mit der Anregungsenergie des Protons eine weitere freie Größe hinzu. Deshalb sind Strukturfunktionen und Wirkungsquerschnitt Funktionen zweier unabhängigen freien Parametern, zum Beispiel (E', θ) oder (q^2, ν) . In diesem Fall gilt

$$2M\nu - q^2 > 0 \quad (7.13)$$

Bei inelastischer Streuung wird zwar eine Abhängigkeit von zwei unabhängigen kinematischen Variablen erwartet, die jedoch aufgrund der inneren Struktur

des Protons nicht auftritt, da effektiv an einzelnen Quarks gestreut wird. Für inelastische Elektron-Proton Streuung, mit dem Elektron-Impuls p und dem Protonimpuls P ist

$$x_{\text{Bjorken}} := \frac{q^2}{2pP} = \frac{q^2}{2M\nu} \quad (7.14)$$

Sie ist ein Maß für die Inelastizität des Prozesses. Bei elastischer Streuung ist $x = 1$. Für inelastische Prozesse ist hingegen $0 < x < 1$.

Durch tiefinelastische Streuexperimente hat man herausgefunden, dass das Nukleon eine Unterstruktur aus Spin-1/2-Teilchen besitzt. Dies führte zum Partonenmodell.

8 Der Teilchenzoo

Im Standardmodell der Teilchenphysik gibt es

- sechs Arten Quarks (u, d, c, s, t, b)
- sechs Arten Leptonen ($e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \tau, \nu_\tau$),
- zwölf Arten Austauschteilchen (γ, Z^0 -Boson, W^\pm -Bosonen und 8 Gluonen),
- und das Higgsboson (H),

die später in diesem Kapitel alle nochmal genauer vorgestellt werden.

Quarks und Leptonen werden doppelt gezählt, da sie alle Antiteilchen haben. Zusätzlich können Quarks dreifach gezählt werden, da sie eine (von drei) Farbladungen tragen. Damit kommt man auf insgesamt 61 Arten von Elementarteilchen.

Teilchen werden durch ihre Masse, ihren Spin, ihre Quantenstatistik, ihre elektrische Ladung und einen Satz “ladungsartiger” Quantenzahlen, die WW, denen sie unterliegen und, wenn sie instabil sind, ihre Lebensdauer charakterisiert.

Zu jedem der folgenden Teilchen gibt es ein **Antiteilchen**. Diese haben die gleiche Masse, Lebensdauer und Spin, aber entgegengesetzter Ladung (nicht nur elektrische). Deshalb können sich Teilchen und Antiteilchen annihilieren. Zum Beispiel:

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma \quad (8.1)$$

Als Symbol für Antiteilchen wird das Teilchensymbol meistens mit einem - obendrüber versehen.

8.1 Elementarteilchen

Zuerst sollen die elementaren Fermionen (Leptonen und Quarks) vorgestellt werden. Aus ihnen ist alle Materie aufgebaut, deshalb heißen sie auch Materieteilchen”. Danach kommen wir zu den elementaren Bosonen. Dazu gehören die Eichbosonen (“Kraftteilchen”) und das Higgs-Boson.

8.1.1 Leptonen

Es gibt drei elektrisch negativ geladene und 3 neutrale **Leptonen** und die dazugehörigen 6 Antiteilchen mit entgegengesetzter Ladung. Die Tabelle gibt eine Übersicht über die 3 Generationen von Leptonen (ohne Antiteilchen) und

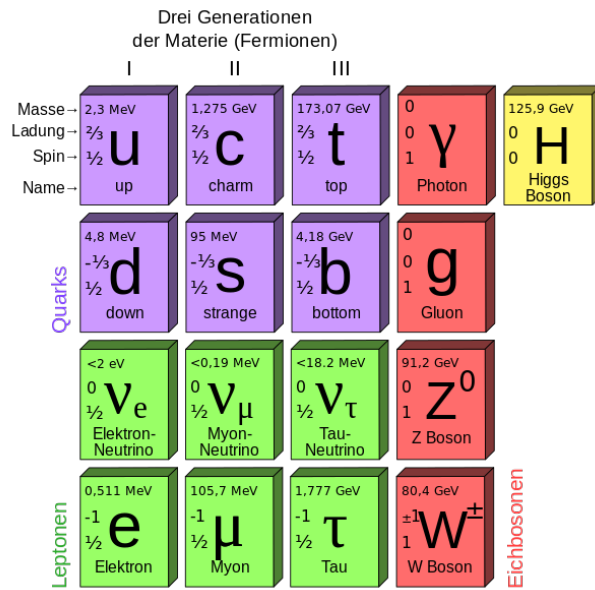


Abbildung 14: Elementarteilchen im Standardmodell (ohne Antiteilchen)

ihre Massen m und Lebensdauern τ :

	Name		m (MeV)	τ (s)	L_e	L_μ	L_τ
1	Elektron	e	≈ 0.51	∞	1	0	0
	Elektron-Neutrino	ν_e	$< 2 \times 10^{-6}$	∞	1	0	0
2	Myon	μ	≈ 110	$\approx 2.2 \times 10^{-6}$	0	1	0
	Myon-Neutrino	ν_μ	< 0.17	∞	0	1	0
3	Tauon	τ	$\approx 1.8 \times 10^3$	$\approx 3.4 \times 10^{-13}$	0	0	1
	Tauon-Neutrino	ν_τ	< 15.5	∞	0	0	1

Die Leptonenzahlen sind ladungsartige Quantenzahlen und Erhaltungsgrößen (soweit messbar). Zum Beispiel gilt für den Myonen-Zerfall:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mu^- & \rightarrow & e^- & + & \bar{\nu}_e & + & \nu_\mu \\
 L_e & 0 & 1 & & -1 & & 0 \\
 L_\mu & 1 & 0 & & 0 & & 1
 \end{array}$$

Alle Leptonen haben den Spin $\frac{1}{2}$ und sind soweit messbar ($< 10^{-18}$) punktförmig.

8.1.2 Quarks

Es gibt sechs **Quarks**. Drei mit Ladung $q = +\frac{2}{3}e$ und drei mit $q = -\frac{1}{3}e$. Alle Quarks haben Spin $s = \frac{1}{2}$. Außerdem hat jedes Quark eine weitere ladungsartige Quantenzahl.

Name		Ladung in e	I_3	C	S	T	B
up	u	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{1}{2}$	0	0	0	0
down	d	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	0
charm	c	$+\frac{2}{3}$	0	+1	0	0	0
strange	s	$-\frac{1}{3}$	0	0	-1	0	0
top	t	$+\frac{2}{3}$	0	0	0	+1	0
bottom	b	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	0	-1

Die Quantenzahlen Isospin I_3 , Strangeness S , Charmness C , Bottomness B und Topness T sind in starker und elektromagnetischer Wechselwirkung erhalten.

Quarks tragen eine zusätzliche Ladung, über die sie wechselwirken. Hier sind die Farbladungen r, g, b und die Antifarben $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$ möglich.

Quarks werden nie frei beobachtet. Sie treten nur gebunden als sogenannte Hadronen auf, auf die wir später zurückkommen.

8.1.3 Austauschteilchen (Eichbosonen)

Sie vermitteln die Wechselwirkung zwischen den bis jetzt vorgestellten Fermionen (Leptonen und Quarks).

Teilchen	Spin	Ladung	vermittelte WW
Photon	1	0	Elektromagnetismus
Z^0 -Boson	1	0	
W^+ -Boson	1	+1	schwache Kraft
W^- -Boson	1	-1	
Gluonen	1	0	starke Kraft
(Graviton?)	(2)	(0)	Gravitation

Das **Photon** kann von jedem Teilchen mit (elektrischer) Ladung erzeugt und vernichtet werden. Es hat weder Masse noch elektrische Ladung.

Die **W- und Z-Bosonen** können von jedem Teilchen mit schwacher Ladung erzeugt und vernichtet werden. Als Vermittler der schwachen Wechselwirkung sind sie bei der Umwandlungsprozessen, in denen sich ein Quark einer Art in ein Quark anderer Art oder ein Lepton einer Art sich in ein Lepton anderer Art umwandelt beteiligt. Sie haben eine große Masse ($\approx 80\text{GeV}(W^\pm)$ bzw. $\approx 91\text{GeV}(Z^0)$). Dies schränkt ihre Reichweite auf $\approx 10^{-18}m$ ein. Deshalb erscheint die schwache Wechselwirkung schwach.

Gluonen können von Teilchen mit Farbladung erzeugt und vernichtet werden.

Neben Quarks tragen auch Gluonen selbst eine Farbladung und eine Antifarbladung. Mehr zu Gluonen kommt in Kapitel 10.

8.1.4 Higgs-Boson

Das **Higgs-Boson** kann von Teilchen mit Masse erzeugt und vernichtet werden. Es soll hier nur der Vollständigkeit halber genannt werden.

8.2 Zusammengesetzte Teilchen

8.2.1 Hadronen

Gebundene Zustände aus Quarks heißen **Hadronen**. Bis auf das Proton (noch keine Zerfälle nachgewiesen) sind alle (freien) Hadronen instabil. Man unterscheidet je nach Spin:

- **Baryonen**, die meist aus drei Quarks unterschiedlicher Farbe bestehen. Sie sind Fermionen. (z.B. Protonen)
- **Mesonen**, die meist aus einem Quark und einem Antiquark entgegengesetzter Farbe bestehen. Sie sind Bosonen. (z.B. Pionen)

Mehr zu Hadronen kommt in Kapitel 11.

9 Farbladungen

Wie bereits in Kapitel 8.1 erwähnt ist die Farbladung eine physikalische Eigenschaft der Quarks und Gluonen an der die starke Kraft angreift.

9.1 Confinement

Confinement nennt man das Phänomen, dass Teilchen mit Farbladung nie einzeln auftreten können sondern stets in farbneutralen/weißen Teilchen gebunden sein müssen.

Man vermutet, dass der Grund darin liegt, dass Gluonen -die Feldquanten der starken Wechselwirkung- selbst eine Farbladung tragen und sich gegenseitig anziehen. Dadurch wird die Energie, die man zum Trennen braucht so groß, dass sie zur Erzeugung von Teilchen-Antiteilchen-Paaren reichen würde, die mit den Teilen wieder farbneutrale Teilchen bilden würden. Dies kann in Teilchenbeschleunigern beobachtet werden, ist jedoch theoretisch noch sehr schlecht verstanden.

10 Mehr zu Gluonen

Gluonen vermitteln die starke Wechselwirkung zwischen Quarks und anderen Gluonen, denn sie tragen selbst eine Farbladung. Aus gruppentheoretischen Überlegungen ergeben sich 8 Basiszustände. Die Wahl ist eine Frage der Konvention. Eine mögliche Wahl ist:

$$r\bar{g}, \quad r\bar{b}, \quad g\bar{b}, \quad g\bar{r}, \quad b\bar{r}, \quad b\bar{g}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b}) \quad (10.1)$$

Das Farbsingulett

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}) \quad (10.2)$$

kann nicht zwischen Farbladungen ausgetauscht werden.

11 Mehr zu Hadronen

Wie bereits in Kapitel 8.1 vorgestellt sind Hadronen farbneutrale Quarkverbindungen und man unterscheidet je nach Spin Baryonen (bestehen i.d.R. aus drei Quarks \rightarrow halbzahliger Spin \rightarrow Fermion) und Mesonen (bestehen i.d.R. aus einem Quark und einem Antiquark \rightarrow ganzzahliger Spin \rightarrow Boson).

Hadronen sind farbneutral (siehe Confinement, Kapitel 9.1). Also müssen Baryonen aus drei verschiedenfarbigen Quarks bestehen und in Mesonen muss das Antiquark die Antifarbe zur Farbe des Quarks tragen.

Das Proton ist das einzig stabile Hadron. Selbst das Neutron zerfällt als freies Teilchen mit einer Lebenszeit von etwa 15min.

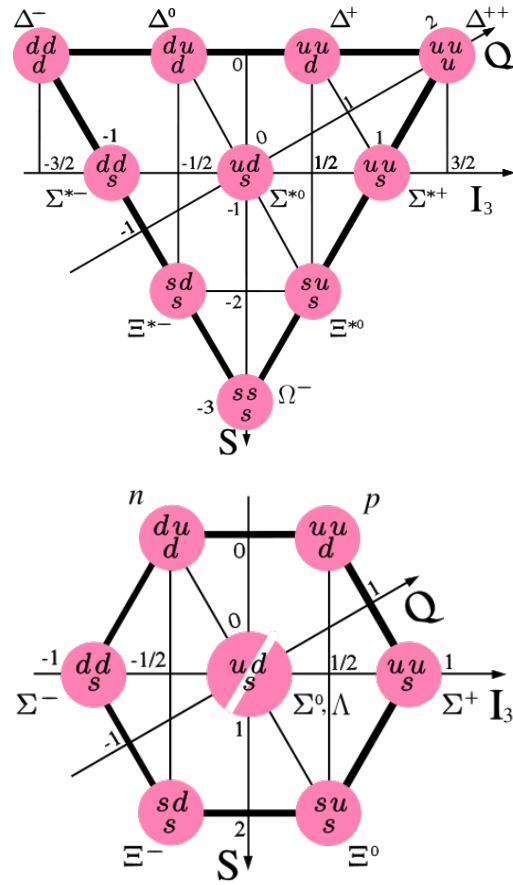


Abbildung 15: Baryon-Multipletts

11.1 Zu Baryonen

Aus tiefinelastischen Streuexperimenten hat man gelernt, dass Baryonen neben den (meist) drei Valenzquarks aus einem See von Quark-Antiquark-Paaren und Gluonen bestehen.

11.1.1 Baryonen-Multipletts

Im Folgenden sollen einige Baryonen, die aus u , d und s Quarks etwas detaillierter besprochen werden. Wir wollen im folgenden immer angenommen, dass Quarks im Grundzustand keinen Bahndrehimpuls haben, also $l = 0$. Der Gesamtdrehimpuls ergibt sich also exklusiv aus den Spins der Quarks ($J = S$) und die Parität ist positiv ($P = +1$).

Baryonen sind Fermionen, haben also eine (unter Vertauschung zweier Quarks)

antisymmetrische Wellenfunktion:

$$\Psi(1, 2, 3) = \psi_{space}(1, 2, 3) \quad \psi_{spin}(1, 2, 3) \quad \psi_{flavor}(1, 2, 3) \quad \psi_{colour}(1, 2, 3) \quad (11.1)$$

Der Gesamtspin S der Baryonen kann zwei Werte annehmen: Die drei Quarkspins $s = \frac{1}{2}$ können zu $S = \frac{1}{2}$ oder $S = \frac{3}{2}$ koppeln. Zu beiden Spins gibt es jeweils ein Multiplett an möglichen Zuständen, die sich aus gruppentheoretischen Überlegungen zur $SU(6)$ -Symmetrie der Quarks ergeben. Die genaue Herleitung soll hier weggelassen werden.

Das **Baryon-Dekuplett** ($J^P = \frac{3}{2}^+$):

Ist $J = \frac{3}{2}$ bedeutet das, dass die Spins der 3 Quarks parallel ausgerichtet sind. Die Spinwellenfunktion ist also symmetrisch unter Teilchenaustausch. Weil $l = 0$ ist auch die Ortswellenfunktion symmetrisch. Jetzt muss entweder die Flavour- oder die Farbwellenfunktion antisymmetrisch sein. Es gibt 10 verschiedene 3-Quark-Systeme mit $J^P = \frac{3}{2}^+$:

- 4 Systeme ohne s Quarks (*Strangeness* = 0):
 $\Delta^{++}(\text{uuu})$, $\Delta^+(\text{uud})$, $\Delta^0(\text{udd})$ und $\Delta^-(\text{ddd})$
- 3 Systeme mit einem s Quark (*Strangeness* = -1):
 $\Sigma^{*+}(\text{uus})$, $\Sigma^{*0}(\text{uds})$, $\Sigma^{*-}(\text{dds})$
- 2 Systeme mit zwei s Quarks (*Strangeness* = -2):
 $\Xi^{*0}(\text{uss})$ und $\Xi^{*-}(\text{dss})$
- 1 System mit drei s Quarks: (*Strangeness* = -3)
 $\Omega^-(\text{sss})$

Das **Baryon-Oktett** ($J^P = \frac{1}{2}^+$):

Um aus drei Quarks ein Baryon mit $J = \frac{1}{2}$ zu erhalten muss der Spin eines der Quarks antiparallel zu den Spins der beiden anderen stehen. Es kann hergeleitet werden, dass 8 solcher Zustände möglich sind:

- Zunächst gibt es die Nukleonen: Das Neutron(udd) und das Proton(uud). Sie enthalten keine s Quarks, haben also *Strangeness* 0. Da sie beide (betragsmäßig) den Isospin $\frac{1}{2}$ haben, kann man sie zu einem Isospinduplett zusammenfassen.
- Für *Strangeness* 1 erhält man ein Isospintriplett: $\Sigma^+(\text{uus})$, $\Sigma^0(\text{uds})$, $\Sigma^-(\text{dds})$ und ein -singulett: $\Lambda^0(\text{uds})$. Die Quarkkombination uds tritt dabei zweimal auf und wird je nach relativer Spinstellung der Quarks zugeordnet. Wenn die Spins und Isospins von u und d Quarks zu 1 koppeln(, wie bei

den anderen Σ -Baryonen) handelt es sich um das Σ^0 . Wenn Spin und Isospin von u und d zu 0 koppeln, ist es ein Λ^0 . Diese beiden Teilchen weisen einen Massenunterschied von ca. $80 \text{ MeV}/c^2$ auf. Die Spin-Spin-Wechselwirkung spielt also eine wichtige Rolle.

- Daneben gibt es ein weiteres Isospindublett mit Isospin $\frac{1}{2}$ aber Strangeness 2: Das $\Xi^0(\text{uss})$ und $\Xi^-(\text{dss})$.

Die genauen Wellenfunktionen sind jedoch noch etwas komplizierter als beim Dekuplett. Zum Beispiel ist die symmetrisierte und normierte Protonwellenfunktion:

$$|p^\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}}(2|u^\uparrow u^\uparrow d^\downarrow\rangle + 2|u^\uparrow d^\downarrow u^\uparrow\rangle + 2|d^\downarrow u^\uparrow u^\uparrow\rangle - |u^\uparrow u^\downarrow d^\uparrow\rangle - |u^\uparrow d^\uparrow u^\downarrow\rangle - |d^\uparrow u^\uparrow u^\downarrow\rangle - |u^\downarrow u^\uparrow d^\uparrow\rangle - |u^\downarrow d^\uparrow u^\uparrow\rangle - |d^\uparrow u^\downarrow u^\uparrow\rangle)$$

Die Wellenfunktion des Neutrons erhält man durch Vertauschen von u und d Quarks.

11.1.2 Nomenklatur

	N	Δ	Λ	Σ	Ξ	Ω
Anzahl d, u-Quarks	3		2		1	0
Stangeness	0		-1		-2	-3
Isospin	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0

Wenn Baryonen statt dem s Quark ein c oder b Quark enthalten wird dies durch einen Index am Symbol angegeben. (Λ_c^+ wäre udc)

Hyperonen sind Baryonen, die s Quarks enthalten

11.2 Zu Mesonen

Mesonen (bestehen aus Quark und Antiquark und)entstehen in hochenergetischen Teilchenkollisionen und haben sehr kurze Lebensdauern.

Mesonen haben Parität $(-1)^{L+1}$. Die Spins von Quark und Antiquark können zu $S = 0$ oder $S = 1$ koppeln.

11.2.1 Mesonen-Multipletts

Wir betrachten im Folgenden wieder nur Mesonzustände ohne Bahndrehimpuls ($L = 0$) und nur aus u,d und s Quarks bestehend.

Mesonen mit $J^P = 0^-$ nennt man **pseudoskalare Mesonen**, die mit $J^P = 1^-$ **Vektormesonen**. Diese Namen kommen aus dem Verhalten der Wellenfunktionen unter Paritätstransformationen⁷. Für eine gegebene Strangeness gruppieren sich die Teilchen in Multipletts bezüglich des Isospins.

11.2.2 Wichtige Mesonen

Die **Pionen**:

Dies sind die leichtesten Mesonen, denn sie bestehen aus u- und d-quarks. Die geladenen Pionen zerfallen fast ausschließlich schwach in ein Myon und ein Myon-Neutrino. Der Zerfall des neutralen Pions erfolgt meistens mittels der elektromagnetischen Wechselwirkung und ist daher sehr viel schneller. Die Endprodukte sind in der Regel zwei Photonen.

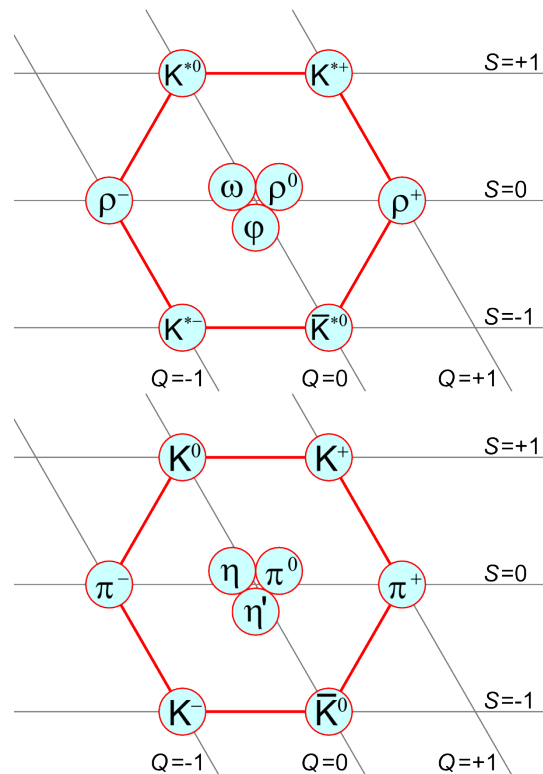


Abbildung 16: Die leichtesten Mesonen. Oben Vektormesonen ($J^P = 1^-$), unten pseudoskalare Mesonen ($J^P = 0^-$)

Zusammensetzung	I_3	Strangeness S
π^+ $u\bar{d}$	+1	0
π^- $\bar{u}d$	-1	0
π^0 $\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	0	0

Die **Kaonen**:

Zusammensetzung	I_3	Strangeness S
K^+ $u\bar{s}$	$+\frac{1}{2}$	+1
K^- $\bar{u}s$	$-\frac{1}{2}$	-1
K^0 $d\bar{s}$	$-\frac{1}{2}$	+1
\bar{K}^0 $\bar{d}s$	$+\frac{1}{2}$	-1

⁷Mehr dazu im Kapitel 12.3.1

Es fehlen noch zwei η -, drei ρ , zwei K^* , das ω und das ϕ -Teilchen.
Alle Vektormesonen zerfallen stark.

11.2.3 Quarkonium

Quarkonia bestehen aus einem Quark und dem dazugehörigen Antiquark. Es handelt sich also um Mesonen ohne Ladung und ohne Flavour.

11.3 Ungewöhnliche Quark-Gluon-Materie

Bei sehr hoher Temperatur gibt es einen Zustand, indem das Confinement aufgehoben wird und sich Quarks und Gluonen ähnlich wie Elektronen und Ionen in einem Plasma bewegen. Dieses **Quark Gluon Plasma** existierte im frühen Universum.

Weitere nennenswerte Phänomene sind Pentaquarks, Tetraquarks und Gluebälle die jedoch hypothetisch sind.

12 Symmetrien und Erhaltungssätze

Anfang des 20ten Jahrhunderts entdeckte Emmy Noether den Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen. Dies ist heute als **Noether-Theorem** bekannt:

Die Invarianz der Wirkung unter einer einparametrigen, stetigen Transformationsgruppe hat die Existenz einer Erhaltungsgröße zur Folge und umgekehrt hat jede Erhaltungsgröße die Existenz einer (mindestens infinitesimalen) Symmetrie der Wirkung zur Folge.

oder kurz:

Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße.

Dies gilt sowohl für klassische als auch für Quantensysteme.

Beispiele für (infinitesimale) Transformationen, die eine Symmetrie definieren sind der Operator der Rotation (\rightarrow Drehimpulserhaltung) und der der Translation (\rightarrow Impulserhaltung).

12.1 Allgemeine Betrachtungen

In der Quantenmechanik wird jede Observable mit einem hermiteschen Operator identifiziert.

$$Q^\dagger = Q \quad (12.1)$$

Die Observable ist erhalten, wenn

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = 0 \quad (12.2)$$

Die Zeitentwicklung eines Operators ist durch das Ehrenfesttheorem gegeben:

$$\frac{d}{dt} \langle Q \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [Q, H] \rangle \quad (12.3)$$

Eine Observable ist also erhalten, wenn der entsprechende Operator mit dem Hamiltonoperator des Systems kommutiert.

Eine Symmetrieoperation sei definiert durch einen Operator U

$$U\Psi(\vec{r}, t) = \Psi'(\vec{r}, t) \quad (12.4)$$

Damit die Normierung der Wellenfunktion garantiert ist, muss U unitär sein

$$U^\dagger = U^{-1} \quad (12.5)$$

U ist ein Symmetrieoperator wenn $U\Psi$ dieselbe Schrödingergleichung erfüllt, wie Ψ . Dies ist gerade dann der Fall, wenn $[U, H] = 0$.

Jetzt gibt es 2 Möglichkeiten:

- Wenn U hermitesch ist, dann gibt es eine entsprechende erhaltene Observable. Dies entspricht einer **diskontinuierlichen Transformation**. Sie führen zu multiplikativen Erhaltungssätzen.
- Wenn U nicht hermitesch ist, kann es einen hermiteschen Operator F geben (Generator), so dass

$$U = e^{i\epsilon F} \quad (12.6)$$

Dann ist der Erwartungswert von F erhalten. Dies entspricht einer **kontinuierlichen Transformation**. Sie führen zu additiven Erhaltungssätzen.

Translation als Beispiel einer kontinuierlichen Transformation:

U^Δ verschiebe das Teilchen um Δ in x :

$$U^\Delta \Psi(x) = \Psi^\Delta(x) \quad (12.7)$$

Translationsinvarianz bedeutet

$$\Psi^\Delta(x + \Delta) = \Psi(x) \quad (12.8)$$

12.2 Additive Erhaltungssätze

- **Erhaltung der elektrischen Ladung:**

$$\sum q_i = \text{konst.} \quad (12.9)$$

wurde von Pauli mit der Eichinvarianz der elektromagnetischen Wechselwirkung bei gleichzeitig unendlicher Reichweite verknüpft. Sie konnte experimentell bis jetzt nicht widerlegt werden.

- **Erhaltung der Baryonenzahl:**

$$\sum B_i = \text{konst.} \quad (12.10)$$

Die Baryonenzahl B ist definiert als die Differenz der Anzahl der Quarks und der Anzahl der Antiquarks, geteilt durch 3:

$$B = \frac{n_q - n_{\bar{q}}}{3} \quad (12.11)$$

Damit ergibt sich:

Teilchen	Baryonenzahl B
Quarks	$+\frac{1}{3}$
Antiquarks	$-\frac{1}{3}$
Baryonen	$+1$
Anitbaryon	-1
Mesonen	0
Leptonen	0
Atomkerne	$N + Z$

Es gibt keinen zwingenden theoretischen Grund für diesen Erhaltungssatz. Man kann nach einer fünften Kraft, die an die Baryonenzahl und die Masse koppelt und unendliche Reichweite hat suchen. Dies würde sich allerdings in einem Unterschied an träger und schwerer Masse äußern. Dieser konnte jedoch nie festgestellt werden. Es handelt sich also nur um eine empirische Regel.

Bestimmte Grand Unified Theories, die einen Protonzerfall vorhersehen erlauben die Verletzung der Baryonenzahlerhaltung. Sie konnten jedoch noch nicht bestätigt werden.

- **Erhaltung der Leptonenzahl**

$$\sum L_i = konst. \quad (12.12)$$

Die Leptonenzahl ist definiert als die Differenz der Anzahl der Leptonen und der Anzahl der Antileptonen in einem System:

$$L = n_l - n_{\bar{l}} \quad (12.13)$$

Analog kann man für jede Generation der Leptonen eine Leptonenfamilienzahl definieren, zu der nur die Teilchen und Antiteilchen der jeweiligen Familie zählen ($L_e, \quad L_\mu, \quad L_\tau$ mit $L_e + L_\mu + L_\tau = L$).

Hier gilt wieder, dass es keinen Grund für den Erhaltungssatz gibt, und dass es sogar Theorien gibt in denen die Leptonenzahl nicht streng erhalten ist. In den meisten GUTs bleibt jedoch wenigstens die Differenz

$B - L$ streng erhalten.

- **Erhaltung der Strangeness**

$$\sum S_i = konst. \quad (12.14)$$

Die Strangeness ist definiert als Differenz zwischen der Anzahl an strange Quarks und der Anzahl an strange Antiquarks mal -1 :

$$S = -(n_s - n_{\bar{s}}) \quad (12.15)$$

Die Strangeness ist für starke und elektromagnetische Wechselwirkung erhalten. Für schwache jedoch nicht.

- **Erhaltung des (starken) Isospins**

$$\sum (I_3)_i = konst. \quad (12.16)$$

Die Quantenzahl I_3 ist wie folgt durch die Anzahl der up und down Quarks und Antiquarks gegeben:

$$I_3 = \frac{1}{2}((n_u - n_{\bar{u}}) - (n_d - n_{\bar{d}})) \quad (12.17)$$

Damit hat das Proton (uud) den Isospin $+\frac{1}{2}$ und das Neutron (udd) den Isospin $-\frac{1}{2}$.

I_3 ist in elektromagnetischer und starker Wechselwirkung erhalten. (I nur bei starker.)

12.3 Multiplikative Erhaltungssätze

12.3.1 Parität

Der Paritätsoperator invertiert alle räumlichen Koordinaten:

$$P\Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r}) \quad (12.18)$$

Ist Ψ eine Eigenfunktion von P , so ist

$$\Psi(-\vec{r}) = \pi\Psi(\vec{r}) \quad (12.19)$$

mit $\pi = \pm 1$. Für $\pi = +1$ spricht man von einem Zustand mit gerader Parität und für $\pi = -1$ von einem Zustand mit ungerader Parität.

- Elementarteilchen sind in Eigenzuständen des Paritätsoperators
- Observablen verhalten sich unterschiedlich unter Paritätstransformation:
 - **Polare Vektoren** (z.B. $\vec{r}, \vec{p}, \vec{E}$) ändern ihr Vorzeichen unter Paritätstransformationen ($\pi = -1$)
 - **Axiale Vektoren** (z.B. $\vec{L}, \vec{S}, \vec{B}$) ändern ihr Vorzeichen nicht ($\pi = +1$)
 - Skalarprodukte aus rein polaren oder aus rein axialen Vektoren sind invariant unter P. Man spricht von **echten Skalaren** ($\pi = +1$).
 - "Gemischte Skalarprodukte ändern wieder ihr Vorzeichen unter P. Man spricht von **Pseudoskalaren** ($\pi = -1$).
- Die Kugelflächenfunktionen haben Parität $(-1)^l$
- Die Parität ist eine multiplikative Quantenzahl. Bei Paritätserhaltung in Vielteilchensystemen ist deshalb das Produkt der Einzelparitäten erhalten. Hierbei muss allerdings auch auf die Relativbewegung und dessen Parität geachtet werden.
z.B.: 2-Teilchensystem:

$$\Psi = \Psi_\alpha(\vec{r}_\alpha) \Psi_\beta(\vec{r}_\beta) \Phi(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \quad (12.20)$$

Φ ist dabei der Term für die Relativbewegung.

$$P\Psi = \pi_\alpha \pi_\beta \Psi_\alpha \Psi_\beta P\Phi(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta) \quad (12.21)$$

Kann Φ durch eine Kugelflächenfunktion beschrieben werden, dann

$$= \pi_\alpha \pi_\beta (-1)^l \Psi \quad (12.22)$$

- Bis jetzt haben alle Messungen bestätigt, dass die elektromagnetische und die starke Wechselwirkung die Parität erhalten.
Für Hadronen definiert man

$$\pi_p = \pi_n = \pi_\lambda = +1 \quad (12.23)$$

Andere Paritäten sind dann messbar durch Betrachtung möglicher Prozesse und beachten der Paritätserhaltung.

Die Paritätserhaltung ist in schwacher Wechselwirkung verletzt \rightarrow Wu-Experiment.

12.3.2 Ladungskonjugation

Unter Ladungskonjugation C werden die Vorzeichen aller ladungsartiger Quantenzahlen umgedreht. Deshalb ist insbesondere

$$C^2 = 1 \quad (12.24)$$

Die Eigenwertgleichung sieht so aus:

$$C\Psi = \eta_C\Psi \quad (12.25)$$

mit $\eta_C = \pm 1$. Nur völlig neutrale Systeme/Teilchen können Eigenzustände von C sein. Insbesondere hat das Photon $\eta_C = -1$ ⁸ und das π^0 hat $\eta_C = +1$.

Die starke und die elektromagnetische WW sind invariant unter C . Die schwache WW jedoch nicht. Sie verletzt die C -Invarianz, denn an ihr können nur linkshändige Teilchen und rechtshändige Antiteilchen teilnehmen.

12.3.3 Zeitumkehrinvarianz

Der Zeitumkehroperator T ist antiunitär:

$$T\Psi(t) = \Psi^*(-t) \quad (12.26)$$

12.3.4 CPT-Symmetrie

Man dachte lange, dass unser Universum unter CP -Transformation (der Hintereinanderausführung von C und P) invariant sei, allerdings wissen wir heute, dass dies nicht der Fall ist (Kaonenzerfall).

Heute vermutet man, dass unser Universum unter CPT -Transformation invariant ist. Dies würde sich u.A. darin äußern, dass Massen und Lebensdauern von Teilchen und Antiteilchen identisch sind. Dies konnte bis heute noch nicht widerlegt werden.

⁸n-Photonenzustände haben $\eta_C = (-1)^n$

12.4 Zusammenfassung

	schwache WW	EM-WW	starke WW
Energie	✓	✓	✓
Impuls	✓	✓	✓
Drehimpuls	✓	✓	✓
el. Ladung	✓	✓	✓
Farbe	✓	✓	✓
B	✓	✓	✓
L	✓	✓	✓
Parität	X	✓	✓
I	X	X	✓
I_3	X	✓	✓
S	X	✓	✓
C	X	✓	✓

	C	P	T
\vec{r}	+	-	+
\vec{p}	+	-	-
\vec{l}, \vec{s}	+	+	-
$h = \vec{l}\vec{p}$	+	-	+
Ladungsartige QZ:			
q	-	+	+
L	-	+	+
B	-	+	+
I_3	-	+	+
\vec{E}	-	-	+
\vec{B}	-	+	-

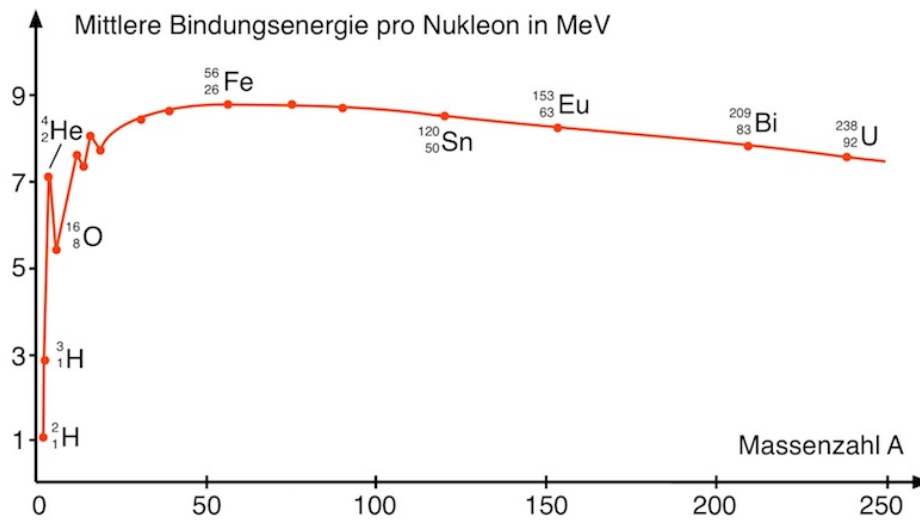


Abbildung 17: Mittlere Bindungsenergie pro Nukleon

13 Bindung und Anregung von Atomkernen

Die Bindungsenergie eines Atoms ist definiert als:

$$B(N, Z) = ZM_Hc^2 + NM_nc^2 - M_{Atom}c^2 \quad (13.1)$$

Wobei $M_n \approx 1.0087u$ die Masse des Neutrons und $M_H \approx 1.0078u$ die des Wasserstoffs ist. Abbildung 17 zeigt die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon (also B/A) für die ersten paar Elemente.

13.1 Tröpfchenmodell

Die Bindungsenergie kann abgeschätzt werden durch die **Weizsäcker Formel**:

$$B = b_V A - b_S A^{\frac{2}{3}} - b_C Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - b_{Sym} \frac{(N - Z)^2}{A} + b_P A^{-\frac{1}{2}} \quad (13.2)$$

- $b_V A$ ist der sog. Volumenterm. Nimmt man die Dichte als konstant an, so ist das Volumen proportional zur Massenzahl. Nähert man, dass immer nur die Wechselwirkung mit direkt benachbarten Nukleonen zur Bindung beiträgt, so ist die Bindungsenergie unabhängig von der Gesamtzahl der Nukleonen. $b_V \approx 15.67 \text{ MeV}$
- $b_S A^{\frac{2}{3}}$ ist der sog. Oberflächenanteil. Er kompensiert dafür, dass Nukleonen an der Oberfläche weniger Nachbarn haben und deshalb weniger zur Bindung beitragen. $b_s \approx 17.23 \text{ MeV}$

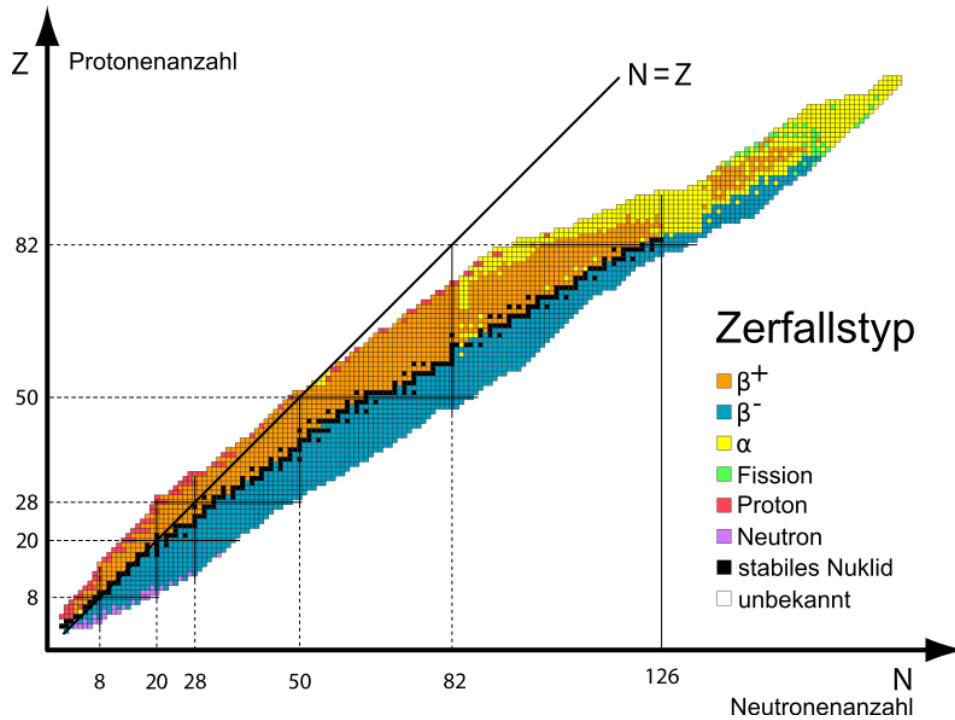


Abbildung 18: Isotopentabelle

- Der Coulombterm $b_C Z^2$ steht für die Abstoßung der Protonen. $b_C \approx 0.717 \text{ MeV}$
- $b_{Sym} \frac{(N-Z)^2}{A}$ ist der Symmetrieterm. Er rechnet den Effekt des Pauliprinzips mit ein. Wegen diesem Effekt sind Kerne mit ähnlich vielen Protonen und Neutronen stabiler. $b_{Sym} \approx 23.2 \text{ MeV}$
- $b_P A^{-\frac{1}{2}}$ ist der Paarterm. Kerne mit gerader Protonenzahl Z und gerader Neutronenzahl N (gg Kerne) sind besonders stabil. Dies wird erklärt durch das Bilden von Neutron-Neutron und Proton-Proton Paaren mit Spin Null.

$$b_P \approx \begin{cases} +11.5 \text{ MeV} & (gg) \\ 0 & (ug, gu) \\ -11.5 \text{ MeV} & (uu) \end{cases} \quad (13.3)$$

Der sog. Massenüberschuss

$$\Delta = M_{N,Z} c^2 - A \times 931.502 \text{ MeV} \quad (13.4)$$

gibt an um wieviel ein Kern gegenüber einem ^{12}C gebunden ist. ($\Delta > 0 \rightarrow$ schwächer gebunden, $\Delta < 0 \rightarrow$ stärker gebunden)

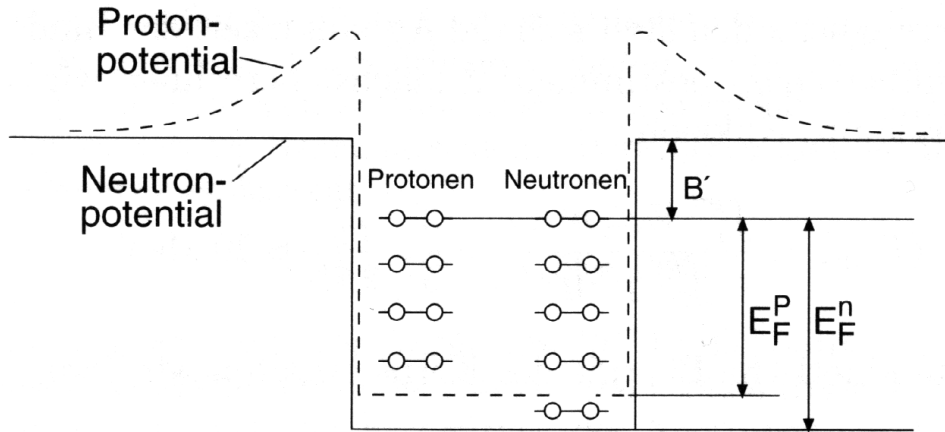


Abbildung 19: Fermigasmodell

$B > 0$ bedeutet, dass ein Atomkern gebunden ist. Die Regionen der gebundenen Kerne ist limitiert durch sog. drip lines, ab denen Kerne stark durch Proton- oder Neutronemission zerfallen.

13.2 Fermigasmodell

Ein simples Modell für Atomkerne ist sich einfach $N+Z$ Fermionen in einem Kugelvolumen mit Radius $r = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ vorzustellen, die sich nur durch das Pauli-Verbot und die Coulomb Wechselwirkung zwischen den Protonen beeinflussen. Abbildung 19 zeigt wie die Potentiallandschaft in diesem Modell qualitativ aussieht. Die zusätzliche Coulombabstoßung der Protonen bedeutet, dass Protonen im Mittel schwächer gebunden sind als Neutronen. Dies erklärt warum schwere Kerne i.A. einen Neutronenüberschuss besitzen (siehe Abbildung 18).

Das Fermigasmodell wird gewöhnlich für große Systeme verwendet (z.B. Leitungselektronen im Metall und Nukleonen im Neutronenstern).

13.3 Magische Zahlen

Nuklide mit bestimmten Neutronenzahlen oder Protonenzahlen sind besonders stabil⁹. Diese Zahlen sind 2, 8, 20, 28, 50, 82 und 126. Man nennt sie **magische Zahlen**. Ein Kern heißt doppelt magisch, wenn seine Protonen- und seine Neutronenzahl magisch sind. Sie sind noch stabiler.

Dies erinnert an abgeschlossene Elektronenschalen und ist Motivation ein ähnliches Schalenmodell für Kerne einzuführen.

⁹Das bedeutet in diesem Zusammenhang nicht zwanghaft, dass sie nicht zerfallen. Viele magische Kerne sind radioaktiv. Man meint damit, dass die Bindungsenergie pro Nukleon besonders hoch ist.

13.4 Schalenmodell

Das Schalenmodell in der Kernphysik stützt sich auf die Drehimpuls-Quantisierung und das Pauli-Prinzip. Als Potential wird das **Woods-Saxon-Potential** verwendet:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left\{\frac{r-R}{a}\right\}} \quad (13.5)$$

Dabei charakterisiert a den Dichteverlauf am Kernrand. Typische Werte sind $V_0 \approx 50 \text{ MeV}$ und $a \approx 0.5 \text{ fm}$.

Für dieses Potential existieren analytische Lösungen der Schrödingergleichung. Man erhält diskrete Energieniveaus - Schalen, die durch die Quantenzahlen n und l parametrisiert werden. Man definiert $N = 2(n - 1) + l$. Zustände mit gleichem N aber unterschiedlichem nl sind beim Wood-Saxon-Potential nicht entartet. Die Anzahl gleicher Teilchen auf einer Schale ist durch das Pauli-Prinzip eingeschränkt.

Wie bei jedem kugelsymmetrischem Potential kann man auch beim Kern die Wellenfunktion der Teilchen in Radial- und Winkelanteil $R_{nl}(r)$ und $Y_l^m(\theta, \phi)$ zerlegen. Wieder erhält man die Quantenzahlen n und l mit der gleichen Nomenklatur ($l = \text{s,p,d,f}, \dots$). Die Energie ist unabhängig von der Quantenzahl $m \in [-l, l]$. Damit sind mit Spinstellungen nl -Niveaus $2(2l + 1)$ -fach entartet. Die Parität der Wellenfunktion ist durch die Kugelflächenfunktion gegeben, deren Parität $(-1)^l$ ist.

Wegen der kurzen Reichweite der starken Wechselwirkung sollte das Potential der Dichteverteilung der Nukleonen folgen. Man kann das Potential durch das eines dreidimensionalen harmonischen Oszillator annähern.

$$V(r) = -V_0\left(1 - \left(\frac{r}{R_0}\right)^2\right) = \frac{1}{2}m\omega_0(r^2 - R_0^2) \quad (13.6)$$

wobei $\hbar\omega_0 \propto A^{-\frac{1}{2}}$. In diesem Fall ist die Schrödingergleichung analytisch lösbar. Die Eigenzustände sind

$$E_N = \hbar\omega_0\left(N + \frac{3}{2}\right) - V_0 \quad (13.7)$$

mit $N = 2(n - 1) + l$. Demnach haben Zustände mit geradem N positive Parität und solche mit ungeradem N negative.

Für leichte Kerne ist dies eine gute Näherung für schwerere ist das Woods-Saxon-Potential besser. Hier sind Zustände mit gleichem N nicht mehr entartet. Mit diesem Modell können die ersten 3 magischen Zahlen erklärt werden, danach versagt das Modell jedoch. Es muss die Spin-Bahn-Kopplung beachtet

N	0	1	2	2	3	3	4	4	4	...
$n\ell$	1s	1p	1d	2s	1f	2p	1g	2d	3s	...
Entartung	2	6	10	2	14	6	18	10	2	...
Zustände mit $E \leq E_{n\ell}$	2	8	18	20	34	40	58	68	70	...

Abbildung 20: Schalenmodell mit dem Woods-Saxon-Potential

werden.

13.5 Spin-Bahn-Kopplung

Ansatz:

$$V(r) = V_{\text{Zentral}}(r) + V_{ls}(r) \frac{\langle \vec{l} \vec{s} \rangle}{\hbar^2} \quad (13.8)$$

Dies führt zu einer Energieaufspaltung

$$\Delta E_{ls} = \frac{a}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \quad (13.9)$$

gerade so, dass $j = l + \frac{1}{2}$ Niveau unterhalb dem zu $j = l - \frac{1}{2}$ liegt.¹⁰

Während die $\vec{l}\vec{s}$ -Kopplung im Atom die Feinstrukturaufspaltung verursacht - eine kleine Korrektur in der Größenordnung α^2 , bewirkt sie im Kernpotential eine große Energieaufspaltung, vergleichbar mit der Trennung der $n\ell$ -Schalen.

13.6 Deformierte Kerne

Kerne mit abgeschlossenen Schalen sind kugelsymmetrisch.

Deformierte Kerne sind Kerne, deren Ladungsverteilung im Grundzustand nicht kugelsymmetrisch ist. Um die Abweichung eines Kerns von der Kugelform zu beschreiben, benutzt man das elektrische Kernquadrupolmoment. Bei positivem Quadrupolmoment handelt es sich um eine zigarrenförmige (oblate), bei negativem um eine linsenförmige (prolate) Ladungsverteilung.

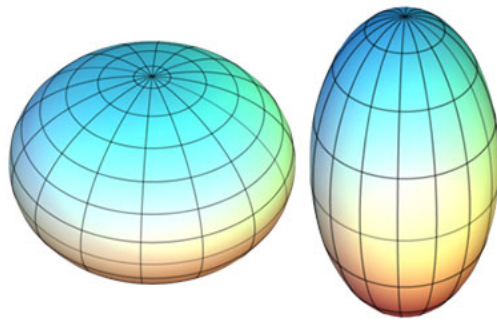


Abbildung 21: Arten von Ellipsoiden

¹⁰In der Atomhülle ist es gerade umgekehrt

14 Kernspaltung und Fusion

14.1 Kernspaltung

Für schwere Kerne ist es energetisch günstig in kleinere Kerne zu zerfallen. Dabei können ca. 200MeV pro Kern gewonnen werden. Viele schwere Kerne sind trotzdem stabil, da die Coulombbarriere für die Spaltung sehr hoch ist, die jedoch durch externe Energie überwunden werden kann.

Man kann auch über die Deformation der Kerne argumentieren. Der Kern muss stark genug deformiert werden, bevor er spaltet und die Coulombrepulsion die Teile auseinandertreibt. Extern zugeführte Energie geht in dieser Betrachtungsweise in die Deformation des Kerns.

Die bei Kernreaktionen frei werdende Energie geht größtenteils in die kinetische Energie der Fragmente ($\approx 80\%$). Wenn bei einer Spaltung im Mittel ein weiteres Neutron entsteht, das schnell genug ist um weitere Kerne anzuregen, so kommt es zu einer Spaltung mit konstanter Rate. Bei mehr als einem spricht man von einer "superkritischen", bei weniger als einem von einer "subkritischen" Rate.

Um Kernspaltung zur Energiegewinnung zu nutzen müssen u.A. folgende Punkte beachtet werden:

- Der Neutronenverlust muss klein genug sein, damit die Reaktion aufrecht erhalten wird. Eine Folge daraus ist, dass man das am häufigsten natürlich vorkommende ${}_{92}^{238}\text{U}$ nicht verwenden kann. Man benötigt angereichertes Uran - d.h. es muss einige Prozent ${}^{235}\text{U}$ enthalten.
- Die Neutronen müssen abgebremst (moderiert) werden. Denn je langsamer das Neutron ist, desto wahrscheinlicher ist es, dass es von einem spaltbaren Kern absorbiert wird. Dazu verwendet man schweres Wasser oder Kohlenstoff.
- Um die Reaktionsrate zu kontrollieren kann je nach Bedarf ein Neutronenabsorber mehr oder weniger weit in den Reaktorkern gebracht werden. Diese Steuerstäbe sind meistens aus Cd oder B
- Die Wärme muss abtransportiert werden \rightarrow Wasserkühlung.

14.2 Elementsynthese im Universum

Ca. $10\mu\text{s}$ nach dem Urknall ist das Universum auf etwa 10^{12}K abgekühlt und es findet ein Phasenübergang statt: Das sog. Quark-Gluon Plasma, bestehend aus

ungebundenen Quarks, Gluonen, Elektronen, Neutrinos und Photonen kristallisiert aus in dem Quarks und Gluonen hadronisieren. Die meisten Hadronen zerfielen schnell. Es blieben Protonen, Neutronen und ihre Antiteilchen. Wegen eines noch nicht erklärten Materieüberschusses blieben nach Annihilation Protonen und Neutronen übrig. Solange die Temperatur hoch genug war bleiben Protonen und Neutronen im Gleichgewicht:

$$\bar{\nu}_e + p \leftrightarrow n + e^+ \quad (14.1)$$

$$\nu_e + n \leftrightarrow p + e^- \quad (14.2)$$

Nach einigen Sekunden ($T < 10^{10} K \cong 0.86 MeV$) begannen die Neutronen zu zerfallen.

Ab $T \leq 1 MeV$ können sich die ersten Atomkerne bilden:

$$p^+ + n \rightarrow d^+ + \gamma \quad (14.3)$$

$$d^+ + p^+ \rightarrow {}^3He^{2+} + \gamma \quad (14.4)$$

$${}^3He^{2+} + {}^3He^{2+} \rightarrow {}^4He^{2+} + 2p^+ \quad (14.5)$$

und ganz wenig:

$${}^4_2He^{2+} + {}^3_1H^+ \rightarrow {}^7_3Li^{3+} + \gamma \quad (14.6)$$

$${}^7_3Li^{3+} + p^+ \rightarrow 2{}^4_2He^{2+} \quad (14.7)$$

Die Nukleosynthese stoppt ca. 3 Min nach dem Urknall, da die Neutronen aufgebraucht wurden. Dann bestand das Universum hauptsächlich aus p und 4He .

Das Universum kühlte immer weiter ab, ansonsten passierte jedoch lange nichts. Bei $T \approx 3000 K$ nach ca. 400 000 Jahren bildeten sich neutrale Atome. Die Rückreaktion von

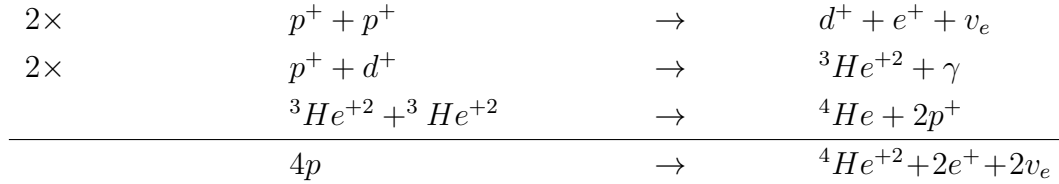
$$p + e \leftrightarrow H + \gamma \quad (14.8)$$

stoppt. Photonen bilden die kosmische Hintergrundstrahlung, heute ca. $3K$. Nach ca. 10^8 Jahren war der Strahlungsdruck gering genug, dass sich aus den expandierenden Gas der leuchtenden Materie um die dunkle Materie Klumpen bilden. Es kam zur Kontraktion durch Gravitation, sodass sich die prästellaren Nebel genug erhitzen um Fusion zu starten. bei ca. $10^7 K$:

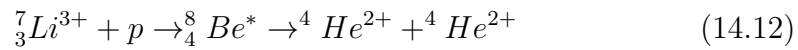
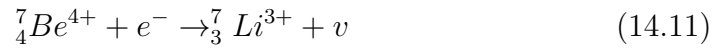
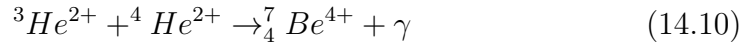
$$p^+ + p^+ \rightarrow d^+ + e^+ + \nu_e \quad (14.9)$$

Die Fusion produziert Wärme und stoppt dadurch allmählich den gravitativen Kollaps. Die stabile Bremsphase beginnt: Die im Inneren freigesetzte Fusionsenergie wird an der Oberfläche durch Wärmestrahlung abgegeben¹¹. Die meisten Sterne sind in dieser Bremsphase.

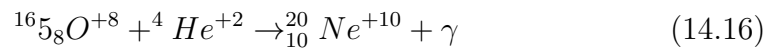
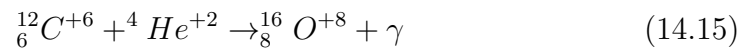
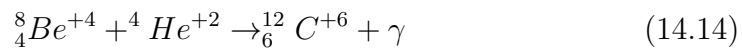
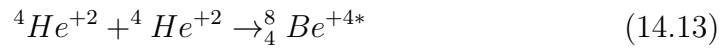
Bethe erklärte die Prozesse in der Sonne:



Mit $Q = 26.7\text{MeV}$ ist dieser Prozess pro Masse effizienter als Kernspaltung. Andere Prozesse sind:



Wenn der Stern groß genug wird kontrahiert der zentrale Kern aus ${}^4\text{He}$ durch Gravitation und erreicht 10^8K . Dies ist heiß genug für neue Fusionsreaktionen:



Wenn das Helium verbraucht ist kontrahieren kleine Sterne ($m < 0.7m_S$) bis der Elektronendruck sie stoppt. Sie strahlen als **weißer Zwerg** ihre restliche Energie ab.

Bei besonders großen Sternen ($m > 4m_S$) können noch mehr Reaktionen stattfinden. Es entstehen ${}^{24}\text{Mg}$, ${}^{23}\text{Na}$ und ${}^{20}\text{Ne}$. Wenn $m > 10m_S$ fängt bei $T > 10^9$ das Sauerstoffbrennen an. Es entstehen Mg , Si , P , S .

Ab ca. 10^9 ist ein völlig neuer Reaktionstyp möglich. Die γ -Intensität ist dann groß genug für photonukleare Reaktionen. Dabei absorbieren Neutronen, Protonen und Heliumkerne Photonen und haben dann genügend hohe Energien um von Kernen leicht eingefangen zu werden. Es handelt sich um sehr schnelle Reaktionen bei denen Elemente bis Fe/Ni entstehen.

¹¹Energietransport zur Oberfläche durch Strahlung und Konvektion.

Schwerere Elemente werden durch Neutroneneinfang und β -Zerfall erzeugt:

- Beim langsamen Neutroneneinfang (slow neutron capture, s-Prozess) in roten Riesen werden durch sukzessiven Neutroneneinfang gefolgt von β^- -Zerfall die Elemente bis *Pb*
- Der schnelle Neutroneneinfang (rapid neutron capture, r-Prozess) tritt in Umgebungen mit Neutronenfluss von ca. $10^{32} \frac{1}{m^2 s}$ auf. Es entstehen Elemente jenseits von *Pb*. Dies kann in Supernovae oder neutron star mergers passieren.

In Supernova Explosionen werden viele Elemente herausgeschleudert. Übrig bleibt ein Neutronenstern oder ein schwarzes Loch.

Elemente auf der protonenreichen Seite werden durch den sogenannten p-Prozess und (p,n) und (p, γ) Reaktionen hergestellt.

15 Schwache Wechselwirkung

15.1 Betazerfall

Die Gleichung für den allgemeinen β^- -Zerfall lautet:

$${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + e^- + \bar{\nu}_e \quad (15.1)$$

β^+ -Zerfall:

$${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + e^+ + \nu_e \quad (15.2)$$

Elektroneneinfang:

$$e^- + {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + \nu_e \quad (15.3)$$

Im Gegensatz zum α -Spektrum mit diskreten Linien ist das β -Spektrum kontinuierlich bis zu einer maximalen Energie E_0 . Dies führte Pauli dazu das Neutrino zu postulieren, das einen Teil der freigesetzten Energie (zusätzlich zum vernachlässigbaren Rückstoß des Kerns) aufnimmt.

Wir haben also 3 Teilchen im Endzustand. Mit Impulserhaltung gilt:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0 \quad (15.4)$$

Die Anzahl der Endzustände des Elektrons ist:

$$N_3 = \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6} \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \quad (15.5)$$

Damit ist die Phasenraumdichte:

$$\rho_3 = \frac{dN_3}{dE} = \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{d}{dE} \int d^3 p_1 \int d^3 p_2 \quad (15.6)$$

Für unseren Fall lässt sich schreiben:

$$= \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6} \frac{d}{dE_0} \int p_e^2 dp_e d\Omega_e \int p_v^2 dp_v d\Omega_v \quad (15.7)$$

BLABLABLA

Schließlich ergibt sich mit Fermis Goldener Regel für die Übergangsrate:

$$dV = \frac{1}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} |\langle \Psi_f | H_W | \Psi_i \rangle|^2 p_e^2 (E_0 - T_e)^2 dp_e \quad (15.8)$$

Sie hat ein Maximum und geht gegen 0 für $p_e \rightarrow 0$ und $T_e \rightarrow E_0$.

$$BLABLABLA \quad (15.9)$$

Die Halbwertszeiten für den β -Zerfall variieren zwischen $10s$ und $10^{22}s$.

Auswahlregeln für den β -Zerfall:

Das Elektron und das Neutrino tragen keinen Bahndrehimpuls weg. Wegen $\pi = (-1)^l$ bedeutet das, dass es keine Paritätsänderung zwischen Mutter und Tochterkern gibt.

Die Spins der beteiligten Nukleonen können umklappen oder nicht. Die Spins der Leptonen befinden sich dann entweder im antisymm. Singulett (Fermi-Übergang $J(e + \nu) = 0$) oder im symm. Triplett (Gamow-Teller-Übergang $J(e + \nu) = 1$)

Also:

Fermi	$\Delta J = 0$	$\Delta P = 0$	Spins von Elektron und Neutrino parallel. Gesamtspin 1
Gamow-Teller	$\Delta J = 0, +1$	$\Delta P = 0$	

Aus Teilchen und Kerne:

Einen anderen Zugang zur Kernstruktur bietet die Untersuchung des β -Zerfalls. Im Vergleich zum freien β -Zerfall müssen bei Nukleonen im Kern folgende Einflüsse berücksichtigt werden:

- Da Nukleonen gebunden sind, enthält das Matrixelement den Überlapp der Kernwellenfunktionen im Anfangs und Endzustand. Somit ermöglicht umgekehrt das Matrixelement einen Einblick in die Kernstruktur.
- Die Differenz der Bindungsenergie der Kerne vor und nach dem Zerfall definiert den Typ des Zerfalls und bestimmt die Größe des Phasenraums.
- Die Coulomb-Wechselwirkung beeinflusst das Energiespektrum der emittierten Elektronen bzw. Positronen, vor allem bei kleinen Geschwindigkeiten und modifiziert dadurch ebenfalls den Phasenraum.

Der sog. ft -Wert hängt mit der Halbwertszeit und der sog. Fermi-Integralfunktion zusammen und wird meist logarithmisch angegeben. Eine Art β -Zerfall ist umso wahrscheinlicher, je kleiner dieser Wert.

Man kann die Wellenfunktion von Elektron und Neutrino nach der Drehimpulsquantenzahl l entwickeln. Es stellt sich heraus, dass jede Einheit von l zu einer Unterdrückung von $10^{-4} - 10^{-3}$ führt. Man sagt deshalb dass Zerfälle mit $l = 0$ **erlaubt**, Zerfälle mit $l = 1$ **verboten** und solche mit $l = 2$ **doppelt**

verboten seien.

Die Zerfallswahrscheinlichkeit ist dann besonders groß, wenn die Wellenfunktion des Kerns im Anfangszustand mit der im Endzustand möglichst perfekt überlappt. Dies ist dann der Fall, wenn das entstehende Proton/Neutron die gleichen Quantenzahlen hat wie das zerfallene Neutron/Proton. Solche Zerfälle nennt man **übererlaubt**. Die ft Werte solcher Übergänge sind ähnlich klein, wie die des freien Neutrons.

15.2 Schwache Ströme

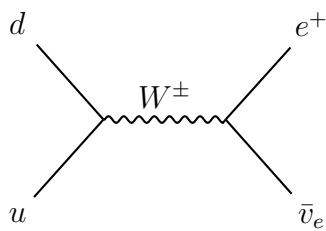


Abbildung 22: Der Propagator ist $\frac{1}{m_W^2 + q^2}$, wobei $q^2 < 0$

Die schwache Wechselwirkung ist die einzige fundamentale Kraft, die das Flavour von Quarks verändert. Die elektroschwache Theorie fasst die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung zusammen. In jedem Prozess der schwachen Wechselwirkung sind zwei schwache Paare involviert, wobei Leptonenpaare immer von der selben Generation sind. Beim Betazerfall sind das das Leptonen- und das Quark-Paar. Bei 12 Paaren macht das 78 denkbare Prozesse.

Man unterscheidet:

- **Semileptonische schwache Prozesse**
zum Beispiel: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
- **Hadronische schwache Prozesse**
zum Beispiel: $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$
- **Reinleptonische schwache Prozesse**
zum Beispiel: $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$

Die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung sind die vergleichsweise sehr massiven W^\pm und Z^0 -Bosonen (≈ 80 und $90 \text{ GeV}/c^2$). Sie sind sehr kurzlebig und zerfallen hauptsächlich in Quark-Antiquarkpaare und sind deshalb nur schwer von der viel häufigeren starken WW unterscheidbar. In selteneren Zerfällen (unterdrückt um einen Faktor 10^7) entstehen Lepton-Antileptonpaare. Bei positiven schwachen Strömen wird entweder ein W^- emittiert oder ein W^+ absorbiert. Entsprechendes gilt für negative Ströme. Aufgrund der Ladungserhaltung wechselwirkt ein schwacher Strom mit einem konjugierten schwachen

Strom durch Austausch eines W -Bosons. Diese ströme können quantisiert werden. Beim Myon-Zerfall

$$\mu^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e \quad (15.10)$$

gilt für den schwachen leptonischen Strom:

$$J_W^{l+} \propto \tilde{e}v_e + \tilde{\mu}v_\mu + \tilde{\tau}v_\tau \quad (15.11)$$

wobei die mit $\tilde{}$ gekennzeichneten Größen sog. Vernichtungsoperatoren und die anderen Erzeugungsoperatoren sind.

Die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (**CKM-Matrix**) ist eine unitäre 3×3 -Matrix, die repräsentiert, in welchen statistischen Anteilen sich Quarks der drei Flavour-Generationen durch Wechselwirkung mit einem W -Boson ineinander umwandeln können¹². Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind nicht unabhängig von einander. Es gibt 3 reelle freie Parameter und eine komplexe Phase.

¹²Es existiert eine analoge leptonische Mischungsmatrix, die Maki-Nakagawa-Sakata-Matrix.

16 Anhang

16.1 V-Teilchen

Strange-Quarks entstehen beispielsweise bei der Kollision von Protonen und Neutronen und haben eine vergleichsweise lange Lebensdauer. Das kann dadurch erklärt werden, dass für ihr Entstehen die starke Wechselwirkung verantwortlich ist, für den Zerfall aber die schwache Wechselwirkung. Dies führt dazu, dass man in Blasenkammeraufnahmen sogenannte V-Teilchen sehen kann, scheinbar aus dem Nichts entstehende, V-förmige Spuren. Der Zerfallsvertex zeigt dabei meist auf einen anderen primären Vertex. Die nicht sichtbare Verbindungslinie kommt durch ein neutrales Teilchen mit Strangeness zu stande.

16.2 Jets

Bei Kollisionsprozessen in Teilchenbeschleunigern entstehen bei genügend hohen Energien Teilchenjets. Dies liegt am Confinement. Werden bei einer Kollision zwei Quarks auseinandergerissen, so steigt die Wechselwirkungsenergie immer weiter mit dem Abstand an, bis schließlich die Energie groß genug ist um ein neues Quark-Antiquark Paar zu erzeugen. Dieser Prozess wiederholt sich mehrfach und nennt sich Hadronisierung, da dabei eine große Anzahl an Hadronen entsteht.

16.3 Helizität

Die Helizität ist gegeben durch

$$h = \frac{\vec{s}\vec{p}}{|\vec{s}||\vec{p}|} \quad (16.1)$$

Im Zähler steht ein Skalarprodukt aus einem Axialvektor (Spin) und einem Vektor (Impuls). Damit handelt es sich bei der Helizität um ein Pseudoskalar.

16.4 Majorana- und Dirac- Fermionen

Majorana Fermionen sind Fermionen, die ihr eigenes Antiteilchen sind, die also keine elektrische Ladung tragen. Das Gegenteil sind Dirac-Fermionen. Die Begriffe kommen aus der mathematischen Beschreibung von Neutrinofeldern in der QFT.

16.5 Streuung

16.6 Magneton

Ein Teilchen mit Bahndrehimpuls \vec{L} erzeugt das **magnetische Moment**

$$\vec{\mu} = \mu \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad (16.2)$$

Dabei ist μ das sogenannte **Magneton** des Teilchens. Es ist gegeben durch:

$$\mu = \frac{q}{2m} \hbar \quad (16.3)$$

16.7 Lande Faktor

Der **Lande Faktor** (auch **gyromagnetischer Faktor** oder **g-Faktor**) für ein Teilchen ist der Quotient aus der Größe des gemessenen magnetischen Moments und der Größe des magnetischen Moments, das bei dem vorliegenden Drehimpuls nach der klassischen Physik theoretisch zu erwarten wäre. Das Vorzeichen gibt an, ob das magnetische Moment zur erwarteten Richtung parallel oder antiparallel liegt. (Konvention nicht immer eindeutig)

Hat das Teilchen reinen Drehimpuls, so ist $g = g_l = 1$. Abweichungen treten auf, wenn der Gesamtdrehimpuls ganz oder teilweise vom Spin hervorgerufen wird. Liegt ein reiner Spindrehimpuls vor, heißt der g-Faktor g_s auch Sping-Faktor oder **anomaler g-Faktor des Spins** und hat für jede Teilchenart einen charakteristischen Wert.

	g_s
Elektron	≈ 2
Proton	≈ 5.6
Neutron	≈ -3.8

Wenn der Gesamtdrehimpuls des Systems aus beiden Arten Drehimpuls zusammengesetzt ist, ist der g-Faktor eine Kombination aus g_s und g_l . Hiefür gilt die Lande-Formel

$$g_j = \frac{1}{2} \frac{g_l(j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)) + g_s(j(j+1) + s(s+1) - l(l+1))}{j(j+1)} \quad (16.4)$$

16.8 Gyromagnetisches Verhältnis

Das **gyromagnetische Verhältnis** γ bezeichnet den Proportionalitätsfaktor zwischen dem Drehimpuls (oder Spin) \vec{X} und dem dazugehörigen magnetischen

Moment $\vec{\mu}_X$

$$\vec{\mu}_X = \gamma_X \vec{X} \quad (16.5)$$

Das gyromagnetische Verhältnis eines geladenen Teilchens kann deshalb berechnet werden mit

$$\gamma = g \frac{\mu}{\hbar} \quad (16.6)$$

Hierbei ist g der gyromagnetische Faktor und μ das Magneton des Teilchens.

16.9 Clebsch Gordan Koeffizienten

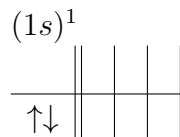
16.10 Propagator

16.11 Stuff

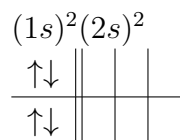
l	s		p		
m_l	0	-1	0	+1	
L					
K					

Abbildung 24: Graphische Darstellung der Schalenbelegung

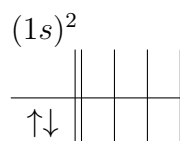
Wasserstoff: $1^2S_{\frac{1}{2}}$



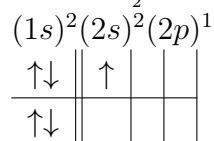
Beryllium: 2^1S_0



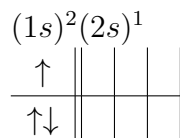
Helium: 1^1S_0



Bor: $2^2P_{\frac{1}{2}}$



Lithium: $2^2S_{\frac{1}{2}}$



Kohlenstoff: 2^3P_0

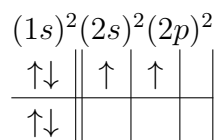


Abbildung 25: Elektronenkonfiguration der Elemente 4 bis 6

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	...
M	M	...
m_1	m_2	
m_1	m_2	
\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	

Coefficients

$$1/2 \times 1/2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & & & \\ \hline +1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ \hline +1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline -1/2 & +1/2 & 1/2 & -1/2 \\ \hline -1/2 & -1/2 & 1 & \\ \hline \end{array}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

$$2 \times 1/2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5/2 & 5/2 & 3/2 & \\ \hline +3/2 & 1/2 & 1 & 3/2 + 3/2 \\ \hline +2 & -1/2 & 1/5 & 4/5 \\ \hline +1 & +1/2 & 4/5 & -1/5 \\ \hline +1/2 & +1/2 & 5/2 & 3/2 \\ \hline 0 & +1/2 & 3/5 & -2/5 \\ \hline 0 & -1/2 & 3/5 & 2/5 \\ \hline -1 & +1/2 & 2/5 & -3/5 \\ \hline -1 & +1/2 & 3/5 & -2/5 \\ \hline \end{array}$$

$$3/2 \times 1/2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 & \\ \hline +3/2 & +1/2 & 1 & +1 \\ \hline +3/2 & -1/2 & 1/4 & 3/4 \\ \hline +1/2 & +1/2 & 3/4 & -1/4 \\ \hline +1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline -1/2 & +1/2 & 1/2 & -1/2 \\ \hline -1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ \hline -1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ \hline \end{array}$$

$$1 \times 1/2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3/2 & 3/2 & 1/2 & \\ \hline +1 & +1/2 & 1 & +1/2 + 1/2 \\ \hline +1 & -1/2 & 1/3 & 2/3 \\ \hline 0 & +1/2 & 2/3 & -1/3 \\ \hline 0 & -1/2 & 2/3 & 1/3 \\ \hline -1 & +1/2 & 1/3 & -2/3 \\ \hline -1 & -1/2 & 1/3 & -2/3 \\ \hline \end{array}$$

$$2 \times 1 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 & \\ \hline +2 & +1 & 1 & +2 + 2 \\ \hline +2 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ \hline +1 & +1 & 2/3 & -1/3 \\ \hline +1 & +1 & 2/3 & -1/3 \\ \hline +1 & +1 & 2/3 & -1/3 \\ \hline +1 & +1 & 2/3 & -1/3 \\ \hline +1 & +1 & 2/3 & -1/3 \\ \hline +1 & +1 & 2/3 & -1/3 \\ \hline \end{array}$$

$$1 \times 1 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 & \\ \hline +1 & +1 & 1 & +1 + 1 \\ \hline +1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ \hline 0 & +1 & 1/2 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ \hline \end{array}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d_{m,0}^\ell = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} Y_\ell^m e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M \rangle = (-1)^{J-j_1-j_2} \langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M \rangle$$

$$d_{m',m}^j = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^j = d_{-m,-m'}^j$$

$$3/2 \times 3/2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 2 & \\ \hline +3/2 & +3/2 & 1 & +2 + 2 \\ \hline +3/2 & +1/2 & 1/2 & 1/2 \\ \hline +1/2 & +3/2 & 1/2 & -1/2 \\ \hline +3/2 & -1/2 & 1/5 & 1/2 \\ \hline +1/2 & +1/2 & 3/5 & 0 \\ \hline -1/2 & +3/2 & 3/5 & 0 \\ \hline -1/2 & +3/2 & 3/5 & 0 \\ \hline -1/2 & +3/2 & 3/5 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$d_{0,0}^1 = \cos \theta$$

$$d_{1/2,1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1,1}^1 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$d_{1/2,-1/2}^{1/2} = -\sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1,0}^1 = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}$$

$$d_{1,-1}^1 = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$2 \times 3/2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7/2 & 7/2 & 5/2 & \\ \hline +2 & +3/2 & 1 & +5/2 + 5/2 \\ \hline +2 & +1/2 & 3/7 & 4/7 \\ \hline +1 & +3/2 & 4/7 & -3/7 \\ \hline +2 & -1/2 & 1/7 & 16/35 \\ \hline +1 & 1/2 & 4/7 & 1/35 \\ \hline 0 & 3/2 & 2/7 & -18/35 \\ \hline 0 & 3/2 & 2/7 & -18/35 \\ \hline 0 & 3/2 & 2/7 & -18/35 \\ \hline \end{array}$$

$$2 \times 2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 4 & 3 & \\ \hline +2 & +2 & 1 & +3 + 3 \\ \hline +2 & +1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline +1 & +2 & 1/2 & -1/2 \\ \hline +2 & 0 & 3/14 & 1/2 \\ \hline +1 & 1 & 4/7 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 3/14 & -1/2 \\ \hline 0 & 2 & 3/14 & -1/2 \\ \hline 0 & 2 & 3/14 & -1/2 \\ \hline \end{array}$$

$$d_{3/2,3/2}^{3/2} = \frac{1 + \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,1/2}^{3/2} = -\sqrt{3} \frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,-1/2}^{3/2} = \sqrt{3} \frac{1 - \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{3/2,-3/2}^{3/2} = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1/2,1/2}^{3/2} = \frac{3 \cos \theta - 1}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$d_{1/2,-1/2}^{3/2} = -\frac{3 \cos \theta + 1}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$d_{2,2}^2 = \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2$$

$$d_{2,1}^2 = -\frac{1 + \cos \theta}{2} \sin \theta$$

$$d_{2,0}^2 = \frac{\sqrt{6}}{4} \sin^2 \theta$$

$$d_{2,-1}^2 = -\frac{1 - \cos \theta}{2} \sin \theta$$

$$d_{2,-2}^2 = \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^2$$

$$d_{1,1}^2 = \frac{1 + \cos \theta}{2} (2 \cos \theta - 1)$$

$$d_{1,0}^2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \cos \theta$$

$$d_{1,-1}^2 = \frac{1 - \cos \theta}{2} (2 \cos \theta + 1)$$

$$d_{0,0}^2 = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

Abbildung 23: Clebsch Gordan Koeffizienten