Trabalho Final
2022, Brasília, DF, Brasil
UnB - FT – ENM

Métodos numéricos Transporte de Calor e Massa 2022/1:Solução da Equação do Calor 1D Transiente

Amanda Soares Bispo Reis
Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasil
amanda.bispo@aluno.unb.br

Resumo
O presente artigo aborda a solução de problemas utilizando a equação de calor transiente de forma numérica, utilizando um algoritmo feito em python para processar a forma numérica de solução das problemáticas, utilizando o método das diferenças finitas. Além disso, discute os resultados obtidos das resoluções, comparando com uma resolução analítica para validação do método.
Keywords: *: Equação de calor, Transiente, solução numérica.*

1. INTRODUÇÃO

O estudo da transferência de calor é muito importante para a sociedade. São estudos que envolvem praticamente tudo que se faz ou necessita hoje. Desde ter uma comida bem conservada nas geladeiras ou ter uma casa quente para abrigar do inverno, até o projeto da estrutura de um robô que vai à Marte e não pode superaquecer entrada na atmosfera do novo planeta.

A importância dessa área do conhecimento é imensurável, existem inúmeras aplicações na engenharia e diversos problemas e situações a serem consideradas na análise, o que torna o estudo, muitas vezes, bem complexo. Para estes casos, se torna inviável fazer cálculos manuscritos ou mesmo utilizando calculadora, principalmente para situações nas quais é necessário uma resposta rápida para o problema. E neste momento ai que os métodos numéricos se tornam úteis.

Os métodos numéricos são o uso de técnicas para tornar equações de uma conta complexa em diversas equações mais simples, geralmente usando operações algébricas. Com o uso de tais metodologias além da simplificação dos os problemas, é possibilitado o uso de computadores para auxiliar nas resoluções, tornando-as mais rápidas e otimizadas, já que sua capacidade de fazer milhões de operações aritméticas em pouquíssimo tempo é inigualável.

Este artigo se trata da da aplicação de um desses métodos numéricos executado por um algoritmo computadorizado para a resolução de problemas transientes de transferência de calor em um objeto de geometria e condições de contorno simples.

2. FUNDAMENTAÇÂO TEÓRICA

Na análise de transferência de calor, alguns corpos possuem variações de temperatura interna tão pequenas, que são quase inexistentes. Nesses casos, eles se comportam como um "aglomerado", e podem ser observados a partir da análise de sistemas aglomerados, que considera a temperatura dentro do corpo como uniforme, e a variação do calor se torna essencialmente em função do tempo $T(t)$.

Os corpos reais portanto, não funcionam de acordo com esta idealização e, na maioria das vezes, não pode ser reduzida à abordagem de aglomerados. Há sempre uma diferença de temperatura dentro de um corpo em função do seu comprimento.

A transferência de calor em um corpo ocorre da partícula mais energética para as menos energéticas ao seu redor, através da interação entre elas, agitação e colisões. Como não há uma troca de 100% da energia contida da partícula, a energia acumulada por partícula diminui com o distanciamento da origem da energia. Sendo assim, a temperatura em um corpo torna-se uma função da posição do ponto considerando os eixos nas três dimensões (x, y, z) e do tempo.

Considerando o caso unidimensional, temos que,

$$T = T(x, t)$$

Para acharmos uma equação para encontrar essa temperatura podemos iniciar pela Lei de Fourier, que relaciona a temperatura com a taxa de transferência de calor. Utilizar também as definições matemáticas de energia, assim como as leis da termodinâmica.

A partir destes conceitos, forma-se a equação de temperatura interna de um corpo $T(x, t)$, também conhecida como equação do calor. Tal equação pode ser derivada a partir da primeira lei da termodinâmica:

$$\rho c \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(xt)}{\partial^2 x}$$

Onde ρ é a densidade do objeto, c é o calor específico do material e k é a condutividade térmica do material. Dessa forma, encontramos a temperatura em qualquer ponto ao longo do eixo x em um dado instante de tempo (t).

Considerando $\alpha = \frac{k}{\rho c}$, podemos reescrever a equação como:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial^2 x}$$

Na equação acima tem-se α, que representa a condutividade térmica do material, a qual diz o quão rápido um material reage a mudanças de calor. Essa grandeza é calculada pela razão entre condutividade térmica (k) e a capacidade de armazenamento de energia do corpo (ρc).

A partir dessa equação podemos definir como é o comportamento da transferência de calor em um determinado ponto do objeto, dado o conhecimento da situação atual e do estado dos elementos ao redor, ou seja, possuindo as condições iniciais do sistema e sabendo as condições de contorno do objeto estudado, é possível definir a temperatura de qualquer ponto em qualquer momento de tempo aplicando a equação desenvolvida.

O objetivo do artigo é então solucionar três problemas com mesma configuração : determinar a temperatura em uma barra ao longo do tempo. Para as análises em questão, foi considerada uma barra de 1 m de comprimento na qual queremos determinar a temperatura T(x,t) em função da distância x em uma direção e do tempo contado.

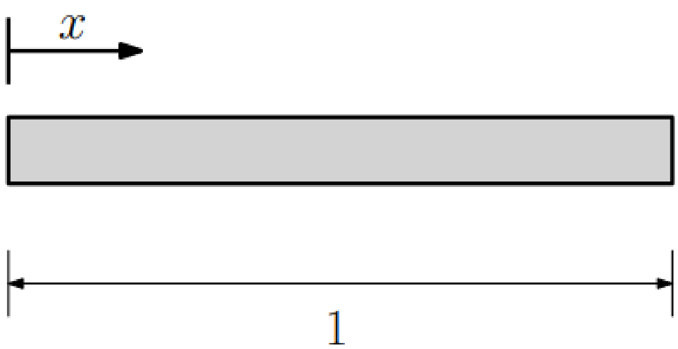


Figura 1: Barra Unidimensional

2.1 Problema 1:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial^2 x}\ ,\ t > 0,\ 0 < x < 1$$

$$T(0,t) = 0 \text{ e } t(1,t) = 0$$

T(x,0) = 1, 0 < x < 1

2.2 Problema 2:

$\partial T(x,t) \frac{}{\partial t = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial^2 x}, t>0, 0<x<1}$

T(0,t) = 1 e t(1,t) = 0

T(x,0) = 0, 0 < x < 1

2.3 Problema 3:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial^2 x}, t > 0, 0 < x < 2$$

$$T(0,t) = T(2,t) = 0, t >= 0$$

$$T(x,0) = sin((pi/2) * x), 0 < x < 2$$

3. SOLUÇÃO NUMÉRICA

Os problemas podem sempre ser solucionados com vários métodos, que obtêm resultados satisfatórios para problemas complexos. Resoluções numéricas garantem que problemas com grande complexidade ou grande quantidade de dados sejam solucionados com mais rapidez e de forma automatizada, a partir da criação de um algoritmo.

Ao se propor um algoritmo, para garantir que a aproximação está próxima o suficiente da resolução analítica, é necessário realizar validações e selecionar dados e formas de processamento destes apropriadas. O número de operações depende do tamanho de Δx e Δt. Do ponto de vista computacional, quanto maiores os valores de Δx e Δt, mais próximos do resultado analítico estará a resposta. Em contraposto, será também mais custosa para a memória do computador, por realizar mais operações. Por conta do grande número de operações realizadas, se não houver uma consistência no método, é muito fácil que haja uma propagação de erros que torne a aproximação ruim. É necessário assim, que o algoritmo esteja de acordo com o Teorema da equivalência de Lax (Wang, 2014): "For a consistent finite difference scheme, stability is equivalent to convergence."

Neste trabalho, foi utilizado o método das diferenças finitas para adequar a equação de calor à operações computacionais. O método basicamente consiste em 4 passos:

1. Dividir o domínio;
2. Aproximar as derivadas usando séries de Taylor;
3. Substituir na equação original;
4. Resolver;

Para utilizar este método, devemos discretizar os dados, já que a temperatura é determinada apenas em pontos específicos do domínio em certos instantes de tempo. Assim, definimos um Tki, ou temperatuda discreta, sendo que i representa o espaço e k, o instante de tempo para um número finito de pontos, determinados pelos passos Δt e Δx.

Após a disretização, as derivadas são transformadas em várias equações algébricas. Esse passo pode ser visto melhor em $https://fontana.paginas.ufsc.br/files/2017/02/apostila_metII_20191.pdf$. Assim, obtemos aproximações das derivadas no espaço e no tempo da função T(x,y). Essas equações algébricas são substituídas na equação original do calor, e assim já obtemos a equação que será utilizada em nosso algoritmo:

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2}$$

E assim, a temperatura é:

$$T_i^{k+1} = T_i^k + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}(T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k)$$

O método foi implementado por meio de um algoritmo em Python, versão 3.9, em um computador inspiron 5590, com processador i5.

No algoritmo, inicia-se selecionando o problema que será solucionado e definindo variáveis necessárias, como N, que é o número de divisões do domínio (barra); L, definido como a largura da barra metálica; alpha, que é a difusividade térmica; e outras variáveis utilizadas na equação discretizada. São criados também os vetores que ao final servirão para plotar gráficos 2D e 3D do comportamento da temperatura.

Com as variáveis definidas, determinam-se as condições iniciais e a condição de contorno para cada problema e utiliza-se a equação discretizada dentro de ciclos de repetição para o tempo e o espaço. Ao fim desse processamento, teremos uma lista de tuplas.

Para melhor visualização, a lista pode ser pensada como se fosse a própria barra, ou seja, cada elemento da lista é um segmento da barra. Cada um desses elementos, possui a informação da temperatura daquele pedaço da barra para todos os instantes de tempo analisados. Sendo assim, é possível saber a temperatura exata de um determinado ponto para um determinado tempo. Por exemplo, se o dado relevante requisitado é a temperatura do segmento x da barra no instante t, basta olhar para o elemento [x,t] da lista, pegando assim a informação contida no elemento t do pedaço s, ou seja, a temperatura naquele instante de tempo.

Para poder colocar as informações corretas em cada elemento dessa lista, inicia-se sabendo as condições iniciais, ou seja, todos os elementos na posição 0 de cada item da lista já é previamente definido pelo tipo de problema a ser tratado. Após isso, utilizando a equação discretizada atualiza-se os elementos seguintes, ou seja, qual a temperatura daquele ponto no próximo instante de tempo. É feito isso para cada instante de tempo de cada pedaço da barra, até que estejam todos definidos.

4. VALIDAÇÃO

Para qualquer método numérico implementado, é importante que haja uma validação dos dados, para verificar se o método realmente é uma aproximação boa para solucionar problemas. Assim, realiza-se a validação por meio da resolução analítica do problema 1 apresentado comparada à obtida no algoritmo criado.

A equação resultante da aplicação das condições iniciais na equação do calor é:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin\left[(2n-1)\pi x\right] e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}$$

Para x igual a 0.5m e tempo igual a 0.02s, o resultado analítico da temperatura foi de aproximadamente 0,984º

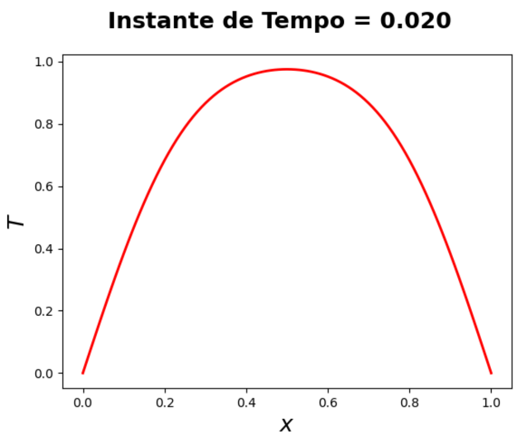
Utilizando os mesmos parâmetros para x e t no algoritmo em python, foi obtido o valor de 0,9752243196162911º para a temperatura.

Observa-se que os valores são muito próximos, mostrando um bom resultado para o algoritmo

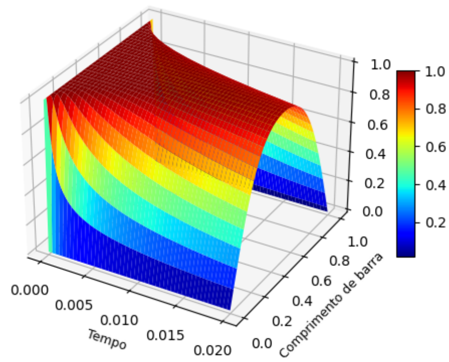
5. RESULTADOS

Após o processamento dos dados de cada problema, foram obtidos gráficos 2D e 3D para diferentes instantes de tempo.

Para o problema 1, no instante 0.02, foram desenhados os seguintes gráficos:



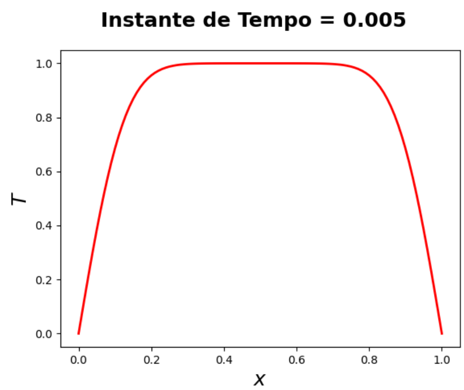
(a) Gráfico 2D do problema 1 no instante 0.02



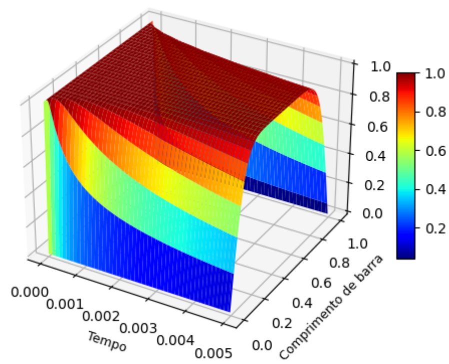
(b) Gráfico 3D do problema 1 no instante 0.02

Figura 2: Módulo Parado

é possível verificar no gráfico 2D o perfil da temperatura para o exato instante escolhido para análise, e no gráfico 3D, como a transmissão do calor se dá no espaço e no tempo.



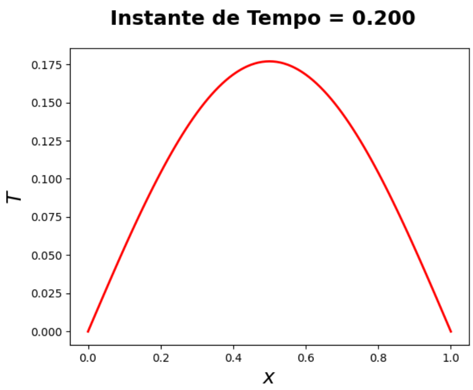
(a) Gráfico 2D do problema 1 no instante 0.005



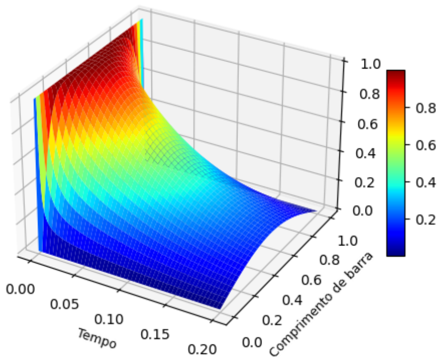
(b) Gráfico 3D do problema 1 no instante 0.005

Figura 3: Módulo Parado

Quando o instante de observação é muito pequeno, podemos verificar melhor a trasmissão gradativa no espaço, que ainda não chegou nas extremidades.



(a) Gráfico 2D do problema 1 no instante 0.2

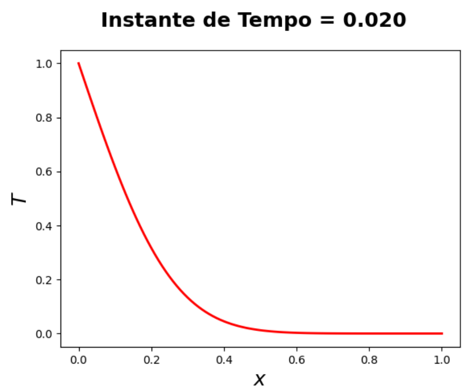


(b) Gráfico 3D do problema 1 no instante 0.2

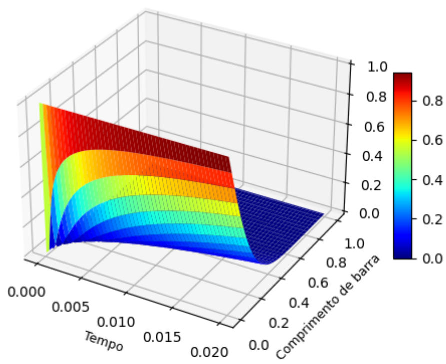
Figura 4: Módulo Parado

Já quando o instante de tempo é muito grande, a propagação do calor já ocorreu em quase todo o comprimento da barra, que busca novamete o equilíbrio, ou seja, o estado em que todos os pontos estão na mesma temperatura. Neste caso, a temperatura uniforme igual à zero.

O mesmo comportamento de transmissão e busca ao equilíbrio pode ser analisado nos dois problemas seguntes, apenas com condições iniciais e condições de contorno diferentes.

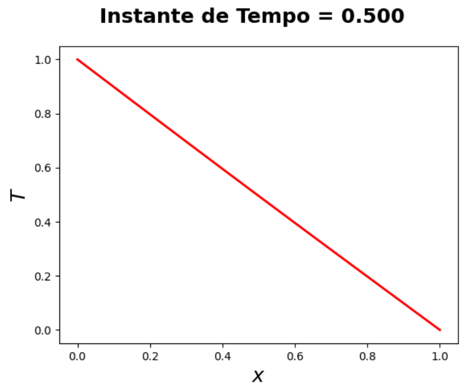


(a) Gráfico 2D do problema 2 no instante 0.02

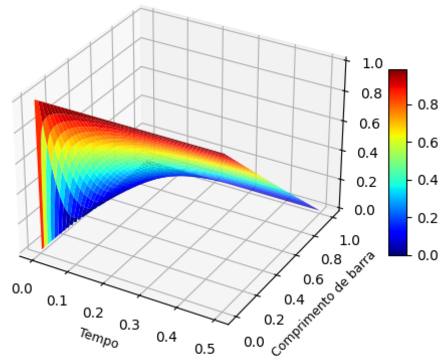


(b) Gráfico 3D do problema 2 no instante 0.02

Figura 5: Módulo Parado



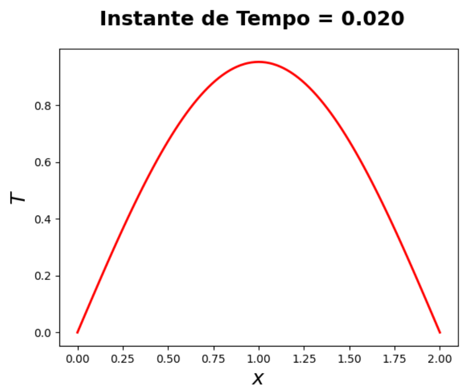
(a) Gráfico 2D do problema 2 no instante 0.5



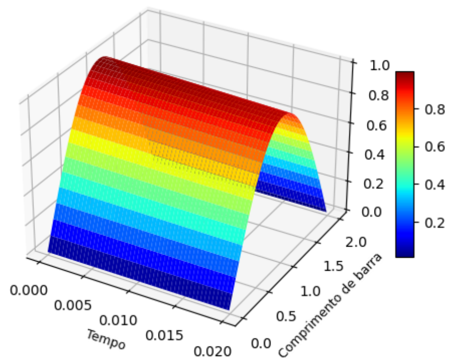
(b) Gráfico 3D do problema 2 no instante 0.5

Aqui é possível ver no gráfico 2D que o sistema alcançou o estado de equilíbrio dadas as condições iniciais.

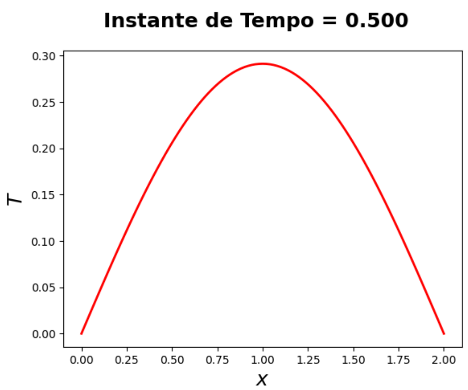
5.1 Problema 3



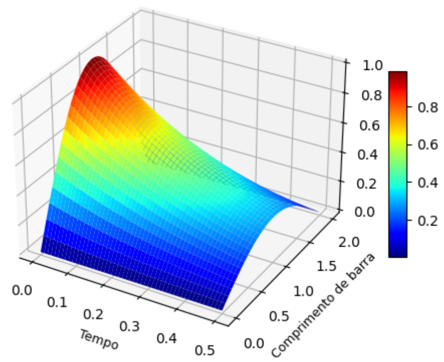
(a) Gráfico 2D do problema 3 no instante 0.02



(b) Gráfico 3D do problema 3 no instante 0.02



(a) Gráfico 2D do problema 3 no instante 0.5



(b) Gráfico 3D do problema 3 no instante 0.5

6. CONCLUSÃO

A utilização de métodos numéricos facilita muito a resolução de problemas mais complexos que muitas vezes é inviável de ser resolvido na mão. Somando-se a isso, o auxílio de computadores para o processamento das informações e cálculo dos valores de forma rápida e precisa é um facilitador significativo para a resoluções de problemas. Pelos estudos e testes realizados neste artigo, conclui-se que os algoritmos são muito úteis para a resolução de problemas de tempo transiente no estudo de transferência de calor em um corpo simples, pois além de calcular de forma rápida e precisa, a funcionalidade de plotar gráficos para melhor visualização e interpretação dos problemas é muito vantajosa para estudiosos do assunto.

7. REFERÊNCIAS

Fontana, P., 2019. "Introdução ao método de diferenças finitas com aplicação em engenharia química". *Departamento de Engenharia Química*.

Incropera, F.P., DeWitt, D.P., Bergman, T.L., Lavine, A.S. *et al.*, 1996. *Fundamentals of heat and mass transfer*, Vol. 6. Wiley New York.

Lax, P.D. and Richtmyer, R.D., 1956. "Survey of the stability of linear finite difference equations". *Communications on pure and applied mathematics*, Vol. 9, No. 2, pp. 267–293.

Wang, S., 2014. "Lax equivalence theorem". *Student's Book Numerical Functional Analysis*, p. 15.