

Relatório do Projeto Computacional de Eletromagnetismo

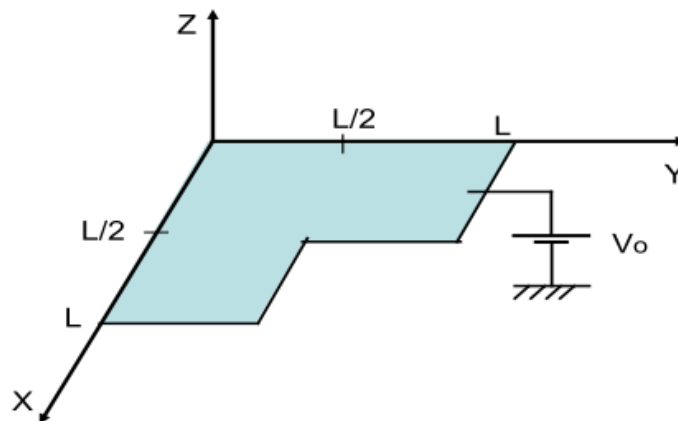
Amanda Moraes

Abril 2021

1 Problema

Uma placa condutora de lado maior L é mantida a um potencial V_0 , como mostrado abaixo. Assuma que o meio seja espaço livre. Aplique o método dos momentos para determinar a distribuição superficial de carga na placa. Para tanto divida cada lado L em N segmentos (N par).

Figura 1: Placa condutora



1. Expandindo a distribuição de carga em funções de base tipo pulso, determine as expressões para os elementos das matrizes de impedância e de tensão do método dos momentos.
2. Para o caso em que $L = 10$ cm, e $V_0 = 1$ V, resolva o sistema linear para um valor de N específico (você escolhe, mas par). Determine as amplitudes dos pulsos, e obtenha uma aproximação para a distribuição de carga superficial na placa. Plote o resultado.
3. Resolva o problema e plote a distribuição superficial de carga para diferentes valores de N . Comente os resultados.
4. Determine a carga total na placa. Varie N e observe a convergência.

2 Solução

Sabe-se que o potencial na superfície condutora é constante e portanto:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\rho_s(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' = V_0 \quad \forall \vec{r} \in placa \quad (I)$$

A distribuição de carga ρ_s na placa não é conhecida e pode ser determinada por uma aproximação:

Primeiro a placa condutora deve ser discretizada em pequenas regiões quadradas com lados iguais a $\delta = L/N$. Assim, a área total da superfície em L ilustrada na Figura 1 abrigará $3N^2/4$ elementos de área.

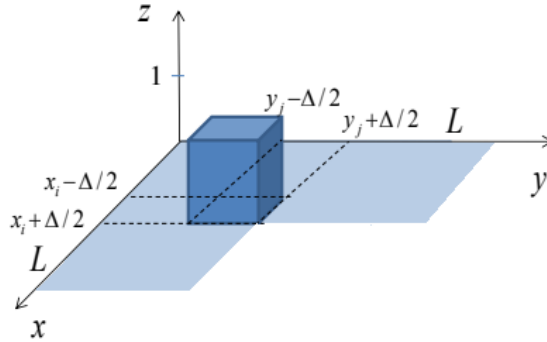
Em seguida, a densidade superficial de carga pode ser aproximada como o somatório de funções pulso $P(x, y)$ multiplicadas por suas amplitudes a_n (incógnitas do sistema) nos elementos quadrados obtidos com a discretização da superfície condutora.

Para cada elemento de superfície n , a função pulso é definida por:

$$P_n(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{para } x_i - \delta/2 < x < x_i + \delta/2, \quad y_j - \delta/2 < y < y_j + \delta/2 \\ 0 & \text{para pontos fora do elemento de área } n \end{cases}$$

onde $n \in \{1, 2, \dots, \frac{3N^2}{4}\}$ e (x_i, y_j) é o ponto central do quadrado n em questão.

Figura 2: Placa condutora no plano xy e função pulso para um quadrado de lado δ



Aproximação da distribuição de carga ao longo da placa condutora:

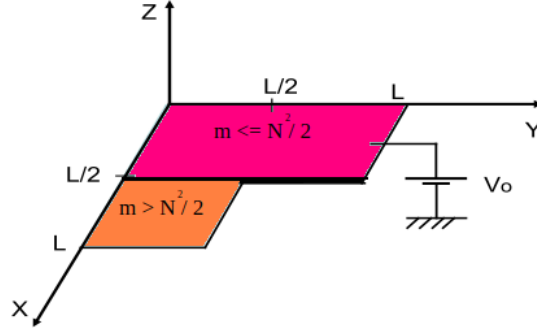
$$\rho_s(x, y) \approx \sum_{n=1}^{3N^2/4} a_n P_n(x, y) \quad (II)$$

com a_n sendo a amplitude do pulso do n -ésimo quadrado.

Para determinar a distribuição superficial de carga aproximada na placa com potencial V_0 , será considerada a condição de contorno nos pontos centrais \vec{r}_m dos quadrados que compõem a superfície condutora. Esses pontos podem ser definidos por:

$$\vec{r}_m = (x_p, y_q) = ((p-1/2)\delta, (q-1/2)\delta) \begin{cases} p = (m \bmod \frac{N}{2}) + 1 \\ q = \frac{N}{2} + (m - \frac{N^2}{2})/\frac{N}{2} + 1 & \text{se } m > \frac{N^2}{2} \\ \text{(região laranja da Figura 3)} \\ p = (m \bmod N) + 1 \\ q = \frac{m}{N} + 1 & \text{se } m \leq \frac{N^2}{2} \\ \text{(região rosa da Figura 3)} \end{cases} \quad \text{com } m = 1, 2, \dots, \frac{3N^2}{4}$$

Figura 3: Regiões consideradas para obter os índices das coordenadas dos pontos centrais de cada quadrado m



Finalmente, de (I) e (II) temos que:

$$V_0 \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\sum_{n=1}^{(3N^2/4)} a_n P_n(x', y')}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} ds' \Rightarrow$$

$$V_0 \approx \sum_{n=1}^{(3N^2/4)} a_n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\delta/2}^{x_i+\delta/2} \int_{y_j-\delta/2}^{y_j+\delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx' dy' \quad \text{com } m = 1, 2, \dots, \frac{3N^2}{4} \quad (III)$$

A última expressão pode ser escrita em forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} Z_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_m \end{bmatrix}$$

$$m \in 1, 2, \dots, 3N^2/4$$

$$n \in 1, 2, \dots, 3N^2/4$$

Sendo $[Z]$ a matriz de impedância de dimensões $m \times n$, $[a]$ a matriz de amplitudes dos pulsos de dimensões $m \times 1$ e $[V]$ a matriz de tensão de dimensões $m \times 1$.

2.1 Questão 1

De (III) temos que os elementos da matriz de impedância e da matriz de tensão correspondem a:

$$\begin{cases} V_m = V_0 \\ Z_{mn} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\delta/2}^{x_i+\delta/2} \int_{y_j-\delta/2}^{y_j+\delta/2} \frac{1}{|\vec{r}_m - \vec{r}'|} dx' dy' \end{cases}$$

No código desenvolvido em Python, a matriz de tensão é inicializada com o seguinte trecho:

```
1 # Matriz de tensao (mesmo valor Vo para cada elemento quadrado, que
   sao 3(N**2)/4 elementos)
2 matTensao = np.ones(shape=((3*(N**2)//4),1)) * Vo
```

Para determinar Z_{mn} aproximado quando $m \neq n$ podemos considerar que toda a carga do quadrado n está concentrada em seu ponto central:

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\delta/2}^{x_i+\delta/2} \int_{y_j-\delta/2}^{y_j+\delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_p - x')^2 + (y_q - y')^2}} dx' dy' \Rightarrow \\ Z_{mn} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\delta/2}^{x_i+\delta/2} \int_{y_j-\delta/2}^{y_j+\delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_q - y_j)^2}} dx' dy' \Rightarrow \\ Z_{mn} &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta^2}{\sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_q - y_j)^2}} \end{aligned}$$

Quando $m = n$, o ponto (x_p, y_q) é o mesmo ponto representado por (x_i, y_j) na expressão de Z_{mn} :

$$\begin{aligned} Z_{mn} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\delta/2}^{x_i+\delta/2} \int_{y_j-\delta/2}^{y_j+\delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_p - x')^2 + (y_q - y')^2}} dx' dy' \Rightarrow \\ Z_{mn} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{x_i-\delta/2}^{x_i+\delta/2} \int_{y_j-\delta/2}^{y_j+\delta/2} \frac{1}{\sqrt{(x_i - x')^2 + (y_j - y')^2}} dx' dy' \Rightarrow \\ &\dots \\ Z_{mn} &= \frac{\delta}{\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Logo, Z_{mn} pode ser aproximado para:

$$Z_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta^2}{\sqrt{(x_p - x_i)^2 + (y_q - y_j)^2}} & \text{se } m \neq n \\ \frac{\delta}{\pi\epsilon_0} \ln(1 + \sqrt{2}) & \text{se } m = n \end{cases}$$

No código desenvolvido, a matriz de impedância é inicializada com o seguinte trecho:

```
1 # a matriz de impedancia estabelece uma relacao de cada quadradinho
   com os outros, por isso tem dimensao 3(N**2)/4 x 3(N**2)/4
2 matImped = np.ones(shape=((3*(N**2)//4), (3*(N**2)//4)))
3
4 for m in range(matImped.shape[0]): # de 0 a (3*(N**2)//4
5     if (m > (N*(N/2))):
```

```

6     p = m%(N/2) + 1
7     q = (N/2) + (m - (N*(N/2)))/(N/2) + 1
8 else:
9     p = m%N + 1
10    q = m//N + 1
11
12    # determina o ponto medio do primeiro quadrado em questao
13    xp = p * delta - delta/2
14    yq = q * delta - delta/2
15
16    for n in range(matImped.shape[1]): # de 0 a (3*(N**2))/4
17        if (n > (N*(N/2))):
18            xiindex = n%(N/2) + 1
19            yjindex = (N/2) + (n - (N*(N/2)))/(N/2) + 1
20        else:
21            xiindex = n%N + 1
22            yjindex = n//N + 1
23
24        # determina o ponto medio do segundo quadrado em questao
25        xi = xiindex * delta - delta/2
26        yj = yjindex * delta - delta/2
27
28        # valor de Zmn para elementos fora da diagonal da matriz de
29        # impedancia
30        if m != n:
31            distPQtoIJ = math.sqrt((xp - xi)**2 + (yq - yj)**2)
32            matImped[m][n] = (1/(4 * math.pi * epsilon)) * ((delta**2)/
33            distPQtoIJ)
34        # valor de Zmn para elementos da diagonal da matriz de
35        # impedancia
36        else:
37            matImped[m][n] = (delta/(math.pi * epsilon)) * np.log(1 +
38            math.sqrt(2))

```

2.2 Questão 2

A partir desse ponto, todos os valores das matrizes $[Z]$ e $[V]$ são conhecidos e podemos obter os valores de $[a]$ por inversão de matrizes:

$$[Z][a] = [V] \Rightarrow [a] = [Z]^{-1}[V]$$

Ao calcular a inversa da matriz de impedância e fazer seu produto com a matriz de tensão, temos a amplitude do pulso para cada pequeno elemento de área da placa. Esse resultado representa uma aproximação da distribuição de carga superficial ao longo do objeto condutor ilustrado na Figura 1.

Em Python:

```

1 matImpedInv = np.linalg.inv(matImped) # inversa da matriz de
2   impedancia
3 A = np.dot(matImpedInv, matTensao) # amplitudes

```

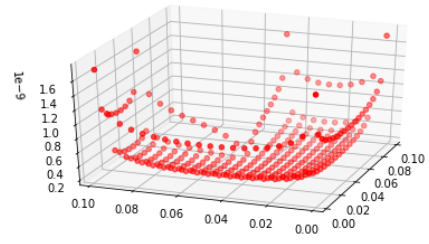
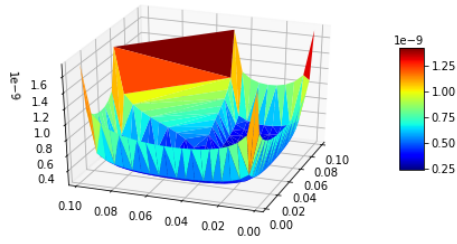
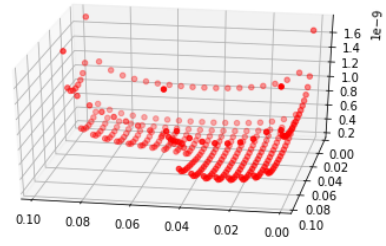
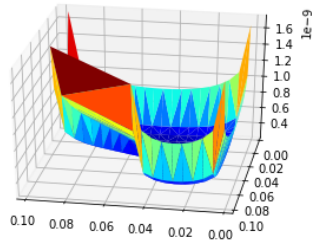
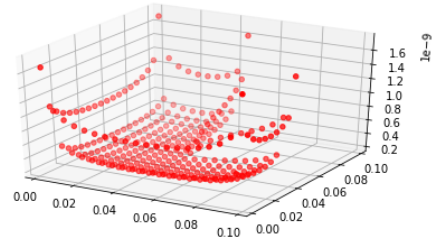
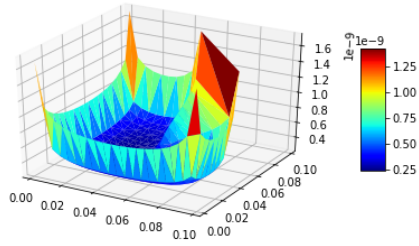
Para $L = 10\text{cm}$, $V_0 = 1\text{V}$ e $N = 20$:

```

1 # Parametros
2 L = 0.1 # em metros
3 N = 20 # numero natural par
4 Vo = 1 # potencial em V
5 delta = L/N

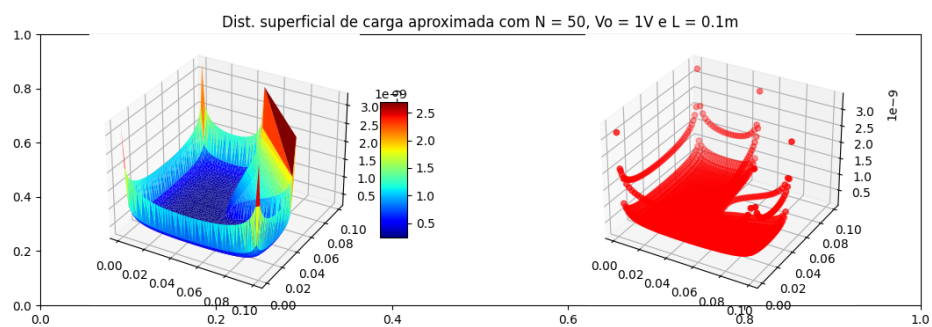
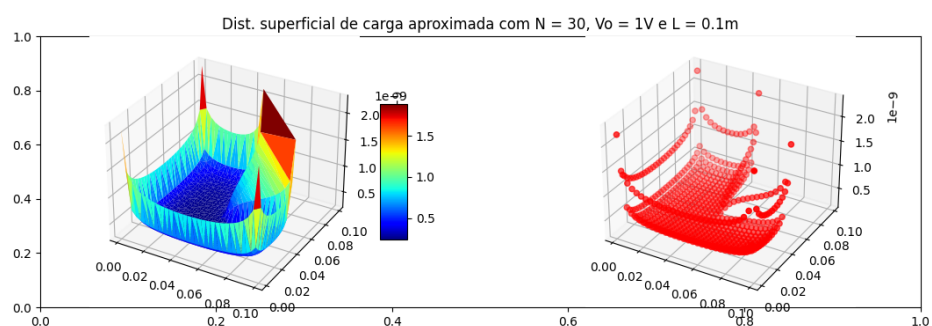
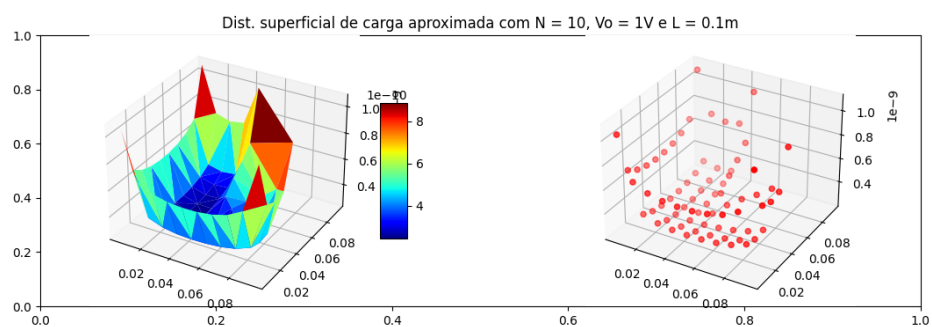
```

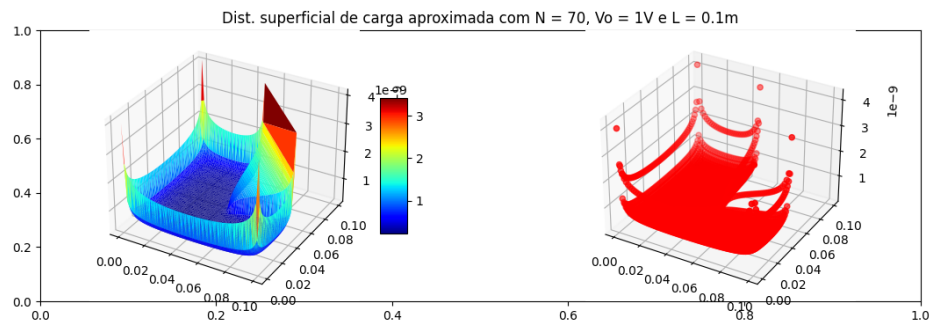
Resultado de diferentes ângulos:



2.3 Questão 3

Ao calcular e plotar a distribuição superficial de carga aproximada para diferentes valores de N (10, 30, 50 e 70) percebe-se que, embora o gráfico apresente maior grau de precisão (e mais uniformidade na superfície), o custo computacional e temporal do método dos momentos aumenta consideravelmente para os valores mais altos (há mais elementos de área a serem considerados nas operações).





2.4 Questão 4

O cálculo da carga total foi aproximado como o somatório do produto da distribuição superficial em cada elemento quadrado pela sua área (δ^2):

$$\int \rho_s ds \approx \sum_{n=1}^{3N^2/4} (\rho_n \times \delta^2)$$

Trecho de código correspondente:

```
1 def getCargaTotal(self):
2     # soma todos os elementos da matriz de amplitudes multiplicada
   por delta^2 ((L/N)^2)
3     return np.sum(self.A * (self.L/self.N)**2)
```

A carga total aproximada na placa condutora para diferentes valores de N, como apresentado na Figura 4, resulta num valor cada vez mais preciso à medida que N aumenta. Pelo gráfico obtido, a carga total na superfície converge para $3,66 \times 10^{-12}C$.

Figura 4: Gráfico N x Carga total da placa (aproximada)

