

Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Faculdade de Engenharia

Amanda Pávila Silva

Programação Dinâmica Dual Estocástica com Reamostragem

Juiz de Fora

2020

Amanda Pávila Silva

Programação Dinâmica Dual Estocástica com Reamostragem

Monografia apresentada ao Departamento de Energia Elétrica da Faculdade de Engenharia, como requisito parcial para a conclusão do curso de graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Orientador: André Luís Marques Marcato, D.Sc.

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Silva, A. P.

Programação Dinâmica Dual Estocástica com Reamostragem / Amanda
Pávila Silva. – 2020.

77 f. : il.

Orientador: André Luís Marques Marcato, D.Sc.

Monografia – Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Faculdade
de Engenharia. , 2020.

1. Planejamento da Operação a Médio Prazo. 2. Programação Dinâmica
Estocástica. 3. Programação Dinâmica Dual Estocástica. I. Marcato, André
Luís Marques, orient. II. Título.

Amanda Pávila Silva

Programação Dinâmica Dual Estocástica com Reamostragem

Monografia apresentada ao Departamento de Energia Elétrica da Faculdade de Engenharia, como requisito parcial para a conclusão do curso de graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Juiz de Fora.

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. André Luís Marques Marcato, D.Sc. - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

Prof. Maria Elvira Piñeiro Maceira, D.Sc.
Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL)
Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ)

Prof. João Alberto Passos Filho, D.Sc.
Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF)

AGRADECIMENTOS

A Deus que, pelo sublime e imutável amor, me concedeu saúde, força de vontade e incríveis oportunidades pela minha jornada até aqui.

Aos meus pais, Maria de Lourdes e Sebastião José, por terem renunciado tudo em suas vidas para fornecer uma educação de qualidade a mim e às minhas irmãs. Agradeço pelo amor, carinho, incentivo para que tudo isso fosse possível e por vibrarem com todas minhas conquistas, a de hoje pertence, em totalidade, a vocês.

Às minhas irmãs, Taise, Ana e Junia, por fazerem-se tão presentes em minha vida e tornarem-se as melhores amigas e companhias que eu poderia ter. Agradeço por todo afeto e compreensão existente entre nós.

Ao professor, orientador e amigo, André Luís Marques Marcato, por todo apoio fornecido durante a graduação, além de ser o maior responsável pelo meu crescimento acadêmico e profissional. Agradeço pela confiança nos projetos de Pesquisa e Desenvolvimento desenvolvidos e por todo conhecimento compartilhado.

À pesquisadora do Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL) e Professora da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) Maria Elvira Piñeiro Maceira e ao Professor da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) João Alberto Passos Filho pela disponibilidade e gentileza em participarem da banca de avaliação deste trabalho.

Às amigas Natália Carneiro e Pâmela Lacerda, ao amigo Luiz Rogério e aos demais colegas pelo companheirismo e pelos conselhos que muito contribuíram para conclusão do curso de graduação.

À Universidade Federal de Juiz de Fora e à Faculdade de Engenharia Elétrica pelo suporte financeiro.

Agradeço aos conhecimentos decorrentes da participação nos Projetos de Pesquisa e Desenvolvimento “Estudo de Metodologias para a Conexão de Usinas Eólicas *Offshore* de Grande e Pequeno Porte - Aspectos Elétricos e Energéticos” em parceria com a Petrobras e “Fator de Disponibilidade de UHEs: Sistema de Apuração e Simulação Através de Técnicas Inteligentes com Foco na Análise de Risco” em parceria com a Santo Antônio Energia.

RESUMO

O algoritmo de Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) é o principal alicerce para o planejamento da operação do sistema hidrotérmico e a formação do preço de liquidação de diferenças no Brasil. Atualmente, o planejamento da operação é realizado por uma cadeia de modelos computacionais desenvolvida pelo Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL), a qual é peculiar no mundo. A complexidade associada ao problema de planejamento da operação de um sistema de grande porte, como o Brasileiro, é enorme. Isso se deve principalmente ao número de usinas hidrelétricas acopladas espacialmente em cascatas, ao acoplamento temporal entre as decisões, à estocasticidade das fontes renováveis (hidro, solar, eólica), à incerteza do mercado de energia a ser atendido e aos detalhes dos componentes do sistemas (usinas geradoras e sistema de transmissão, por exemplo). Este trabalho tem o objetivo de apresentar um sistema de instância mínima, com apenas duas usinas hidrelétricas e duas usinas térmicas, com o foco no planejamento de médio prazo. O objetivo inicial é comparar os resultados obtidos pela PDDE em relação a representação por árvore completa (equivalente determinístico para o problema estocástico). Em seguida, é avaliada uma abordagem recentemente introduzida na literatura, a qual determina a convergência da PDDE através dos benefícios introduzidos pelos cortes utilizando-se, ou não, a técnica de reamostragem de cenários *forward*.

Palavras-chave: Planejamento da Operação de Médio Prazo. Programação Dinâmica Dual Estocástica. Árvore Completa. Reamostragem de Cenários.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Diagrama do Sistema Interligado Nacional (2019)	12
Figura 1.2 – Complementaridade Hidrológica dos Subsistemas	13
Figura 1.3 – Problema de Decisão da Operação	14
Figura 1.4 – Cadeia de Modelos do SEB	16
Figura 2.1 – Construção da Função de Custo Futuro por PDE	20
Figura 2.2 – Construção da Função de Custo Futuro por PDDE	20
Figura 2.3 – Função de Custo Futuro Não-Convexa	21
Figura 3.1 – Função de Custo Imediato, Futuro e Total	24
Figura 4.1 – Diagrama Esquemático da PDDE	32
Figura 4.2 – Fases do Algoritmo PDDE	33
Figura 4.3 – Árvore de Cenários	36
Figura 4.4 – Estrutura em Árvore utilizada na PDDE para 3 Estágios e 2 Aberturas	37
Figura 4.5 – Estrutura em Árvore utilizada na PDDE para 3 Estágios e 2 Aberturas (Possíveis Séries <i>Forward</i>)	37
Figura 4.6 – Intervalo de Confiança para o Limite Superior	40
Figura 4.7 – Determinação dos Valores de Benefício <i>Backward</i>	42
Figura 5.1 – Representação do Sistema em Estudo	48
Figura 5.2 – Representação em Grafo da “Árvore Completa”	50
Figura 5.3 – Representação em Grafo das Séries <i>Forward</i>	52
Figura 5.4 – Determinação das Séries <i>Forward</i>	53
Figura 6.1 – Estrutura de Simulação	63
Figura 6.2 – Convergência dos Limites Inferior e Superior PDDE	65
Figura 6.3 – Convergência dos Limites Inferior e Superior PDDE (Critério 4.2.3.1) .	68
Figura 6.4 – Convergência da PDDE (Critério 4.2.3.4) - Tolerância de 5%	69
Figura 6.5 – Convergência da PDDE (Critério 4.2.3.4) - Tolerância de 5% e $\mathfrak{C}_i^k = 1$ (Parte 1)	71
Figura 6.6 – Convergência da PDDE (Critério 4.2.3.4) - Tolerância de 10% e $\mathfrak{C}_i^k = 1$ (Parte 2)	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Capacidade Instalada no SIN (2020)	11
Tabela 5.1 – Sistema Hidrotérmico em Estudo - Dados UHE	48
Tabela 5.2 – Sistema Hidrotérmico em Estudo - Dados UTE	48
Tabela 5.3 – Sistema Hidrotérmico em Estudo - Dados da Carga	49
Tabela 5.4 – Caracterização da Árvore de Cenários	51
Tabela 5.5 – Seleção das Séries <i>Forward</i> na PDDE	51
Tabela 6.1 – Parâmetros Considerados Para Análise 1	64
Tabela 6.2 – Resultados Para Análise 1	64
Tabela 6.3 – Parâmetros Considerados Para Análise 2 (Avaliação Tipo 1)	67
Tabela 6.4 – Parâmetros Considerados Para Análise 2 (Avaliação Tipo 2)	70
Tabela 6.5 – Resumo dos Resultados Para Análise 2	72

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
CEPEL	Centro de Pesquisas de Energia Elétrica
CVaR	Valor Condicionado a um dado Risco (do inglês, <i>Conditional Value at Risk</i>)
DECOMP	Modelo de Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos Interligados de Curto Prazo
DESSEM	Modelo de Despacho Hidrotérmico de Curto Prazo
EPE	Empresa de Pesquisa Energética
FCF	Função de Custo Futuro
FCI	Função de Custo Imediato
FCT	Função de Custo Total
GNL	Gás Natural Liquefeito
NEWAVE	Modelo de Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos Interligados de Longo e Médio Prazo
ONS	Operador Nacional do Sistema Elétrico
PDE	Programação Dinâmica Estocástica
PDDE	Programação Dinâmica Dual Estocástica
PL	Programação Linear
PMO	Programa Mensal da Operação
PPL	Problema de Programação Linear
POO	Programação Orientada a Objetos
SEB	Sistema Elétrico Brasileiro
SIN	Sistema Interligado Nacional
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UHE	Usina Hidrelétrica
UTE	Usina Termelétrica

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	11
1.2	OBJETIVOS E MOTIVAÇÃO	16
1.3	ESTRUTURAÇÃO DO DOCUMENTO	17
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	18
2.1	PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ESTOCÁSTICA E PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA	18
2.1.1	Considerações Iniciais	18
2.1.2	Crítérios de Convergência da Programação Dinâmica Dual Estocástica .	21
3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE PLA- NEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS HIDROTÉR- MICOS A MÉDIO PRAZO	23
3.1	INTRODUÇÃO	23
3.2	MODELAGEM MATEMÁTICA	24
3.2.1	Função Objetivo	25
3.2.2	Restrições do Problema de Otimização	25
3.2.2.1	Atendimento à Demanda	25
3.2.2.2	Balanço Hídrico	26
3.2.2.3	Função de Custo Futuro	26
3.2.2.4	Função de Produção Hidráulica	27
3.2.2.5	Limites Operativos das Variáveis (Restrições de Canalização)	27
4	TÉCNICAS DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA: PDE E PDDE	29
4.1	PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ESTOCÁSTICA	29
4.2	PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA	30
4.2.1	Geração de Cenários de Afluência	35
4.2.2	Determinação dos Cortes de Benders da Função de Custo Futuro	38
4.2.3	Crítérios de Convergência da Programação Dinâmica Dual Estocástica .	39
4.2.3.1	Crítério I: Intervalo de Confiança	39
4.2.3.2	Crítério II: Estabilidade do Limite Inferior (Z_{INF})	39
4.2.3.3	Crítério III: Erro Relativo Entre Z_{INF} e Z_{SUP}	41
4.2.3.4	Crítério IV: “Análise da Função de Benefício <i>Backward</i> ($\mathfrak{B}_{i,t}^k$)”	41
5	APRESENTAÇÃO DO SISTEMA HIDROTÉRMICO EM ES- TUDO	47

5.1	DESCRIÇÃO DO SISTEMA HIDROTÉRMICO EM ESTUDO	47
5.2	SÉRIES HISTÓRICAS DE VAZÕES	49
5.3	MODELAGEM DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	53
5.3.1	Modelagem do Problema de “Árvore Completa” Via PL Único	53
5.3.2	Modelagem do Problema Via Programação Dinâmica Dual Estocástica .	56
6	RESULTADOS OBTIDOS	62
6.1	ESTUDO DE CASO 1: COMPARAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO OB- TIDA COM A TÉCNICA DE PDDE E O PROBLEMA DE ÁRVORE COMPLETA	63
6.1.1	Resultados	63
6.1.2	Número de Restrições e PPLs Resolvidos por Metodologia	65
6.2	ESTUDO DE CASO 2: COMPARAÇÃO ENTRE AS SOLUÇÕES OBTIDAS COM AS TÉCNICAS DE PDDE COM E SEM REAMOS- TRAGEM DE CENÁRIOS	67
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	73
	REFERÊNCIAS	75

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Conforme [1], o sistema de produção e transmissão de energia elétrica do Brasil, com aproximadamente 165.039 MW instalados, caracteriza-se como um sistema hidro-termo-eólico de grande porte, com predominância de usinas hidrelétricas e com múltiplos proprietários, que são os agentes do Sistema Interligado Nacional (SIN). A Tabela 1.1 apresenta a capacidade instalada do SIN em 2020, em MW, e a representatividade em termos percentuais por tipo de fonte. Ressalta-se que em 2020, a participação hidráulica foi de aproximadamente 65,70% da capacidade instalada nacional, correspondendo a 108.495 MW. Por sua vez, as gerações eólica e termelétrica representaram 11,5% e 13,1% da capacidade de geração, respectivamente.

Tabela 1.1 – Capacidade Instalada no SIN (2020)

Fonte	Capacidade Instalada [MW]	Percentual [%]
Hidrelétrica	108.495	65,7
Termelétrica (Gás + GNL)	14.208	8,6
Eólica	15.608	9,5
Termelétrica (Óleo + Diesel)	4.404	2,7
Biomassa	13.739	8,3
Termelétrica (Carvão)	3.017	1,8
Solar	2.988	1,8
Nuclear	1.990	1,2
Outras	745	0,4

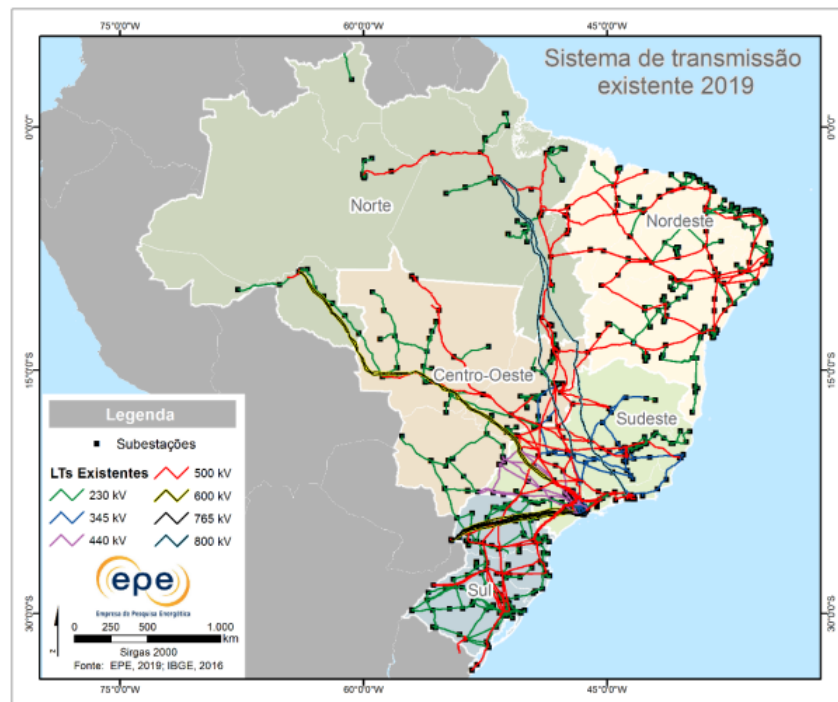
Fonte: [1]

Ainda segundo [1], o SIN é constituído por quatro subsistemas, sendo eles: Sul, Sudeste/Centro-Oeste, Nordeste e a maior parte da região Norte. A Figura 1.1 apresenta esquematicamente a configuração do SIN no ano de 2019 evidenciando a interconexão entre os subsistemas através do sistema de transmissão. A maior parte das localidades isoladas no Brasil, isto é, sistemas de produção e transmissão de energia elétrica que não estejam conectados ao SIN, concentra-se na região Norte, nos estados de Rondônia, Acre, Amazonas, Roraima, Amapá e Pará, além da ilha de Fernando de Noronha e algumas localidades do estado de Mato Grosso.

De acordo com a Tabela 1.1, a capacidade instalada de geração do SIN é composta, predominantemente, por usinas hidrelétricas distribuídas em dezesseis bacias hidrográficas nas diferentes regiões do país. A instalação de usinas eólicas, principalmente nas regiões Nordeste e Sul, apresentou forte crescimento nos últimos anos, aumentando a importância dessa geração para o atendimento do mercado. Finalmente, as usinas termelétricas,

normalmente localizadas próximas aos principais centros de carga, desempenham funções estratégicas contribuindo para, sobretudo, a segurança do SIN. Além disso, essas usinas são despachadas segundo as condições hidrológicas atuais de maneira a permitir o controle da água armazenada nos reservatórios das usinas hidrelétricas, para assegurar o atendimento futuro.

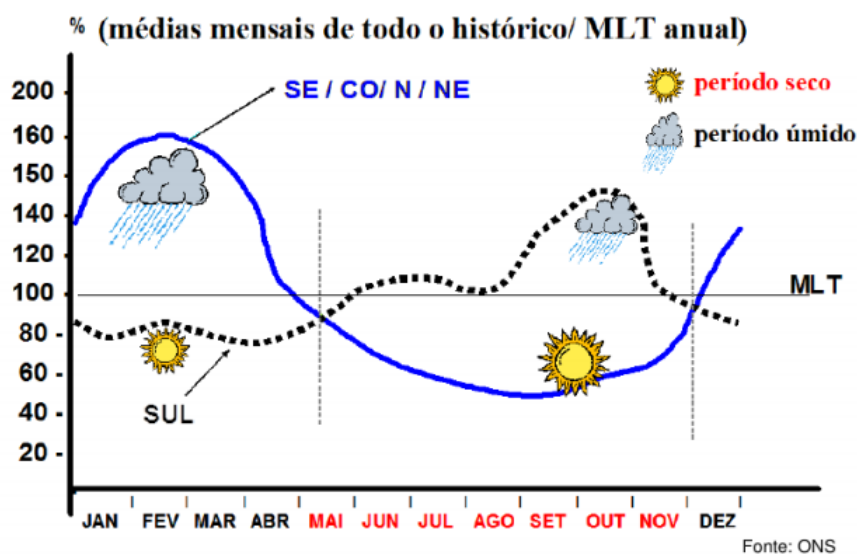
Figura 1.1 – Diagrama do Sistema Interligado Nacional (2019)



Fonte: [2]

A interconexão dos sistemas elétricos dá-se por meio do sistema de transmissão e permite o intercâmbio de energia entre subsistemas. A integração dos recursos de geração e transmissão entre os subsistemas possibilita o atendimento ao mercado consumidor de maneira econômica e segura uma vez que se obtém vantagens da diversidade do comportamento hidrológico entre as diferentes bacias hidrográficas distribuídas pelo território brasileiro, aproveitando a complementariedade dos regimes hidrológicos existente entre elas, conforme apresentado na Figura 1.2.

Figura 1.2 – Complementaridade Hidrológica dos Subsistemas



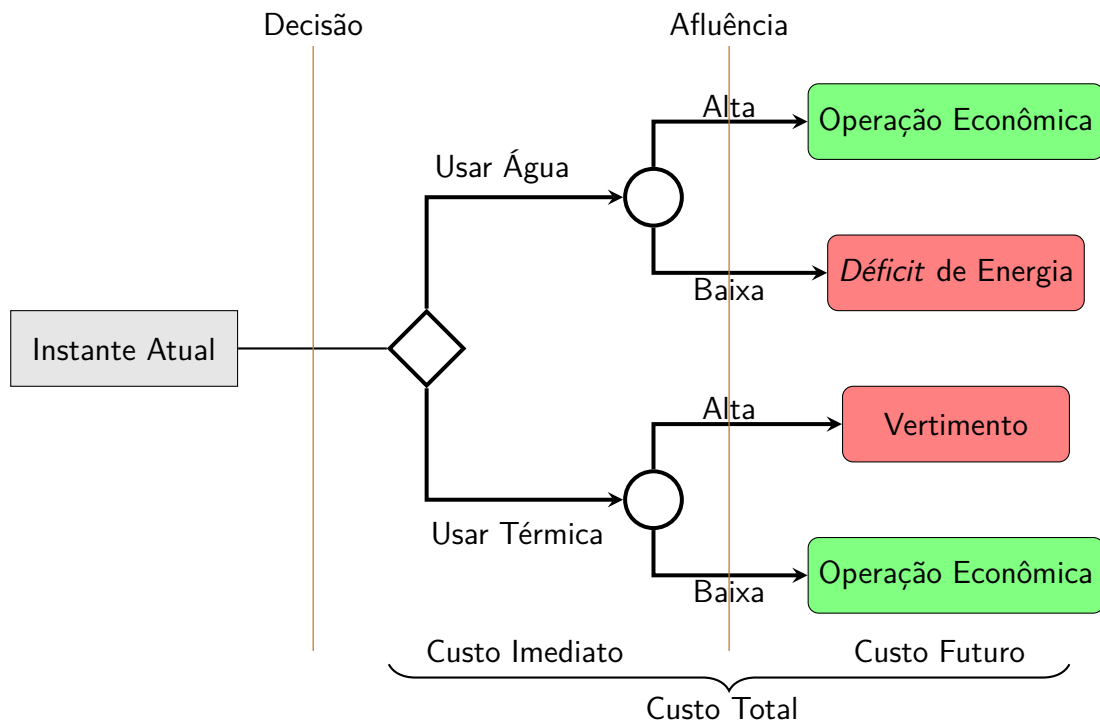
Fonte: [3]

Portanto, a operação coordenada do SIN caracteriza-se como um problema de otimização de grande porte [3], com características específicas, dentre as quais, destaca-se [4]:

- **Acoplamento temporal:** a decisão operativa pela utilização ou não dos recursos hídricos em determinado período provoca consequências nos períodos subsequentes. Dessa forma, a otimização baseia-se no custo imediato do uso da água, bem como no custo futuro associado ao seu armazenamento;
- **Acoplamento espacial:** decorre, sobretudo, pela disposição em que se encontram as usinas hidrelétricas (em cascata ao longo dos rios) de maneira que a operação de determinada usina interfere diretamente as usinas hidrelétricas à jusante¹;
- **Estocasticidade:** refere-se às incertezas associadas às afluições futuras devido ao regime hidrológico de determinada região que tornam-se ainda mais significativas com maior horizonte de planejamento, bem como as incertezas associadas à demanda de energia elétrica futura (crescimento ou não do mercado consumidor);
- **Intercâmbio:** baseia-se na possibilidade de fluxo de energia entre os submercados devido à interconexão dos sistemas elétricos permitindo que regiões em períodos hidrológicos desfavoráveis utilizem a energia proveniente de outro submercado, dispensando geração adicional de energia a partir das usinas termelétricas.

¹ Determinada usina hidrelétrica localizada acima de outra usina é denominada *usina de montante*, sendo a usina hidrelétrica abaixo na configuração “em cascata” denominada *usina de jusante* [5].

Figura 1.3 – Problema de Decisão da Operação



Fonte: Adaptado de [3]

Dessa forma, diferentemente do problema de planejamento da operação de sistemas puramente térmicos, o qual é resolvido, essencialmente, encontrando uma combinação entre as plantas que minimizam os custos dos combustíveis, na operação de sistemas hidrotérmicos, a decisão operativa é acoplada no tempo, ou seja, as decisões tomadas no período atual terão consequências nos períodos subsequentes.

Por exemplo, se a decisão operativa no período atual é pelo despacho hidrelétrico para atendimento à demanda e no futuro ocorrerem períodos secos, será necessário realizar o despacho térmico com custo mais elevado ou até mesmo interromper o fornecimento de energia elétrica (*déficit*). Se a decisão operativa no período atual é por realizar maior despacho térmico, conservando elevados os níveis dos reservatórios e ocorrerem afluências elevadas no futuro, poderá haver vertimentos, incorrendo em desperdício de energia [6]. Por outro lado, caso opte pelo despacho hidrelétrico em determinado momento e as afluências futuras forem favoráveis, então pode se dizer que a decisão consiste numa operação econômica. O mesmo ocorre quando se decide armazenar água no presente, realizando maior despacho térmico, e as afluências futuras são baixas. O processo decisório é resumidamente apresentado na Figura 1.3.

Para solução do problema de otimização que descreve o planejamento da operação do SIN, é realizada a decomposição em subproblemas com diferentes horizontes de estudo. Dessa forma através de uma cadeia de modelos computacionais acoplados desenvolvidos

pelo Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL) representa-se as incertezas, bem como se caracteriza o sistema, em níveis de detalhamento distintos de acordo com horizonte de estudo adotado, conforme apresentado na Figura 1.4.

Para os estudos de curtíssimo prazo referente à programação semanal e diária da operação é utilizado o modelo DESSEM. Neste modelo, o horizonte de estudo considerado é de apenas alguns dias e estes, por sua vez, são discretizados em etapas horárias ou de meia hora.

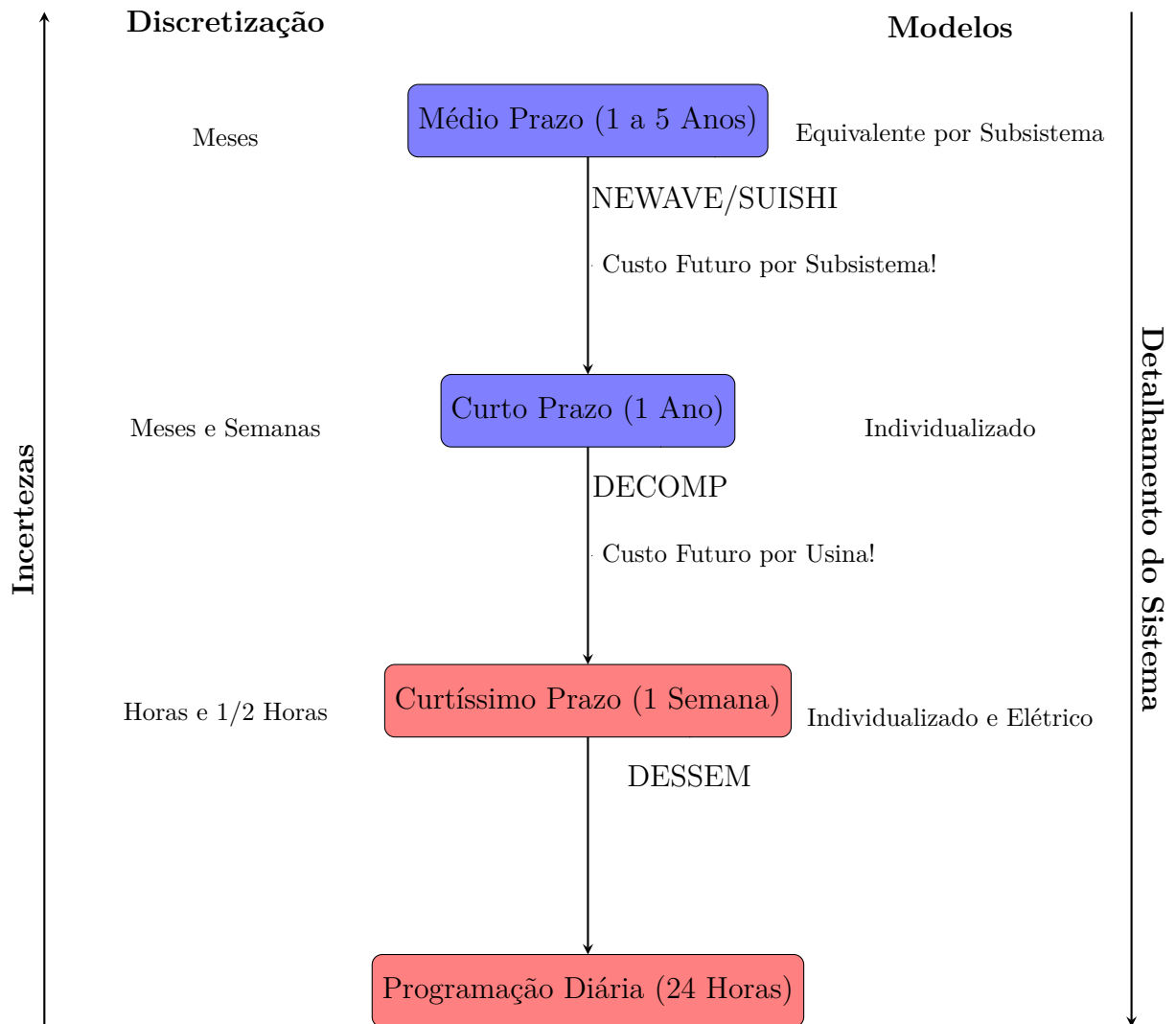
Não são consideradas incertezas associadas às afluições uma vez que estas são modeladas de forma conhecida ou determinística por possuírem maior previsibilidade no período de estudo reduzido. Por outro lado, o sistema é representado de forma detalhada, expressando suas características operativas, restrições hidráulicas e energéticas, além de precisão do sistema de transmissão ao considerar as grandezas elétricas de maneira direta no modelo [3, 5, 7].

No que se refere aos estudos de planejamento da operação de curto prazo do SIN, o modelo utilizado é o DECOMP. Neste caso, o horizonte de estudo é, conceitualmente, de 12 meses e a discretização é semanal para o primeiro mês e mensal para os demais. As incertezas associadas às afluições aos reservatórios são representadas através de uma árvore de cenários de vazões, já os componentes do sistema são representados em detalhes consideráveis acerca das características de geração das usinas, isto é, estas são representadas individualmente com as respectivas não linearidades de suas funções de produção. A finalidade é gerar uma função que descreva o valor econômico da água armazenada nos reservatórios em função dos níveis de armazenamento a partir da Função de Custo Futuro gerada pelo modelo de médio prazo em um estágio que coincide com o final do horizonte do modelo de curto prazo [3, 8, 7].

Finalmente, o modelo homologado e adotado oficialmente para o planejamento da operação de médio prazo é o NEWAVE, no qual o horizonte de estudo é de cinco anos e a discretização é mensal. O comportamento estocástico das afluições aos reservatórios é expresso de maneira detalhada, já o sistema é representado de maneira simplificada uma vez que as usinas hidrelétricas que compõem cada subsistema são representadas de forma agregada em sistemas equivalentes de energia. Além disso, a importação e exportação de energia entre os subsistemas é restrita a um determinado limite máximo de intercâmbio. Dessa forma, é obtida uma função multivariada que define o valor econômico da energia armazenada em função dos níveis de armazenamento e afluições aos meses passados, denominada Função de Custo Futuro [6, 7].

Os modelos de curto e médio prazo são acoplados desagregando-se a função de custo futuro do NEWAVE (obtida para os sistemas equivalentes de energia) em funções que consideram a contribuição individual de cada reservatório. De maneira análoga, o acoplamento entre os modelos de despacho horário e curto prazo é realizado utilizando-se

Figura 1.4 – Cadeia de Modelos do SEB



Fonte: Adaptado de [3]

a função de custo futuro determinada pelo DECOMP [9].

1.2 OBJETIVOS E MOTIVAÇÃO

Este trabalho tem por objetivo a comparação da técnica de PDDE aplicada a um sistema hidrotérmico tutorial, além da resolução do problema de “Árvore Completa” modelado através de um único Problema de Programação Linear (PPL). Posteriormente, é realizada uma comparação da técnica de PDDE considerando-se o “Critério de Convergência Padrão” e o critério proposto em [10] que define não só um critério para convergência da técnica de PDDE, como estabelece uma reamostragem seletiva dos cenários *forward* através de informações obtidas por cada série utilizada.

Todos os algoritmos contendo estas técnicas foram implementados em Python 3 que consiste em uma linguagem de Programação Orientada a Objetos (POO), de alto

nível, imperativa, interpretada e de tipagem dinâmica e forte. Foram utilizadas diversas bibliotecas para modelagem do problema. A biblioteca de otimização utilizada é *Python Software for Convex Optimization* (CVXOPT).

Em resumo, além da revisão bibliográfica realizada no trabalho, duas avaliações foram realizadas:

1. Performance (tempo de processamento) e confiabilidade de resultados obtidos da técnica de Programação Dinâmica Dual Estocástica mediante à solução obtida do problema de “Árvore Completa” (PL Único) aplicados ao sistema hidrotérmico tutorial; e,
2. Performance (tempo de processamento) e confiabilidade de resultados obtidos da técnica de Programação Dinâmica Dual Estocástica sem e com reamostragem de cenários utilizados aplicados ao sistema hidrotérmico tutorial.

1.3 ESTRUTURAÇÃO DO DOCUMENTO

No presente Capítulo, de caráter introdutório, foi realizada uma contextualização ao tema do Planejamento da Operação. De maneira breve, foi apresentada a caracterização do Sistema Interligado Nacional (SIN) e a cadeia de modelos computacionais desenvolvidos pelo Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL). Por fim, foi definido o objetivo do presente trabalho.

No Capítulo 2 é realizada uma revisão bibliográfica sobre os principais conceitos acerca do Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos a médio prazo, em que se apresenta as técnicas de Programação Dinâmica Estocástica (PDE) e Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE).

No Capítulo 3 é apresentada a modelagem matemática considerando-se usinas individualizadas. São apontados os conceitos e variáveis para formulação matemática do problema.

O Capítulo 4 discorre sobre as técnicas utilizadas para o Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos: PDE e PDDE. Além disso, detalha os critérios de convergência para a técnica de PDDE encontrados na literatura.

O Capítulo 5 apresenta o “Sistema Hidrotérmico Tutorial”, objeto de estudo do presente trabalho.

No Capítulo 6 são apresentados todos os resultados computacionais obtidos para o “Sistema Hidrotérmico Tutorial”.

Por fim, apresenta-se no Capítulo 7 as considerações finais e conclusões no âmbito do trabalho desenvolvido.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ESTOCÁSTICA E PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA

2.1.1 Considerações Iniciais

Até meados da década de 1970, a operação do sistema eletroenergético brasileiro era realizada, exclusivamente, pelos proprietários das usinas. Desde então, na tentativa de garantir uma operação econômica e segura do sistema, a operação do sistema passa a ser realizada de forma coordenada por um órgão centralizador.

Atualmente, o Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) é o órgão responsável pela coordenação e controle da operação no âmbito da geração e transmissão de energia elétrica no SIN e pelo planejamento da operação de sistemas isolados do país, sob fiscalização e regulação da Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) [1].

O planejamento da operação de um sistema hidrotérmico como o SIN tem por objetivo determinar, para cada etapa do horizonte de planejamento, as gerações de cada usina hidrelétrica que atendam a demanda e minimizem o valor esperado do custo de operação ao longo do horizonte. O custo é constituído pelo custo de combustível das usinas termelétricas e pelo custo atribuído às eventuais interrupções no fornecimento de energia (déficit).

A operação ótima de um sistema hidrotérmico é determinada considerando-se todas as possibilidades de combinações dos níveis de todos reservatórios e tendências hidrológicas. O nível de armazenamento de uma usina hidrelétrica i no início de determinado estágio t (VA_t^i) associado às vazões afluentes à usina hidrelétrica i nos estágios anteriores a t ($AFL_{i,t-1}, AFL_{i,t-2}, \dots$) compõem o estado do sistema [6].

A abordagem para determinação da política operativa ótima até meados da década de 1980 era baseada em Programação Dinâmica Estocástica (PDE), detalhada na Subseção 4.1. A técnica de PDE tem sua essência baseada no princípio de otimalidade de Bellman que afirma que a decisão ótima de determinado estágio pode ser obtida a partir do conhecimento prévio das possibilidades de ocorrência em estágios futuros e suas respectivas consequências, aliado à consideração de aspectos estocásticos do problema e representação de não linearidades [11, 12].

No entanto, na PDE é necessário discretização do espaço de estados e que as discretizações de reservatórios distintos sejam combinadas entre si. Intuitivamente, quanto maior o número de discretizações, embora ideal para maior detalhamento da Função de Custo Futuro, maior torna-se a complexidade do problema ocasionando esforços computacionais excessivos.

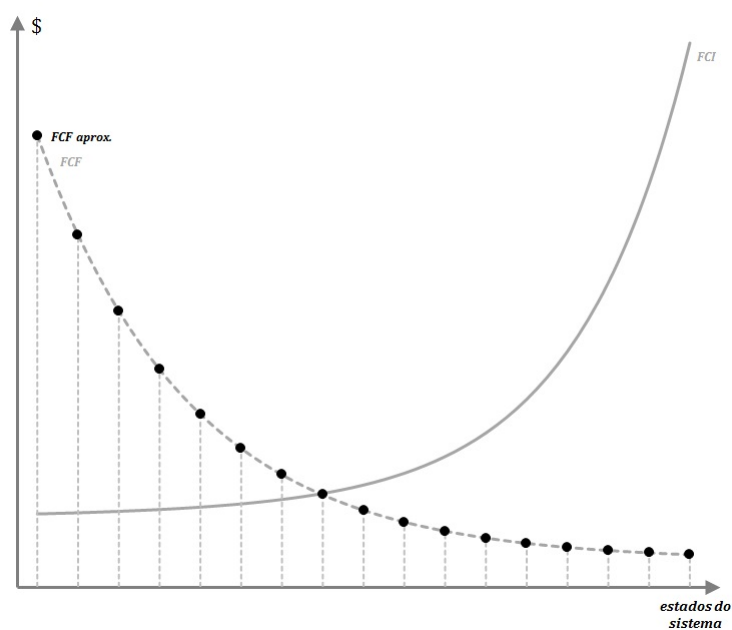
Com a interligação do sistema elétrico brasileiro através da ampliação do sistema de transmissão, a resolução do problema por PDE tornou-se rapidamente inviável do ponto de vista computacional devido à “Maldição da Dimensionalidade” inerente a problemas de múltiplos estágios em que a complexidade cresce exponencialmente com a inserção de novas variáveis de estado [10].

Para contornar o problema de dimensionalidade associado à discretização do espaço de estados tal como é realizado na PDE, foi proposta, em 1985, a técnica de Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE) desenvolvida em [13, 14], proporcionando a obtenção da política ótima de operação para sistemas hidrotérmicos interligados. A PDDE, atualmente, é a metodologia consolidada e utilizada no modelo NEWAVE desenvolvido pelo CEPEL, o qual se trata do modelo oficial homologado para o planejamento da operação do SIN no horizonte de médio prazo.

A metodologia de PDDE baseia-se na utilização da técnica de decomposição de Benders [15] em que se separa um problema maior em subproblemas menores e, iterativamente, constrói-se aproximações das funções de custo futuro como funções lineares por partes. A cada etapa do processo iterativo, o problema é solucionado a partir de uma aproximação “subestimada” da Função de Custo Futuro (FCF) e utiliza-se a informação dual para aprimorá-la através da adição dos cortes de Benders gerados. Nesse sentido, evita-se a discretização do espaço de estados, pois a FCF é construída iterativamente. Por consequência, o esforço computacional é substancialmente reduzido [16].

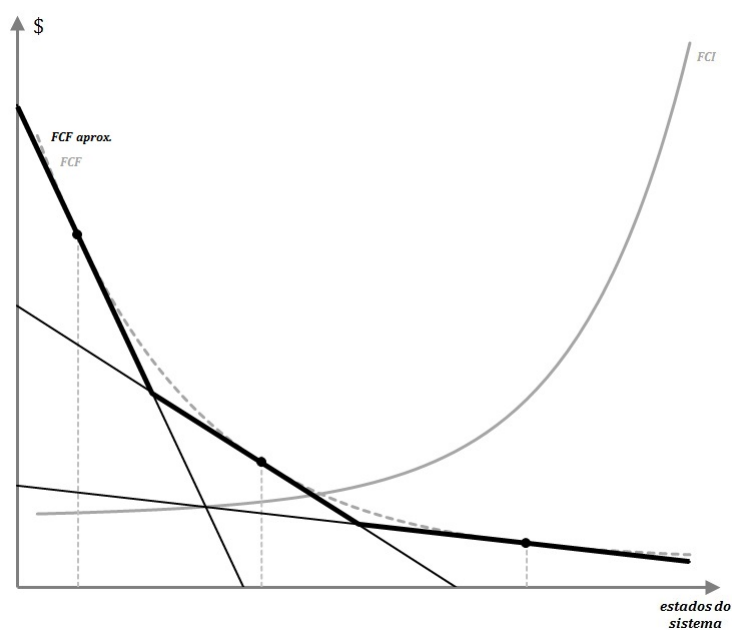
As Figuras 2.1 e 2.2 apresentam, exemplificadamente, as Funções de Custo Futuro construídas a partir das técnicas de PDE e PDDE, respectivamente. Na Figura 2.2, as funções lineares representam os “Cortes de Benders”.

Figura 2.1 – Construção da Função de Custo Futuro por PDE



Fonte: [17]

Figura 2.2 – Construção da Função de Custo Futuro por PDDE

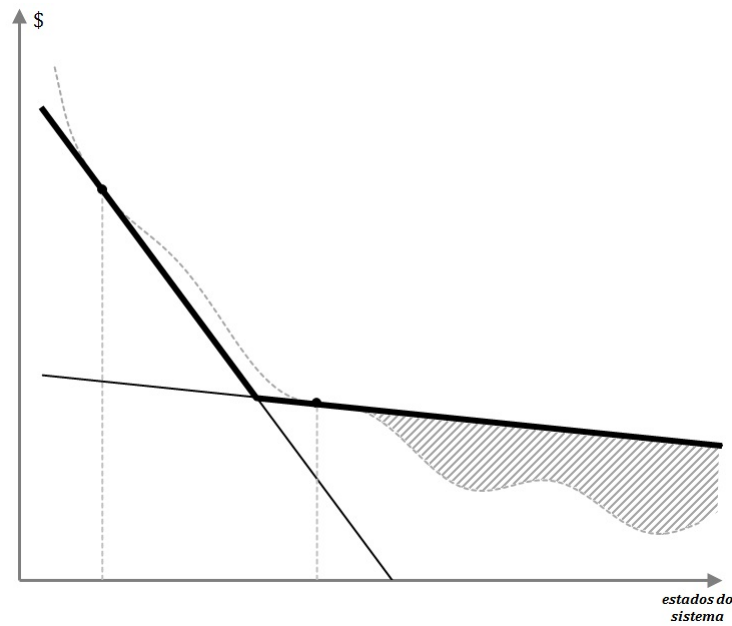


Fonte: [17]

Na literatura, existem diversos registros sobre o algoritmo de PDDE baseados nas publicações originais [13, 14] que introduziram diversas extensões e variações da metodologia. A empresa PSR-INC [18] desenvolveu uma documentação que apresenta em detalhes os aspectos de modelagem [19] da PDDE aplicada a sistemas hidrotérmicos.

Ainda que as variações do algoritmo considerem diferentes abordagens para o detalhamento na modelagem dos sistemas, visto que a metodologia se baseia na inserção iterativa dos cortes de Benders (ou hiperplanos), todos estes modelos utilizam modelagens convexas para os problemas a serem resolvidos. Essa condição é necessária para garantir o critério de convergência do algoritmo de PDDE, do contrário, a técnica de decomposição de Benders pode ocasionar a geração de cortes que excluem parte da região viável do problema de otimização, conforme apresentado na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Função de Custo Futuro Não-Convexa



Fonte: [17]

2.1.2 Critérios de Convergência da Programação Dinâmica Dual Estocástica

Na literatura são encontrados diversos critérios de convergência para os algoritmos baseados em PDDE. Na Subseção 4.2.3 são detalhados os critérios de convergência avaliados, dentre os quais:

1. Intervalo de Confiança;
2. Estabilidade do Limite Inferior (Z_{INF});
3. Erro Relativo entre Z_{INF} e Z_{SUP} ; e,
4. “Análise da Função de Benefício *Backward* ($\mathfrak{B}_{i,t}^k$)”.

O critério de convergência 4 proposto em [10] é baseado nos benefícios dos cortes adicionados durante a inserção iterativa incluindo o Valor Condicionado a um dado Risco

(CVaR) e utiliza informações adicionais das séries *forward* avaliadas, permitindo-se definir uma reamostragem seletiva para os cenários *forward* utilizados.

O objetivo da PDDE no contexto do planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos é definir a política operativa ótima para o sistema que minimize o custo esperado de operação. Na literatura [20, 21, 22] foram encontrados propostas alternativas para estimação do limite superior (Z_{SUP}) para a PDDE incluindo análise da metodologia CVaR.

Na Subseção 4.2.3.4 é detalhado o critério de convergência proposto em [10]. Em resumo, [10] propõe uma medida denominada “valores de benefício” ($\mathfrak{B}_{i,t}$) para analisar o quanto um corte construído a partir de determinada série *forward* i no estágio t para a k -ésima iteração do processo de PDDE alterará a Função de Custo Futuro construída até então. A convergência da PDDE é alcançada na iteração em que $\mathfrak{B}_{i,t}$ é inferior a uma tolerância predefinida.

No entanto, a análise de $\mathfrak{B}_{i,t}$ proporciona mais informações que a avaliação da convergência do processo. Isto pois os parâmetros são calculados para cada série *forward* i e, assim, torna-se possível avaliar a contribuição de cada série para a função de custo futuro. Nesse sentido, é proposta a utilização de $\mathfrak{B}_{i,t}$ para definição de quais séries deverão ser substituídas em iterações posteriores em um processo denominado reamostragem.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA OPERAÇÃO DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS A MÉDIO PRAZO

3.1 INTRODUÇÃO

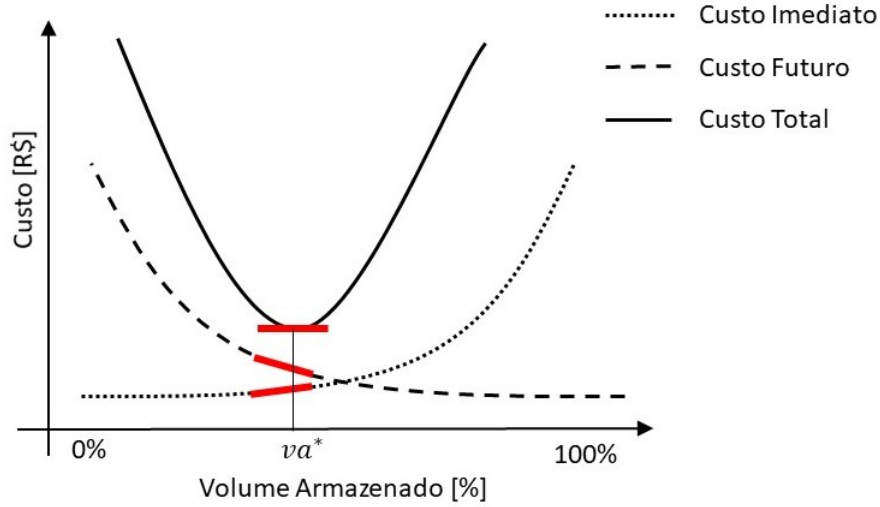
O planejamento da operação de médio prazo tem por objetivo determinar uma política de produção de energia que minimize o valor esperado dos custos operativos no horizonte de estudo considerado. Conforme abordado no Capítulo 1, a operação coordenada de sistemas predominantemente hidráulicos, sobretudo para sistemas em que as usinas hidrelétricas possuem disposição territorial semelhantes às usinas do SIN (arranjo nomeado em “cascata”), associado ao comportamento estocásticos das afluições às usinas, torna-se bastante sensível a parâmetros incertos.

O custo total de operação é composto por duas parcelas identificadas como custo imediato de operação e custo futuro de operação. A Figura 3.1 apresenta as curvas em função do nível de armazenamento final de um determinado estágio. O custo imediato varia conforme a decisão de utilizar ou não a água armazenada nos reservatórios. Nesse sentido, quanto mais despachar as usinas hidrelétricas para atendimento da demanda líquida ($DEMLIQ_t$) do sistema num determinado estágio t , menor será o custo imediato de operação associado ao estágio t , pois haverá uma redução no despacho de usinas termelétricas e, portanto, menor consumo de combustíveis. Em contrapartida, caso a decisão operativa no estágio t é por poupar a água armazenada nos reservatórios para utilização em estágios subsequentes a t , a $DEMLIQ_t$ deverá ser atendida por unidades geradoras mais caras e, por consequência, o custo imediato de operação terá valor superior.

O custo futuro de operação varia conforme a decisão operativa no estágio anterior a t , isto é, se a água armazenada nos reservatórios for utilizada num momento inadequado, as fontes de geração usadas para o suprimento da demanda líquida futura podem ser mais caras, implicando num alto custo futuro. Nesse sentido, ainda que o custo para geração de energia elétrica a partir das usinas hidrelétricas seja nulo, o gerenciamento dos recursos hídricos incorre em consequências na operação do sistemas em períodos subsequentes.

As inclinações (derivadas) de cada função no ponto va^* , identificado na Figura 3.1, têm um significado. A derivada da Função de Custo Imediato (FCI) representa o custo de operação da termelétrica acionada quando se decide pelo armazenamento de uma unidade a mais de volume de água em um dado reservatório. Por sua vez, a derivada da Função de Custo Futuro, denominada “valor da água”, representa o custo de operação futuro para um aumento unitário no volume armazenado em determinado reservatório, isto é, é o custo de oportunidade do armazenamento da água [23].

Figura 3.1 – Função de Custo Imediato, Futuro e Total



Fonte: [4]

A política ótima de operação do sistema consiste na minimização do valor esperado do custo total, representado pela Função de Custo Total (FCT), caracterizado pela soma da Função de Custo Imediato com a Função de Custo Futuro, conforme a Equação 3.1.

$$FCT = FCI + FCF \quad (3.1)$$

Nesse sentido, o valor mínimo para FCT é obtido quando sua derivada em relação ao volume armazenado final (va) for nula. O valor mínimo corresponde ao ponto em que as derivadas de FCI e FCF em relação ao va são simétricas, apresentadas conforme a Equação 3.2.

$$FCT = FCI + FCF = 0 \Rightarrow \frac{\partial FCT}{\partial va} = \frac{\partial (FCI + FCF)}{\partial va} = 0 \Rightarrow \frac{\partial FCI}{\partial va} = -\frac{\partial FCF}{\partial va} \quad (3.2)$$

3.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A formulação a ser apresentada é simplificada devido ao problema ser de instância mínima, como o sistema hidrotérmico tutorial abordado nesse trabalho (composto apenas por duas usinas hidrelétricas e duas usinas termelétricas). Dessa forma, não foram consideradas características de, por exemplo, vazão mínima obrigatória de cada usina com reservatório, intercâmbio entre diferentes subsistemas, dentre outras.

3.2.1 Função Objetivo

O problema consiste na minimização de α_t , função apresentada conforme a Equação 3.3, composta por duas parcelas. A primeira parcela refere-se ao “Custo Imediato de Operação”, o qual é associado à(s) geração(ões) termelétrica(s) e eventuais penalizações por cortes no atendimento à demanda (déficit) do estágio t em questão. Já a segunda parcela refere-se ao “Custo Futuro de Operação”, o qual é associado ao custo de operação dos estágios subsequentes a t devido a determinada decisão de armazenamento de água.

$$\alpha_t(X_t) = \left[\sum_j \psi_j \cdot g_{T_{t,j}} + \psi_D \cdot \text{déficit}_t + \sum_i k_i \cdot vv_{t,i} \right] + \alpha_{t+1} \quad (3.3)$$

Em que:

α_t Custo total de operação do estágio t , em [\\$]

X_t Estados iniciais de armazenamentos, em [hm^3]

ψ_j Custo de geração da usina termelétrica j , em [\$/ $MWmês$]

$g_{T_{t,j}}$ Energia gerada pela usina termelétrica j no estágio t , em [$MWmês$]

ψ_D Custo associado ao déficit (corte de carga), em [\$/ $MWmês$]

déficit_t Déficit de energia no estágio t , em [$MWmês$]

k_i Constante de penalização pelo vertimento associado à usina hidrelétrica i , em [\$/(m^3/s)]

$vv_{t,i}$ Vazão vertida pela usina hidrelétrica i no estágio t , em [m^3/s]

α_{t+1} Custo futuro de operação no estágio t , em [\\$]

3.2.2 Restrições do Problema de Otimização

3.2.2.1 Atendimento à Demanda

A restrição de atendimento à demanda ou balanço energético do sistema apresentada conforme a Equação 3.4 consiste na igualdade em que o somatório das energias hidrelétricas e termelétricas geradas, bem como de um possível déficit que, porventura, aconteça no estágio t em questão, deve ser igual à demanda líquida do sistema.

$$\sum_j g_{T_{t,j}} + \sum_i ghidr_{s_{t,i}} + \text{déficit}_t = DEMLIQ_t \quad (3.4)$$

Em que:

$g_{T_{t,j}}$ Energia gerada pela usina termelétrica j no estágio t , em [$MWmês$]

$ghidr_{s_{t,i}}$ Energia gerada pela usina hidrelétrica i no estágio t , em [$MWmês$]

$déficit_t$ Déficit de energia no estágio t , em $[MWmês]$

$DEMLIQ_t$ Demanda líquida do sistema no estágio t , em $[MWmês]$

3.2.2.2 Balanço Hídrico

A restrição de balanço hídrico, apresentada conforme a Equação 3.5, para cada usina hidrelétrica do sistema consiste na igualdade no qual o volume armazenado ao final do estágio t para usina hidrelétrica i é igual ao somatório do volume inicial e o volume incremental afluente, dado pelos volumes laterais entre a usina em questão e suas usinas à montante, bem como o volume defluente das usinas à montante, abatido do volume defluente da usina i , dado pela soma dos volumes turbinado e vertido.

$$va_{t+1,i} = va_{t,i} + k_C \cdot \left(Vinc_{t,i} + \sum_m (vt_{t,m} + vv_{t,m}) - vt_{t,i} - vv_{t,i} \right) \quad \forall i \in I \quad (3.5)$$

Em que:

$va_{t+1,i}$ Volume armazenado ao final do estágio t da usina i , em $[hm^3]$

$va_{t,i}$ Volume armazenado no início do estágio t da usina i , em $[hm^3]$

k_C Constante de conversão de unidades, de m^3/s para hm^3 , onde $k_C = 2,592$

$Vinc_{t,i}$ Vazão incremental afluente no estágio t da usina i , em $[m^3/s]$

$vt_{t,m}$ Vazão turbinada pela usina m a montante da usina i no estágio t , em $[m^3/s]$

$vv_{t,m}$ Vazão vertida pela usina m a montante da usina i no estágio t , em $[m^3/s]$

$vt_{t,i}$ Vazão turbinada pela usina i no estágio t , em $[m^3/s]$

$vv_{t,i}$ Vazão vertida pela usina i no estágio t , em $[m^3/s]$

I Conjunto de todas as usinas hidrelétricas do sistema

3.2.2.3 Função de Custo Futuro

A Função de Custo Futuro (FCF) ou cortes de Benders, apresentada conforme a Equação 3.6, pode ser representada por uma função linear por partes, dados os armazenamentos iniciais e as afluências anteriores ao estágio t como variáveis de estado. A FCF é dada pelo conjunto de (hiper)planos lineares que fornece uma região convexa de solução.

$$\alpha_{t+1} \geq \sum_{i=1}^I (\pi_{t+1,i}^k \cdot va_{t+1,i}) + b_{t+1}^k \quad (3.6)$$

Em que:

α_{t+1} Custo futuro de operação no estágio t , em [\\$]

$\pi_{t+1,i}^k$ Coeficiente do k -ésimo corte da Função de Custo Futuro que multiplica o volume armazenado da hidrelétrica i , dado pelo multiplicador de Lagrange associado à equação de balanço hídrico da usina i no estágio $t + 1$, em [\$/hm³]

$va_{t+1,i}$ Volume armazenado ao final do estágio t da usina i , em [hm³]

b_{t+1}^k Termo independente do k -ésimo corte ou hiperplano que compõe a Função de Custo Futuro no estágio $t + 1$, em [\\$]

3.2.2.4 Função de Produção Hidráulica

A geração de energia a partir de determinada usina hidrelétrica i , apresentada conforme a Equação 3.7, depende da função de produtibilidade, ρ_i . Trata-se de uma função não linear da altura de queda líquida de i e pode ser modelada por polinômios de quarto grau em função do armazenamento, turbinamento e vertimento de i . Por simplificação, em todos os testes realizados no presente trabalho ρ_i é considerada constante. O ponto de operação para consideração de que ρ_i seja constante é com volume igual a 65% do volume útil.

$$ghidr_{t,i} = \rho_i \cdot vt_{t,i} \quad (3.7)$$

Em que:

$ghidr_{t,i}$ Energia gerada pela usina hidrelétrica i no estágio t , em [MWmês]

ρ_i Produtibilidade da usina hidrelétrica i , em [MWmês/(m³/s)]

$vt_{t,i}$ Vazão turbinada pela usina hidrelétrica i no estágio t , em [m³/s]

3.2.2.5 Limites Operativos das Variáveis (Restrições de Canalização)

Finalmente, apresenta-se as Equações 3.8 a 3.13, referentes aos limites operativos das variáveis de decisão do problema.

- **Armazenamento:**

$$VA_{\min,i} \leq va_{t+1,i} \leq VA_{\max,i} \quad (3.8)$$

Em que:

$VA_{\min,i}$ Volume de armazenamento mínimo da usina i , em [hm³]

$va_{t+1,i}$ Volume armazenado ao final do estágio t da usina i , em [hm³]

$VA_{\max,i}$ Volume de armazenamento máximo da usina i , em [hm³]

- **Engolimento:**

$$0 \leq vt_{t,i} \leq VT_{máx,i} \quad (3.9)$$

Em que:

$vt_{t,i}$ Vazão turbinada pela usina i no estágio t , em $[m^3/s]$

$VT_{máx,i}$ Vazão turbinada máxima da usina i , em $[m^3/s]$

- **Vertimento:**

$$0 \leq vv_{t,i} \leq \infty \quad (3.10)$$

Em que:

$vv_{t,i}$ Vazão vertida pela usina i no estágio t , em $[m^3/s]$

- **Geração Térmica:**

$$0 \leq g_{T,t,j} \leq GT_{máx,j} \quad (3.11)$$

Em que:

$g_{T,t,j}$ Energia gerada pela usina termelétrica j no estágio t , em $[MWmês]$

$GT_{máx,j}$ Energia gerada máxima pela usina termelétrica j , em $[MWmês]$

- **Déficit:**

$$déficit_t \geq 0 \quad (3.12)$$

Em que:

$déficit_t$ Déficit de energia no estágio t , em $[MWmês]$

- **Custo Futuro:**

$$\alpha_{t+1} \geq 0 \quad (3.13)$$

Em que:

α_{t+1} Custo futuro de operação no estágio t , em $[\$]$

4 TÉCNICAS DE PROGRAMAÇÃO DINÂMICA: PDE E PDDE

4.1 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA ESTOCÁSTICA

A operação ótima de sistemas hidrotérmicos tem por objetivo determinar uma estratégia para cada estágio do horizonte de planejamento. Conhecendo-se o estado do sistema no início do estudo e definida a estratégia de operação, torna-se possível determinar o montante de geração a ser realizado por cada unidade geradora. Para tanto, a estratégia ótima de operação deve minimizar o custo total, bem como maximizar a confiabilidade no suprimento de energia.

O problema de planejamento da operação hidrotérmica pode ser resolvido por Programação Dinâmica Estocástica (PDE). Define-se X_t como o estado composto pelos volumes iniciais de cada usina hidrelétrica (VA_t) e pelos vetores de vazões afluentes incrementais à cada usina hidrelétrica nos estágios anteriores ($AFL_{t-1}, AFL_{t-2}, \dots$). A vazão incremental corresponde à afluência natural descontada das afluências naturais das usinas de reservatório imediatamente a montante [10]. Pode-se representar a PDE a partir da equação recursiva ($t = T, T - 1, \dots, 1$ e $\forall VA_t$) 4.1 [6].

$$\alpha_t(X_t) = E_{AFL_t|X_t} \left(\underset{U_t}{Min} \quad C_t(U_t) + \alpha_{t+1}(X_{t+1}) \right) \quad (4.1)$$

Na Equação 4.1, $C_t(U_t)$ representa o custo imediato associado à decisão U_t e $\alpha_{t+1}(X_{t+1})$ representa o custo futuro associado à decisão U_t , visto que o estado X_{t+1} decorre da decisão operativa U_t . Os vetores de volumes turbinados (vt_t) e vertidos (vv_t) pelas usinas hidrelétricas compõem o vetor U_t que representa a decisão operativa em t e em função de U_t são calculados os montantes de geração térmica e déficit que determinam o custo de operação do estágio t .

Dessa forma, o custo total de operação associado a um determinado estado X_t é função do custo de operação imediato representado pela parcela $C_t(U_t)$ na Equação 4.1 mais o custo futuro associado ao estado X_{t+1} .

O custo imediato de operação $C_t(U_t)$ é basicamente constituído pelos custos das unidades térmicas, que são despachadas de acordo com uma ordem de mérito, considerando que o déficit (ou corte de carga) é representado através da térmica com maior custo unitário. A ordem de mérito, no planejamento de médio prazo, é dada por custos fixos em cada estágio, isto é, a unidade térmica com custo fixo mais baixo é despachada até sua capacidade máxima antes que outra unidade com custo fixo superior em dado estágio entre em operação. Portanto, os custos imediatos decorrem da utilização das unidades térmicas e eventuais penalizações em virtude do não atendimento à demanda do sistema (déficit de energia).

O custo futuro de operação, associado ao estado X_{t+1} , é representado através de

um conjunto de restrições ao problema que são dependentes dos volumes armazenados ao final do horizonte de estudo, representando, assim, a influência da decisão realizada no presente em relação ao custo de operação do reservatório no futuro.

Para o caso de sistemas predominantemente hidroelétricos como o SIN, a técnica de PDE é inviável para realização do planejamento da operação do sistema devido a “Maldição da Dimensionalidade” [11]. A expressão refere-se, basicamente, a fenômenos que surgem na análise de dados em espaços com diversas dimensões e, por consequência, implica na impossibilidade de execução de um algoritmo para determinadas instâncias de um problema devido aos recursos computacionais disponíveis para obtenção de sua saída.

Nesse sentido, a Maldição da Dimensionalidade é demonstrada: considere NR reservatórios divididos em ND níveis (ou estados iniciais) com NR afluências do estágio anterior, a dimensão do problema é dada pela Equação 4.2.

$$NE = ND^{NR} \quad (4.2)$$

Em que NE é o número de estados. Dessa forma, algoritmos baseados em PDE tornam-se rapidamente inviáveis do ponto de vista computacional. Exemplificadamente, para $ND = 100$, têm-se:

- $NR = 1 \rightarrow 100^1 = 100$ estados;
- $NR = 2 \rightarrow 100^2 = 10.000$ estados;
- $NR = 3 \rightarrow 100^3 = 1$ milhão de estados.

A técnica pode ser aplicada a problemas estocásticos, de diversos estágios e pode representar não linearidades, no entanto apresenta a desvantagem de exigir discretização do espaço de estados X_t [6]. O número de estados discretizados cresce exponencialmente de acordo com o número de variáveis de estado, conforme a Equação 4.2. Nesse sentido, a utilização da técnica de PDE torna-se computacionalmente inviável mesmo para problemas com poucas usinas hidrelétricas.

A precisão da solução encontrada por meio da técnica de PDE está relacionada com número de discretizações utilizada para o espaço de estados [24]. Embora ideal para representação da Função de Custo Futuro, com aumento do número de intervalos de discretização, o número de estados, X_t , do problema cresce substancialmente.

4.2 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA

Na técnica de PDDE, evita-se a discretização do espaço de estados tal como é feito na técnica da PDE reduzindo consideravelmente o esforço computacional. A PDDE

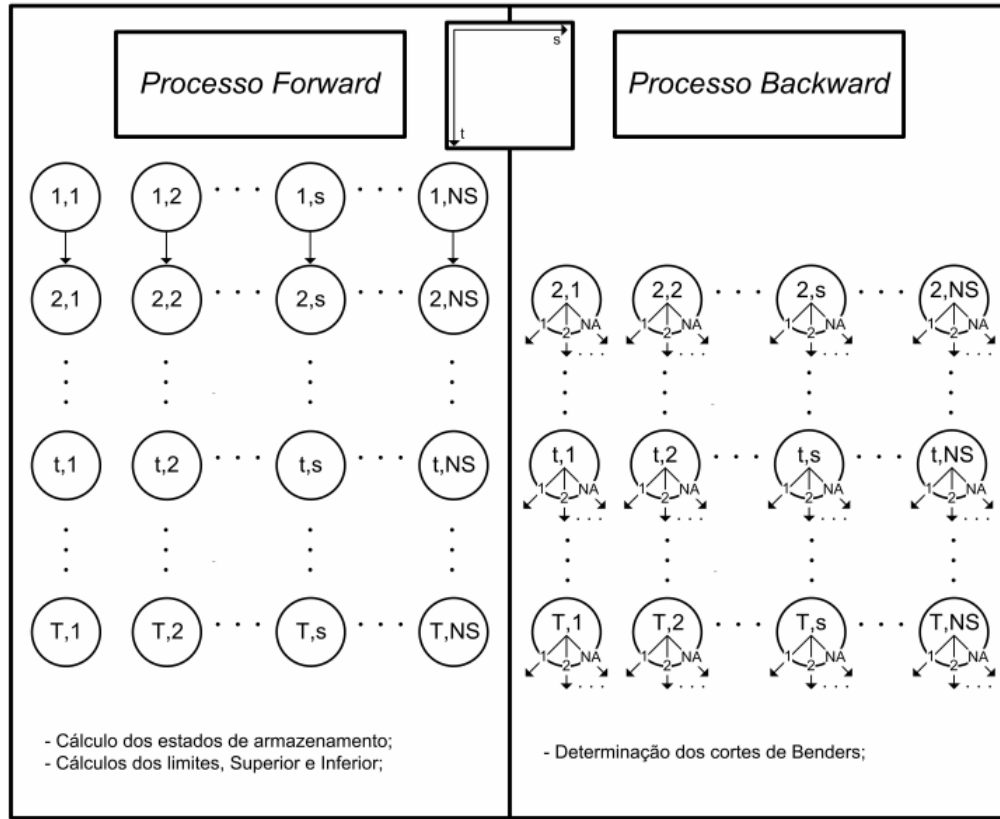
baseia-se na utilização da técnica de decomposição de Benders em que um problema maior é dividido em subproblemas menores resolvidos iterativamente até obter-se solução do problema original. A dependência entre os subproblemas é realizada através dos cortes de Benders que consistem em restrições criadas em função dos multiplicadores de Lagrange obtidos no decorrer da resolução dos subproblemas de otimização.

O processo da PDDE é constituído de duas etapas com funções distintas. Na etapa *forward* é realizada uma recursão direta (do período 1 até T) no qual são determinados, através da função de custo futuro obtida até então, os armazenamentos dos subsistemas ao longo do estudo para cada uma das n sequências *forward* consideradas, bem como estimativas do custo de operação do sistema ou os chamados custo superior (Z_{SUP}) e custo inferior (Z_{INF}), usados para testes de convergência do algoritmo. A premissa adotada na etapa *forward* é de que o armazenamento inicial de um dado estágio subsequente é determinado pelo armazenamento final obtido no estágio imediatamente anterior.

Na etapa *backward* realiza-se a recursão inversa (do período T até 2) em que se estima a função de custo futuro em função dos estados determinados na etapa *forward*. Para cada estado de armazenamento determinado na etapa *forward* são determinados os cortes médios em funções das possíveis realizações de afluência (ou aberturas) em dado estágio t . Dessa forma, são gerados os cortes que constituem a função de custo futuro, os quais são empregados para limitar o despacho das usinas hidrelétricas em virtude de um custo associado à operação futura. Nesse sentido, à medida que a função de custo futuro é melhor representada, o valor de Z_{SUP} tende a cair durante o processo de resolução do problema.

Em resumo, no processo *forward* são determinados os estados de armazenamento dos reservatórios e os limites superior e inferior para o custo de operação do sistema. Já no processo *backward* são determinados os cortes de Benders conforme os estados de armazenamento dos reservatórios determinados pelo processo *forward*. De forma simplificada, a Figura 4.1 apresenta as etapas *forward* e *backward* que constituem a PDDE para um problema de T estágios, NS sequências *forward* e NA aberturas ou realizações da variável aleatória (afluência) em um dado estágio.

Figura 4.1 – Diagrama Esquemático da PDDE



Fonte: [3]

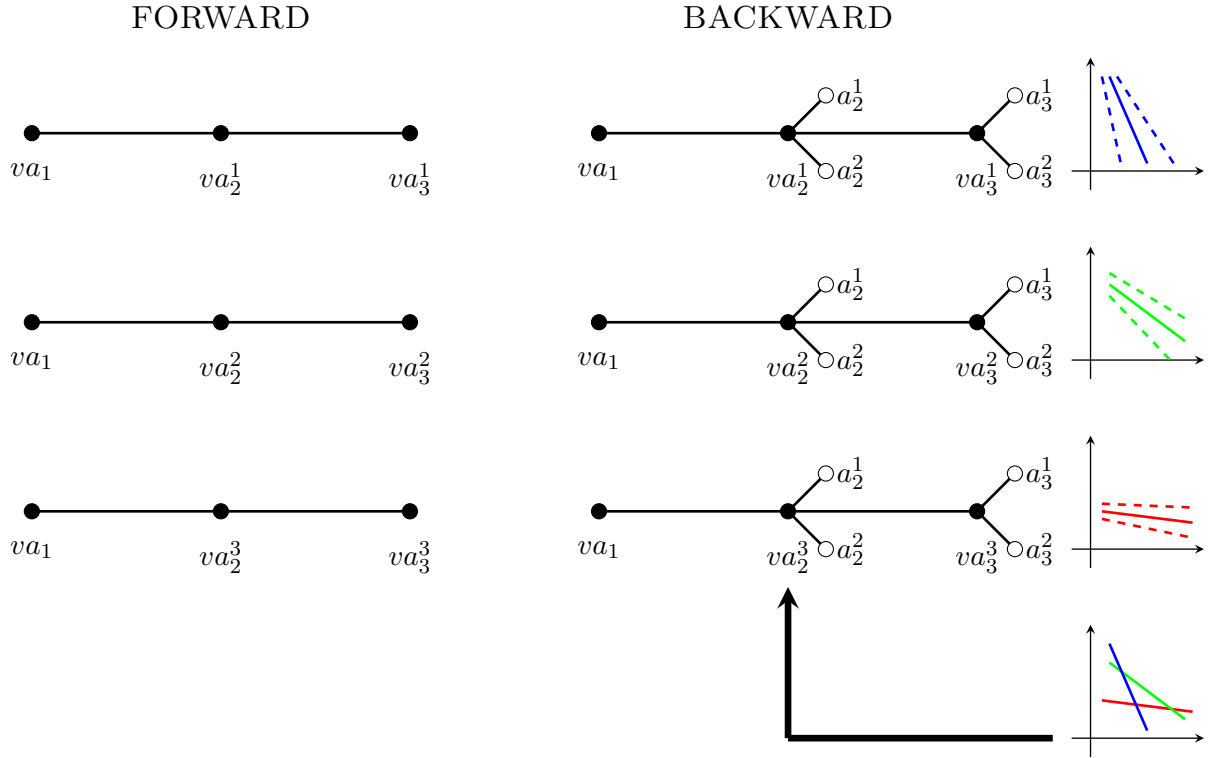
O valor do custo superior (Z_{SUP}) é representado por uma variável aleatória com distribuição normal e média igual ao valor esperado do custo de operação ao longo do horizonte de planejamento. Dessa forma, Z_{SUP} é obtido no último estágio do horizonte de planejamento ($t = T$) da etapa *forward*, conforme Equação 4.3.

$$Z_{SUP} = \frac{1}{NS} \sum_{n=1}^{NS} Z_n \quad (4.3)$$

Em que Z_n representa o custo total de operação associado à série *forward* n , determinado pela soma dos custos imediatos em cada estágio dada a ocorrência da série *forward* n em questão, e NS é o número total de séries *forward* consideradas no horizonte de planejamento.

O valor do custo inferior (Z_{INF}) é obtido no primeiro estágio da etapa *forward* em função das possíveis realizações de cenários de afluência sujeito à função de custo futuro determinada até então, conforme Equação 4.4. O valor de Z_{INF} aumenta ao longo das iterações uma vez que a função de custo futuro é melhor representada ao longo do processo

Figura 4.2 – Fases do Algoritmo PDDE



Fonte: Adaptado de [4]

iterativo.

$$Z_{INF} = \frac{1}{NS} \sum_{n=1}^{NS} CPE_n \quad (4.4)$$

Em que CPE_n é o custo total (dado pela soma dos custos imediato e futuro) do primeiro estágio associado à série *forward* n .

Por conseguinte, Z_{SUP} e Z_{INF} são determinados pelos valores médios do somatório dos custos imediatos correspondentes a cada estágio e do somatório do custo imediato e do custo futuro determinado pela função de custo futuro determinada até então para o primeiro estágio ao considerar NS séries *forward*, respectivamente. Nesse sentido, quando os valores de Z_{SUP} e Z_{INF} se aproximarem conforme um critério de convergência, significa que a função de custo futuro está bem representada e o cálculo da política está determinado.

Exemplificadamente, a Figura 4.2 apresenta o procedimento nas etapas *forward* e *backward* da PDDE considerando um problema de 3 estágios, 3 séries *forwards* e 2 aberturas na árvore de cenários. Dessa forma, va_t^n representa o estado de armazenamento no estágio t para a série *forward* (ou cenário de afluência) n e a_t^z representa a afluência relacionada ao estágio t e abertura z da árvore de cenários.

O Algoritmo 1, adaptado de [4], apresenta o processo da técnica da PDDE.

Algoritmo 1: ALGORITMO DE PDDE

Entrada: Dados das usinas e do sistema

Saída: Conjunto de cortes da FCF de cada estágio

```

1  início
2  | Inicializa os volumes iniciais ( $VOLI$ ) de cada hidrelétrica
3  |  $T$  estágios,  $NA$  aberturas na árvore de cenários,  $NS$  séries forward
4  |  $iter = 0$  % inicializa contador de iterações
5  | enquanto não satisfazer o critério de convergência faça
6  |   | % FORWARD
7  |   | para cada  $t = 1, 2, \dots, T$  faça
8  |   |   | se  $t = 1$  então
9  |   |   |   |  $va_{1,i} = VOLI$ 
10 |   |   | senão
11 |   |   |   |  $va_{t,i} = vf_{t-1,i}$ 
12 |   |   | fim
13 |   |   | se  $iter \neq 0$  e  $t < T$  então
14 |   |   |   | • Adicione os cortes da FCF no estágio  $t$ 
15 |   |   | fim
16 |   |   | para  $n = 1, 2, \dots, NS$  faça
17 |   |   |   | • Solucione o PPL de acordo com a Equação 3.3 a Equação 3.13
18 |   |   |   | • Atualize o volume armazenado inicial de cada usina hidrelétrica para o
19 |   |   |   |   | estágio  $t + 1$ 
20 |   |   | fim
21 |   | fim
22 |   | • Calcule os limites inferior  $Z_{INF}$  e superior  $Z_{SUP}$ 
23 |   | % BACKWARD
24 |   | para  $t = T, T - 1, \dots, 2$  faça
25 |   |   | se  $t < T$  então
26 |   |   |   | • Adicione os cortes da FCF no estágio  $t$ 
27 |   |   |   | fim
28 |   |   |   | para  $n = 1, 2, \dots, NS$  faça
29 |   |   |   |   | para  $z = 1, 2, \dots, NA$  faça
30 |   |   |   |   |   | • Solucione o PPL de acordo com a Equação 3.3 a Equação 3.13
31 |   |   |   |   |   | • Obtenha o corte da FCF
32 |   |   |   |   |   | fim
33 |   |   |   |   | • Adicione o corte médio da FCF ao conjunto de restrições do estágio  $t - 1$ 
34 |   |   |   |   | fim
35 |   |   |   | fim
36 |   |   | fim
37 |   | fim
38 |   |  $iter = iter + 1$  % atualiza contador de iterações
39 | fim
40 fim

```

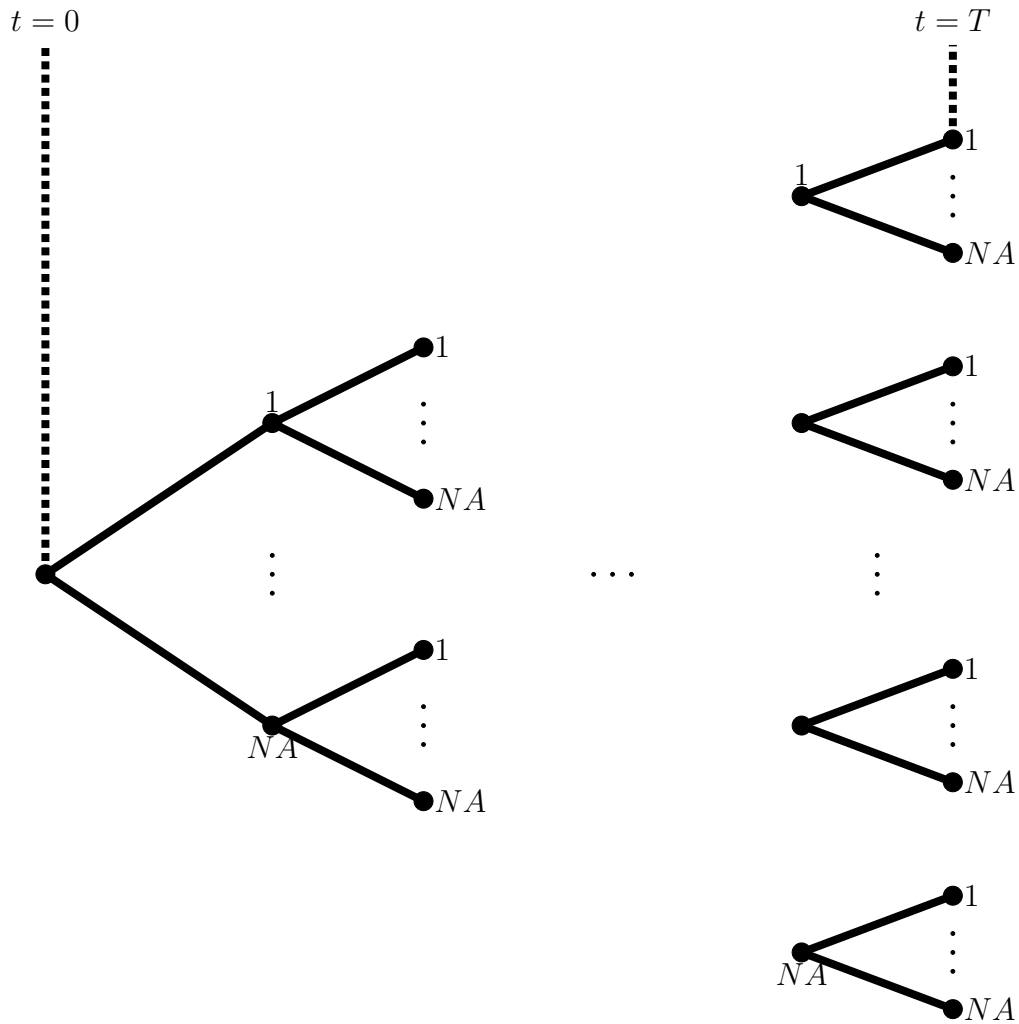
A PDDE, no contexto do problema de planejamento da operação hidrotérmica, permite a análise da solução considerando um conjunto de séries geradas para simulação de diversos cenários de afluência. A metodologia contorna a ocorrência de inviabilidade de solução do problema do ponto de vista computacional apresentado pela técnica de PDE. Nesse sentido, a PDDE é capaz de resolver o problema de planejamento considerando um número maior de reservatórios conjuntamente a modelos estatísticos de representação das tendências hidrológicas.

4.2.1 Geração de Cenários de Afluência

A árvore de cenários do processo estocástico consiste em uma estrutura disposta em grafos da variável aleatória [25]. Os nós na árvore representam as possíveis realizações de afluência e têm o objetivo de modelar as incertezas hidrológicas inerentes ao problema, enquanto os ramos (ou caminhos) representam as conexões temporais possíveis entre as realizações.

A Figura 4.3 apresenta uma árvore de cenários para T estágios e NA aberturas (realizações da variável aleatória) em cada estágio. O nó do estágio $t = 0$ consiste em um valor observado ou conhecido da variável aleatória e é denominado nó determinístico.

Figura 4.3 – Árvore de Cenários



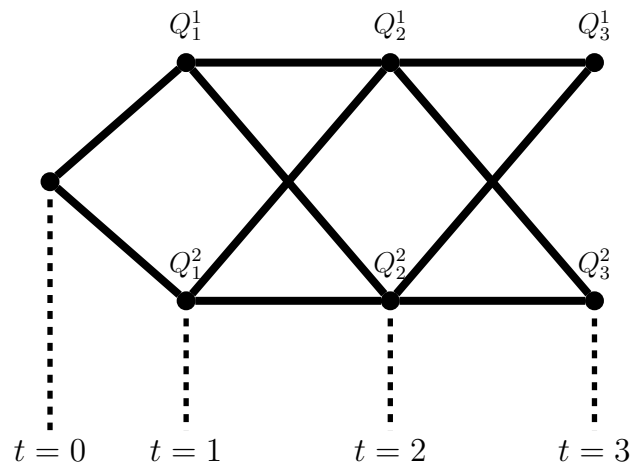
Fonte: Elaborado pela Autora

Devido à elevada dimensionalidade que o processo de solução pode resultar ao se considerar todos os possíveis cenários (caminhos) hidrológicos, na técnica de PDDE são utilizadas apenas amostras (número de sequências *forward*, NS) da árvore definidos mediante sorteio entre todos os possíveis caminhos.

De maneira ilustrativa, a Figura 4.4 apresenta a árvore de cenários para três estágios ($T = 3$) e duas aberturas ($NA = 2$) definida pelos valores Q_t^z relativos à z -ésima abertura do estágio t . As séries *forward* são obtidas mediante sorteio entre os caminhos possíveis da árvore definida. O número total de séries possíveis é, então, $NA^T = 2^3 = 8$ séries.

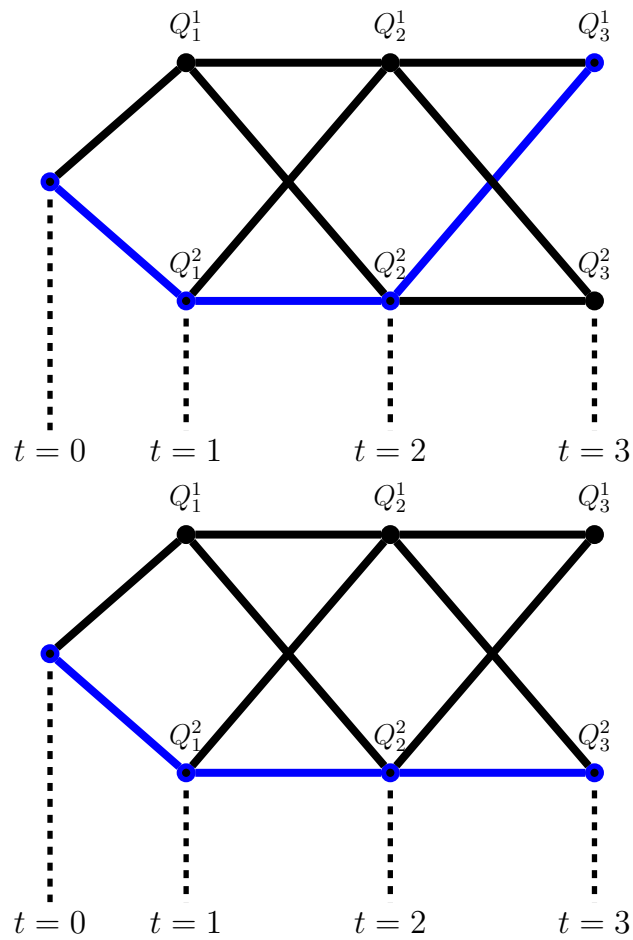
A Figura 4.5 apresenta em azul parte das possíveis séries *forward* para a árvore estocástica apresentada na Figura 4.4.

Figura 4.4 – Estrutura em Árvore utilizada na PDDE para 3 Estágios e 2 Aberturas



Fonte: Adaptado de [10]

Figura 4.5 – Estrutura em Árvore utilizada na PDDE para 3 Estágios e 2 Aberturas (Possíveis Séries *Forward*)



Fonte: Adaptado de [10]

4.2.2 Determinação dos Cortes de Benders da Função de Custo Futuro

Conforme descrito na Seção 4.2, a geração dos Cortes de Benders que compõem a Função de Custo Futuro dá-se na fase *backward* do processo de PDDE. Para cada abertura z da árvore de cenários, obtêm-se os cortes de cada estágio t mediante o valor do custo total de operação (α_t) e os Multiplicadores de Lagrange ($\pi_{t,i}^z$) de cada equação de Balanço Hídrico, isto é, os respectivos “custos marginais da água” em cada reservatório do sistema, bem como os valores de armazenamento em cada hidrelétrica, $va_{t,i}$.

Na fase *backward*, para cada sequência *forward*, varre-se as NA aberturas e, então, é gerado um corte. Dessa forma, o número total de cortes gerados a cada estágio é igual ao número de sequências *forward* (NS). Portanto, para cada série *forward*, os cortes da Função de Custo Futuro são determinados pela média simples dos cortes obtidos nas aberturas correspondentes, conforme apresentado na Equação 4.5 a Equação 4.7.

$$\pi_{t,i} = \frac{1}{NA} \sum_{z=1}^{NA} \pi_{t,i}^z \quad \forall t \in T \text{ e } i \in I \quad (4.5)$$

Em que:

$\pi_{t,i}^z$ “Custo Marginal da Água” da usina hidrelétrica i no estágio t e abertura z na árvore de cenários, em $[\$/hm^3]$

$\pi_{t,i}$ Média dos “Custos Marginais da Água” das usinas hidrelétricas no estágio t , em $[\$/hm^3]$

I Conjunto de todas as usinas hidrelétricas do sistema

$$b_t = \frac{1}{NA} \sum_{z=1}^{NA} b_t^z \quad \forall t \in T \quad (4.6)$$

Em que:

b_t^z Termo independente do corte da Função de Custo Futuro no estágio t e abertura z na árvore de cenários, em $[\$]$

b_t Média dos termos independentes da Função de Custo Futuro no estágio t , em $[\$]$

Na qual,

$$b_t^z = \alpha_t - \sum_{i=1}^I (\pi_{t,i}^z \cdot va_{t,i}) \quad \forall z \in Z \quad (4.7)$$

Dessa forma, os parâmetros $\pi_{t,i}$ e b_t , obtidos para cada sequência *forward*, compõem cada corte definido pela Equação 3.6.

4.2.3 Critérios de Convergência da Programação Dinâmica Dual Estocástica

De modo geral, a Programação Dinâmica Dual Estocástica pode ser considerada convergida quando têm-se a igualdade entre os limites (ou custos) inferior e superior, Z_{INF} e Z_{SUP} , respectivamente. A obtenção da condição de igualdade não é geralmente possível e devido à utilização de apenas amostras da árvore de cenários, tem-se apenas uma estimativa do limite superior e é necessário que os limites estejam próximos o suficiente tais que a hipótese de igualdade entre Z_{INF} e Z_{SUP} possa ser considerada.

Dessa forma, quando Z_{INF} se aproximar o suficiente de Z_{SUP} , diz-se que a Função de Custo Futuro está bem representada e o cálculo da política ótima de operação para o sistema está determinado. Na literatura, existem diversos critérios de convergência para o algoritmo de PDDE. No presente trabalho, serão avaliados os critérios apresentados na Subsubseção 4.2.3.1 a Subsubseção 4.2.3.4.

4.2.3.1 Critério I: Intervalo de Confiança

Este critério é amplamente utilizado na literatura, conforme pode ser verificado em [4, 16, 26]. O critério baseia-se na comparação entre os valores de Z_{INF} e Z_{SUP} a partir de um intervalo de confiança estabelecido. Como assume-se uma distribuição normal para os valores de limite superior, conforme Equação 4.3, e para um intervalo de confiança de, por exemplo, 95%, tem-se que o processo converge quando Z_{INF} , conforme Equação 4.4, estiver contido no intervalo para Z_{SUP} , tal que:

$$Z_{INF} \in [Z_{SUP} - 1.96 \cdot \sigma; Z_{SUP} + 1.96 \cdot \sigma] \quad (4.8)$$

Em que σ é o desvio padrão da média dos valores dos custos totais de operação obtidos em cada série *forward*, tal que:

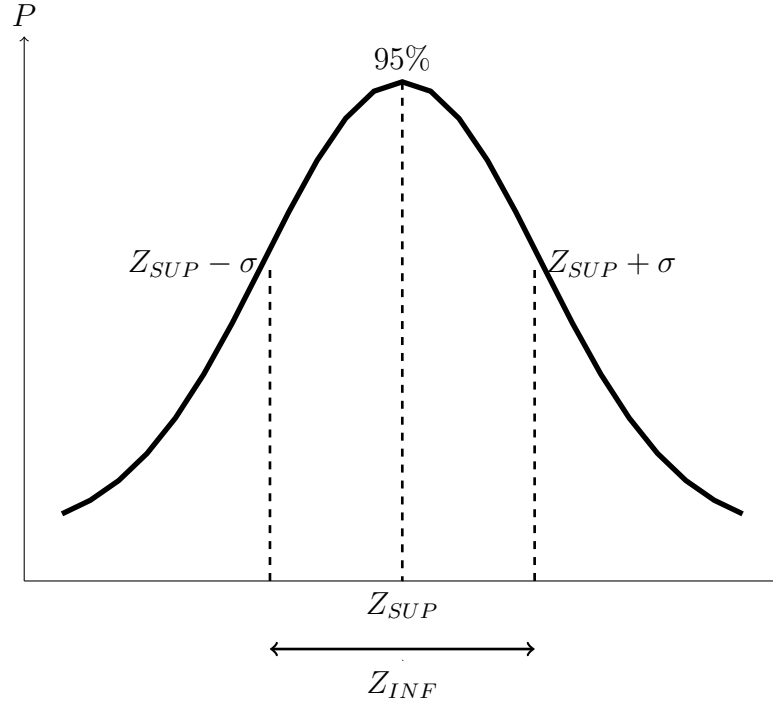
$$\sigma = \frac{1}{NS} \sqrt{\sum_{n=1}^{NS} (Z_n - Z_{SUP})^2} \quad (4.9)$$

Em que NS é o número total de séries *forward* consideradas no horizonte de planejamento. A Figura 4.6 apresenta a consideração realizada pela Equação 4.8.

4.2.3.2 Critério II: Estabilidade do Limite Inferior (Z_{INF})

Este critério tornou-se ainda mais importante com a metodologia CVaR devido à dificuldade de estimativa para Z_{SUP} [27] e é, atualmente, o critério adotado no Setor Elétrico Brasileiro. O critério está descrito detalhadamente em [28] e pode ser verificado em [29]. Nesse critério, o cálculo dos limites inferior e superior, Z_{INF} e Z_{SUP} , é realizado de maneira análoga ao Critério 4.2.3.1. Em geral durante o processo iterativo da Programação Dinâmica Dual Estocástica, têm-se:

Figura 4.6 – Intervalo de Confiança para o Limite Superior



Fonte: Elaborado pela Autora

- O limite inferior (Z_{INF}) é obtido no primeiro estágio ($t = 1$) em função das realizações dos possíveis cenários de afluência no estágio em questão sujeito à função de custo futuro determinada até então. Nesse sentido, como se espera que a FCF seja melhor representada ao decorrer das iterações, depreende-se que Z_{INF} aumenta ao longo do processo iterativo [4];
- Durante o processo iterativo, o valor de Z_{SUP} tende a cair com algumas oscilações [4]. Isto porquê, mesmo tendo tendência de queda, pode haver um balanço no qual o Z_{SUP} apresente oscilações já que os estados visitados alteram-se durante a processo iterativo [10];
- O limite inferior (Z_{INF}) apresenta tendência de estabilização em determinado valor de acordo com a amostra de cenários de afluência utilizada [4].

Nesse sentido, o critério considera que o processo da PDDE converge a partir da estabilidade de Z_{INF} . Empiricamente, tem-se que Z_{INF} estabiliza quando seu valor possui variação inferior a um dado valor de tolerância (ϵ) predefinida durante k iterações consecutivas. Matematicamente, tem-se:

$$\left| \frac{Z_{INF}^{iter} + Z_{INF}^{iter-1} + \dots + Z_{INF}^{iter-(k-1)}}{k} - Z_{INF}^{iter} \right| \leq \epsilon \quad (4.10)$$

Em geral, $k = 3$ e, portanto, deve-se ter $iter \geq 3$ no momento de análise do critério de convergência da PDDE e ϵ é um pequeno valor de tolerância predefinida, como, por exemplo, $\epsilon = 0,01$.

4.2.3.3 Critério III: Erro Relativo Entre Z_{INF} e Z_{SUP}

A utilização deste critério pode ser verificada em [4, 30]. Nesse critério, o cálculo dos limites inferior e superior, Z_{INF} e Z_{SUP} , dá-se, novamente, de maneira análoga ao Critério 4.2.3.1. O critério considera que o processo da PDDE converge quando o erro relativo entre Z_{INF} e Z_{SUP} é inferior a um dado valor de tolerância (ϵ) predefinida, isto é, a convergência do processo ocorre quando a relação 4.11 é satisfeita.

$$\left| \frac{Z_{INF} - Z_{SUP}}{Z_{SUP}} \right| \leq \epsilon \quad (4.11)$$

Em que ϵ é um pequeno valor de tolerância predefinida, como, por exemplo, $\epsilon = 0,01$ (ou seja, 1%).

4.2.3.4 Critério IV: “Análise da Função de Benefício *Backward* ($\mathfrak{B}_{i,t}^k$)”

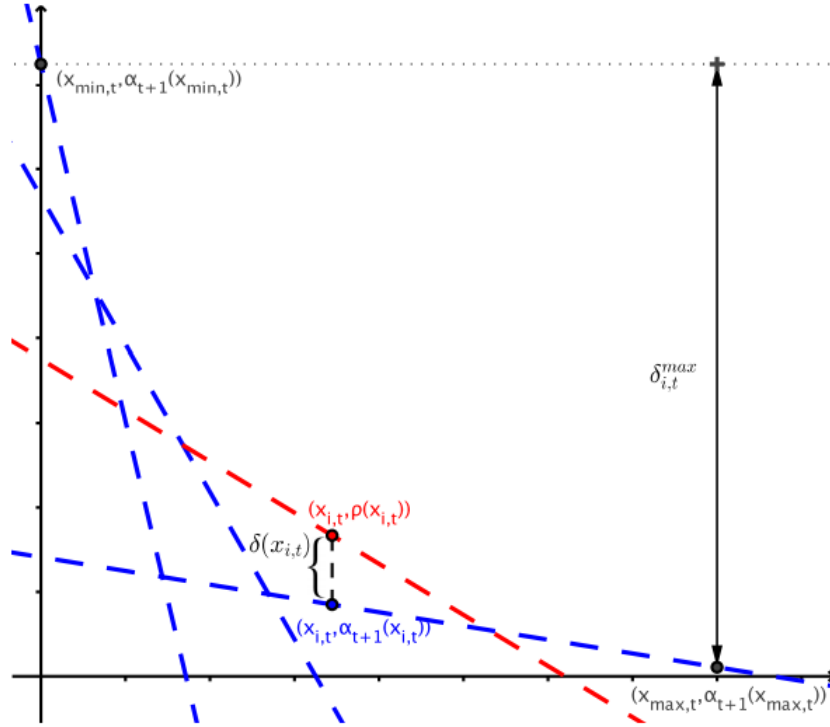
Este critério foi proposto por Brandi e pode ser verificado em detalhes em [10, 31]. O critério aborda a convergência da PDDE baseando-se nos benefícios dos cortes (ou hiperplanos) adicionados durante um processo de inserção iterativa incluindo uma medida denominada “Valor Condicionado a um Dado Risco” (CVaR).

Os cortes são calculados na fase *backward* da PDDE em que diversos Problemas de Programação Linear (PPLs) são resolvidos para obtenção do valor esperado dos custos e dos multiplicadores de Lagrange. No entanto, todo estado a ser visitado é fornecido na fase *forward* em que, conforme a função de custo futuro determinada até então, há um valor de custo inicial previsto associado a cada solução.

A solução obtida na fase *forward* para uma dada série i em determinado estágio t é denominada x_t^i . Sendo assim, o conjunto de soluções obtidas nessa fase são utilizadas para avaliações e construção dos cortes na fase *backward*.

Dessa forma, considerando a realização da sequência i , são resolvidos alguns PPLs no estágio $t + 1$ tal que as condições são dadas por x_t^i . Os valores obtidos nos PPLs definem um novo corte a ser inserido na função de custo futuro do estágio t .

Todavia, antes da inserção do corte (ou hiperplano), define-se uma medida para representar a variação (percentual) na função de custo futuro com a inserção do corte gerado pela série i no estágio t para a k -ésima iteração, denominada função de benefício *backward* ($\mathfrak{B}_{i,t}^k$). A Figura 4.7 apresenta um corte a ser inserido no estágio $t + 1$ de acordo com o estado (armazenamento) inicial $x_{i,t}$ obtido por uma série i .

Figura 4.7 – Determinação dos Valores de Benefício *Backward*

Fonte: [10]

Inicialmente, calcula-se o valor $\delta_{i,t}^{max}$ dado pela diferença máxima entre os valores de custos que são obtidos ao considerar os armazenamentos máximos e mínimos. Durante a dinâmica da PDDE, obtém-se da solução dos PPLs um custo associado e os multiplicadores de Lagrange que definirão um corte a ser inserido no problema em determinado estágio t . A utilização do operador ρ fornece o valor do custo em função de uma solução local.

Posteriormente, calcula-se $\delta(x_{i,t})$ dado pela diferença entre o valor de custo recém calculado e o valor de custo ao considerar o conjunto de cortes que compõem α_{t+1} definida até então no ponto no qual o corte foi calculado. Este conjunto de cortes (ou hiperplanos) é denominado μ .

O valor de custo considerando-se o conjunto de cortes μ equivale ao valor de custo futuro correto para o ponto X^* e é denominado $\alpha_i(X^*)$ porque é associado ao i -ésimo elemento do conjunto de cortes μ do estágio $t + 1$ de tal forma que antecipa a análise dos cortes.

Dessa forma, os cortes são analisados durante o processo de construção dos mesmos ao invés de analisá-los no momento de utilizá-los nos PPLs. Após determinação dos parâmetros apresentados na Figura 4.7, calcula-se o valor do benefício *backward* de acordo

com a Equação 4.12.

$$\mathfrak{B}_{i,t}^k = \frac{\delta_k(x_{i,t})}{\delta max_{k,i,t}} \quad (4.12)$$

O valor do benefício *backward*, $\mathfrak{B}_{i,t}^k$, representa o benefício do corte em determinada série *forward* i no estágio t em uma iteração k . Os valores de $\delta(x_{i,t})$ ou, simplesmente, $\delta_{i,t}$ são atualizados ao longo do processo iterativo tal que o parâmetro é menos representativo nas primeiras iterações e podem ser determinados valores altos de $\mathfrak{B}_{i,t}^k$ nestas iterações.

Durante o processo iterativo são calculados diversos fatores $\mathfrak{B}_{i,t}^k$ e considera-se a PDDE convergida em determinada iteração quando os valores de benefício obtidos em todas as séries e estágios estão abaixo de um valor de tolerância preestabelecida.

Dessa forma, define-se \mathfrak{B}_i^k dado pelo máximo valor do benefício ao considerar a série *forward* i , tal que:

$$\mathfrak{B}_i^k = \max(\mathfrak{B}_{i,2}^k, \mathfrak{B}_{i,3}^k, \dots, \mathfrak{B}_{i,T}^k) \quad (4.13)$$

Assim sendo, quando todos os valores \mathfrak{B}_i^k foram inferiores ao valor da tolerância preestabelecida, considera-se que houve convergência do processo da PDDE na k -ésima iteração desde que todas as séries utilizadas na política já não apresentem variações significativas na construção da FCF.

A avaliação dos valores de benefício pode agregar informações além da convergência do processo iterativo. Isto porque os parâmetros são calculados por série durante a PDDE e, assim, é possível avaliar quais as séries específicas já se encontram melhor definidas no problema e quais séries permanecem agregando informações relevantes à função de custo futuro. Em virtude disso, os valores de benefício são utilizados para definir quais séries serão substituídas em um processo de reamostragem mais seletivo.

É importante ressaltar que na avaliação dos benefícios na PDDE não há garantia matemática de que o erro cometido sempre será reduzido entre iterações consecutivas uma vez que as soluções são obtidas na fase *forward* e estados iniciais de armazenamentos consideravelmente distintos podem ser obtidos em iterações distintas para uma mesma série *forward* i .

Como mencionado no Critério 4.2.3.2, isto é aproximadamente o que ocorre com o valor do limite superior (Z_{SUP}) que mesmo tendo tendência de queda, pode haver um balanço no qual Z_{SUP} apresente oscilações já que os estados visitados alteram-se durante a processo iterativo mesmo quando não utiliza-se reamostragem.

No entanto, há uma resultante de aproximação entre Z_{INF} e Z_{SUP} assim como os valores de \mathfrak{B}_i^k apresentam tendência de redução durante o processo iterativo, fazendo com

que o critério possa ser considerado para análise de convergência.

Para que o critério de convergência descrito seja ainda mais robusto, define-se um parâmetro \mathfrak{C}_i^k que representa o número de iterações em que uma dada sequência i apresentou valor de \mathfrak{B}_i^k abaixo do valor da tolerância (ϵ) preestabelecida para convergência nas últimas iterações. O parâmetro \mathfrak{C}_i^k corresponde a um valor inteiro não negativo e é definido conforme a Equação 4.14.

$$\mathfrak{C}_i^k = \max_{c, d \in \mathbb{Z}_+} (c + 1) \quad (4.14)$$

$$s.a. \quad \mathfrak{B}_i^{k-d} < \epsilon \quad \forall \quad d \leq c$$

Nesse sentido, determinadas séries i que apresentarem valores de benefício abaixo da tolerância nas últimas n iterações podem ser substituídas por novas séries a serem reamostradas da árvore de cenários. Em resumo, as séries em que $\mathfrak{C}_i^k \geq n$ podem ser substituídas por novas séries de reamostragem.

Por outro lado, pode-se considerar o problema convergido quando todas as séries utilizadas após as reamostragens realizadas possuírem um valor de \mathfrak{C}_i^k superior a determinado valor inteiro. Ressalta-se, no entanto, que o critério de convergência descrito não diminui a importância de considerar um número relevante de séries *forward* para uma boa solução.

O presente trabalho tem por objetivo a solução e avaliação da convergência da PDDE na resolução de uma determinada árvore. Portanto, pretende-se avaliar se a árvore de cenários está bem representada através dos cortes construídos no processo da PDDE. O critério de convergência descrito difere-se notavelmente dos critérios descritos nas Subseções 4.2.3.1, 4.2.3.2 e 4.2.3.3 ao passo que verifica a qualidade dos cortes durante a fase *backward*, isto é, ao mesmo tempo em que são construídos os cortes da PDDE.

O Algoritmo 2, adaptado de [10], apresenta resumidamente o procedimento utilizado para avaliação da convergência da técnica de PDDE.

Em que,

- T : Número de estágios;
- NA : Número de aberturas na árvore de cenários;
- NS : Número de séries *forward*;
- ϵ : Tolerância; e,
- NSR : Número total de séries *forward* considerando reamostragem.

Algoritmo 2: CRITÉRIO 4.2.3.4 DE CONVERGÊNCIA DA PDDE

Entrada: Dados das usinas e do sistema, T , NA , NS , ϵ , NSR
Saída: Conjunto de cortes da FCF de cada estágio

```

1 início
2    $converg = false$ ,  $iter = 1$ ,  $\mathfrak{C}_i^1 = 0 \forall i$ ,  $tot\_ser = NS$ 
3   Seleciona  $NA$  cenários para cada estágio
4   Sorteia  $NS$  sequências de realizações
5   Inicializa os volumes iniciais de cada hidrelétrica
6   enquanto  $converg == false$  faça
7     se  $iter > 1$  e  $tot\_ser < NSR$  então
8       Reamostra sequências forward em função de  $\mathfrak{C}_i^{iter-1}$  e atualiza  $tot\_ser$ 
9     fim
10    % FORWARD
11    para cada  $t = 1, 2, \dots, T$  faça
12      para  $i = 1, 2, \dots, NS$  faça
13        Resolve o PPL de acordo com a Equação 3.3 a Equação 3.13 para
14        obter soluções  $X_t^{\omega_i, iter}$ 
15      fim
16    % BACKWARD
17    para  $t = T, T-1, \dots, 2$  faça
18      para  $n = 1, 2, \dots, NS$  faça
19        Atualiza  $\delta_{i,t}^{max}$  em função do acesso à função de custo futuro  $\alpha_{t+1}$ 
20        para  $X_t^{min}$  e  $X_t^{max}$ 
21        se  $\mathfrak{C}_i^{iter-1} == 0$  Ou  $\mathfrak{B}_{i,t}^{iter-1} > \frac{\epsilon}{T}$  então
22          para  $z = 1, 2, \dots, NA$  faça
23            Resolve o PPL de acordo com a Equação 3.3 a Equação 3.13
24            para obter custos ótimos e multiplicadores de Lagrange para
25            montagem dos cortes
26          fim
27        fim
28        Cálculo da diferença  $\delta_{i,t}$  e dos fatores  $\mathfrak{B}_{i,t}^{iter}$  conforme Equação 4.12
29      fim
30      Cálculo dos fatores de benefício
31      
$$\mathfrak{B}_i^{iter} = \max(\mathfrak{B}_{i,2}^{iter}, \mathfrak{B}_{i,3}^{iter}, \dots, \mathfrak{B}_{i,T}^{iter})$$

32      se  $iter \geq 2$  então
33        se  $\mathfrak{B}_i^{iter} > \epsilon$  então
34           $\mathfrak{C}_i^{iter} = \mathfrak{C}_i^{iter-1} + 1$ 
35        senão
36           $\mathfrak{C}_i^{iter} = \mathfrak{C}_i^{iter-1}$ 
37        fim
38      fim
39      se  $\mathfrak{C}_i^{iter} \geq 1 \forall i = 1, \dots, NS$  e  $tot\_ser == NSR$  então
40         $converg = true$ 
41      fim
42       $iter = iter + 1$  % atualiza contador de iterações
43    fim
44  fim

```

De acordo com Algoritmo 2 apresentado para avaliação da convergência, tornam-se factíveis duas opções, as quais:

1. Avaliação Tipo I: Não utiliza reamostragem e, portanto, as variáveis de entrada NS e NSR possuem valores iguais. Para convergência do problema, verifica-se, para cada série *forward* i , o maior valor entre os valores $\mathfrak{B}_{i,t}^{iter}$ obtidos em todos os estágios na última iteração. A convergência do processo dá-se quando todos os cenários possuírem os índices $\mathfrak{B}_{i,t}^{iter}$ abaixo da tolerância (ϵ) preestabelecida.
2. Avaliação Tipo II: Realiza-se a reamostragem de séries que mostraram-se convergidas durante um número preestabelecido de iterações em conformidade com Avaliação do Tipo I em cada cenário. A variável NSR é o número de séries a serem utilizadas até o fim do processo de reamostragem, sendo que serão consideradas no máximo NS séries por iteração.

5 APRESENTAÇÃO DO SISTEMA HIDROTÉRMICO EM ESTUDO

No presente capítulo será apresentado o sistema hidrotérmico objeto de estudo neste trabalho, bem como a modelagem matemática do problema de acordo com cada técnica. Nesse sentido, pretende-se avaliar a performance da técnica de Programação Dinâmica Dual Estocástica na obtenção da solução da política ótima quando comparada a obtida utilizando-se a técnica de “Árvore Completa” modelada através de um único PPL.

Posteriormente, será avaliado o desempenho da técnica de Programação Dinâmica Dual Estocástica sem e com reamostragem dos cenários utilizados, considerando-se os Critérios 4.2.3.1 e 4.2.3.4, respectivamente, para convergência da PDDE.

Em resumo, pretende-se avaliar:

1. Desempenho e confiabilidade de resultados da Programação Dinâmica Dual Estocástica quando comparados ao PL Único aplicados ao sistema hidrotérmico tutorial; e,
2. Desempenho e confiabilidade de resultados da Programação Dinâmica Dual Estocástica com e sem reamostragem dos cenários utilizados aplicados ao sistema hidrotérmico tutorial.

5.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA HIDROTÉRMICO EM ESTUDO

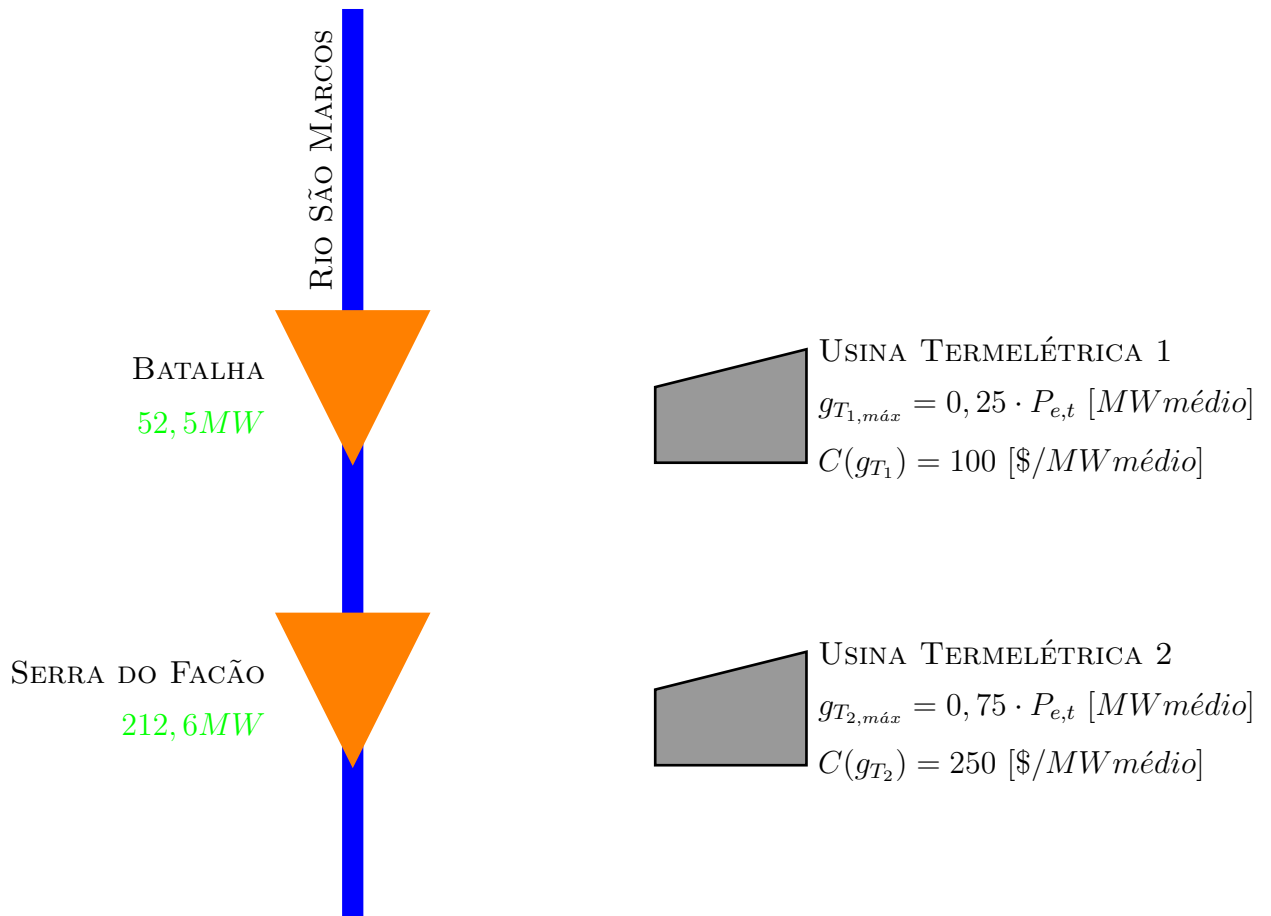
O sistema hidrotérmico em estudo, apresentado na Figura 5.1, consiste em um sistema de instância mínima e é composto por duas usinas hidrelétricas, sendo elas:

- Batalha; e,
- Serra do Facão.

As usinas hidrelétricas localizam-se na Bacia do Paranaíba, no Rio São Marcos, e encontram-se na configuração “em cascata” onde a usina de Serra do Facão encontra-se imediatamente à jusante da usina de Batalha. Ambas usinas hidrelétricas são com reservatórios.

Além disso, o sistema hidrotérmico em estudo é composto também por duas usinas termelétricas cuja capacidade, em $MW_{médio}$, é diretamente proporcional à potência efetiva total das usinas hidrelétricas para que o sistema de instância mínima tenha proporções semelhantes ao SIN. A potência efetiva de cada usina hidrelétrica é apresentada em verde na Figura 5.1 e, portanto, a potência efetiva total ($P_{e,t}$) é $265,1 MW_{médio}$.

Figura 5.1 – Representação do Sistema em Estudo



Fonte: Elaborado pela Autora

As características das usinas hidrelétricas e termelétricas são apresentadas na Tabela 5.1 e Tabela 5.2, respectivamente.

Tabela 5.1 – Sistema Hidrotérmico em Estudo - Dados UHE

Descrição	Batalha	Serra do Facão
$V_{\max} \text{ [hm}^3\text{]}$	1781,61	5199,00
$V_{\min} \text{ [hm}^3\text{]}$	430,05	1752,00
$\rho_i \text{ [MWmédio/hm}^3\text{]}$	0,33	0,61
$q_{\max} \text{ [hm}^3\text{]}$	145,99	307,59
$VA_1 \text{ [hm}^3\text{]}$	816,06	2630,99
$P_{e,i} \text{ [MWmédio]}$	52,50	212,58

Tabela 5.2 – Sistema Hidrotérmico em Estudo - Dados UTE

Nome	Capacidade [MWmédio]	Custo [\$/MWmédio]
Termelétrica 1	66,27	100
Termelétrica 2	198,81	250

O horizonte de estudo para comparação entre as técnicas de PDDE e PL Único (1) é composto por 6 estágios e a carga a ser atendida será constante e igual a 344,60 $MW_{\text{médio}}$ (130% de $P_{e,t}$). O número reduzido de estágios decorre do fato de que a técnica de PL Único torna-se inviável do ponto de vista computacional ainda que para um número de estágios e cenários reduzidos.

Já para comparação entre as técnicas de PDDE sem e com reamostragem de cenários utilizados, o horizonte de estudo será composto por 24 estágios e o modelo não levará em consideração eventuais crescimentos (ou decrescimentos) na demanda líquida do sistema, assim como não considerará diferentes níveis (ou patamares) de mercado ao longo de cada estágio. Para tanto, a consideração realizada é que a carga será constante e igual a 344,60 $MW_{\text{médio}}$ (130% de $P_{e,t}$) ao longo de todos estágios, conforme apresentado na Tabela 5.3.

Para ambas análises, o custo de déficit para um corte de carga no sistema equivale a 500 \$/ $MW_{\text{médio}}$.

Tabela 5.3 – Sistema Hidrotérmico em Estudo - Dados da Carga

Estágio t	$DEMLIQ_t$ [$MW_{\text{médio}}$]
1	344,60
2	344,60
3	344,60
\vdots	\vdots
24	344,60

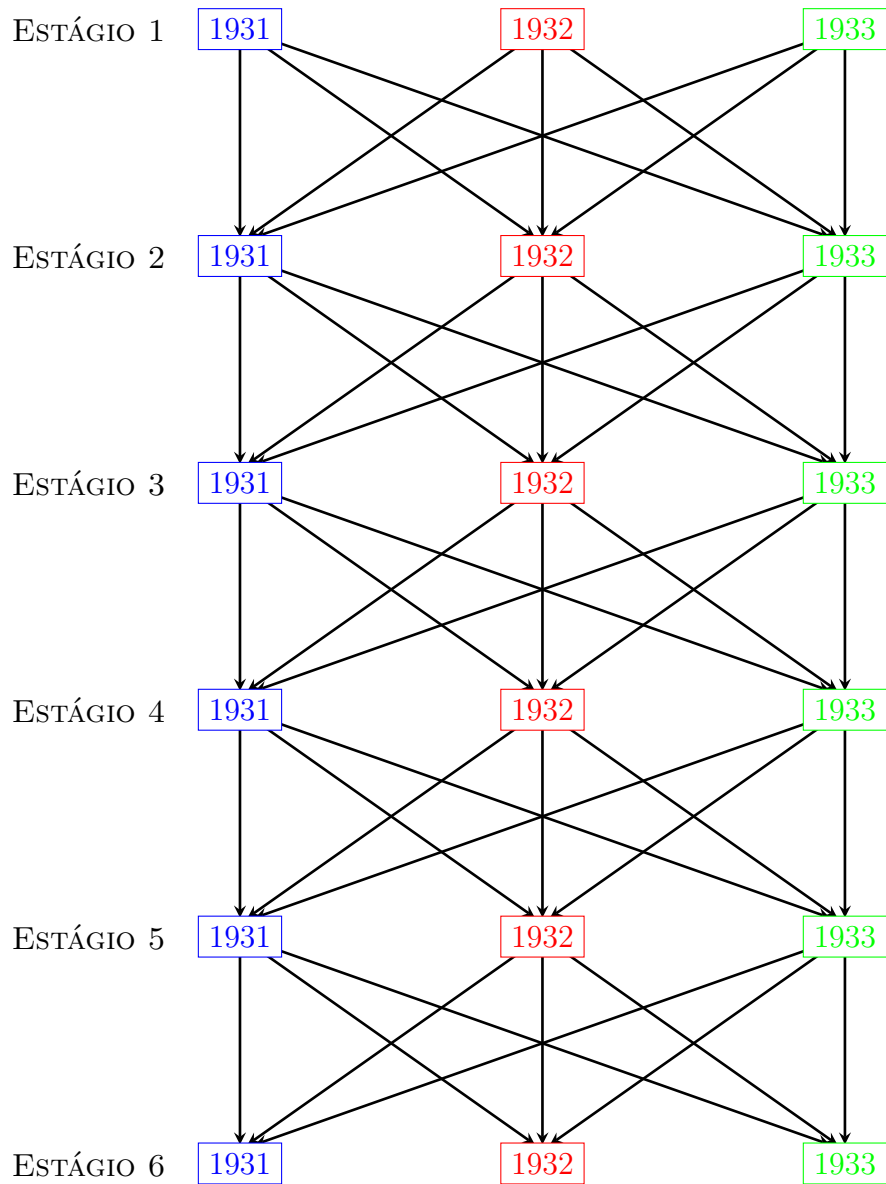
5.2 SÉRIES HISTÓRICAS DE VAZÕES

Todos os dados referentes às características das usinas hidrelétricas são fornecidas pelo Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS) através do Programa Mensal de Operação (PMO), inclusive o histórico de vazões utilizado para caracterização da árvore de cenários.

Para Análise 1, em que se pretende avaliar o desempenho da técnica de Programação Dinâmica Dual Estocástica quando comparado ao resultado obtido da modelagem do problema de “Árvore Completa” através de um PL Único, foi utilizado os dados históricos de afluições às usinas hidrelétricas para um horizonte de estudo $T = 6$ estágios (abril a setembro) e $NC = 3$ cenários para caracterização da árvore. Dessa forma, foram considerados os dados históricos presentes no intervalo entre os anos de 1931 e 1933. A Figura 5.2 apresenta a representação em grafo da árvore considerada.

Apresenta-se na Tabela 5.4 os cenários selecionados do histórico de vazões para caracterização da árvore. Para um problema de $T = 6$ estágios e $NC = 3$ cenários, têm-se

Figura 5.2 – Representação em Grafo da “Árvore Completa”



Fonte: Elaborado pela Autora

$NC^T = 729$ possíveis realizações na árvore de cenários.

Tabela 5.4 – Caracterização da Árvore de Cenários

Estágio	Cenário		
	1	2	3
Abril	1931	1932	1933
Maio	1931	1932	1933
Junho	1931	1932	1933
Julho	1931	1932	1933
Agosto	1931	1932	1933
Setembro	1931	1932	1933

Fonte: Elaborado pela Autora

Para técnica de PDDE, foi realizado um sorteio de $NS = 20$ caminhos distintos dentre os cenários apresentados e feita associação com respectivo valor de vazão, conforme apresentado na Tabela 5.5.

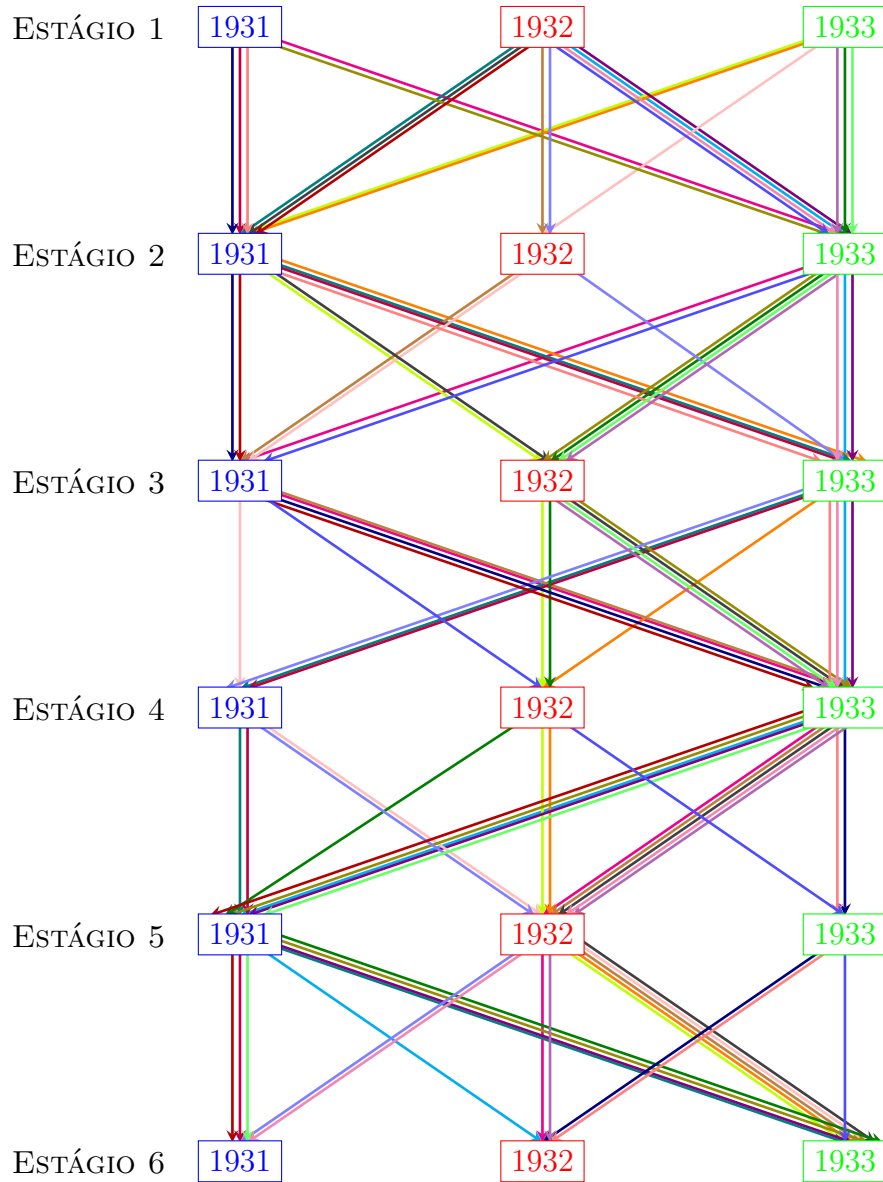
Por exemplo, para série 1 foi sorteada a sequência $2 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$. Dessa forma, o valor de vazão para o estágio 1 (abril) corresponde ao realizado no mês de abril de 1932. O valor de vazão para o estágio 2 (maio) corresponde ao realizado no mês de maio de 1933. A mesma análise é realizada para os demais estágios.

Tabela 5.5 – Seleção das Séries *Forward* na PDDE

Estágio	Série																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Abril	2	1	3	3	2	2	2	1	3	2	1	3	2	1	2	1	3	3	2	2
Maio	3	3	1	1	1	3	2	1	2	1	3	3	2	1	1	1	3	3	3	3
Junho	3	1	2	3	3	3	1	3	1	2	2	2	3	1	1	3	2	2	3	1
Julho	3	3	2	2	1	3	3	1	1	3	3	2	1	3	3	3	3	3	3	2
Agosto	1	2	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	3	1	3	1	2	2	3
Setembro	2	2	3	3	3	3	3	1	3	3	3	3	1	2	1	2	1	2	1	3

Fonte: Elaborado pela Autora

Exemplificadamente, apresenta-se na Figura 5.3 a representação em grafo das séries *forward* consideradas em que cada caminho (representado por cada cor) representa uma realização na árvore de cenários considerada.

Figura 5.3 – Representação em Grafo das Séries *Forward*

Fonte: Elaborado pela Autora

Para Análise 2, em que se pretende avaliar o desempenho da Programação Dinâmica Dual Estocástica sem e com reamostragem dos cenários utilizados aplicados ao sistema hidrotérmico em estudo para um horizonte $T = 24$ estágios, os cenários de afluência são obtidos mediante sorteio entre os valores do histórico de vazões presentes no intervalo entre os anos de 1931 e 2017. Esse processo é realizado em [24, 10].

Inicialmente, é realizado sorteios das aberturas da árvore de acordo com os meses de estudo compreendendo todos os anos do histórico (1931 a 2017). Posteriormente, são sorteadas as aberturas utilizadas em cada série *forward* e feita associação com respectivo valor de vazão. Esse processo é, exemplificadamente, ilustrado na Figura 5.4 para $T = 3$, $NA = 3$ e $NS = 10$, evidenciando a obtenção da série 3.

Figura 5.4 – Determinação das Séries *Forward*

Aberturas Sorteadas		
Estágio	Mês/Ano	
	Vazão do Histórico [hm³]	
	Abertura 1	Abertura 2
1	Jan/1980 UHE 1: 839,81	Jan/1984 UHE 1: 632,45
2	Fev/1936 UHE 1: 121,82	Fev/1964 UHE 1: 694,66
3	Mar/1996 UHE 1: 443,23	Mar/1993 UHE 1: 738,72

Estágio	Série									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	2	2	2	1	2	2	2	1	2
	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1
3	2	1	1	2	2	2	1	2	1	2

Estágio	Série 3
1	UHE 1: 632,45
2	UHE 1: 121,82
3	UHE 1: 443,23

Fonte: Adaptada de [24]

5.3 MODELAGEM DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

5.3.1 Modelagem do Problema de “Árvore Completa” Via PL Único

O problema de “Árvore Completa”, também denominado equivalente determinístico para o problema estocástico, determina a decisão ótima para o primeiro estágio considerando todas as possibilidades de combinações para as afluições às usinas hidrelétricas durante todo o horizonte de planejamento. Em sua formulação, as afluições às usinas hidrelétricas no primeiro estágio são consideradas determinísticas. No entanto, nos testes realizados no presente trabalho, considera-se que o problema seja probabilístico ainda no primeiro estágio, isto é, as afluições às usinas hidrelétricas no primeiro estágio são consideradas estocásticas.

Dessa forma, realizou-se a modelagem do problema de “Árvore Completa” como um PL Único para garantir que o algoritmo de PDDE implementado converge para o resultado real do problema. Para resolução do problema de “Árvore Completa” através de um único PPL, todos os estágios são incluídos em um mesmo problema e as respectivas restrições de atendimento à demanda, balanço hídrico e canalização das variáveis são consideradas adotando-se “pesos” de acordo com as probabilidades de ocorrência da cada possível cenário da árvore.

Ressalta-se que podem ser atribuídas probabilidades distintas por cenário, todavia, nos testes realizados no presente trabalho foram considerados cenários equiprováveis. A Equação 5.1 apresenta a modelagem matemática da função objetivo do PL Único para o sistema hidrotérmico em estudo considerando-se uma árvore de cenários com T estágios e

NC cenários com nós equiprováveis.

$$Min \sum_{t=1}^T \frac{1}{NC^t} \left[\sum_{z=1}^{NA} (\psi_1 \cdot g_{T_{1,t}^z} + \psi_2 \cdot g_{T_{2,t}^z} + 0,001 \cdot (vv_{t,1}^z + vv_{t,2}^z) + \psi_D \cdot déficit_t^z) \right] \quad (5.1)$$

Para o caso específico considerando-se uma árvore de cenários com $T = 6$ estágios e $NC = 3$ cenários com nós equiprováveis, têm-se:

$$Min \sum_{t=1}^6 \frac{1}{3^t} \left[\sum_{z=1}^3 (\psi_1 \cdot g_{T_{1,t}^z} + \psi_2 \cdot g_{T_{2,t}^z} + 0,001 \cdot (vv_{t,1}^z + vv_{t,2}^z) + \psi_D \cdot déficit_t^z) \right] \quad (5.2)$$

As Equações 5.3 a 5.14 apresentam as modelagens matemática referentes às restrições de atendimento à demanda, balanço hídrico e canalização das variáveis do PL Único para o sistema hidrotérmico em estudo considerando-se uma árvore de cenários com T estágios e NC cenários com nós equiprováveis.

1. Atendimento à Demanda:

$$g_{T_{1,t}}^z + g_{T_{2,t}}^z + ghids_{1,t}^z + ghids_{2,t}^z + déficit_t^z = DEMLIQ_t^z \quad (5.3)$$

2. Balanço Hídrico:

a) Batalha:

$$va_{t+1,1}^z = va_{t,1}^z + k_C \cdot (Vinc_{t,1}^z - vt_{t,1}^z - vv_{t,1}^z) \quad (5.4)$$

b) Serra do Facão:

$$va_{t+1,2}^z = va_{t,2}^z + k_C \cdot (Vinc_{t,2}^z + vt_{t,1}^z + vv_{t,1}^z - vt_{t,2}^z - vv_{t,2}^z) \quad (5.5)$$

3. Limites (Canalização) das Variáveis:

a) Armazenamento:

i. Batalha:

$$430,05 \leq va_{t+1,1}^z \leq 1781,61 \quad (5.6)$$

ii. Serra do Facão:

$$1752,00 \leq va_{t+1,2}^z \leq 5199,00 \quad (5.7)$$

b) Engolimento:

i. Batalha:

$$0 \leq vt_{t,1}^z \leq 145,99 \quad (5.8)$$

ii. Serra do Facão:

$$0 \leq vt_{t,2}^z \leq 307,59 \quad (5.9)$$

c) Vertimento:

i. Batalha:

$$0 \leq vv_{t,1}^z \leq \infty \quad (5.10)$$

ii. Serra do Facão:

$$0 \leq vv_{t,2}^z \leq \infty \quad (5.11)$$

d) Geração Térmica 1:

$$0 \leq g_{T1,t}^z \leq 66,27 \quad (5.12)$$

e) Geração Térmica 2:

$$0 \leq g_{T2,t}^z \leq 198,81 \quad (5.13)$$

f) Déficit:

$$déficit_t^z \geq 0 \quad (5.14)$$

Em que:

t Número do estágio

z Número do cenário

ψ_1 Custo de geração da usina termelétrica 1 igual a 100 [\$/ MW médio]

ψ_2 Custo de geração da usina termelétrica 2 igual a 250 [\$/ MW médio]

ψ_D Custo associado ao déficit igual a 500 [\$/ MW médio]

$g_{T1,t}^z$ Energia gerada pela usina termelétrica 1 no estágio t e cenário z , em [MWmédio]

$g_{T2,t}^z$ Energia gerada pela usina termelétrica 2 no estágio t e cenário z , em [MWmédio]

$ghids_{1,t}^z$ Energia gerada pela usina hidrelétrica 1 no estágio t e cenário z , em $[MW_{médio}]$

$ghids_{2,t}^z$ Energia gerada pela usina hidrelétrica 2 no estágio t e cenário z , em $[MW_{médio}]$

$déficit_t^z$ Déficit de energia no estágio t e cenário z , em $[MW_{médio}]$

$DEMLIQ_t^z$ Demanda líquida do sistema no estágio t e cenário z igual a 344,60 $[MW_{médio}] \forall t \in T$ e $\forall z \in NA$

$va_{t+1,1}^z$ Volume armazenado ao final do estágio t e cenário z da usina 1, em $[hm^3]$

$va_{t+1,2}^z$ Volume armazenado ao final do estágio t e cenário z da usina 2, em $[hm^3]$

$vt_{t,1}^z$ Vazão turbinada pela usina 1 no estágio t e cenário z , em $[m^3/s]$

$vt_{t,2}^z$ Vazão turbinada pela usina 2 no estágio t e cenário z , em $[m^3/s]$

$vv_{t,1}^z$ Vazão vertida pela usina 1 no estágio t e cenário z , em $[m^3/s]$

$vv_{t,2}^z$ Vazão vertida pela usina 2 no estágio t e cenário z , em $[m^3/s]$

5.3.2 Modelagem do Problema Via Programação Dinâmica Dual Estocástica

A Equação 5.15 apresenta modelagem matemática da função objetivo da PDDE para o sistema hidrotérmico em estudo. Para tanto, considera-se uma árvore de cenários com T estágios, NS sequências *forward* e NA aberturas ou realizações da variável aleatória em dado estágio.

$$\text{Min } \psi_1 \cdot g_{T_1,t} + \psi_2 \cdot g_{T_2,t} + 0,001 \cdot vv_{t,1} + 0,001 \cdot vv_{t,2} + \psi_D \cdot déficit + \alpha_{t+1} \quad (5.15)$$

Conforme detalhado na Seção 4.2, o processo de PDDE é constituído de duas etapas distintas. Na etapa *forward* (ou de recursão direta) são determinados, através da FCF obtida até então, os armazenamentos das usinas hidrelétricas ao longo do período de estudo para as n sequências *forward* consideradas, bem como as estimativas de Z_{SUP} e Z_{INF} . A Equação 5.16 a Equação 5.28 apresenta a modelagem matemática referente às restrições de atendimento à demanda, balanço hídrico e canalização das variáveis da etapa *forward* da PDDE para o sistema hidrotérmico em estudo.

1. Atendimento à Demanda:

$$g_{T_1,t}^n + g_{T_2,t}^n + ghids_{1,t}^n + ghids_{2,t}^n + déficit_t^n = DEMLIQ_t^n \quad (5.16)$$

2. Balanço Hídrico:

a) Batalha:

$$va_{t+1,1}^n = va_{t,1}^n + k_C \cdot (Vinc_{t,1}^n - vt_{t,1}^n - vv_{t,1}^n) \quad (5.17)$$

b) Serra do Facão:

$$va_{t+1,2}^n = va_{t,2}^n + k_C \cdot (Vinc_{t,2}^n + vt_{t,1}^n + vv_{t,1}^n - vt_{t,2}^n - vv_{t,2}^n) \quad (5.18)$$

3. Limites (Canalização) das Variáveis:

a) Armazenamento:

i. Batalha:

$$430,05 \leq va_{t+1,1}^n \leq 1781,61 \quad (5.19)$$

ii. Serra do Facão:

$$1752,00 \leq va_{t+1,2}^n \leq 5199,00 \quad (5.20)$$

b) Engolimento:

i. Batalha:

$$0 \leq vt_{t,1}^n \leq 145,99 \quad (5.21)$$

ii. Serra do Facão:

$$0 \leq vt_{t,2}^n \leq 307,59 \quad (5.22)$$

c) Vertimento:

i. Batalha:

$$0 \leq vv_{t,1}^n \leq \infty \quad (5.23)$$

ii. Serra do Facão:

$$0 \leq vv_{t,2}^n \leq \infty \quad (5.24)$$

d) Geração Térmica 1:

$$0 \leq g_{T1,t}^n \leq 66,27 \quad (5.25)$$

e) Geração Térmica 2:

$$0 \leq g_{T_2,t}^n \leq 198,81 \quad (5.26)$$

f) Déficit:

$$déficit_t^n \geq 0 \quad (5.27)$$

g) Custo Futuro:

$$\alpha_{t+1}^n \geq 0 \quad (5.28)$$

Em que:

t Número do estágio

n Número da série *forward*

ψ_1 Custo de geração da usina termelétrica 1 igual a 100 [\$/MW*médio*]

ψ_2 Custo de geração da usina termelétrica 2 igual a 250 [\$/MW*médio*]

ψ_D Custo associado ao déficit igual a 500 [\$/MW*médio*]

$g_{T_1,t}^n$ Energia gerada pela usina termelétrica 1 no estágio t e série *forward* n , em [MW*médio*]

$g_{T_2,t}^n$ Energia gerada pela usina termelétrica 2 no estágio t e série *forward* n , em [MW*médio*]

$ghidsr_{1,t}^n$ Energia gerada pela usina hidrelétrica 1 no estágio t e série *forward* n , em [MW*médio*]

$ghidsr_{2,t}^n$ Energia gerada pela usina hidrelétrica 2 no estágio t e série *forward* n , em [MW*médio*]

$déficit_t^n$ Déficit de energia no estágio t e série *forward* n , em [MW*médio*]

$DEMLIQ_t^n$ Demanda líquida do sistema no estágio t e série *forward* n igual a 344,60 [MW*médio*] $\forall t \in T$ e $\forall n \in NS$

$va_{t+1,1}^n$ Volume armazenado ao final do estágio t e série *forward* n da usina 1, em [hm^3]

$va_{t+1,2}^n$ Volume armazenado ao final do estágio t e série *forward* n da usina 2, em [hm^3]

$vt_{t,1}^n$ Vazão turbinada pela usina 1 no estágio t e série *forward* n , em [m^3/s]

$vt_{t,2}^n$ Vazão turbinada pela usina 2 no estágio t e série *forward* n , em [m^3/s]

$vv_{t,1}^n$ Vazão vertida pela usina 1 no estágio t e série *forward* n , em $[m^3/s]$

$vv_{t,2}^n$ Vazão vertida pela usina 2 no estágio t e série *forward* n , em $[m^3/s]$

α_{t+1}^n Custo futuro de operação no estágio t e série *forward* n , em $[\$]$

Na etapa *backward* (ou de recursão inversa) são determinados, através dos estados determinados na etapa *forward*, os cortes médios que compõem a FCF em função das possíveis realizações de afluência em dado estágio t . As Equações 5.29 a 5.41 apresentam as modelagens matemática referentes às restrições de atendimento à demanda, balanço hídrico e canalização das variáveis da etapa *backward* da PDDE para o sistema hidrotérmico em estudo.

1. Atendimento à Demanda:

$$g_{T1,t}^{n,z} + g_{T2,t}^{n,z} + ghids_{1,t}^{n,z} + ghids_{2,t}^{n,z} + déficit_t^{n,z} = DEMLIQ_t^{n,z} \quad (5.29)$$

2. Balanço Hídrico:

a) Batalha:

$$va_{t+1,1}^{n,z} = va_{t,1}^{n,z} + k_C \cdot (Vinc_{t,1}^{n,z} - vt_{t,1}^{n,z} - vv_{t,1}^{n,z}) \quad (5.30)$$

b) Serra do Facão:

$$va_{t+1,2}^{n,z} = va_{t,2}^{n,z} + k_C \cdot (Vinc_{t,2}^{n,z} + vt_{t,1}^{n,z} + vv_{t,1}^{n,z} - vt_{t,2}^{n,z} - vv_{t,2}^{n,z}) \quad (5.31)$$

3. Limites (Canalização) das Variáveis:

a) Armazenamento:

i. Batalha:

$$430,05 \leq va_{t+1,1}^{n,z} \leq 1781,61 \quad (5.32)$$

ii. Serra do Facão:

$$1752,00 \leq va_{t+1,2}^{n,z} \leq 5199,00 \quad (5.33)$$

b) Engolimento:

i. Batalha:

$$0 \leq vt_{t,1}^{n,z} \leq 145,99 \quad (5.34)$$

ii. Serra do Facão:

$$0 \leq vt_{t,2}^{n,z} \leq 307,59 \quad (5.35)$$

c) Vertimento:

i. Batalha:

$$0 \leq vv_{t,1}^{n,z} \leq \infty \quad (5.36)$$

ii. Serra do Facão:

$$0 \leq vv_{t,2}^{n,z} \leq \infty \quad (5.37)$$

d) Geração Térmica 1:

$$0 \leq g_{T_{1,t}}^{n,z} \leq 66,27 \quad (5.38)$$

e) Geração Térmica 2:

$$0 \leq g_{T_{2,t}}^{n,z} \leq 198,81 \quad (5.39)$$

f) Déficit:

$$déficit_t^{n,z} \geq 0 \quad (5.40)$$

g) Custo Futuro:

$$\alpha_{t+1}^{n,z} \geq 0 \quad (5.41)$$

Em que:

t Número do estágio

n Número da série *forward*

z Número da abertura

ψ_1 Custo de geração da usina termelétrica 1 igual a 100 [\$/MWmédio]

ψ_2 Custo de geração da usina termelétrica 2 igual a 250 [\$/MWmédio]

ψ_D Custo associado ao déficit igual a 500 [\$/MWmédio]

$g_{T_{1,t}}^{n,z}$ Energia gerada pela usina termelétrica 1 no estágio t , série *forward* n e abertura z , em [MWmédio]

$g_{T_{2,t}}^{n,z}$ Energia gerada pela usina termelétrica 2 no estágio t , série *forward* n e abertura z , em [MWmédio]

$ghids_{1,t}^{n,z}$ Energia gerada pela usina hidrelétrica 1 no estágio t , série *forward* n e abertura z , em $[MW_{\text{médio}}]$

$ghids_{2,t}^{n,z}$ Energia gerada pela usina hidrelétrica 2 no estágio t , série *forward* n e abertura z , em $[MW_{\text{médio}}]$

$déficit_t^{n,z}$ Déficit de energia no estágio t , série *forward* n e abertura z , em $[MW_{\text{médio}}]$

$DEMLIQ_t^{n,z}$ Demanda líquida do sistema no estágio t , série *forward* n e abertura z igual a 344,60 $[MW_{\text{médio}}] \forall t \in T$ e $\forall n \in NS$

$va_{t+1,1}^{n,z}$ Volume armazenado ao final do estágio t , série *forward* n e abertura z da usina 1, em $[hm^3]$

$va_{t+1,2}^{n,z}$ Volume armazenado ao final do estágio t , série *forward* n e abertura z da usina 2, em $[hm^3]$

$vt_{t,1}^{n,z}$ Vazão turbinada pela usina 1 no estágio t , série *forward* n e abertura z , em $[m^3/s]$

$vt_{t,2}^{n,z}$ Vazão turbinada pela usina 2 no estágio t , série *forward* n e abertura z , em $[m^3/s]$

$vv_{t,1}^{n,z}$ Vazão vertida pela usina 1 no estágio t , série *forward* n e abertura z , em $[m^3/s]$

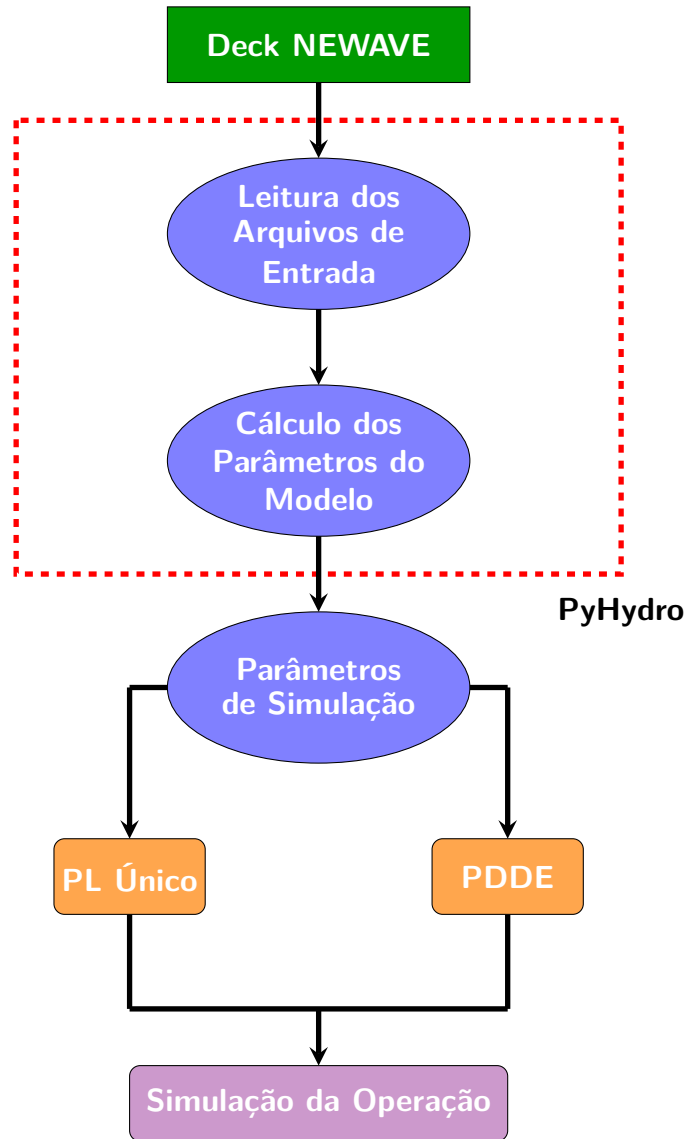
$vv_{t,2}^{n,z}$ Vazão vertida pela usina 2 no estágio t , série *forward* n e abertura z , em $[m^3/s]$

$\alpha_{t+1}^{n,z}$ Custo futuro de operação no estágio t , série *forward* n e abertura z , em $[\$]$

6 RESULTADOS OBTIDOS

Para avaliar a utilização das técnicas de Programação Dinâmica Estocástica e Dual Estocástica e a modelagem do problema de árvore completa através de um PL Único aplicadas ao sistema hidrotérmico em estudo, as metodologias foram realizadas em Python 3. A máquina utilizada para realização de todos os testes possui as características: Intel® Core™ i5 2,7 Ghz, 8Gb RAM e Windows 10 *Home Single Language*. A Figura 6.1 apresenta a estrutura de simulação realizada. Para leitura dos arquivos de entrada e cálculos dos parâmetros (engolimento máximo, potência efetiva e produtividade das usinas hidrelétricas) foi utilizado a *toolbox* PyHydro realizada em Python.

Figura 6.1 – Estrutura de Simulação



Fonte: Elaborado pela Autora

6.1 ESTUDO DE CASO 1: COMPARAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO OBTIDA COM A TÉCNICA DE PDDE E O PROBLEMA DE ÁRVORE COMPLETA

6.1.1 Resultados

Este estudo, conforme mencionado no Capítulo 5, pretende avaliar a performance da técnica de Programação Dinâmica Dual Estocástica na obtenção da solução da política ótima quando comparada a obtida utilizando-se a técnica de árvore completa, a qual foi realizada através de um PL Único.

Para tanto, a Tabela 6.1 apresenta os parâmetros considerados para Análise 1. Ressalta-se que a árvore de cenários utilizados foi apresentada na Seção 5.2.

Tabela 6.1 – Parâmetros Considerados Para Análise 1

Parâmetro	Valor
Número de Estágios	6
Mês de Início	Abril
Número de Cenários	3
Número de Séries <i>Forward</i>	20
Tolerância (ϵ)	0,02
Número Máximo de Iterações (PDDE)	10

Fonte: Elaborado pela Autora

A Tabela 6.2 apresenta os resultados obtidos para Análise 1, dentre os quais custo de operação estimado ao longo do horizonte de estudo e tempo de execução decorrido para cada técnica.

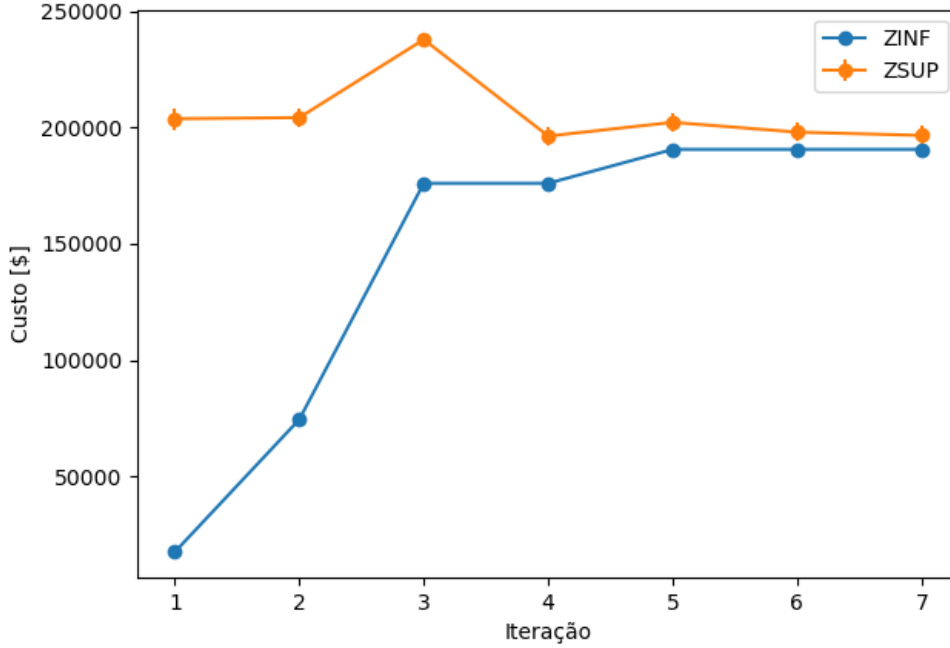
Tabela 6.2 – Resultados Para Análise 1

Técnica	Custo de Operação [\$]	Tempo [s]
Árvore Completa (PL Único)	191121, 75	1256, 71
PDDE	196648, 44	22, 22

Fonte: Elaborado pela Autora

A Figura 6.2 apresenta a convergência do problema e solução da política ótima utilizando-se a técnica de Programação Dinâmica Dual Estocástica. O problema atingiu convergência na 7^a iteração do processo de PDDE de acordo com Critério de Convergência 4.2.3.2.

Figura 6.2 – Convergência dos Limites Inferior e Superior PDDE



Fonte: Elaborado pela Autora

6.1.2 Número de Restrições e PPLs Resolvidos por Metodologia

O tempo de execução decorrido na obtenção da solução da política ótima do sistema hidrotérmico em estudo é proporcional à dimensão do problema (ou dos subproblemas) de cada técnica. Dessa forma, a fim de justificar os tempos obtidos e apresentados na Tabela 6.2 para Análise 1, apresenta-se a comparação da dimensão do problema (ou dos subproblemas) para cada técnica.

1. “Árvore Completa” (PL Único)

Embora composto por um único PPL, conforme a Equação 6.1, para problemas com elevado número de estágios e cenários, a técnica torna-se inviável devido ao elevado número de variáveis de decisão, bem como restrições do problema.

$$N_{PL}^{PL \text{ ÚNICO}} = 1 \quad (6.1)$$

As variáveis de decisão do problema são:

- $g_{T_j,t}$: Energia gerada pela usina termelétrica j no estágio t , $\forall j \in J$
- $deficit$: Déficit de energia no sistema no estágio t
- $va_{t+1,i}$: Volume armazenado ao final do estágio t da usina hidrelétrica i , $\forall i \in I$

- $vt_{t,i}$: Vazão turbinada no estágio t da usina hidrelétrica i , $\forall i \in I$
- $vv_{t,i}$: Vazão vertida no estágio t da usina hidrelétrica i , $\forall i \in I$

Para o sistema hidrotérmico em estudo $I = 2$ e $J = 2$, portanto, a cada estágio e cenário visitado, são inseridas 9 variáveis de decisão ao problema. A Equação 6.2 apresenta o número total de variáveis de decisão para o caso específico em que $T = 6$ e $NC = 3$.

$$N_{VD}^{PL \dot{UNICO}} = \sum_{t=1}^T [(3 \cdot I + 1 \cdot J + 1) \cdot NC^t] = \sum_{t=1}^T (9 \cdot 3^t) = 9828 \quad (6.2)$$

As restrições do problema foram apresentadas na Subseção 5.3.1, têm-se:

- 1 Restrição de Atendimento à Demanda;
- I Restrições de Balanço Hídrico;
- I Restrições de Armazenamento Mínimo;
- I Restrições de Armazenamento Máximo;
- I Restrições de Engolimento Mínimo;
- I Restrições de Engolimento Máximo;
- I Restrições de Vertimento Mínimo;
- I Restrições de Vertimento Máximo;
- J Restrições de Geração Termelétrica Mínima;
- J Restrições de Geração Termelétrica Máxima;
- 1 Restrição de Déficit de Energia.

Para o sistema hidrotérmico em estudo $I = 2$ e $J = 2$, portanto, a cada estágio e cenário visitado, são inseridas 20 restrições ao problema. A Equação 6.3 apresenta o número total de restrições para o caso específico em que $T = 6$ e $NC = 3$.

$$N_{REST}^{PL \dot{UNICO}} = \sum_{t=1}^T [(7 \cdot I + 2 \cdot J + 2) \cdot NC^t] = \sum_{t=1}^T (20 \cdot 3^t) = 21840 \quad (6.3)$$

Nesse sentido, a dimensão do problema incorre em alto esforço computacional e, consequentemente, elevado tempo de processamento.

2. Programação Dinâmica Dual Estocástica

A Equação 6.4 apresenta o número PPLs resolvidos na obtenção política ótima do sistema hidrotérmico em estudo utilizando-se a técnica de PDDE. Cada PPL

resolvido é composto de apenas 9 variáveis de decisão e 20 restrições. Dessa forma, é evidente o ganho computacional da técnica de PDDE quando comparadas as demais.

$$N_{PL}^{PDDE} = K \cdot NS \cdot [T + NA \cdot (T - 1)] = 7 \cdot 20 \cdot [6 + 3 \cdot (6 - 1)] = 2940 \quad (6.4)$$

Em que, K é o número de iterações realizadas no processo de PDDE.

6.2 ESTUDO DE CASO 2: COMPARAÇÃO ENTRE AS SOLUÇÕES OBTIDAS COM AS TÉCNICAS DE PDDE COM E SEM REAMOSTRAGEM DE CENÁRIOS

Este estudo, conforme mencionado no Capítulo 5, pretende avaliar a performance da Programação Dinâmica Dual Estocástica sem e com reamostragem dos cenários utilizados, considerando-se o Critério Padrão de Convergência (4.2.3.1) e o Critério de Análise da Função de Benefício *Backward* (4.2.3.4), na obtenção da solução da política ótima do sistema hidrotérmico em estudo. Para tanto, a Tabela 6.3 apresenta os parâmetros considerados para Análise 2.

Tabela 6.3 – Parâmetros Considerados Para Análise 2 (Avaliação Tipo 1)

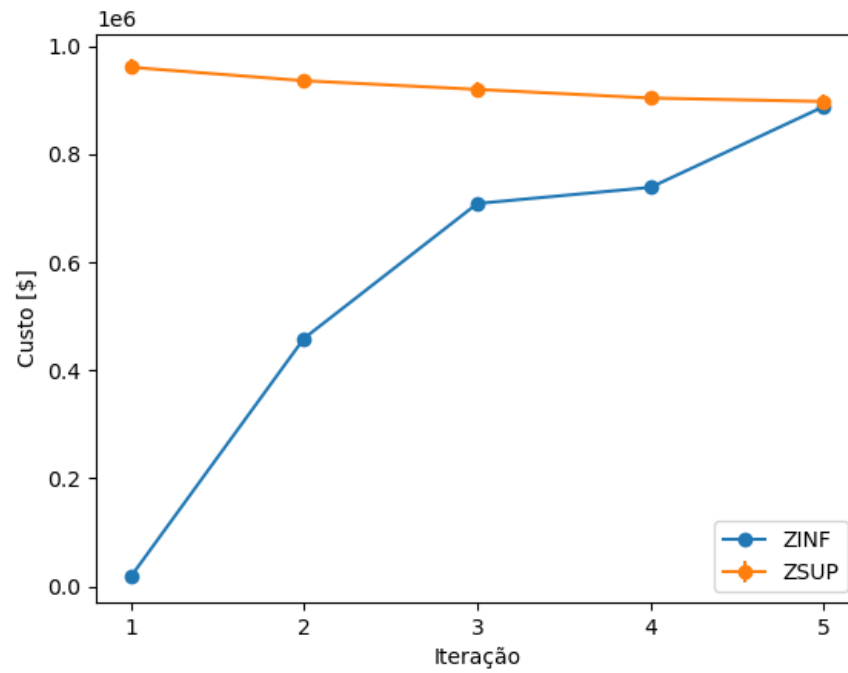
Parâmetro	Valor
Número de Estágios (T)	24
Mês de Início	Janeiro
Número de Aberturas (NA)	10
Número de Séries <i>Forward</i> (NS)	100
Tolerância (ϵ) de \mathfrak{B}_i^k	0,05
Número Máximo de Iterações	15

Fonte: Elaborado pela Autora

Inicialmente, o Critério 4.2.3.4 é avaliado exclusivamente para convergência da PDDE e não para reamostragem de cenários, isto é, quando todos os valores de \mathfrak{B}_i^k forem inferiores ao valor da tolerância preestabelecida, considera-se que houve convergência do processo da PDDE na k -ésima iteração.

Considerando-se o Critério 4.2.3.1, a PDDE apresenta os limites inferiores e superiores de acordo com a Figura 6.3, em que também é apresentado o intervalo de confiança para Z_{SUP} , calculado em função da média dos valores dos custos totais de operação obtidos para cada série *forward*. Pela metodologia padrão, a convergência é alcançada na 5ª iteração e o custo obtido é de \$ 897678,17 após 2649,59 segundos de processamento.

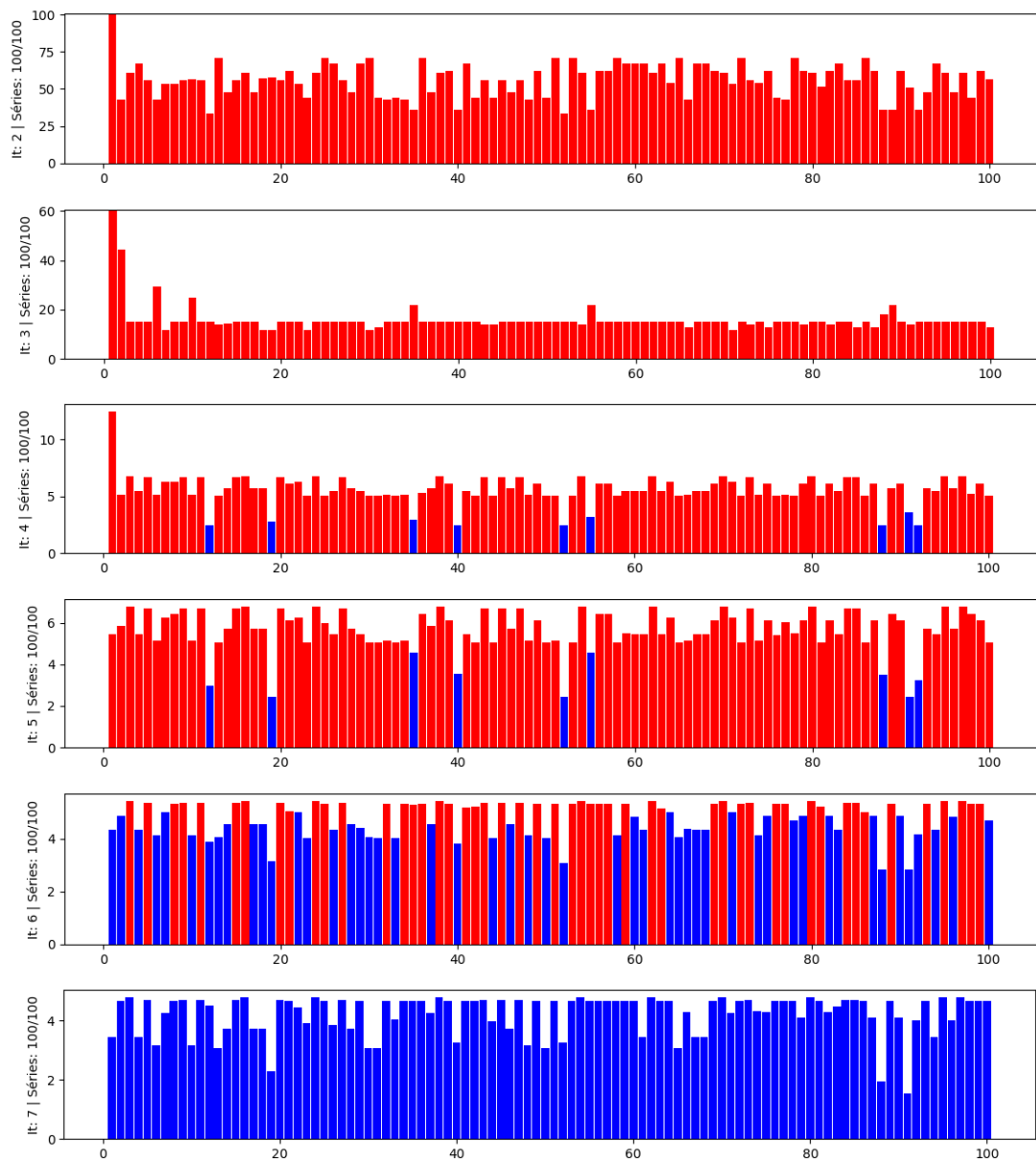
Figura 6.3 – Convergência dos Limites Inferior e Superior PDDE (Critério 4.2.3.1)



Fonte: Elaborado pela Autora

Considerando-se a “Avaliação Tipo 1” do Critério 4.2.3.4, a convergência é alcançada na 7ª iteração. A Figura 6.4 apresenta os valores de \mathfrak{B}_i^k obtidos ao longo do processo iterativo. O custo obtido é de \$ 892393,88 após 3478,14 segundos de processamento.

Figura 6.4 – Convergência da PDDE (Critério 4.2.3.4) - Tolerância de 5%



Fonte: Elaborado pela Autora

Por fim, o Critério 4.2.3.4 é avaliado para realização de uma reamostragem de cenários para PDDE. Para tanto, a Tabela 6.4 apresenta os parâmetros considerados para Análise 2 e “Avaliação Tipo 2” do Critério 4.2.3.4.

Tabela 6.4 – Parâmetros Considerados Para Análise 2 (Avaliação Tipo 2)

Parâmetro	Valor
Número de Estágios (T)	24
Mês de Início	Janeiro
Número de Aberturas (NA)	10
Número de Séries <i>Forward</i> (NS)	50
Número de Séries <i>Forward</i> para Reamostragem (NSR)	75
Tolerância (ϵ) de \mathfrak{B}_i^k	0,05
\mathfrak{C}_i^k	1
Número Máximo de Iterações	25

Fonte: Elaborado pela Autora

Considerando-se o Critério 4.2.3.4, a convergência do processo de PDDE é alcançada na 14^a iteração. Nesse sentido, todas as séries *forward* consideradas para reamostragem foram utilizadas e \mathfrak{B}_i^k é inferior à tolerância preestabelecida. A Figura 6.5 e Figura 6.6 apresentam os valores de \mathfrak{B}_i^k obtidos ao longo do processo iterativo. Em verde, apresentam-se as séries a serem substituídas para reamostragem de novas séries. O custo obtido é de \$ 874522,40 após 2292,48 segundos de processamento. Devido ao menor número de séries *forward* utilizadas por iteração, o tempo computacional despendido é menor. Além disso, verifica-se que o critério é bastante estável e permite certo grau de controle sobre o refinamento da solução obtida.

Figura 6.5 – Convergência da PDDE (Critério 4.2.3.4) - Tolerância de 5% e $\epsilon_i^k = 1$ (Parte 1)

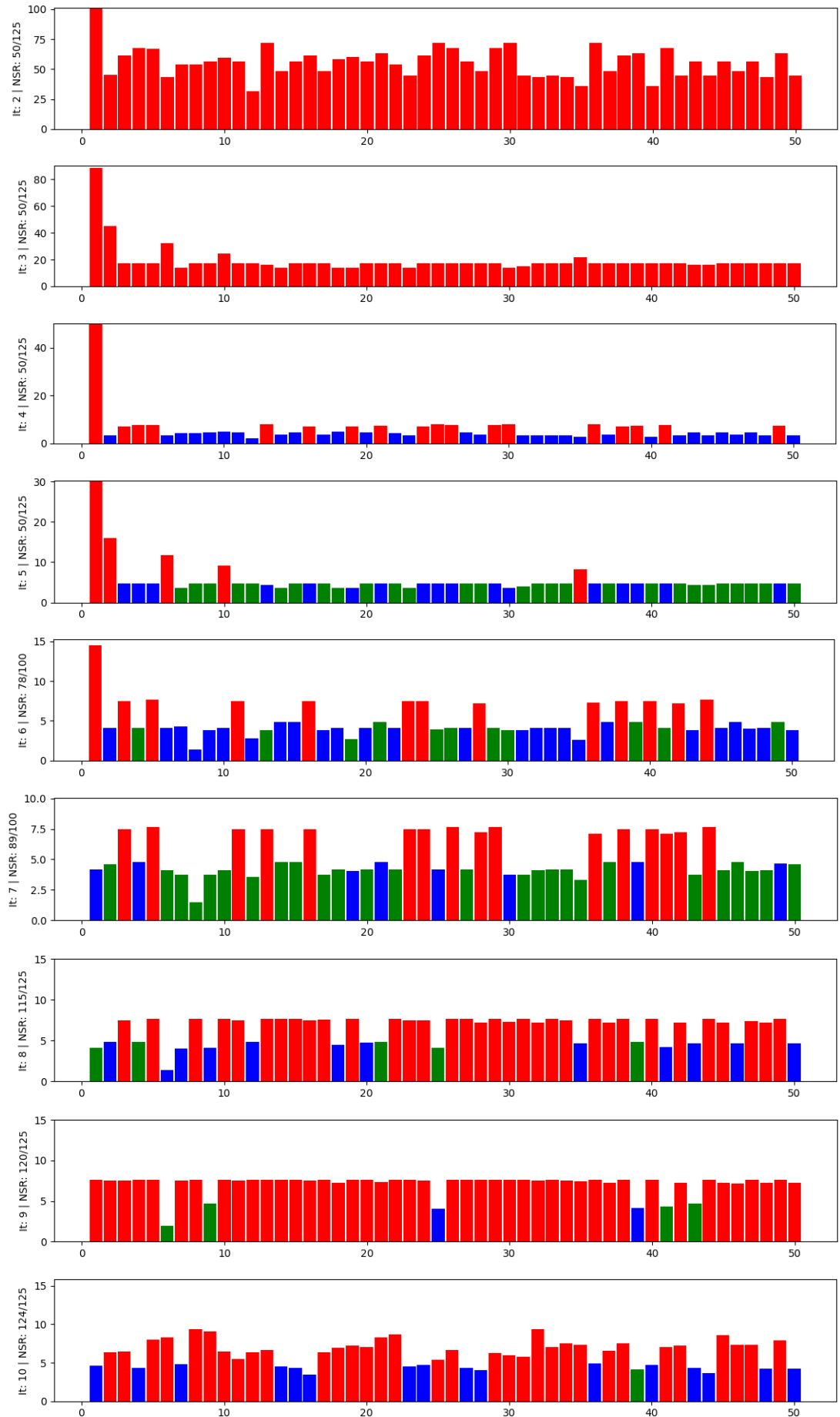
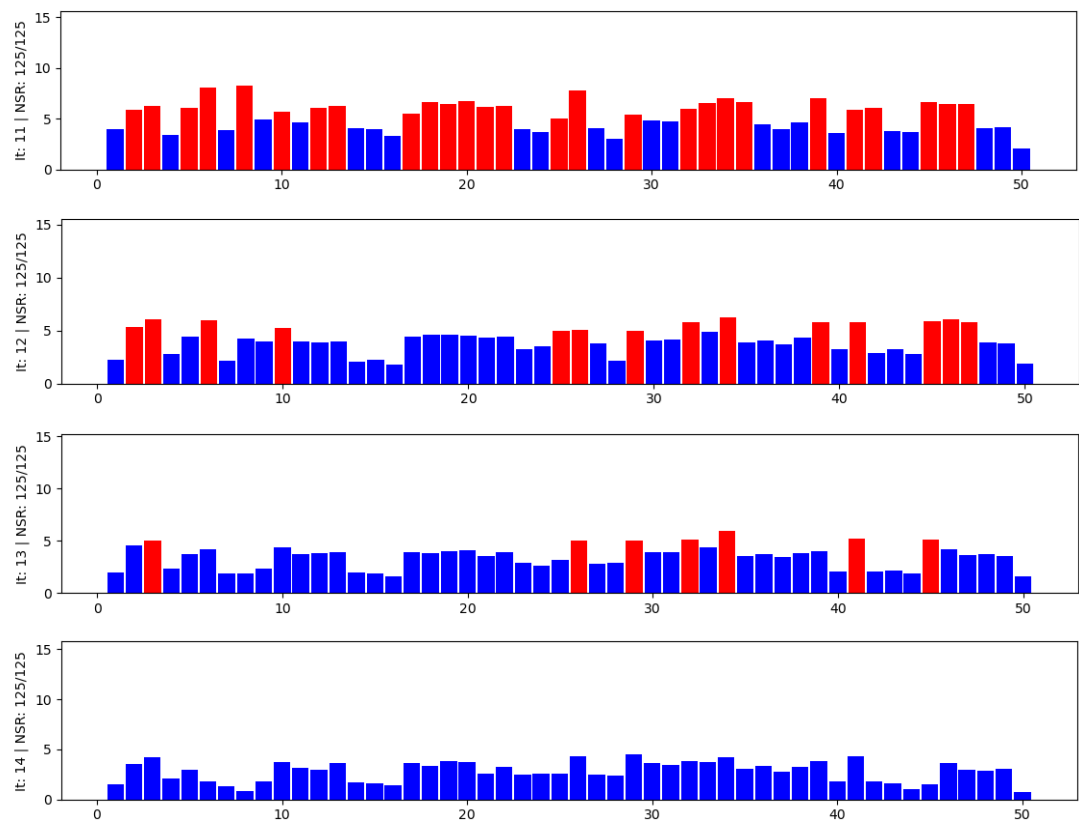


Figura 6.6 – Convergência da PDDE (Critério 4.2.3.4) - Tolerância de 10% e $\mathfrak{C}_i^k = 1$ (Parte 2)



Fonte: Elaborado pela Autora

A Tabela 6.5 apresenta, em síntese, os resultados obtidos na presente Subseção.

Tabela 6.5 – Resumo dos Resultados Para Análise 2

Simulação	Tolerância (%)	Número de Séries	Reamostragem	Custo Médio (\$)	Tempo (s)
1	-	100	×	897678,17	2649,59
2	5	100	×	892393,88	3478,14
3	5	50 → 125	✓	874522,40	2292,48

Fonte: Elaborado pela Autora

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O planejamento da operação de sistemas predominantemente hidrotérmicos com acoplamento espacial entre as usinas hidrelétricas como o caso do SIN consiste num problema de elevada complexidade. Nesse contexto, tem-se, ainda, o acoplamento temporal de maneira que decisões operativas tomadas no presente impactam a política operativa futura. Por fim, quanto maior o horizonte de planejamento, maiores serão as incertezas associadas, as quais destacam-se: afluições futuras às usinas hidrelétricas devido ao regime hidrológico de determinada região e demanda de energia elétrica futura. O cenário atual aponta para maior complexidade na operação do SIN dado o aumento dos níveis de penetração, principalmente, eólica devido às incertezas associadas à direção e velocidade do vento.

Portanto, é necessário definir uma política de produção de energia que minimize o custo de operação ao passo que maximize a confiabilidade no atendimento à demanda do sistema no horizonte de estudo considerado. Para resolução do problema detalhado, são utilizadas técnicas baseadas em programação dinâmica estocástica por tratarem características de não linearidade que estão associadas, por sua vez, às unidades de geração e estocasticidade inerentes ao problema.

Todas as análises apresentadas neste trabalho são aplicadas a um sistema hidrotérmico tutorial de instância mínima onde todos os cenários de afluições utilizados foram baseados em dados históricos e não sintéticos. Além disso, não linearidades intrínsecas ao problema como a função de produtibilidade das usinas hidrelétricas e as parábolas de correção não foram realizadas.

Ainda assim, o trabalho demonstra as características de cada metodologia e evidencia o comportamento de cada qual para obtenção da política operativa. O problema de “Árvore Completa” modelado através de um PL Único torna-se inviável do ponto de vista computacional ainda que para um número reduzido de estágios e cenários de afluição.

A técnica de Programação Dinâmica Dual Estocástica apresenta rápida convergência não só para problemas com reduzido número de estágios, cenários de afluição e séries *forward* visto que é a metodologia utilizada para no NEWAVE, modelo homologado para o planejamento da operação do SIN no horizonte de médio prazo. Para Análise 1 realizada, o tempo de processamento despendido é ínfimo quando comparado ao do problema de “Árvore Completa” e a solução obtida mostra-se compatível, apresentando 2,81% de diferença para o custo de operação. Soluções ainda mais precisas poderiam ser obtidas para um número maior de séries *forward* utilizadas, para intervalos de confiança superiores à 95% ou para tolerância (ϵ) inferiores a 2%.

O critério de convergência para PDDE desenvolvido em [10] estabelece não só um método de parada para o processo iterativo como também avaliação das séries *forward*

utilizadas. Dessa forma, é proposto um processo de reamostragem de cenários na PDDE de acordo com informações obtidas sobre as sequências a cada iteração e que permitem avaliar, ainda, a varredura da árvore de cenários realizada pela séries *forward* utilizadas.

Os tempos de processamento despendidos para Análise 2 considerando-se o Critério de Convergência Padrão e o Critério desenvolvido em [10] não apresentam tamanha divergência. Além disso, a definição da tolerância para os valores de benefício é de extrema importância, pois ao passo que permite refinamento na solução obtida, pode levar a tempos computacionais consideráveis. Isso pode ser verificado na simulação realizada para “Avaliação Tipo 1” do Critério 4.2.3.4 que apresentaria convergência na 5ª iteração se a tolerância para os valores de benefício fosse, por exemplo, 10%.

Por fim, os fatores avaliados que traduzem o benefício proporcionado por cada corte a ser inserido no problema mostram-se como um excelente parâmetro para o processo de reamostragem de cenários na PDDE pois, por apresentarem tendência de queda, evidenciam as sequências que já se encontram bem definidas no problema e quais permanecem inserindo informações na Função de Custo Futuro.

REFERÊNCIAS

- [1] “ONS: Operador Nacional do Sistema Elétrico”, 2020.
- [2] Ministério de Minas e Energia (MME) and Empresa de Pesquisa Energética (EPE), *Plano Decenal de Expansão de Energia 2029*, 2020.
- [3] SOUZA, R. C., MARCATO, A. L. M., OLIVEIRA, F. L. O., DIAS, B. H., FERREIRA, P. G. C., BRANDI, R. B. S., RAMOS, T. P., *Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos no Brasil: Geração de Cenários e Otimização*. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2014.
- [4] DA SILVA FERNANDES, A., *Representação de Cenários de Demanda e da Função de Produção Hidrelétrica no Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos a Médio Prazo*, Master’s Thesis, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 1999.
- [5] Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL), *Programação Diária da Operação de Sistemas Hidrotérmicos com Representação Detalhada das Unidades Geradoras, Consideração da Rede Elétrica e Restrições de Segurança (Modelo DESSEM)*, 2019, Manual de Metodologia.
- [6] MARCATO, A. L. M., *Representação Híbrida de Sistemas Equivalentes e Individualizados para o Planejamento da Operação de Médio Prazo de Sistemas de Potência de Grande Porte*, Ph.D. Thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2002.
- [7] MACEIRA, M. E. P., TERRY, L. A., COSTA, F. S., DAMÁZIO, J. M., MELO, A. C. G., “Chain of Optimization Models for Setting the Energy Dispatch and Spot Price in the Brazilian System”. In: *Power Systems Computation Conference (PSCC)*, Sevilla, Spain, 2002.
- [8] Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL), *Determinação da Coordenação da Operação a Curto Prazo (Modelo DECOMP)*, 2013, Manual do Usuário Versão 18.3.
- [9] RIGONI, M. D., “Análise de Resultados da Implementação do Modelo DESSEM na Operação do Sistema Interligado Nacional”, 2018.
- [10] DA SILVA BRANDI, R. B., *Modelo de Análise da Função de Custo Futuro em Problemas Convexos: Aplicação nas Metodologias de Programação Dinâmica Estocástica e Dual Estocástica*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal de Juiz de Fora, 2016.
- [11] BELLMAN, R., *Dynamic Programming*. Princeton University Press, 1957.
- [12] SIQUEIRA, T. G., *Comparação Entre Programação Dinâmica Estocástica Primal e Dual no Planejamento da Operação Energética*, Master’s Thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.
- [13] PEREIRA, M. V. F., PINTO, L. M. V. G., “Stochastic Optimization of Multireservoir Hydroelectric System: A Decomposition Approach”, *Water Resources Research*, v. 21, n. 6, pp. 779–792, 1985.

- [14] PEREIRA, M. V. F., “Optimal Stochastic Operations of Large Hydroelectric Systems”, *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, v. 11, n. 3, pp. 161–169, 1989.
- [15] GEOFFRION, A. M., “Generalized Benders Decomposition”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 10, n. 4, pp. 237–260, 1972.
- [16] DA COSTA JÚNIOR, L. C., *Representação de Restrições de Aversão a Risco de CVaR em Programação Dinâmica Dual Estocástica com Aplicação ao Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013.
- [17] THOMÉ, F. S., *Representação de Não-Convergências no Planejamento da Operação Hidrotérmica Utilizando PDDE*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013.
- [18] “PSR: Energy Consulting and Analytics”, 2020.
- [19] PSR, *SDDP: Stochastic Dual Dynamic Programming*, 2013, Manual de Metodologia Versão 12.
- [20] PHILPOTT, A. B., MATOS, V. L., “Dynamic Sampling Algorithms for Multi-Stage Stochastic Programs With Risk Aversion”, *Eur. J. of Operational Research*, v. 218, pp. 470–483, 2012.
- [21] DINIZ, A. L., MACEIRA, M. E. P., VASCONCELLOS, C. L., PENNA, D. D. J., “Superfície de Aversão a Risco para o Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos”. In: *XIII SEPOPE - Simpósio de Especialistas em Planejamento da Operação e Expansão Elétrica*, Foz do Iguaçu, 2014.
- [22] SHAPIRO, A., TEKAYA, W., “Report for Technical Cooperation Between Georgia Institute of Technology and ONS - Operador Nacional do Sistema”. In: *Technical Report*, Georgia Institute of Technology, 2011.
- [23] PEREIRA, A. F. S., *Planejamento da Operação Energética e da Manutenção no Sistema Hidrotérmico de Potência Brasileiro*, Master’s Thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.
- [24] CYRILLO, Y. M., “Comparação das Abordagens PDE e PDDE - Uma Visualização da Função de Custo Futuro”, 2015.
- [25] LARROYD, P. V., *Um Modelo de Otimização Estocástica com Representação Individualizada das Usinas Hidrelétricas no Planejamento de Médio Prazo da Operação Hidrotérmica*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.
- [26] FINARDI, E. C., *Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos Utilizando Processamento de Alto Desempenho*, Master’s Thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.
- [27] RODRIGUES, L. F., *Avaliação do Uso de Restrições Probabilísticas para a Superfície de Aversão a Risco no Problema de Planejamento de Médio Prazo da Operação Hidrotérmica*, Master’s Thesis, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

- [28] SHAPIRO, A., TEKAYA, W., DA COSTA, J. P., SOARES, M. P., “Risk neutral and risk averse Stochastic Dual Dynamic Programming method”, *European Journal of Operational Research*, v. 224, n. 2, pp. 375 – 391, 2013.
- [29] JUNIOR, C. R. V. T., *Aplicação da Análise de Componentes Principais no Problema do Planejamento da Operação Energética de Médio Prazo*, Master’s Thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.
- [30] GONÇALVES, R. E. C., *Análise Comparativa entre Diferentes Métodos de Otimização Estocástica na Solução do Problema de Planejamento da Operação de Curto Prazo*, Master’s Thesis, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.
- [31] BRANDI, R. B. S., MARCATO, A. L. M., DIAS, B. H., R. T. P., DA SILVA JUNIOR, I. C., “A Convergence Criterion for Stochastic Dual Dynamic Programming: Application to the Long-Term Operation Planning Problem”, *IEEE Transactions On Power Systems*, v. 33, n. 4, pp. 3678–3690, 2018.