UJIAN AKHIR SEMESTER

METODA NUMERIK KELAS C

Disusun oleh :

Amanda Gozali	**6161801169**
Lazarus Lie	**6162001205**
Varani Clarissa Wedhasanti	**6162001220**
Marnida Harnia	**6162001229**

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS TEKNOLOGI INFORMASI DAN SAINS

UNIVERSITAS KATOLIK PARAHYANGAN

BANDUNG

2023

DAFTAR ISI

BAB 1 **1**

PENDAHULUAN **1**

1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 1
1.3 Tujuan Pembahasan 1
1.4 Metodologi Penelitian 1
1.4.1 Jenis Penelitian 1
1.4.2 Waktu Penelitian 2
1.4.3 Prosedur Penelitian 2
1.4.4 Teknik Analisis Data 2

BAB 2 **3**

LANDASAN TEORI **3**

2.1 Aturan Trapesium 3
2.2 Aturan Simpson 3
2.3 Metode Gauss-Legendre 3
2.4 Metode Euler 4
2.5 Metode Heun 4
2.6 Metode Runge-Kutta Orde 4 4

BAB 3 **5**

PEMBAHASAN **5**

3.1 No. 1 5
3.1.1 Soal 5
3.1.2 Pembahasan 5
3.1.3 Algoritma 6
3.2 No. 2 7
3.2.1 Soal 7
3.2.2 Pembahasan 7
3.2.3 Algoritma 8

BAB 4 **10**

KESIMPULAN **10**

DAFTAR PUSTAKA **11**

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Metode numerik merupakan teknik penyelesaian permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan. Dalam metode numerik ini dilakukan operasi hitungan dalam jumlah yang sangat banyak dan prosesnya berulang. Sehingga, dalam praktiknya tidak semua permasalahan matematis atau perhitungan dapat diselesaikan dengan mudah menggunakan metode analitik. Pada proyek kali ini, terdapat dua persoalan yang akan dibahas tentang suatu energi radiasi dan arus listrik. Persoalan pertama berkaitan dengan integrasi numerik dan persoalan kedua berkaitan dengan masalah nilai awal. Untuk soal pertama, perhitungan integral secara numerik digunakan untuk memperoleh nilai hampiran (aproksimasi) dari pengintegralan yang tidak dapat diselesaikan secara analitik. Lalu, dibutuhkan juga metode yang memerlukan analisis-analisis pendekatan persoalan-persoalan integrasi untuk menghasilkan nilai yang diharapkan. Perhitungan integral secara numerik ini terdiri dari beberapa metode, diantaranya adalah Aturan Trapesium, Simpson, dan Gauss-Legendre. Selanjutnya, untuk persoalan kedua, akan dibahas mengenai penyelesaian masalah nilai awal dari suatu permasalahan diferensial biasa. Untuk menyelesaikan suatu permasalahan diferensial biasa diperlukanlah suatu nilai awal. Persamaan diferensial yang disajikan bersama nilai awalnya disebut sebagai masalah nilai awal. Ada beberapa bentuk persamaan diferensial yang sulit diselesaikan secara analitik. Jika masalah nilai awal sulit diselesaikan secara analitik, maka dapat diselesaikan secara numerik. Dalam proyek ini, akan dibahas penyelesaian masalah nilai awal suatu persamaan diferensial biasa secara numerik dengan menggunakan Metode Euler, Heun, dan Runge-Kutta orde 4.

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana mencari besar energi yang dikeluarkan oleh benda hitam dengan panjang gelombang yang bervariasi menggunakan Aturan Trapesium, Aturan Simpson, dan Metode Gauss-Legendre ?
2. Bagaimana menghitung integral tak wajar dari rumus planck tersebut untuk batas 0 dan ∞ ?
3. Bagaimana mencari besar energi dengan partisi yang berbeda-beda ?
4. Bagaimana mencari nilai arus pada rangkaian dengan variabel yang ditentukan menggunakan Metode Euler, Metode Heun, dan Metode Runge-Kutta orde 4 ?
5. Bagaimana mencari tegangan yang melalui kapasitor dengan variabel yang ditentukan menggunakan Metode Euler, Metode Heun, dan Metode Runge-Kutta orde 4?

1.3 Tujuan Pembahasan

1. Mencari solusi dari besar energi yang dikeluarkan benda hitam dengan metode dan partisi yang berbeda-beda menggunakan program *Python*.
2. Dapat mencari integral tak wajar menggunakan program *Python*.
3. Dapat mencari nilai arus dan tegangan dengan metode yang berbeda-beda menggunakan program *Python*.

1.4 Metodologi Penelitian

1.4.1 Jenis Penelitian

Penelitian yang digunakan dalam proyek ini adalah penelitian kepustakaan. Penelitian ini dilakukan dengan cara mengumpulkan informasi dari berbagai macam sumber yang tersedia, seperti *textbook*, jurnal, skripsi, disertasi, dan sejenisnya.

1.4.2 Waktu Penelitian

Proses penelitian dimulai dari bulan Desember 2022 - Januari 2023.

1.4.3 Prosedur Penelitian

Dalam menjawab permasalahan yang ada pada proyek maka digunakan prosedur penelitian dengan tahapan berikut ini:

1. Menentukan penyelesaian dari Soal No. 1 menggunakan Aturan Trapesium
2. Menentukan penyelesaian dari Soal No. 1 menggunakan Aturan Simpson
3. Menentukan penyelesaian dari Soal No. 1 menggunakan Metode Gauss-Legendre
4. Menentukan penyelesaian dari Soal No. 2 menggunakan Metode Euler
5. Menentukan penyelesaian dari Soal No. 2 menggunakan Metode Heun
6. Menentukan penyelesaian dari Soal No. 2 menggunakan Metode Runge-Kutta orde 4

1.4.4 Teknik Analisis Data

Teknik analisis data adalah tahapan terakhir dalam penelitian yaitu menggabungkan dan menyusun data yang terkumpul dalam penelitian agar dapat menghasilkan suatu kesimpulan yang dapat dipertanggungjawabkan. Melalui proses analisis data, maka dapat diperoleh hasil sehingga dapat berguna untuk menghasilkan argumentasi serta pembahasan pada permasalahan melalui fakta dan teori yang diperoleh. Dalam penelitian ini, data akan dianalisis secara numerik dari tahap pemasukan data pengolahan data dan hasil. Input pada soal nomor 1 merupakan banyaknya partisi untuk menentukan Aturan Trapesium dan Aturan Simpson, serta titik interpolasi yang diinginkan untuk menentukan Metode Gauss-Legendre. Sementara pada soal nomor 2, tidak diperlukan input pengguna untuk menjalankan program. Hasil yang diperoleh setelah proses pemrograman Python dengan 6 metode yang ditetapkan pada permasalahan akan menunjukan hasil yang sesuai dengan input pengguna.

BAB 2

LANDASAN TEORI

2.1 Aturan Trapesium

Aturan Trapesium merupakan suatu metode pendekatan integrasi numerik yang membagi fungsi ke dalam beberapa partisi yang berbentuk trapesium yang digunakan untuk mengaproksimasi nilai suatu integral dengan interpolasi linear.

Menurut rumus pertama integral tertutup Newton-Cotes untuk Aturan Trapesium:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \simeq \int_a^b f_1(x)\, dx$$

Dengan rumus interpolasi linear yang direpresentasikan dengan

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Sehingga, jika kedua rumus disubstitusikan, maka akan diperoleh rumus Aturan Trapesium

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

2.2 Aturan Simpson

Misalkan dua subinterval berurutan, $[x_{i-1}, x_i]$ dan $[x_i, x_{i+1}]$. Aturan Simpson mengaproksimasi area dibawah $f(x)$ diatas dua subinterval ini dengan memasang polinomial kuadrat melalui titik-titik $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $(x_i, f(x_i))$, dan $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, yang merupakan polinomial unik, kemudian diintegralkan kuadratnya. Pertama, bangun pendekatan polinomial kuadrat dari fungsi pada dua subinterval dengan menggunakan polinomial Lagrange. Didapat:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_i(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

Untuk mengaproksimasi integral dari (a, b), harus dijumlahkan integral dari $P_i(x)$ terhadap semua pasangan dari subinterval karena $P_i(x)$ mencakup dua subinterval. Substitusikan $\frac{h}{3}(f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}))$ untuk integral dari $P_i(x)$ dan mengelompokkan ulang suku-suku agar sederhana didapat formula :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(f(x_0) + 4\sum_{i=1,\, i\ ganjil}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,\, i\ genap}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)].$$

Dengan tingkat keakuratan $O(h^5)$.

2.3 Metode Gauss-Legendre

Metode ini menghitung nilai integral dengan cara mengambil nilai fungsi pada beberapa titik untuk merepresentasikan perhitungan luas dengan menyeimbangkan galat positif dan negatifnya. Metode Gauss menghampiri nilai integral dengan dua buah titik x_1 dan x_2, sehingga diperoleh:

$$I = \int_a^b f(x)dx = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

Pada metode ini nilai koefisien c_1 dan c_2 tidak diketahui. Maka, akan dicari c_1, c_2, c_3, dan c_4 . Dengan asumsi persamaan di atas akan menghasilkan nilai eksak untuk integral fungsi konstan, fungsi linier, fungsi parabola, dan fungsi kubik. Dengan demikian akan diperoleh:

$$c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} 1\, dx = x|_{-1}^{1} = 2 = c_1 + c_2$$

$$c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} x\, dx = x^2|_{-1}^{1} = 0 = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = x^3|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} = c_1 x_1^{\ 2} + c_2 x_2^{\ 2}$$

$$c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = x^4|_{-1}^{1} = 0 = c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3$$

Sehingga, jika dieliminasi akan diperoleh:

$$c_1 = c_2 = 1$$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\ dan\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dengan demikian,

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

2.4 Metode Euler

Metode Euler merupakan metode dasar untuk memecahkan masalah nilai awal dengan menerapkan metode *finite difference* (beda hingga) maju ke depan. Metode ini diperoleh dengan menurunkan deret Taylor dengan i merupakan tahapan iterasi sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + y_i'\Delta x + y_i''\frac{\Delta x^2}{2!} + ...$$

Jika, nilai dari Δx kecil, maka Metode Euler diperoleh dengan menguraikan suatu fungsi ke dalam deret Taylor hingga dua suku awal. Sehingga, persamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$$y_{i+1} = y_i + y_i'\Delta x$$

Diketahui bahwa $y'(x) = f(x_i, y_i)$ dan $h = x_{i+1} - x_i$, maka persamaan tersebut menjadi:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

2.5 Metode Heun

Metode Heun merupakan modifikasi dari Metode Euler. Modifikasi pada metode ini dilakukan dengan memperkirakan kemiringannya bernilai nol. Metode ini memperkirakan dua turunan pada interval, yaitu pada ujung awal dan ujung akhir. Kedua turunan tersebut kemudian diratakan dan digunakan untuk memperoleh perkiraan kemiringan yang lebih baik. Kemiringan pada ujung awal dari interval adalah:

$$y_i' = f(x_i, y_i)$$

Kemiringan tersebut digunakan untuk menghitung nilai y_{i+1} dengan ekstrapolasi linier, sehingga:

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x$$

Persamaan di atas disebut sebagai persamaan prediktor. Lalu, nilai dari y_{i+1}^0 digunakan untuk memperkirakan kemiringan pada ujung akhir interval, yaitu:

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)$$

Selanjutnya, kedua persamaan kemiringan tersebut diratakan untuk memperoleh kemiringan rerata pada interval sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\bar{y} = \frac{y_i' + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}$$

Kemudian, kemiringan rerata tersebut digunakan untuk ekstrapolasi linear dari y_i ke y_{i+1} :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}\Delta x$$

Persamaan di atas disebut juga sebagai persamaan korektor.

2.6 Metode Runge-Kutta Orde 4

Metode Runge-Kutta Orde 4 adalah suatu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal atau masalah nilai batas pada persamaan diferensial linier maupun non linier. Metode Runge-Kutta Orde 4 mempunyai persamaan yaitu

$$y_{i+1} = y_i + u(x_i, y_i)h$$

Dengan $u(x_i, y_i, h)$ disebut suatu fungsi *increment* yang dapat diinterpretasikan sebagai suatu fungsi *slope* rata-rata sepanjang interval.

BAB 3

PEMBAHASAN

3.1 No. 1

3.1.1 Soal

Suatu benda hitam menghasilkan energi radiasi berdasarkan rumus Planck berikut:

$$e\,d\lambda \;=\; \frac{2\pi hc^2 d\lambda}{\lambda^5[exp(hc/k\lambda T)-1]}\frac{erg}{cm^2 det}$$

dengan $e\ d\lambda$ adalah energi radiasi dengan interval panjang gelombang $d\lambda$, λ adalah panjang gelombang dalam cm, h adalah konstanta Planck (6,6256 × 10^{-27} erg det), c adalah kecepatan cahaya (2,99792 × 10^{10} cm/det), k adalah konstanta Boltzman (1,3805 × 10^{-16} erg/K), dan T adalah temperatur absolut dalam Kelvin (K). Hitung besar energi yang dikeluarkan pada setiap interval panjang gelombang (0,10), (100,110), (1000,1010), (0,) pada kasus T = 10, 100, 1000.

3.1.2 Pembahasan

Pada pembahasan akan dihitung besar energi yang dikeluarkan pada setiap interval panjang gelombang (0,10), (100,110), (1000,1010), (0, ∞) pada kasus T = 10, 100, 1000. Metode yang digunakan dalam menyelesaikan permasalahan numerik ini adalah Aturan Trapesium, Aturan Simpson, dan Metode Gauss-Legendre.

Untuk menghitung integral tak wajar yaitu 0 dan ∞. Kami misalkan terlebih dahulu $\lambda = \frac{1}{t}$ maka fungsi nya berubah menjadi :

$$\int_0^\infty \frac{2\pi hc^2 d\lambda}{\lambda^5[exp(hc/k\lambda T)-1]} = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2 dt}{\frac{1}{t}^7[exp(hc/k\frac{1}{t}T)-1]}$$

Karena $\frac{1}{t}$ sehingga $f(0)$ dan $f(\infty)$ dapat dihitung.

Untuk Aturan Trapesium dengan partisi 50 didapatkan hasil sebagai berikut :

Suhu	Panjang Gelombang			
	(0,10)	(100,110)	(1000,1010)	(0,∞)
10 kelvin	0.024470819408365634	2.1541152185647082e-11	2.549041128579697e-15	4.483439751989804e-38
100 kelvin	0.33982386471170517	2.155449148054362e-10	2.5492053651074768e-14	4.4864065377299236e-37
1000 kelvin	3.505942230137336	2.1555825713091053e-09	2.5492217891585987e-13	4.490855269459027e-36

Tabel 1

Untuk Aturan Simpson dengan partisi 50 didapatkan hasil sebagai berikut :

Suhu	Panjang Gelombang			
	(0,10)	(100,110)	(1000,1010)	(0,∞)
10 kelvin	0.031399686387056695	2.1541020890085037e-11	2.5490409603210774e-15	5.791062111215728e-38

100 kelvin	0.43869128618525427	2.1554360062813231e-10	2.549205196832562e-14	5.79545355016782e-37
1000 kelvin	4.528259110079856	2.1555694283136517e-09	2.5492216208899996e-13	5.8054635015847595e-36

Tabel 2

Untuk Metode Gauss-Legendre dengan titik interpolasi 5 didapatkan hasil sebagai berikut :

Suhu	Panjang Gelombang			
	(0,10)	(100,110)	(1000,1010)	(0,∞)
10 kelvin	0.00175890369775624	2.154102088819039e-11	2.549040960320379e-15	2.489653111097829e-39
100 kelvin	0.019336388988978184	2.1554360060915108e-10	2.5492051968361162e-14	2.4947159060648754e-38
1000 kelvin	0.19517325590976525	2.1554360060915108e-10	2.549221620844861e-13	2.520011669177453e-37

Tabel 3

Hasil perhitungan permasalahan integrasi numerik dengan Aturan Trapesium, Aturan Simpson, dan Metode Gauss-Legendre diperoleh menggunakan program Python. Misalkan jumlah partisi n = 50 untuk Aturan Trapesium dan Aturan Simpson sedangkan untuk Metode Gauss-Legendre jumlah titik interpolasi = 5. Selanjutnya akan diperoleh hasil perhitungan integrasi yang ditunjukkan pada ketiga tabel di atas.

Pada Tabel 1 dan 2, yaitu pengaplikasian Aturan Trapesium dan Aturan Simpson, integrasi dihampiri dengan luas daerah integrasi pada selang [a,b] yang dipotong-potong oleh partisi. Pada Tabel 3, aturan ini dihampiri dengan polinomial dimana derajat polinomial = titik interpolasi - 1.

3.1.3 Algoritma

1. Pada Aturan Trapesium dan Aturan Simpson hanya terdapat perbedaan di formulanya, pengguna akan diminta menginput partisi yang diinginkan (n).
2. Kemudian definisikan panjang sub selang sebagai $p = \frac{b-a}{n}$ dengan a adalah batas bawah dan b adalah batas atas.
3. Setelah itu akan didefinisikan variabel yang bergerak dengan kelipatan p. $c = a + i.p$ dengan i bergerak dari 1 sampai n-1.
4. Masukan $f(a)$, $f(b)$, dan $f(c)$ ke dalam formula.
5. Untuk Metode Gauss-Legendre, pengguna akan diminta menginput titik interpolasi yang diinginkan.
6. Menentukan polinom derajat tertentu sesuai yang diinginkan pengguna.
7. Setelah itu akan dicari polinomial legendre dengan persamaan rekursif $P_n(x) = \frac{(2n-1)xP_{n-1}(x)-(n-1)P_{n-2}(x)}{n}$
8. Kemudian untuk mendapatkan turunan persamaan rekursifnya $P'_n(x) = \frac{n}{x^2-1}(xP_n(x) - P_{n-1}(x))$
9. Selain turunan persamaan rekursif, akan dicari terlebih dahulu akar dari polinomialnya $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
10. Sebelum langkah akhir, perlu dicari koefisien-koefisien tak diketahuinya

$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P'_n(x_i)]^2}$

11. Terakhir masukan yang sudah dicari ke dalam formula.

3.2 No. 2

3.2.1 Soal

Pada suatu rangkaian listrik yang terdiri dari resistor, induktor, dan kapasitor, nilai tegangan yang melalui R adalah iR (i adalah arus dalam ampere, R adalah besar hambatan resistor dalam ohm), yang melalui L adalah $L\frac{di}{dt}$ (L adalah nilai induktansi induktor dalam Henry), dan yang melalui C adalah q/C (q adalah muatan kapasitor dalam Coulomb, C adalah nilai kapasitansi kapasitor dalam Farad). Perbedaan tegangan antara titik A dan B adalah

$V_{AB} = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C}$

Jika persamaan tersebut diturunkan terhadap t dan $dq/dt = i$, maka akan diperoleh persamaan diferensial kedua:

$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{dV}{dt}$

Jika tegangan V_{AB} (pada mulanya bernilai 0) tiba-tiba meningkat menjadi 15 volt dan tetap stabil pada 15 volt (dV/dt = 0), arus akan mengalir melalui rangkaian.

a. Hitung nilai arus yang melalui rangkaian saat t = 0 sampai t = 0,1 detik, jika C = 1000 mikroFarad, L = 50 milliHenry, dan R = 4,7 ohm; gunakan Δt = 0,002 detik.
b. Hitung nilai tegangan yang melalui kapasitor selama selang waktu tersebut.

3.2.2 Pembahasan

Diketahui persamaan tegangan antara titik A dan titik B adalah:

$$V_{AB} = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C}$$

Turunkan persamaan tersebut terhadap t dan substitusikan nilai $\frac{dV}{dt} = 0$, maka diperoleh :

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0$$

Selanjutnya, persamaan di atas akan disederhanakan menjadi:

$$\frac{d^2i}{dt^2} = \frac{-(R\frac{di}{dt} + \frac{i}{c})}{L}$$

Misalkan $z(x) = i'(x)$, maka diperoleh formula sebagai berikut:

$$z'(x) = \frac{-(Rz(x) + \frac{i}{c})}{L}$$

Lalu, definisikan fungsi dari ketiga metode yang nantinya akan digunakan dalam perhitungan numerik. Sehingga, kita bisa memperoleh nilai arus dan tegangan dari masing-masing metode sebagai berikut:

- Metode Euler

Waktu (t)	Arus (i)	Tegangan (V)
0.0	3.1914893617021276	0.0
0.002	3.1914893617021276	6.382978723404257
0.004	2.9361702127659575	12.76595744680851
:	:	:

0.1	0.030649560429863602	16.207736601955705

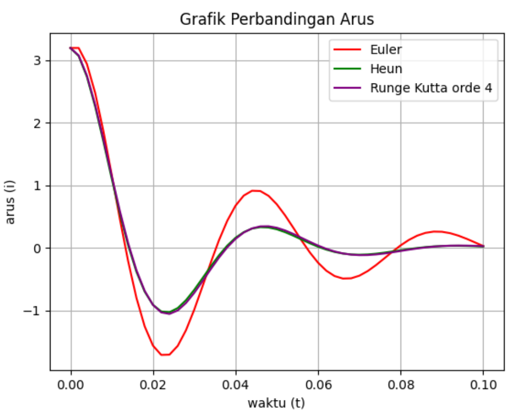
- Metode Heun

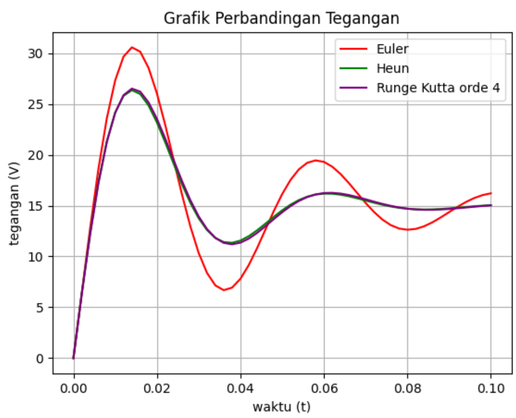
Waktu (t)	**Arus (i)**	**Tegangan (V)**
0.0	3.1914893617021276	0.0
0.002	3.0638297872340425	6.382978723404255
0.004	2.731701446808511	12.279319148936171
:	:	:
0.1	0.022335291367598917	15.04343374711411

- Metode Runge-Kutta Orde 4

Waktu (t)	**Arus (i)**	**Tegangan (V)**
0.0	3.1914893617021276	0.0
0.002	3.0723048510638296	6.301872340425531
0.004	2.750976909036616	12.153983542488968
:	:	:
0.1	0.02795844138170348	15.020502117659724

Selanjutnya, dengan menggunakan program *Python*, diperoleh grafik perbandingan arus dan tegangan dari ketiga metode tersebut yaitu:





3.2.3 Algoritma

1. Langkah-langkah untuk Metode Euler dan Metode Heun mirip hanya saja formulanya yang berbeda.
2. Pertama, akan didefinisikan PD Orde 2 nya terlebih dahulu. Dengan *f* merupakan ruas kanan dari persamaan $y'(x) = z(x)$ dengan $y(x) = i(x)$ dan $z(x) = i'(x)$. Lalu, *g* merupakan ruas kanan dari persamaan $z'(x) = (- R * y(x) - C * z(x))$, dengan $y(x) = i(x)$ dan $z(x) = i'(x)$.
3. Buat partisi $p = \frac{x_n - x_0}{dt}$ dengan x_n adalah waktu akhir, x_0 waktu awal, dan dt adalah jarak antara tiap-tiap waktu.
4. Buat 3 variabel untuk menampung waktu, nilai arus, dan tegangan.

5. Setelah itu buat iterasi (i) yang bergerak dari 0 sampai p-1.
6. Pada setiap iterasi pertama akan dicari $y_n = y + dt * f$ dan $z_n = z + dt * g$.
7. Kemudian definisikan $y = y_n$ dan $z = z_n$ sehingga iterasi selanjutnya menggunakan *y* dan *z* yang baru.
8. Sebelum langkah terakhir, data-data tersebut akan dimasukkan ke dalam variabel untuk ditampung.
9. Terakhir, untuk menjalankannya, data tersebut hanya perlu dipanggil.
10. Untuk Metode Runge-Kutta Orde 4 langkah-langkah sama dengan metode yang lain, yang menjadi pembeda hanyalah pada metode ini perlu memasukan formula k1-k4 dan l1-l4 ke dalam looping iterasinya.

BAB 4

KESIMPULAN

Berdasarkan rumusan masalah yang menjadi tujuan pembahasan proyek akhir ini, dengan berpacu pada landasan-landasan teori yang sudah dijelaskan pada BAB 2 dapat disimpulkan bahwa :

1. Pada permasalahan yang ada di nomor 1, untuk menghitung besar energi yang dikeluarkan pada setiap interval panjang beberapa gelombang pada kasus T tertentu, dapat dicari menggunakan Aturan Trapesium, Aturan Simpson, dan Metode Gauss-Legendre.

   Penggunaan Aturan Trapesium dan Aturan Simpson bergantung pada partisi yang ditentukan dan menghasilkan besar energi yang tidak jauh berbeda antara suatu interval panjang gelombang dan suatu kasus T tertentu. Akan tetapi, pada penggunaan Aturan Simpson besar energi yang dikeluarkan hanya bisa terdeteksi saat partisi yang digunakan merupakan bilangan genap, sedangkan saat partisinya berupa bilangan ganjil besar energi yang dikeluarkan tidak dapat terdeteksi. Lain halnya dengan penggunaan Metode Gauss-Legendre yang bergantung pada titik interpolasi untuk menghasilkan besar energi yang dikeluarkan. Saat menggunakan metode ini, besar energi yang dikeluarkan tidak jauh berbeda untuk setiap interval panjang gelombang dan kasus T yang sama.

   Dengan demikian, Metode Gauss-Legendre memiliki nilai aproksimasi yang lebih akurat dibandingkan dengan Aturan Trapesium dan Aturan Simpson.
2. Pada permasalahan yang ada di nomor 2, untuk mencari nilai arus dan besar tegangan yang melalui kapasitor, dapat dicari menggunakan Metode Euler, Metode Heun, dan Metode Runge-Kutta Orde 4. Untuk ketiga metode tersebut, Metode Euler menghasilkan nilai arus dan besar tegangan yang paling berbeda dibanding dua metode lainnya. Metode Heun dan Metode Runge-Kutta Orde 4 menghasilkan nilai arus dan besar tegangan yang hampir serupa. Hal ini dapat terjadi karena Metode Heun dan Metode Runge-Kutta Orde 4 merupakan metode turunan dari Metode Euler, sehingga nilai arus dan besar tegangan yang dicari menggunakan Metode Heun lebih mendekati nilai eksak dibanding menggunakan Metode Euler. Sementara itu, nilai arus dan besar tegangan yang dicari menggunakan Metode Runge-Kutta Orde 4 mendekati nilai eksak yang jauh lebih baik lagi dibanding menggunakan Metode Heun.

   Dengan demikian, Metode Runge-Kutta Orde 4 memiliki nilai aproksimasi yang lebih akurat dibandingkan dengan Metode Euler dan Metode Heun.

DAFTAR PUSTAKA

- Qingkai Kong, Timmy Siauww, Alexandre M. Bayen. 2020. "Python Programming and numerical method." 356-370. London: Academic Press. https://library.samdu.uz/files/8ea2cbd32e87c6d25a17c4b2510501d0_Python_Programming_and_Numerical_Methods_A_Guide_for_Engineers_and.pdf
- Rosmaniar. 2021. "Penerapan Metode Heun Dan Metiode Runge-Kutta Orde Tiga Dalam Menganalisis Model Ulat Cemara (Spurce Budworm)."
- Lambers, Jim. 2009. "math.usm.edu." *Lecture 33.* Oktober. http://www.math.usm.edu/lambers/mat460/fall09/lecture33.pdf.
- Christian, Agung. 2017. "Metode Runge-Kutta Dan Blok Rasional Untuk Menyelesaikan Masalah Nilai Awal."
- Kimberley B, Ardelia T, Nova N, Caroline T. 2021. "Proyek UAS Metode Numerik."
- Pasu, Iren Brigita. 2020. "Laporan Teknik Komputasi Diferensial Numerik (Metode Euler, Metode Heun, Metode Ralston, Metode Poligon, Metode Runge-Kutta 3, dan Metode Runge-Kutta 4) dengan aplikasi MATLAB*."*
- Yenci Brika Enkekes, Lutfi Mardianto. 2022. "Metode Runge-Kutta Orde 4 Dalam Penyelesaian Persamaan Gelombang 1D Syarat Batas Dirichlet." *Indonesian Journal of Applied Mathematics.*
- Steven C, Raymond P. 2015. *Numerical Methods for Engineers Seventh Edition.* McGraw-Hill Education.