PROYEK UJIAN AKHIR SEMESTER
PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL
METODE BEDA HINGGA UNTUK PERSAMAAN GELOMBANG

Disusun Oleh:

Kelompok 3:

Edward Nathanael	6162001055
Lydia Priscilla Doky	6162001124
Amanda Gozali	6162001169
Varani Clarissa Wedhasanti	6162001220

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS
UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN

2022

Daftar Isi

Daftar Gambar

1 Pendahuluan

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial parsial merupakan persamaan yang memuat satu atau lebih turunan parsial dengan dua atau lebih variabel bebas. Pada umumnya, persamaan diferensial dapat diselesaikan secara analitik. Namun, pada kenyataannya, terdapat beberapa permasalahan yang akan menjadi rumit dan tidak efektif apabila diselesaikan secara analitik. Oleh karena itu, terdapat metode numerik yang dapat digunakan sebagai alternatif lain untuk menentukan solusi persamaan diferensial.

Salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial secara numerik adalah dengan menggunakan metode beda hingga. Metode beda hingga merupakan salah satu metode numerik yang didasarkan pada deret Taylor. Metode beda hingga itu sendiri menggunakan pendekatan ekspansi Taylor pada titik acuannya. Terdapat tiga jenis beda (*difference*), yaitu beda hingga maju (*forward difference*), beda hingga mundur (*backward difference*), dan beda hingga pusat (*central difference*). Dalam laporan ini, akan ditentukan solusi persamaan suatu gelombang baik secara analitik maupun secara numerik menggunakan metode beda hingga. Lalu, akan dibandingkan hasil dari kedua solusi persamaan gelombang tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana cara menyelesaikan persamaan gelombang menggunakan metode numerik (beda hingga)?
2. Apakah terdapat perbedaan solusi persamaan gelombang menggunakan metode analitik dan numerik (beda hingga)?
3. Apakah metode terbaik untuk mencari solusi dari persamaan gelombang dengan syarat batas Dirichlet?

1.3 Tujuan Pembahasan

1. Menyelesaikan persamaan gelombang menggunakan metode numerik (beda hingga).
2. Mencari perbedaan solusi metode analitik dan numerik dalam menyelesaikan persamaan gelombang.
3. Menentukan metode terbaik untuk menyelesaikan persamaan gelombang dengan batas Dirichlet.

2 Pembahasan

2.1 Landasan Teori

2.1.1 Persamaan Gelombang Kondisi Batas Dirichlet

Persamaan gelombang merupakan salah satu persamaan diferensial yang merepresentasikan fenomena fisis yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari. Suatu persamaan gelombang pada domain terbatas diberikan oleh persamaan $utt = c^2 \cdot uxx$, dengan batas $0 < x < 1, t \geq 0$ dimana $u(x,t)$ menyatakan simpangan gelombang dari garis setimbang di posisi x pada waktu t dan c menyatakan kecepatan gelombang.

Persamaan gelombang kondisi batas Dirichlet merupakan kondisi ketika nilai dari solusinya sendiri di setiap ujung x diketahui. Jika persamaan gelombang $utt = c^2 \cdot uxx$ dengan syarat awal $u(x,0) = sin(3x)$ dan $u_t(x,0) = 0$ serta syarat batas $0 < x < \pi$ dan $0 \leq t \leq 5$, dalam kondisi batas Dirichlet diketahui $u(0,t) = 0$ dan $u(\pi,t) = 0$.

2.1.2 Penurunan Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah metode yang umumnya digunakan untuk menentukan aproksimasi persamaan diferensial parsial dengan bantuan komputasi. Metode ini menggunakan definisi turunan dan deret Taylor untuk menurunkan aproksimasi beda hingga turunan pertama dan kedua dari suatu fungsi. Metode beda hingga bekerja dengan merubah daerah variabel bebas menjadi *grid* berhingga yang disebut *mesh* dimana variabel tak bebasnya diaproksimasi. Dalam melakukan metode ini, dapat dibagi menjadi 2 skema, yakni skema eksplisit (beda hingga maju, beda hingga mundur, dan beda hingga pusat) serta skema implisit (*Crank-Nicolson*).

Metode Beda Hingga menggunakan Deret Taylor dengan titik x dan pergeseran yang dinotasikan dengan Δx. Deret Taylor dapat dipandang sebagai:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \tag{1}$$

Deret Taylor tersebut dapat diekspansi dalam arah $(x + \Delta x)$ dan $(x - \Delta x)$ sehingga perluasannya menjadi:

- Metode Beda Hingga Maju (*Forward Difference*)

Dengan menggunakan variabel $(x + \Delta x)$ dalam deret Taylor, penurunan deret tersebut dapat kita peroleh dengan:

$$\begin{aligned}
f(x+\Delta x) &= f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}(\Delta x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{(\Delta x)^n}{n!} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(\Delta x) &= f(x+\Delta x) - f(x) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{(\Delta x)^3}{3!} - \cdots - \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{(\Delta x)^n}{n!} \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\Delta x}{2!} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{(\Delta x)^2}{3!} - \cdots - \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{(\Delta x)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Secara umum, symbol $\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x$ menunjukkan kemiringan (*gradient*) dari nilai fungsi f pada $f(x)$ jika x digeser sebesar Δx. Sementara symbol $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ menunjukkan lengkungan (*curvature*) dari titik $f(x)$ tersebut jika x digeser sebesar Δx.
Deret Taylor akan dipotong dan ditinjau dalam orde pertama saja, hal ini menyebabkan terpenggalnya deret dan akan dinotasikan dengan simbol $O(\Delta x^{n+1})$. Sehingga diperoleh persamaan metode beda hingga maju sebagai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{2}$$

- Metode Beda Hingga Mundur (*Backward Difference*):

Untuk metode ini, akan dicari nilai dari suatu fungsi jika variabel bebasnya digeser ke belakang (sesuai namanya yaitu *backward difference*) sebesar Δx. Sederhananya, jika ingin mengetahui $f(x)$, maka akan dicari nilai dari $f(x - \Delta x)$. Dengan menggunakan ekspansi Taylor, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
f(x-\Delta x) &= f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}(-\Delta x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(-\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{(-\Delta x)^3}{3!} + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{(-\Delta x)^n}{n!} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(\Delta x) &= f(x) - f(x-\Delta x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \cdots - \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{(\Delta x)^n}{n!} \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\Delta x}{2!} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{(\Delta x)^2}{3!} + \cdots - \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{(\Delta x)^{n-1}}{n!} \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x}
\end{aligned}$$

Deret Taylor akan dipotong dan ditinjau dalam orde pertama saja. Hal ini akan menyebabkan terpenggalnya deret dan akan dinotasikan dengan simbol $O(\Delta x^{n+1})$. Sedangkan, simbol $O(\Delta x)$ disebut galat pemenggalan atau *truncation error*. Sehingga diperoleh persamaan metode beda hingga mundur:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \tag{3}$$

- Metode Beda Hingga Pusat (*Central Difference*)

Jenis beda yang ketiga adalah beda pusat atau beda tengah, di mana kita akan mencari kemiringan dari fungsi tersebut dengan menggunakan perbedaan nilai fungsinya dari beda maju dan beda mundur. Secara matematis, beda tengah adalah penjumlahan dari beda maju dan beda mundur. Persamaaan beda hingga pusat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, akan dijumlahkan kedua persamaan tersebut dan akan menghasilkan:

$$2\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x) + O(\Delta x^2)}{\Delta x}$$

Sehingga, diperoleh bentuk sederhana dari beda hingga pusat atau *first derivative centered difference* sebagai berikut:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \tag{4}$$

Penulisan fungsi dalam dua variabel dapat dinotasikan sebagai u_j^n dan penulisan bentuk beda dari u_x adalah sama dengan u_t

$$\frac{\partial u}{\partial x}(j\Delta x, n\Delta t) \sim \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(j\Delta x, n\Delta t) \sim \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t} \tag{6}$$

- Aproksimasi Turunan Orde Dua

Setelah pendekatan orde satu, dapat dicari juga pendekatan turunan orde dua dengan menggunakan beda pusat. Dengan menjumlahkan perhitungan deret Taylor di sekitar x pada titik pergeseran menggunakan variabel $(x + \Delta x)$, yaitu:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}(\Delta x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

dan dengan menggunakan variabel $(x - \Delta x)$, yaitu:

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \frac{\partial f}{\partial x}(\Delta x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \cdots - \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

Lalu, diperoleh:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}(\Delta x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\frac{(\Delta x)^3}{3!} + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial x^n}\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

Sehingga diperoleh formula untuk aproksimasi turunan kedua sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+\Delta x) - 2f(x) + f(x-\Delta x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \tag{7}$$

2.2 Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial

Misal kita mempunyai Persamaan Gelombang Dirichlet:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < \pi, 0 \le t \le 5 \\ u(x,0) = sin(3x), u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

2.2.1 Solusi Analitik

Solusi dari persamaan gelombang di atas akan dicari dengan bentuk $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ di mana X adalah fungsi yang hanya bergantung dari x dan T adalah fungsi yang hanya bergantung dari t. Tentu saja, jika kita memperoleh beberapa solusi yang memiliki bentuk tersebut, seperti $u_1(x,t) = X_1(x) \cdot T_1(t)$ dan $u_2(x,t) = X_2(x) \cdot T_2(t)$, maka kombinasi linearnya juga merupakan solusi dikarenakan persamaan gelombang di atas adalah linear. Karena bentuk solusi seperti itu, metode ini dinamakan Separasi Variabel. Adapun langkah-langkah dalam metode ini adalah:

1. Mencari Solusi X dan penerapan syarat batas.
2. Mencari Solusi T dan penerapan syarat awal.

A. Mencari Solusi X dan Menetapkan Syarat Batas
Langkah pertama yang akan dilakukan adalah melakukan substitusi bentuk solusi $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ ke persamaan gelombang, sehingga diperoleh:

$$X(x)T''(t) = X''(x)T(t)$$

Selanjutnya, persamaan di atas akan dibagi dengan $X(x) \cdot T(t)$, sehingga diperoleh:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Perhatikan bahwa ruas kiri merupakan fungsi dalam variabel waktu t dan ruas kanan adalah fungsi dalam variabel x. Jika kedua ruas sama, maka kedua ruas tersebut haruslah bernilai konstan. Misalkan konstan tersebut adalah λ.

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Selanjutnya, persamaan-persamaan di atas akan diselesaikan secara terpisah. Pertama, kita akan menyelesaikan persamaan diferensial biasa

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{9}$$

Perhatikan bahwa Persamaan (8) merupakan permasalahan nilai eigen di mana X adalah fungsi eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Solusi dari persamaan tersebut bergantung dari nilai eigen λ yang akan diinvestigasi melalui tiga kemungkinan nilai.

- Untuk nilai $\lambda = 0$,

Persamaan (8) akan menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= 0 \\ X''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Solusi dari persamaan tersebut adalah:

$$X(x) = C_1 x + C_2$$

Selanjutnya, akan diterapkan syarat batas, maka diperoleh:

❒ $u(0,t) = 0 \to X(0) \cdot T(t) = 0$. Apabila $T(t) = 0$, akan diperoleh $u(x,t) = 0$ dimana solusi tersebut tidak diharapkan. Oleh karena itu, $X(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$ dan akan mengakibatkan $C_2 = 0$.

❒ $u(\pi,t) = 0 \to X(\pi) \cdot T(t) = 0$. Apabila $T(t) = 0$, akan diperoleh $u(x,t) = 0$ dimana solusi tersebut tidak diharapkan. Oleh karena itu, $X(\pi) = C_1 \cdot \pi + C_2 = 0$ dan akan mengakibatkan $C_1 = 0$.

Dengan demikian, nilai $\lambda = 0$ akan menghasilkan solusi yang tidak diharapkan yaitu $u(x,t) = 0$.

- Untuk nilai $\lambda = \beta^2 > 0$,

Persamaan (8) akan menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= \beta^2 \\ X''(x) &= \beta^2 X \\ X''(x) - \beta^2 X &= 0 \end{aligned}$$

Solusi dari persamaan tersebut adalah:

$$X(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}$$

Selanjutnya, akan diterapkan syarat batas, maka diperoleh:

❒ $u(0,t) = 0 \to X(0) \cdot T(t) = 0$. Apabila $T(t) = 0$, akan diperoleh $u(x,t) = 0$ dimana solusi tersebut tidak diharapkan. Oleh karena itu, $X(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = 0$, sehingga,

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ C_1 &= -C_2 \end{aligned}$$

❒ $u(\pi,t) = 0 \to X(\pi) \cdot T(t) = 0$. Apabila $T(t) = 0$, akan diperoleh $u(x,t) = 0$ dimana solusi tersebut tidak diharapkan. Oleh karena itu, $X(\pi) = C_1 e^{\beta\pi} + C_2 e^{-\beta\pi} = 0$, sehingga,

$$\begin{aligned} C_1 (e^{\pi\beta} - e^{-\pi\beta}) &= 0 \\ C_1 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian, nilai $\lambda = \beta^2$ akan menghasilkan solusi yang tidak diharapkan yaitu $u(x,t) = 0$.

- Untuk nilai $\lambda = -\beta^2 < 0$,

Persamaan (8) akan menjadi:

$$\begin{aligned}
\frac{X''(x)}{X(x)} &= -\beta^2 \\
X''(x) &= -\beta^2 X(x) \\
X''(x) + \beta^2 X(x) &= 0
\end{aligned}$$

Persamaan Karakteristiknya adalah:

$$\begin{aligned}
m^2 + \beta^2 &= 0 \\
m &= \pm \beta i
\end{aligned}$$

Dengan PDB Linear, diperoleh solusi untuk persamaan tersebut, yaitu:

$$X(x) = C_1 cos(\beta x) + C_2 sin(\beta x)$$

Selanjutnya, akan diterapkan syarat batas, maka diperoleh:

- ❐ $u(0,t) = 0 \rightarrow X(0) \cdot T(t) = 0$. Apabila $T(t) = 0$, akan diperoleh $u(x,t) = 0$ dimana solusi tersebut tidak diharapkan. Oleh karena itu, $X(0) = C_1 cos(0) + C_2 sin(0) = 0$ dan akan mengakibatkan $C_1 = 0$.
- ❐ $u(\pi,t) = 0 \rightarrow X(\pi) \cdot T(t) = 0$. Apabila $T(t) = 0$, akan diperoleh $u(x,t) = 0$ dimana solusi tersebut tidak diharapkan. Oleh karena itu, $X(\pi) = C_1 cos(\beta\pi) + C_2 sin(\beta\pi) = 0$, sehingga

$$\begin{aligned}
C_2 sin(\beta\pi) &= 0 \\
sin(\beta\pi) &= 0 \\
\beta\pi &= n\pi, \quad n = 1,2,3,\cdots \\
\beta &= n, \quad n = 1,2,3,\cdots
\end{aligned}$$

Dengan demikian, nilai $\lambda = -\beta^2$ akan menghasilkan solusi $X(x) = C_2 sin(nx)$.
Maka, solusi untuk X adalah $X_n(x) = C_n sin(nx)$ dengan nilai eigen $\lambda = n^2$ untuk $n = 1,2,3,\cdots$.

B. Mencari Solusi T dan Menerapkan Syarat Awal
Persamaan untuk T adalah:

$$T''(t) + \beta^2 T(t) = 0$$

Persamaan karakteristik pada bentuk persamaan di atas adalah:

$$\begin{aligned} m^2 + \beta^2 &= 0 \\ m^2 &= -\beta^2 \\ m &= \pm\beta i \end{aligned}$$

Dengan PDB Linear, diperoleh solusi untuk persamaan tersebut, yaitu:

$$T(t) = C_3 cos(nt) + C_4 sin(nt)$$

Dengan nilai eigen $\lambda = n^2$ didapatkan solusi untuk T:

$$T_n(t) = A_n cos(nt) + B_n sin(nt) \tag{10}$$

Selanjutnya, akan dicari $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n sin(nx)[a_n cos(nt) + b_n sin(nt)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} sin(nx)[A_n cos(nt) + B_n sin(nt)] \end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menerapkan syarat awal, maka akan diperoleh:

- Untuk syarat awal $u(x,0) = sin3x$,

$$\begin{aligned} u(x,0) &= sin3x \\ \Leftrightarrow sin(nx)A_n \cdot 1 &= sin3x \\ \Leftrightarrow \qquad n &= 3 \\ \Leftrightarrow \qquad A_3 &= 1 \end{aligned}$$

- Untuk syarat awal $u_t(x,0) = 0$,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} sin(nx)[A_n cos(nt) + B_n sin(nt)] \\ u_t(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} sin(nx)[-nA_n sin(nt) + nB_n cos(nt)] \\ u_t(x,0) &= n \cdot B_n \cdot sin(nx) = 0 \end{aligned}$$

Selanjutnya, akan dicari nilai dai B_n

$$\begin{aligned} X(x) \cdot T(t) &= 0 \\ X(x) \cdot T'(0) &= 0 \\ \Psi(x) &= 0 \rightarrow B_n = 0 \end{aligned}$$

Substitusi nilai B_n yang telah didapat ke dalam persamaan $u(x,t)$, sehingga

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} sin(nx)[A_n cos(nt)]$$

Selanjutnya, substitusi nilai $n = 3$ ke persamaan di atas, sehingga solusi untuk $u(x,t)$ adalah:

$$u(x,t) = sin(3x)cos(3t)$$

2.2.2 Solusi Numerik

Pada subbab ini akan ditunjukkan penyelesaian persamaan gelombang menggunakan metode beda hingga, dimana persamaan gelombang ditunjukkan oleh persamaan (8).

- Diskritisasi

Diskritisasi dilakukan dengan tujuan menginisialisasikan indeks yang akan digunakan pada perhitungan solusi dalam metode numerik.

Untuk banyaknya titik $N_x + 1$, diperoleh:

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + i\Delta x, i = 0, 1, 2, \cdots, N_x \\ \Delta x &= \frac{x_N - x_0}{N_x} \end{aligned}$$

Untuk banyaknya titik $N_t + 1$, diperoleh:

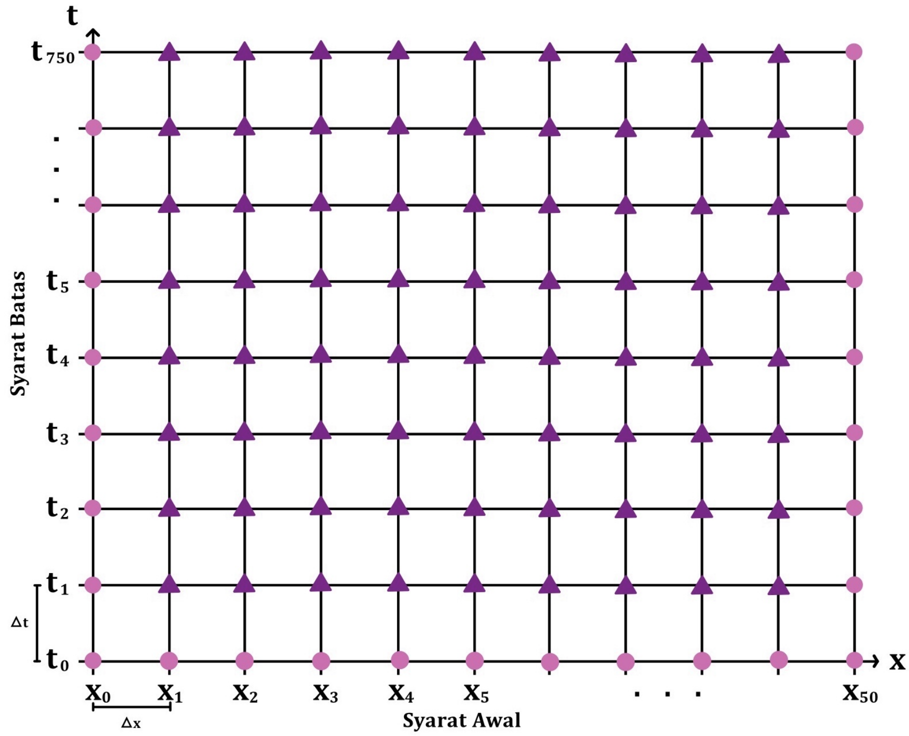
$$\begin{aligned} t_j &= t_0 + j\Delta t, j = 0, 1, 2, \cdots, N_t \\ \Delta t &= \frac{t_M - t_0}{N_t} \end{aligned}$$

Sehingga, solusi tersebut dapat didefinisikan menjadi sebagai berikut:

$$u(x,t) \to u(x_i, t_j) = u_i^j$$

Akan dimisalkan $N_x = 50$ dan $N_t = 750$. Hitung nilai Δx dan Δt.

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\pi - 0}{50} \\ &= \frac{\pi}{50}, \\ \Delta t &= \frac{5 - 0}{750} \\ &= \frac{1}{150} \end{aligned}$$



Gambar 1: Diskritisasi

Berdasarkan Gambar 1, simbol lingkaran menunjukan indeks yang diketahui. Hal tersebut diperoleh dari syarat awal dan syarat batas yang telah diketahui pada persamaan (8). Sementara, simbol segitiga menunjukkan indeks yang belum diketahui.

- Stabilitas

Metode ini hanya akan stabil jika memenuhi kondisi $s \leq 1$ dimana s dapat dicari dengan

$$s = c^2 \cdot \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$$

Sebelum melakukan diskritisasi, perlu ditentukan N_x dan N_t (jumlah partisi) terlebih dahulu. Lalu, hitung besar s dengan menggunakan formula:

$$\begin{aligned} s &= c^2 \cdot \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \\ &= 1^2 \cdot \frac{(\frac{1}{150})^2}{(\frac{\pi}{50})^2} \\ &\approx 0.0112579 \end{aligned}$$

Karena $0.0112579 \leq 1$, maka syarat stabilitas terpenuhi. Jadi, N_x dan N_t dapat digunakan.

Selanjutnya, akan ditinjau syarat batas dan syarat awal pada permasalahan di atas

- Syarat Batas (Dirichlet):

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \\ u_0^j &= u_\pi^j = 0 \end{aligned}$$

- Syarat Awal:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= sin3x \\ u_i^0 &= sin3x_i \\ u_t(x,0) &= \frac{u_i^0 - u_i^{-1}}{\Delta t} = 0 \\ u_i^0 &= u_i^{-1} = 0 \end{aligned}$$

A. Skema Eksplisit
Skema numerik persamaan gelombang (8) dengan metode beda hingga pusat skema eksplisit, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{(\Delta t)^2} &= c^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \\ u_i^{j+1} &= c^2 \cdot (\Delta t)^2 \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + 2u_i^j - u_i^{j-1} \\ u_i^{j+1} &= c^2 \cdot \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2} \left[u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j\right] + 2u_i^j - u_i^{j-1} \end{aligned}$$

Diketahui $s = c^2 \cdot \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}$, setelah dilakukan substitusi, maka persamaan menjadi:

$$u_i^{j+1} = s\left[u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j\right] + 2u_i^j - u_i^{j-1}$$

Akan dilakukan *looping* untuk indeks i dan j.

Tinjau untuk j=0, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} u_i^1 &= s\left[u_{i+1}^0 - 2u_i^0 + u_{i-1}^0\right] + 2u_i^0 - u_i^{-1} \\ u_i^1 &= s \cdot u_{i+1}^0 - 2s \cdot u_i^0 + s \cdot u_{i-1}^0 + 2u_i^0 - u_i^{-1} \\ u_i^1 &= s \cdot u_{i+1}^0 - (2s-2)u_i^0 + s \cdot u_{i-1}^0 - u_i^{-1} \\ u_i^1 &= s \cdot u_{i+1}^0 - (2s-2)u_i^0 + s \cdot u_{i-1}^0 - u_i^0 \\ u_i^1 &= s \cdot u_{i+1}^0 - (2s-1)u_i^0 + s \cdot u_{i-1}^0 \end{aligned}$$

Sehingga, persamaan di atas dapat diperumum menjadi:

$$u_i^{j+1} = s \cdot u_{i+1}^j - (2s-1)u_i^j + s \cdot u_{i-1}^j$$

Tinjau indeks i melalui persamaan di atas,

- Untuk $i = 1$,

$$u_1^1 = s \cdot u_2^0 - (2s-1)u_1^0 + s \cdot u_0^0$$

- Untuk $i = 2$,

$$u_2^1 = s \cdot u_3^0 - (2s-1)u_2^0 + s \cdot u_1^0$$

- Untuk $i = 3$,

$$u_3^1 = s \cdot u_4^0 - (2s-1)u_3^0 + s \cdot u_2^0$$

- Untuk $i = N-1$,

$$u_{N-1}^{1} = s \cdot u_N^0 - (2s-1)u_{N-1}^0 + s \cdot u_{N-2}^0$$

Selanjutnya, tinjau j=1, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} u_i^2 &= s\left[u_{i+1}^1 - 2u_i^1 + u_{i-1}^1\right] + 2u_i^1 - u_i^0 \\ u_i^2 &= s \cdot u_{i+1}^1 - 2s \cdot u_i^1 + s \cdot u_{i-1}^1 + 2u_i^1 - u_i^0 \\ u_i^2 &= s \cdot u_{i+1}^1 - (2s-2)u_i^1 + s \cdot u_{i-1}^1 - u_i^0 \end{aligned}$$

Sehingga, persamaan di atas dapat diperumum menjadi:

$$u_i^{j+1} = s \cdot u_{i+1}^j - (2s-2)u_i^j + s \cdot u_{i-1}^j - u_i^{j-1}$$

Tinjau indeks i,

- Untuk $i = 1$,

$$u_1^2 = s \cdot u_2^1 - (2s-2)u_1^1 + s \cdot u_0^1 - u_1^0$$

- Untuk $i = 2$,

$$u_2^2 = s \cdot u_3^1 - (2s-2)u_2^1 + s \cdot u_1^1 - u_2^0$$

- Untuk $i = 3$,

$$u_3^2 = s \cdot u_4^1 - (2s-2)u_3^1 + s \cdot u_2^1 - u_3^0$$

- Untuk $i = N-1$,

$$u_{N-1}^2 = s \cdot u_N^1 - (2s-2)u_{N-1}^1 + s \cdot u_{N-2}^1 - u_{n-1}^0$$

B. Skema Implisit

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{(\Delta x)^2} + \tfrac{u_{i+1}^{j} - 2u_i^{j} + u_{i-1}^{j}}{(\Delta x)^2}\right]$$

Skema numerik persamaan gelombang (8) dengan metode beda hingga pusat skema implisit, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{(\Delta t)^2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i+1}^{j} - 2u_i^{j} + u_{i-1}^{j}}{(\Delta x)^2}\right] \\ u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1} &= \frac{(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2}\left[u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j + u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}\right] \end{aligned}$$

Misalkan $s = \frac{(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2}$, maka dapat diperoleh:

$$\begin{gathered} u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1} = s \cdot u_{i+1}^j - 2s \cdot u_i^j + s \cdot u_{i-1}^j + s \cdot u_{i+1}^{j+1} - 2s \cdot u_i^{j+1} + s \cdot u_{i-1}^{j+1} \\ -s \cdot u_{i-1}^{j+1} + (1+2s)u_i^{j+1} - s \cdot u_{i+1}^{j+1} = s \cdot u_{i-1}^j - (2s-2)u_i^j + s \cdot u_{i+1}^j - u_i^{j-1} \end{gathered}$$

Tinjau untuk j = 0,

$$-s \cdot u_{i-1}^{1} + (1+2s)u_i^1 - s \cdot u_{i+1}^{1} = s \cdot u_{i-1}^{0} - (2s-2)u_i^0 + s \cdot u_{i+1}^{0} - u_i^{-1}$$

Nilai u_i^{-1} diperoleh dengan pendekatan syarat awal menggunakan metode beda hingga mundur,

$$\begin{aligned} u(x,0) &= sin3x \\ u_i^0 &= sin3x_i \\ u_t(x,0) &= 0 \\ \frac{u_i^o - u_i^{-1}}{\Delta t} &= g(x_i) \\ u_i^{-1} &= u_i^0 + g(x_i)\Delta t \end{aligned}$$

Lalu, dengan mensubstitusi nilai u_i^{-1}, maka persamaannya menjadi:

$$-s \cdot u_{i-1}^{1} + (1+2s)u_i^1 - s \cdot u_{i+1}^{1} = s \cdot u_{i-1}^{0} - (2s-2)u_i^0 + s \cdot u_{i+1}^{0} - u_i^0 + g(x_i)\Delta t$$

Selanjutnya, tinjau indeks i untuk persamaan di atas,

- Untuk $i = 1$,

$$-s \cdot u_0^1 + (1+2s)u_1^1 - s \cdot u_2^1 = s \cdot u_0^0 - (2s-1)u_1^0 + s \cdot u_2^0 + g(x_1)\Delta t$$

- Untuk $i = 2$,

$$-s \cdot u_1^1 + (1+2s)u_2^1 - s \cdot u_3^1 = s \cdot u_1^0 - (2s-1)u_2^0 + s \cdot u_3^0 + g(x_2)\Delta t$$

- Untuk $i = 3$,

$$-s \cdot u_2^1 + (1+2s)u_3^1 - s \cdot u_4^1 = s \cdot u_2^0 - (2s-1)u_3^0 + s \cdot u_4^0 + g(x_3)\Delta t$$

- Untuk $i = N-1$,

$$-s \cdot u_{N-2}^1 + (1+2s)u_{N-1}^1 - s \cdot u_N^1 = s \cdot u_{N-2}^0 - (2s-1)u_{N-1}^0 + s \cdot u_N^0 + g(x_{N-1})\Delta t$$

Selanjutnya, setelah melakukan *looping* pada indeks i dan j akan terbentuk sistem persamaan linear yang kemudian dapat dibentuk menjadi sebuah matriks.

Untuk matriks ruas kiri diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1+2s & -s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -s & 1+2s & -s & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -s & 1+2s & -s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -s & 1+2s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ \vdots \\ u_{N-2}^1 \\ u_{N-1}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s \cdot u_0^1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -s \cdot u_N^1 \end{bmatrix}$$

Lalu, untuk matriks ruas kanan diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -(2s-1) & s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ s & -(2s-1) & s & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & -(2s-1) & s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s & -(2s-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ \vdots \\ u_{N-2}^0 \\ u_{N-1}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \cdot u_0^0 + g(X_1)\Delta t \\ g(X_2)\Delta t \\ g(X_3)\Delta t \\ \vdots \\ g(X_{N-2})\Delta t \\ s \cdot u_N^0 + 9(X_{N-1})\Delta t \end{bmatrix}$$

Tinjau untuk j=1,

$$-s \cdot u_{i-1}^2 + (1+2s)u_i^2 - s \cdot u_{i+1}^2 = s \cdot u_{i-1}^1 - (2s-2)u_i^1 + s \cdot u_{i+1}^1 - u_i^0$$

Selanjutnya, tinjau indeks i untuk persamaan di atas,

- Untuk $i = 1$,

$$-s \cdot u_0^2 + (1+2s)u_1^2 - s \cdot u_2^2 = s \cdot u_0^1 - (2s-2)u_1^1 + s \cdot u_2^1 - u_1^0$$

- Untuk $i = 2$,

$$-s \cdot u_1^2 + (1+2s)u_2^2 - s \cdot u_3^2 = s \cdot u_1^1 - (2s-2)u_2^1 + s \cdot u_3^1 - u_2^0$$

- Untuk $i = 3$,

$$-s \cdot u_2^2 + (1+2s)u_3^2 - s \cdot u_4^2 = s \cdot u_2^1 - (2s-2)u_3^1 + s \cdot u_4^1 - u_3^0$$

- Untuk $i = N-1$,

$$-s \cdot u_{N-2}^2 + (1+2s)u_{N-1}^2 - s \cdot u_N^2 = s \cdot u_{N-2}^1 - (2s-1)u_{N-1}^1 + s \cdot u_N^1 + u_{N-1}^0$$

Selanjutnya, setelah melakukan looping pada indeks i dan j akan terbentuk sistem persamaan linear yang kemudian dapat dibentuk menjadi sebuah matriks.

Untuk matriks ruas kiri diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1+2s & -s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -s & 1+2s & -s & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -s & 1+2s & -s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -s & 1+2s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ \vdots \\ u_{N-2}^2 \\ u_{N-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s \cdot u_0^2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -s \cdot u_N^2 \end{bmatrix}$$

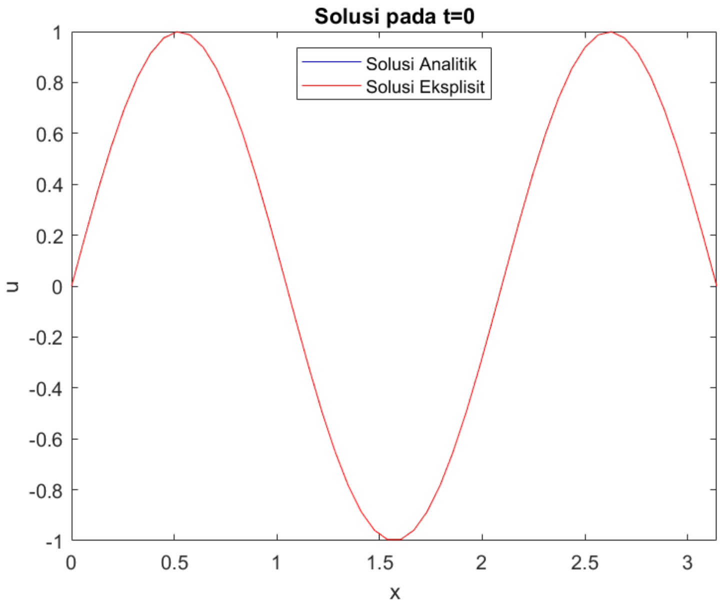
Lalu, untuk matriks ruas kanan diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -(2s-2) & s & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ s & -(2s-2) & s & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s & -(2s-2) & s & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & s & -(2s-2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ \vdots \\ u_{N-2}^1 \\ u_{N-1}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \cdot u_0^1 - u_1^0 \\ -u_2^0 \\ -u_3^0 \\ \vdots \\ -u_{N-2}^0 \\ s \cdot u_N^1 - u_{N-1}^0 \end{bmatrix}$$

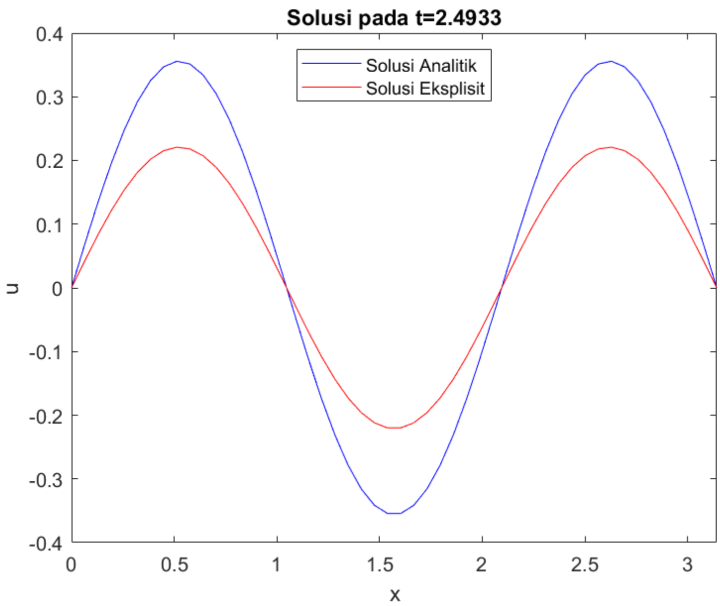
2.2.3 Perbandingan Antara Solusi Analitik dengan Solusi Numerik

A. Perbandingan Antara Solusi Analitik dengan Solusi Eksplisit

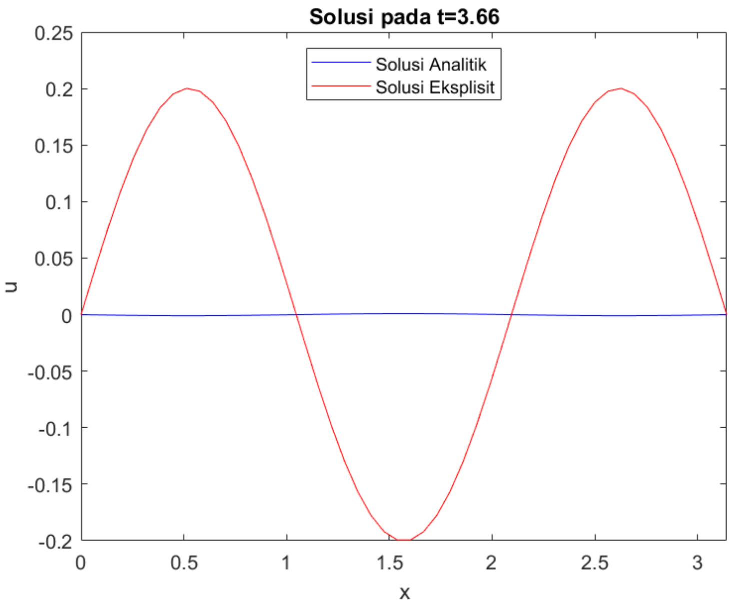
Hasil perhitungan dari solusi analitik dan solusi eksplisit divisualisasikan menggunakan program MATLAB dengan persamaan gelombang pada empat waktu yang berbeda, yaitu pada saat $t = 0$, $t = 2.4933$, $t = 3.66$, dan $t = 4.9933$. Pada grafik tersebut, gelombang yang divisualisasikan merupakan gelombang *sinus*.



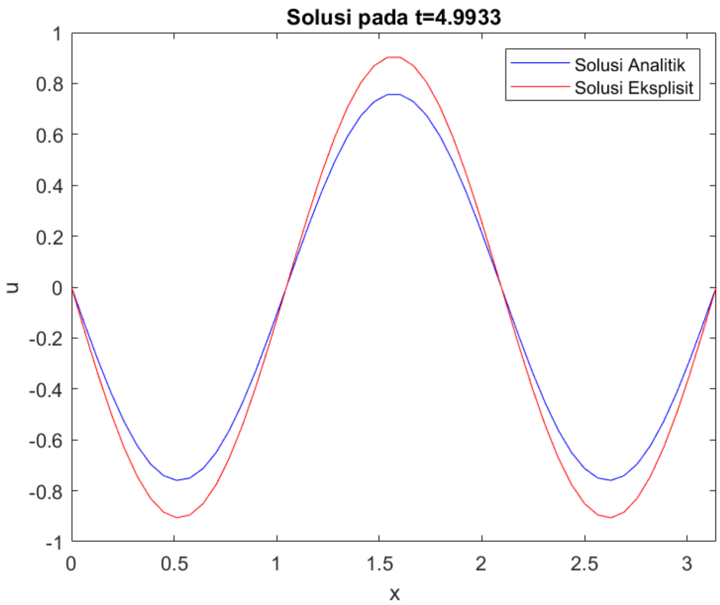
Gambar 2: Grafik Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Eksplisit pada $t = 0$.



Gambar 3: Grafik Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Eksplisit pada $t = 2.4933$.

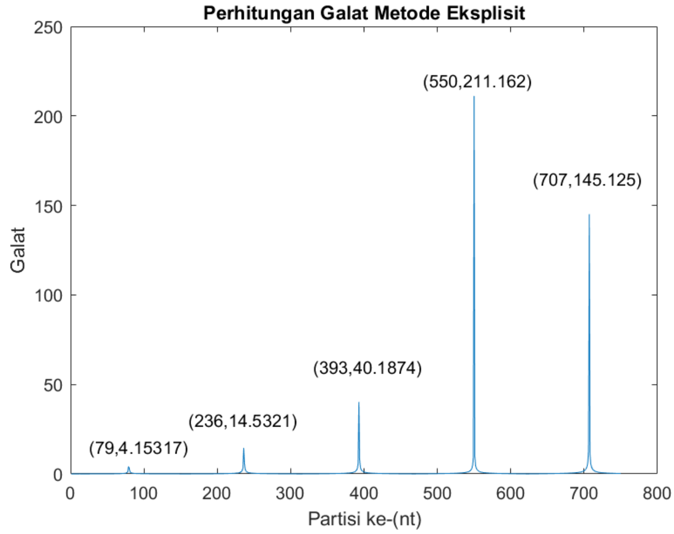


Gambar 4: Grafik Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Eksplisit pada $t = 3.66$.



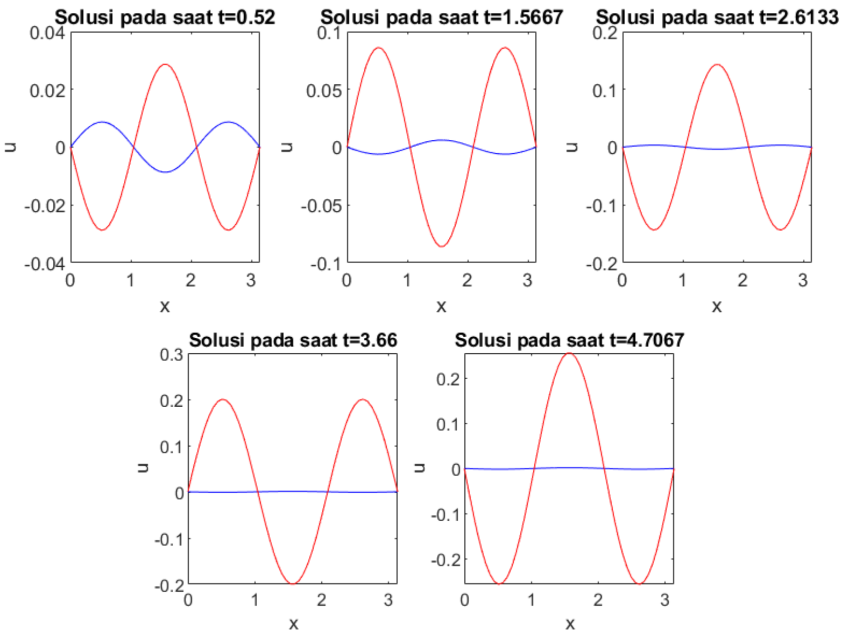
Gambar 5: Grafik Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Eksplisit pada $t = 4.9933$.

Pada Gambar 2 terlihat bahwa solusi analitik dan solusi eksplisit memiliki gelombang yang sama pada $t = 0$. Namun, pada Gambar 3, Gambar 4, dan Gambar 5, kedua solusi memiliki grafik yang berbeda. Perbedaan ini dinamakan galat relatif sebenarnya. Berikut adalah grafik yang menunjukkan galat perhitungan antara kedua solusi.



Gambar 6: Grafik Galat Antara Solusi Analitik dengan Solusi Eksplisit.

Galat tertinggi terjadi pada 5 waktu tertentu, yaitu pada partisi $nt = 79, 236, 393, 550,$ dan 707. Galat ini akan terlihat lebih jelas pada grafik yang berbentuk gelombang.

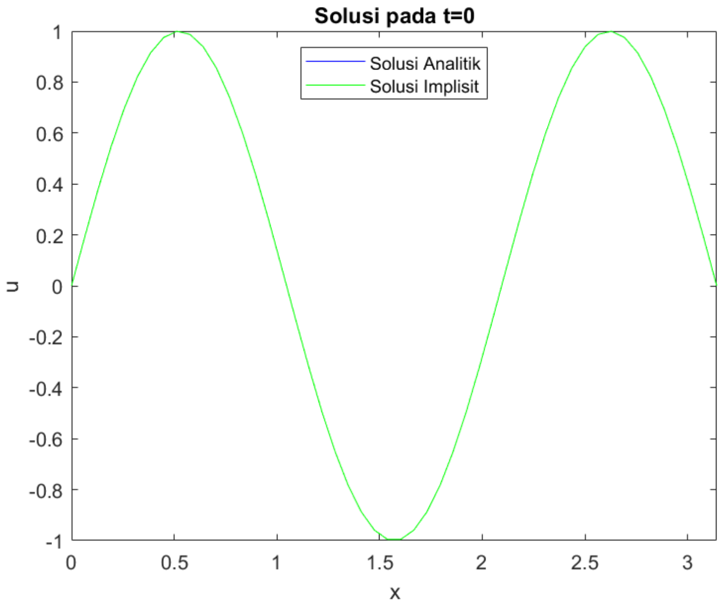


Gambar 7: Grafik Solusi pada saat $t = 0.52, 1.5667, 2.6133, 3.66, 4.7067$.

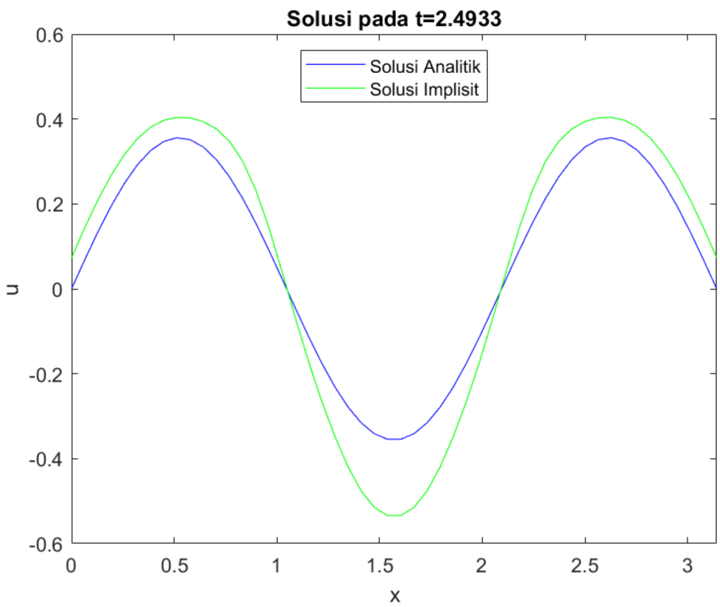
Kelima grafik pada Gambar 7 menunjukkan adanya perbedaan bentuk gelombang yang signifikan pada waktu t = 0.52, 1.5667, 2.6133, 3.66, dan 4.7067 antara kurva solusi analitik dan solusi numerik pada skema eksplisit.

B. Perbandingan Antara Solusi Analitik dengan Solusi Implisit

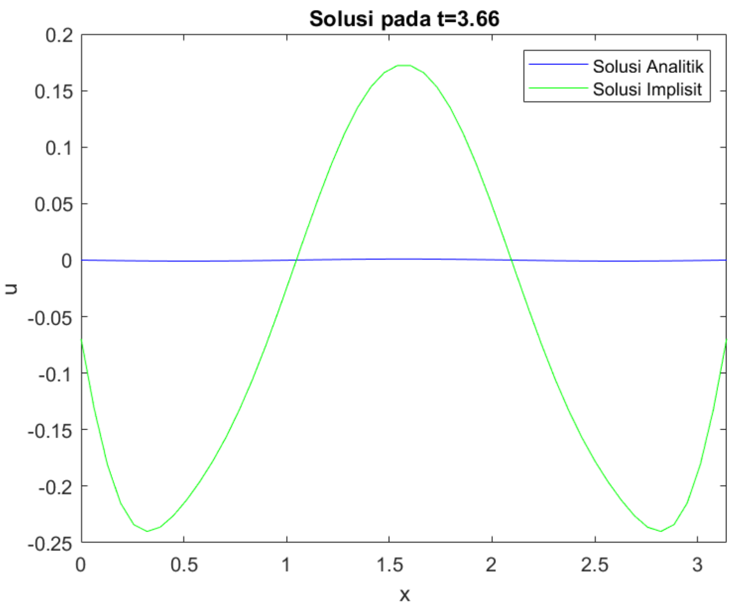
Hasil perhitungan dari solusi analitik dan solusi implisit divisualisasikan menggunakan program MATLAB dengan persamaan gelombang pada empat waktu yang berbeda, yaitu pada saat t = 0, t = 2.4933, t = 3.66, dan t = 4.9933. Pada grafik tersebut, gelombang yang divisualisasikan merupakan gelombang *sinus*.



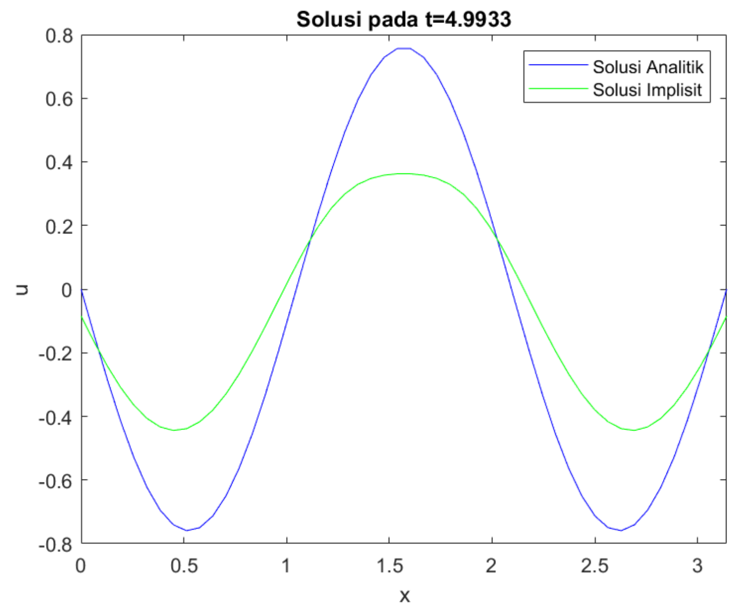
Gambar 8: Grafik Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Implisit pada $t = 0$.



Gambar 9: Grafik Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Implisit pada $t = 2.4933$.

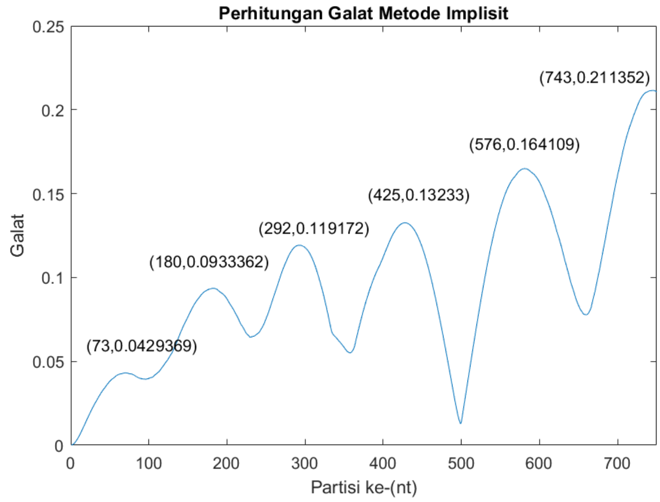


Gambar 10: Grafik Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Implisit pada $t = 3.66$.



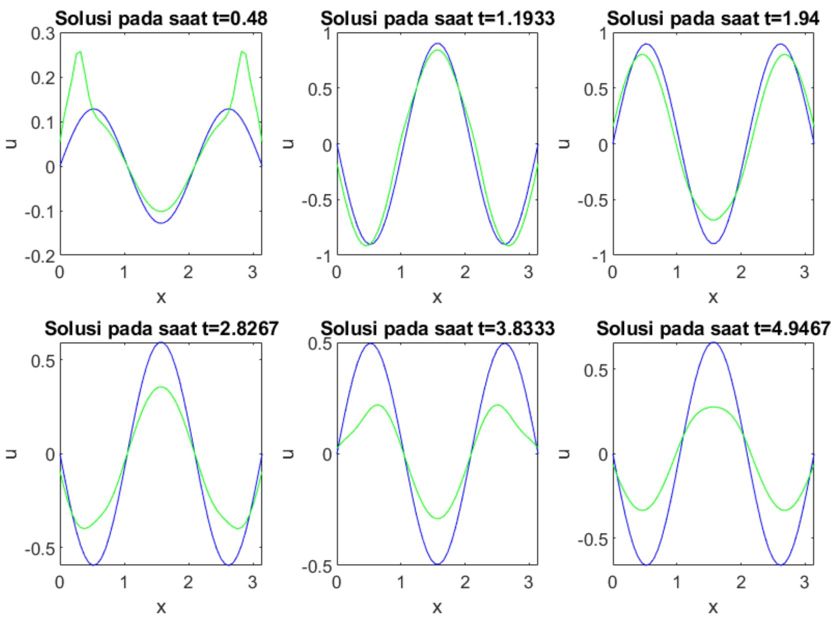
Gambar 11: Grafik Perbandingan Solusi Analitik dan Solusi Implisit pada $t = 4.9933$.

Seperti pada pembahasan dalam skema eksplisit, Gambar 8 terlihat bahwa solusi analitik dan solusi implisit memiliki gelombang yang sama pada $t = 0$. Namun, pada Gambar 9, Gambar 10, dan Gambar 11, kedua solusi memiliki grafik yang berbeda. Perbedaan ini dinamakan galat sebenarnya. Berikut adalah grafik yang menunjukkan galat perhitungan antara kedua solusi.



Gambar 12: Grafik Galat Antara Solusi Analitik dengan Solusi Implisit.

Gambar 12 menunjukkan adanya galat (*error*) sebenarnya antara solusi analitik dan solusi numerik (implisit). Galat tertinggi terjadi pada 4 waktu tertentu, yaitu pada partisi $nt = 292, 425, 576$, dan 743.



Gambar 13: Grafik Solusi pada saat $t = 0.48, 1.1933, 1.94, 2.8267, 3.8333, 4.9467$.

Grafik-grafik yang terdapat pada gambar 13 menunjukkan adanya perbedaan bentuk gelombang yang cukup signifikan pada waktu t = 0.48, 2.8267, 3.8333, dan 4.9467, sedangkan pada saat t = 1.1933 dan t = 1.94 dapat dilihat bahwa perbedaannya cukup minim antara kurva solusi analitik dan solusi numerik pada skema implisit.

3 Kesimpulan

Metode beda hingga merupakan salah satu metode numerik yang didasarkan pada deret Taylor dan menggunakan pendekatan ekspansi Taylor pada titik acuannya, sehingga jika semakin kecil panjang partisi, maka akan semakin banyak nilai hampiran yang dihitung dan akan menghasilkan solusi yang lebih akurat. Dalam menggunakan metode numerik, perlu diperhatikan syarat kestabilan sebelum mencari solusi, yaitu $s \leq 1$ atau dengan kata lain besar partisi variabel x harus lebih besar dari pada besar partisi variabel t.

Dengan menggunakan metode numerik, didapatkan solusi berupa hampiran. Maka, terdapat galat (*error*) antara metode analitik dan metode numerik. Berdasarkan beberapa grafik solusi gelombang dua dimensi, dapat dilihat adanya kemiripan sekaligus perbedaan yang dihasilkan oleh metode analitik dan numerik. Apabila dilakukan analisa berdasarkan nilai galat (*error*), terdapat lima waktu dengan galat yang besar dikarenakan gelombang yang terbentuk merupakan gelombang *sinus.*

Galat pada grafik solusi metode numerik eksplisit cenderung lebih besar daripada solusi metode numerik implisit. Oleh karena itu, grafik solusi metode numerik implisit dinilai lebih akurat karena mendekati grafik solusi analitik. Metode numerik implisit dapat dikatakan lebih stabil dalam menghampiri solusi persamaan gelombang dibandingkan metode numerik eksplisit.

Daftar Pustaka

[1] Abhulimen, C. E., Omowo B.J.,. (2019). *Modified Crank-Nicolson Method for Solving One Dimensional Parabolic Equation*. OSR Journal of Mathematics. 15(6):60-66.

[2] Degefa, J. (2018). *Numerical Solution of Two-Dimensional Wave Equation Using Crank-Nicolson Scheme*. Makalah.

[3] LeVeque, R. J.. (2007). *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. United States of America: The Society for Industrial and Applied Mathematics.

[4] Noor, A. A., Putri, A.R., dan Syafwan. (2020). *Solusi Analitik dan Numerik Suatu Persamaan Gelombang Satu Dimensi*. Jurnal Matematika UNAND. 8(4):1-8.

[5] Strauss, W. A.. (2008). *Partial Differential Equations: An Introduction*. United States of America: John Wiley and Sons, Inc.

[6] Wahyudi. (2014). *Analisis Metode Beda Hingga Implisit, Eksplisit dan Crank-Nicholson pada Perhitungan Harga Opsi Asia*. Skripsi. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

[7] Winata, Nadia Ingrida, dkk. (2021). *Metode Beda Hingga Eksplisit dan Implisit untuk Menyelesaikan Persamaan Panas*. Laporan

Lampiran

Berikut ini merupakan lampiran algoritma yang digunakan untuk menghitung solusi persamaan diferensial biasa secara analitik dan dengan metode beda hingga menggunakan aplikasi MATLAB.

A. Pseudocode

program PDP_BedaHingga

deklarasi:
a ← 0
b ← π
t0 ← 0
ta ← 5
nx ← 50
nt ← 750
x ← dari a sampai b dengan banyak partisi nx
t ← dari t0 sampai ta dengan banyak partisi nt
dx ← b-a/nx
dt ← ta-to/nt
c ← 1
s ← $c^2 \cdot \dfrac{dt^2}{dx^2}$
i ← integer
j ← integer
a ← integer
aa ← integer
b ← integer
bb ← integer
u ← matriks nol berukuran nx x nt
u_eks ← matriks nol berukuran nx x nt
m ← matriks nol berukuran nx x nx

% Syarat awal:
u(j,1) ← vektor

% Syarat batas:
u(1,i) ← vektor nol
u(nx,i) ← vektor nol

algoritma:

```
%Solusi Analitik
FOR i ← 1 sampai nx
    FOR j ← 1 sampai nt
        output solusi analitik //berupa matriks berukuran nx+1 x nt+1
    END FOR
END FOR


%Solusi Numerik Eksplisit
FOR j ← 1 sampai nt-1
    FOR i ← 2 sampai nx-1
        IF j == 1
            output solusi eksplisit // kondisi khusus pada saat t = 0
        ELSE
            output solusi eksplisit
        ENDIF
    END FOR
END FOR

% Plot Solusi Analitik dan Eksplisit
FOR a ← 1 sampai nt
    membuat figure
    membuat plot solusi analitik dan solusi eksplisit
    membuat judul
    membuat legenda
    membuat batasan sumbu-x dan sumbu-y
    menentukan lama memunculkan tiap grafik 0.1 detik
END FOR

% Mencari Galat Solusi Analitik dan Eksplisit
FOR aa ← 1 sampai nt
    error ← mutlak (solusi analitik - solusi eksplisit) / mutlak (solusi analitik)
    error (isnan(error) ← 0
    er(aa) ← jumlah error / nx
END FOR

% Membuat Plot Galat Solusi Analitik dan Eksplisit
    membuat figure
    membuat plot galat
    membuat judul
    memberikan keterangan pada sumbu x dan sumbu y
    memberikan keterangan pada titik tertentu
```

```
% Solusi Numerik Implisit
% Syarat awal:
U(j,1) ← vektor

% Syarat batas:
U(1,i) ← vektor nol
U(nx,i) ← vektor nol

FOR i ← 1 sampai nx
    FOR k ← 1 sampai nx
        IF k == i-1
            diagonal utama atas matriks m ← -s
        ELSEIF k == i
            diagonal utama matriks m ← 1 + 2 · s
        ELSEIF k == i+1
            diagonal utama bawah matriks m ← -s
        ENDIF
    END FOR
END FOR

U1 ← invers matriks m · U
A ← matriks berisi entri U dan U1
FOR i ← 1 sampai nt-1
    U2 ← invers ((0.5·matriks m)·(U_1 − 0.5 · U))
    solusi implisit ← matriks berisi entri A dan U2
    U ← U1
    U1 ← U2
    output solusi implisit ← A
END FOR

% Membuat Plot Solusi Analitik dan Solusi Implisit
FOR b ← 1 sampai nt
    membuat figure
    membuat plot solusi analitik dan solusi implisit
    membuat judul
    membuat legenda
    membuat batasan sumbu-x dan sumbu-y
    menentukan lama memunculkan tiap grafik 0.1 detik
END FOR

% Mencari Galat Solusi Analitik dan Implisit
FOR bb ← 1 sampai nt
    error ← mutlak (solusi analitik - solusi implisit)
    err(bb) ← jumlah error / nx
END FOR
```

% Membuat Plot Galat Solusi Analitik dan Implisit
membuat figure
membuat plot galat
membuat judul
memberikan keterangan pada sumbu x dan sumbu y
memberikan batasan pada sumbu x
memberikan keterangan pada titik tertentu

B. Kode Program

```
clc;
clear all;
close all;

%Batas awal dan akhir
a = 0;
b = pi;
t0 = 0;
ta = 5;

%Jumlah partisi
nx = 50;
nt = 750;

x = linspace(a,b,nx);
t = linspace(t0,ta,nt);

%Besar partisi
dx = (b-a)/nx;
dt = (ta-t0)/nt;

c = 1;
s = ((c.^2)*(dt.^2))/(dx.^2);


%Solusi analitik
%Inisialisasi matriks
u = zeros(nx,nt);

%Syarat awal
u(:,1) = sin(3.*x);

%Syarat Batas
u(1,:) = 0;
u(nx,:) = 0;

```

```
for i=1:nx
    for j = 1:nt
        u(i,j) = sin(3.*x(i))*cos(3.*t(j));
    end
end


%Solusi Beda Hingga Eksplisit
%Inisialisasi matriks
u_eks = zeros(nx,nt);

%Syarat awal
u_eks(:,1) = sin(3.*x);

%Syarat Batas
u_eks(1,:) = 0;
u_eks(nx,:) = 0;

%Perhitungan Solusi Eksplisit
for j = 1:nt-1
    for i = 2:nx-1
        if j == 1
            u_eks(i,j+1) = s*(u_eks(i+1,j)-2*u_eks(i,j)+u_eks(i
                -1,j))+2*u_eks(i,j)-u_eks(i,j);
        else
            u_eks(i,j+1) = s*(u_eks(i+1,j)-2*u_eks(i, j)+u_eks(i
                -1,j))+2*u_eks(i,j)-u_eks(i,j-1);
        end
    end
end


%Membuat plot solusi eksplisit dan solusi analitik
for a  = 1:nt
    figure(1)
    plot(x,u(:,a),'b',x,u_eks(:,a),'r')
    title('Grafik Solusi Analitik dan Solusi Eksplisit')
    legend('Solusi Analitik','Solusi Eksplisit')
    xlim([0 pi])
    ylim([-1.5 1.5])
    pause(0.1)
end

t01 = 0*dt;
t02 = 374*dt;
t03 = 549*dt;
t04 = 749*dt;
```

```
figure;
plot(x,u(:,1),'b',x,u_eks(:,1),'r')
xlim([0 pi])
title(['Solusi pada t=',num2str(t01)])
legend('Solusi Analitik','Solusi Eksplisit','Location','north')
xlabel('x')
ylabel('u')

figure;
plot(x,u(:,375),'b',x,u_eks(:,375),'r')
xlim([0 pi])
title(['Solusi pada t=',num2str(t02)])
legend('Solusi Analitik','Solusi Eksplisit','Location','north')
xlabel('x')
ylabel('u')

figure;
plot(x,u(:,550),'b',x,u_eks(:,550),'r')
xlim([0 pi])
title(['Solusi pada t=',num2str(t03)])
legend('Solusi Analitik','Solusi Eksplisit','Location','north')
xlabel('x')
ylabel('u')

figure;
plot(x,u(:,750),'b',x,u_eks(:,750),'r')
xlim([0 pi])
title(['Solusi pada t=',num2str(t04)])
legend('Solusi Analitik','Solusi Eksplisit')
xlabel('x')
ylabel('u')

%Mencari galat
for aa=1:nt
    error = abs(u(:,aa)-u_eks(:,aa))./abs(u(:,aa));
    error(isnan(error)) = 0;
    er(aa) = sum(error)/nx;
end

%Membuat plot galat
figure;
plot(er)
title('Perhitungan Galat Metode Eksplisit')
xlabel('Partisi ke-(nt)')
ylabel('Galat')
text(25,15,'(79,4.15317)')
text(160,30,'(236,14.5321)')
text(330,60,'(393,40.1874)')
```

```
text(480,220,'(550,211.162)')
text(630,165,'(707,145.125)')

t1 = 78*dt;
t2 = 235*dt;
t3 = 392*dt;
t4 = 549*dt;
t5 = 706*dt;

figure;
subplot(2,3,1)
plot(x,u(:,79),'b',x,u_eks(:,79),'r')
title(['Solusi pada saat t=',num2str(t1)])
xlabel('x')
ylabel('u')

subplot(2,3,2)
plot(x,u(:,236),'b',x,u_eks(:,236),'r')
title(['Solusi pada saat t=',num2str(t2)])
xlabel('x')
ylabel('u')

subplot(2,3,3)
plot(x,u(:,393),'b',x,u_eks(:,393),'r')
title(['Solusi pada saat t=',num2str(t3)])
xlabel('x')
ylabel('u')

subplot(2,3,4.5)
plot(x,u(:,550),'b',x,u_eks(:,550),'r')
title(['Solusi pada saat t=',num2str(t4)])
xlabel('x')
ylabel('u')

subplot(2,3,5.5)
plot(x,u(:,707),'b',x,u_eks(:,707),'r')
title(['Solusi pada saat t=', num2str(t5)])
xlabel('x')
ylabel('u')


%Solusi Beda Hingga Implisit
%Syarat awal
U(:,1) = sin(3.*x);

%Syarat Batas
U(1,:) = 0;
U(nx,:) = 0;
```

```
%Inisialisasi matriks
m = zeros(nx,nx);

for i = 1:nx
    for k = 1:nx
        if k == i-1
            m(i,k) = -s;
        elseif k == i
            m(i,k) = 1+2*s;
        elseif k == i+1
            m(i,k) = -s;
        end
    end
end

U1 = inv(m)*U;
A = [U U1];

for i = 1 : nt - 1
   U2 = inv(0.5*m)*(U1-(0.5*U));
   u_imp = [A U2];
   U = U1;
   U1 = U2;
   A = u_imp;
end


%Membuat plot solusi implisit dan solusi analitik
for b = 1:nt
    figure(8)
    plot(x,u(:,b),'b',x, u_imp(:, b),'g')
    title('Grafik Solusi Analitik dan Solusi Implisit')
    legend('Solusi Analitik','Solusi Implisit')
    xlim([0 pi])
    ylim([-1.5 1.5])
    pause(0.1)
end

t01 = 0*dt;
t02 = 374*dt;
t03 = 549*dt;
t04 = 749*dt;

figure;
plot(x,u(:,1),'b',x,u_imp(:,1),'g')
xlim([0 pi])
title(['Solusi pada t=',num2str(t01)])
```

```
legend('Solusi Analitik','Solusi Implisit','Location','north')
xlabel('x')
ylabel('u')

figure;
plot(x,u(:,375),'b',x,u_imp(:,375),'g')
xlim([0 pi])
title(['Solusi pada t=',num2str(t02)])
legend('Solusi Analitik','Solusi Implisit','Location','north')
xlabel('x')
ylabel('u')

figure;
plot(x,u(:,550),'b',x,u_imp(:,550),'g')
xlim([0 pi])
title(['Solusi pada t=',num2str(t03)])
legend('Solusi Analitik','Solusi Implisit')
xlabel('x')
ylabel('u')

figure;
plot(x,u(:,750),'b',x,u_imp(:,750),'g')
xlim([0 pi])
title(['Solusi pada t=',num2str(t04)])
legend('Solusi Analitik','Solusi Implisit')
xlabel('x')
ylabel('u')

%Mencari galat
for bb=1:nt
    error = abs(u(:,bb)-u_imp(:,bb));
    err(bb) = sum(error)/nx;
end

%Membuat plot galat
figure;
plot(err)
title('Perhitungan Galat Metode Implisit')
xlabel('Partisi ke-(nt)')
ylabel('Galat')
xlim([0 750])
text(20,0.06,'(73,0.0429369)')
text(100,0.11,'(180,0.0933362)')
text(240,0.13,'(292,0.119172)')
text(380,0.15,'(425,0.13233)')
text(510,0.18,'(576,0.164109)')
text(600,0.22,'(743,0.211352)')
```

```
t11 = 72*dt;
t22 = 179*dt;
t33 = 291*dt;
t44 = 424*dt;
t55 = 575*dt;
t66 = 742*dt;

figure;
subplot(2,3,1)
plot(x,u(:,73),'b',x,u_imp(:,73),'g')
title(['Solusi pada saat t=',num2str(t11)])
xlabel('x')
ylabel('u')

subplot(2,3,2)
plot(x,u(:,180),'b',x,u_imp(:,180),'g')
title(['Solusi pada saat t=',num2str(t22)])
xlabel('x')
ylabel('u')

subplot(2,3,3)
plot(x,u(:,292),'b',x,u_imp(:,292),'g')
title(['Solusi pada saat t=',num2str(t33)])
xlabel('x')
ylabel('u')

subplot(2,3,4)
plot(x,u(:,425),'b',x,u_imp(:,425),'g')
title(['Solusi pada saat t=',num2str(t44)])
xlabel('x')
ylabel('u')

subplot(2,3,5)
plot(x,u(:,576),'b',x,u_imp(:,576),'g')
title(['Solusi pada saat t=',num2str(t55)])
xlabel('x')
ylabel('u')

subplot(2,3,6)
plot(x,u(:,743),'b',x,u_imp(:,743),'g')
title(['Solusi pada saat t=',num2str(t66)])
xlabel('x')
ylabel('u')
```