ResearchGate

Deducción de la necesidad de la constante cosmológica para el modelo de Einstein-

Poster · May 2019

DOI: 10.13140/RG.2.2.14034.40640

2 authors:

Amanda Fajardo
Autonomous University of Nuevo León

Jaime Román-Garza
University of Geneva

Deducción de la necesidad de la constante cosmológica para el modelo de Einstein

Amanda Fajardo[1]; Jaime Román-Garza[1]

[1]FCFM-UANL (México)

amandafajardo.gr@uanl.edu.mx

Si te interesa aprender más, consulta los *Apuntes de Relatividad General.*

Resumen

Primero se expone el elemento de línea propuesto por Friedmann-Robertson-Walker para un universo isotrópico y homogéneo, con éste se obtiene la métrica y a su vez, la solución a las ecuaciones de campo de Einstein. En los resultados se gráfica el factor de Hubble comparándolo con los resultados observacionales, de esta forma se encuentra la necesidad de una constante cosmológica.

Introducción

Einstein propuso la hipótesis de la relación directa entre la curvatura del Universo y la cantidad de materia en ella, es decir

$$\mathbf{C} = \mathbf{T} \tag{1}$$

Donde C y T son tensores [ía]
Así como es posible derivar las ecuaciones de campo de Einstein a partir de la geometría, es posible obtenerlas a partir de la acción de Hilbert-Einstein.

$$S = \int \left(\frac{1}{2\kappa} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + \mathcal{L}_M \right) \sqrt{-|g|} d^4x \tag{2}$$

Donde:

- $g^{\alpha\beta}$ Tensor métrico inverso
- $R_{\alpha\beta}$ Tensor de Ricci
- $|g|$ Determinante de la métrica
- $\mathcal{L}_M$ Densidad lagrangiana que describe la materia del sistema

Del cálculo variacional sabemos que $\delta S = 0$. Así (después de álgebra tensorial) se llega al conocido resultado:

$$R^{\mu\nu} - \frac{g^{\mu\nu}}{2} R = \kappa T^{\mu\nu} \tag{3}$$

Dada una métrica y un tensor de momento-energía que cumplan la ecuación [1] es posible dar solución a las ecuaciones de campo para la evolución de la materia en el Universo.

Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

La métrica de Friedmann-Robertson-Walker es una solución a las ecuaciones de campo de Einstein dado un tensor de energía-momento dado por $T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu}$, y considerando un Universo ***isotrópico*** y ***homogéneo***, leer [1], de tal forma que un elemento de línea estará dado por la relación:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right) \tag{4}$$

El tensor métrico está definido de la forma

$$g = \sum_{\mu,\nu=0}^{n} g_{\mu\nu} dx^\mu \dot{d}x^\nu \tag{5}$$

O en la notación de Einstein

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\nu \dot{d}x^\nu \tag{6}$$

De esta forma, para la métrica FRW [ía]

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{7}$$

La dinámica del Universo

Con la métrica encontramos los símbolos de Christoffel dados por [1]

$$\Gamma^\mu_{ij} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\nu i,j} + g_{j\nu,i} - g_{ij,\nu} \tag{8}$$

Donde $g^{\mu\nu}$ es la matriz inversa de $g_{\mu\nu}$. El tensor de Riemann está definido como

$$R^b_{aij} = \Gamma^b_{aj,i} - \Gamma^b_{mj}\Gamma^m_{ai,j} - \Gamma^b_{ai,j} + \Gamma^b_{mi}\Gamma^m_{aj} \tag{9}$$

y el escalar de Ricci

$$R = g^{ab}(g^{ij} R_{jaib}) \tag{10}$$

Después de sustituir (7), (8), (9) y (10) en (3) obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales que nos ayudarán a describir la dinámica de Universo

$$\frac{3(k+\dot{a}^2)}{a(t)^2} = 8\pi\rho \tag{11}$$

$$\frac{k+\dot{a}^2 + 2a(t)(4\pi a(t) + \ddot{a})}{-1+kr^2} = 0 \tag{12}$$

$$r(k+\dot{a}^2 + 2a(t)(4P\pi a(t) + \ddot{a})) = 0 \tag{13}$$

$$r \sin\theta (k + \dot{a}^2 + 2a(t)(4P(t) + a\ddot{(t)})) = 0 \tag{14}$$

Donde las ecuaciónes anteriores son conocidas como las ecuaciones de Friedmann.

Resultados

Definiendo al *parámetro de Hubble* como

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \tag{15}$$

Sustituimos (15) en (11)

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho \tag{16}$$

Si consideramos que $H = H_0 E(a)$, donde H_0 es el valor del factor de Hubble al día de hoy, entonces

$$\rho_c \equiv \rho_{c,0} E(a) \quad \Rightarrow \quad \rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi} \tag{17}$$

De tal manera que podemos definir el parámetro de densidad $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$. Con esto podemos definir los parámetros de densidad en el presente:

$$\Omega_{m,0} \equiv \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{c,0}} \quad ; \quad \Omega_{r,0} \equiv \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{c,0}} \,. \tag{18}$$

Además, al considerar la evolución de las densidades en términos del factor de escala $a(t)$, tenemos que

$$\rho_m = \rho_{m,0} a^{-3} \quad ; \quad \rho_r = \rho_{r,0} a^{-4} \,, \tag{19}$$

entonces el factor de Hubble puede ser reescrito como

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{r,0} a^{-4} - \frac{k}{a^2 H_0^2} \right) \tag{20}$$

Si consideramos que t_0 es el presente y $a(t_0) = 1$, obtenemos que $k = H_0^2(\Omega_0 - 1)$, donde $\Omega_0 \equiv \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0}$. Al considerar el corrimiento al rojo como $\Delta\lambda/\lambda = \Delta z$, podemos obtener que $(z+1) = a^{-1}$, de tal manera que:

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_{m,0}(z+1)^3 + \Omega_{r,0}(z+1)^4 + \Omega_\Lambda - (\Omega_0 - 1)(z+1)^2 \right) \tag{21}$$

Observaciones

La ec. (21) es el modelo cosmológico de Friedmann, donde se asume que el contenido del Universo puede ser modelado solo con materia y radiación. Al obtener información del cosmos con luz, esta viajará a través del espacio-tiempo según sea su geometría. Por tanto, si calculamos distancias a un objeto astronómico utilizando la luz que emite, la distancia obtenida será aquella que recorre la luz sobre la geodésica del universo.

Si consideramos las observaciones del modulo de distancia

$$(m - M) = \log\left(\frac{d}{10}\right) + A \tag{22}$$

que es función de la distancia, podemos encontrar una clara relación con el corrimiento al rojo de las fuentes, i.e. SNs tipo Ia. Intentar realizar un ajuste del modelo (21) con las observaciones fue un esfuerzo infructifero del cual se concluyo que este modelo estaba incompleto, ver fig. 1.

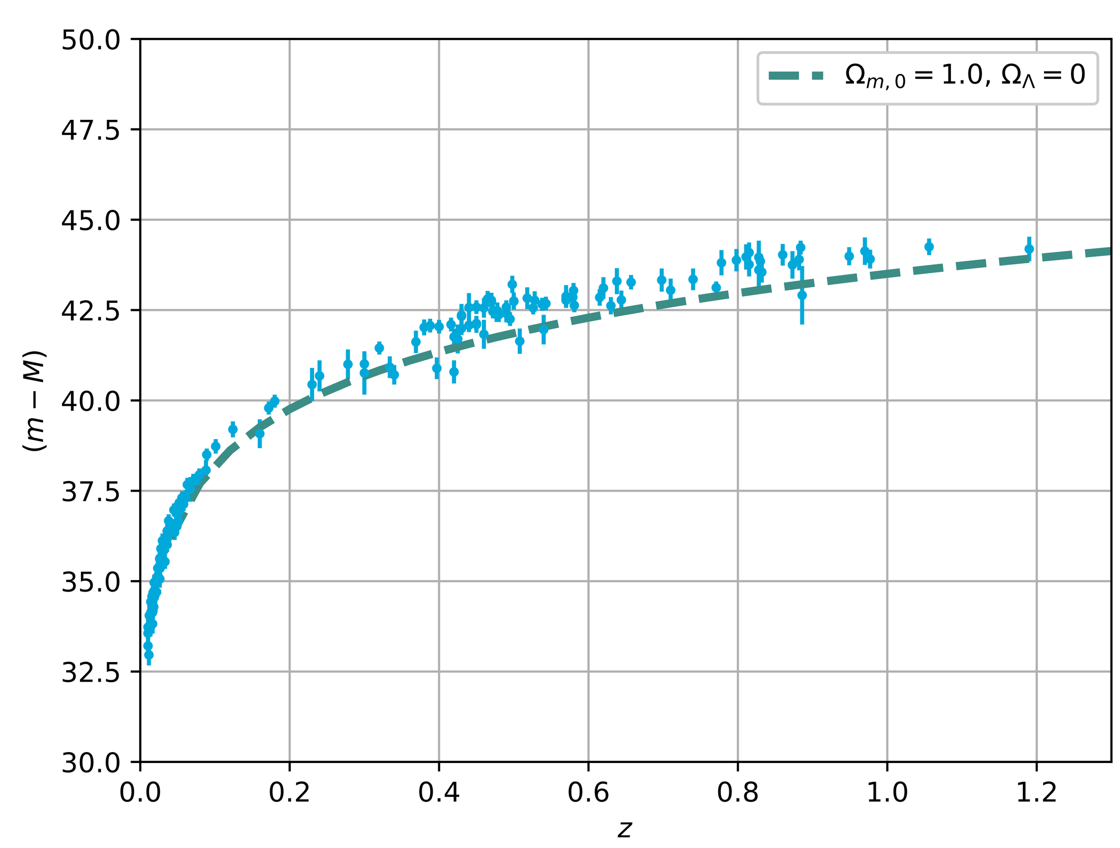

Figura 1: Observaciones y modelo teórico del modulo de distancia $(m - M)$ vs. corrimiento al rojo z. En azul se muestran los datos reportados en [2]. La linea punteada turquesa representa el modelo teórico con $\Omega_{m,0} = 1{,}0$ y $\Omega_\Lambda = 0$, i.e. un universo solo con contenido de materia.

Conclusiones

En este trabajo se revisó el modelo de Friedmann para la dinámica del Universo, considerando la materia y radiación como únicas componentes. El esfuerzo infructífero por explicar las observaciones dio pie a cuestionar las condiciones impuestas al modelo, ver fig. 1.

Referencias

[1] Saúl Ramos-Sánchez. Relatividad para futuros físicos, volume 1. CopIt ArXives, 2018.

[2] Adam G. Riess et al. Type Ia supernova discoveries at z ¿1 from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. Astrophys. J., 607:665–687, 2004.

[3] Jaime Román-Garza. Apuntes de relatividad general. 2019.

[4] Peter Schneider. Extragalactic astronomy and cosmology: an introduction. Springer, 2014.

[5] Galina Weinstein. George Gamow and Albert Einstein: Did Einstein say the cosmological constant was the "biggest blunder"he ever made in his life? 1970.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la iniciativa del Taller de Producción Científica de la comunidad estudiantil, que ha brindado un ambiente de colaboración y trabajo óptimo en la comunidad estudiantil.