

## Aflevering 12b

Opgaven indeholder ingen Sci2u-del, og består af følgende opgaver, U32 og U33.

**Opgave U32** I denne opgave betragtes potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n. \quad (1)$$

### Opgave U32

**Spørgsmål 1:** Et af følgende alternativer angiver konvergensradius  $R$  for potensrækken (1).  
Hvilket?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^n$$

---

Grundet at nævneren altid vil være større end tælleren, uanset hvilken værdi der indsættes for  $x$ , så vil det betyde at grænseværdien  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^n$  for en vilkårlig stor  $x$ -værdi, vil være 0.

**Derfor bestemmes svaret til at være [3]:**

$$\underline{R = \infty}$$

## Opgave U32

### Spørgsmål 2: Betragt funktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^n$$

**Angiv den anden afledede af  $f$  i 0.**

---

Ved at omskrive udtrykket lidt, kan jeg lettere differentiere udtrykket:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot (-1)^n \cdot (2n)!^{-1}$$

Dette kan også skrives som:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot (-1)^n \cdot (2n)!^{-1} = x^0 \cdot a_0 + x^1 \cdot a_1 + x^2 \cdot a_2 + \cdots + x^n \cdot a_n$$

Hvor

$$a_n = (-1)^n \cdot (2n)!^{-1}$$

Jeg benytter mig af sætning 9.15 i lærebogen, og ved at den differentierede funktion  $f'(x)$  kan findes på formen nedenfor:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + \cdots + n \cdot x^{n-1} \cdot a_n$$

Jeg benytter mig af samme sætning til at bestemme den dobbeltafledte:

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot n \cdot a_n \cdot x^{n-2} = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x + 12a_4x^2 + \cdots + (n-1) \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot a_n$$

Jeg bestemmer  $f''(0)$ :

$$f''(0) = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot 0 + 12 \cdot a_4 \cdot 0^2 + \cdots + (n-1) \cdot n \cdot 0^{n-1} \cdot a_n = 2a_2$$

Jeg substituerer  $a_2$  med udtrykket fra tidligere:

$$f''(0) = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot \left( \frac{(-1)^2}{(2 \cdot 2)!} \right) = 2 \cdot \left( \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \right) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

**Svaret, der er et helt tal mellem 0 og 99, er bestemt til 12.**

### Opgave U32

**Spørgsmål 3:** Angiv de første led i Taylor rækken med udviklingspunkt 0 for den afledte  $f'$ :

$$-\frac{1}{2} + \frac{x}{12} - \frac{x^2}{240} +$$

**Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.**

---

Udtrykket for  $f(x)$  differentieres, og andet led undersøges:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

De første led i Taylor rækken bestemmes vha. udtrykket ovenfor:

$$f'(x) = \left(1 \cdot \frac{-1}{2 \cdot 1} \cdot 1\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{24} \cdot x\right) + \left(3 \cdot \frac{-1}{720} \cdot x^2\right) + \dots$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x}{12} - \frac{x^2}{240} + \dots$$

**Det manglende tal i nævneren for taylorrækken er bestemt til at være 12.**

### Opgave U32

**Spørgsmål 4:** Angiv de første led i Taylor rækken med udviklingspunkt 0 for stamfunktionen  $F$  til  $f$  som opfylder at  $F(0) = 0$ :

$$x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{72} \cdot x^3 - \dots$$

**Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.**

---

Først bestemmes stamfunktionen til  $f(x)$ :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot a_n \cdot x^{n+1}$$

De første led bestemmes vha. udtrykket ovenfor:

$$F(x) = x - \frac{1}{4}x^2 + \left( \frac{1}{2+1} \cdot \frac{(-1)^3}{24} \cdot x^{2+1} \right) - \dots$$

$$F(x) = x - \frac{1}{4}x^2 + \left( \frac{1}{72}x^3 \right) - \dots$$

**Det manglende tal i nævneren for taylorrækken er bestemt til at være 72.**

### Opgave U32

**Spørgsmål 5:** Et af følgende alternativer angiver konvergensradius  $R$  for potensrækken (2).  
Hvilket?

- [1]  $R = 0$
- [2]  $R = 1$
- [3]  $R = \infty$
- [4]  $R = 2$

**Skriv dit svar, et helt tal mellem 1 og 4.**

---

For en potensrække på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

Kan konvergensradius bestemmes ved

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \right)$$

Såfremt at denne grænseværdi er defineret. I dette tilfælde er  $z^n = x^{n+1}$ . Grænseværdien undersøges:

$$a_n = \frac{n \cdot (-1)^n}{(2n)!}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \right) = \left| \frac{\left( \frac{n \cdot (-1)^n}{(2n)!} \right)}{\left( \frac{(n+1) \cdot (-1)^{n+1}}{(2(n+1))!} \right)} \right|$$

Da der er tale om den numeriske værdi, må det gælde at parenteser for  $(-1)^n$  og  $(-1)^{n+1}$  kan ophæves. Brøkerne kan aldrig blive negative, så der opstår ingen problematik ved at ophæve som følgende nedenfor:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\left( \frac{n \cdot 1}{(2n)!} \right)}{\left( \frac{(n+1) \cdot 1}{(2(n+1))!} \right)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\left( \frac{n}{(2n)!} \right)}{\left( \frac{n+1}{(2n+2)!} \right)} \right)$$

Jeg benytter herefter at

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Til at omskrive udtrykket:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\binom{n}{(2n)!}}{\left( \frac{n+1}{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot (2n)!} \right)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\binom{n}{1}}{\left( \frac{n+1}{(2n+2) \cdot (2n+1)} \right)} \right)$$
$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n \cdot ((2n+2) \cdot (2n+1))}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n}{n+1} \right) = \infty$$

Fra disse omskrivninger ses det let, at grænseværdien må være uendelig. Derfor angives det korrekte svar til at være [3]  $R = \infty$ .



## Opgave U32

### Spørgsmål 6: Angiv grænseværdien:

$$\lim_{x \rightarrow 0} F^{(3)}(x)$$

**Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.**

---

Jeg bestemmer først  $F^{(3)}(x)$ . Jeg kender  $F(x)$  fra spørgsmål 4):

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot a_n \cdot x^{n+1}$$

Jeg differentierer udtrykket 3 gange:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \\ F''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} \\ F'''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2} \end{aligned}$$

Det indses, at for  $x \rightarrow 0$  vil hvert led af sumrækken blive multipliceret med 0, dog med undtagelse af når  $n = 2$ . Dette vises nedenfor ved beregning af de første led af sumrækken:

$$F'''(x) = (n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}) + (n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}) + (n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}) + \dots$$

$$F'''(x) = (2 \cdot (2-1) \cdot a_2 \cdot x^{2-2}) + (3 \cdot (3-1) \cdot a_3 \cdot x^{3-2}) + (4 \cdot (4-1) \cdot a_4 \cdot x^{4-2}) + \dots$$

$$F'''(x) = (2 \cdot (2-1) \cdot a_2 \cdot 1) + (3 \cdot (3-1) \cdot a_3 \cdot x^1) + (4 \cdot (4-1) \cdot a_4 \cdot x^2) + \dots$$

Grænseværdien for dette udtryk bestemmes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} F'''(x) = \lim_{x \rightarrow 0} ((2 \cdot (2-1) \cdot a_2 \cdot 1) + (3^2 \cdot a_3 \cdot x^1) + (4^2 \cdot a_4 \cdot x^2) + \dots) = 2 \cdot (2-1) \cdot a_2$$

Alle andre led end for  $n = 2$  vil blive ganget med en faktor gående mod nul. Derved vil grænseværdien være leddet af sumrækken hvor  $n = 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} F'''(x) = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot \left( \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \right) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

**Det manglende tal i nævneren for taylorrækken er bestemt til at være 12.**

### Opgave U33

**Spørgsmål 1: Find Taylor rækken med udviklingspunkt 0 for funktionen**

$$g(y) = \frac{1}{1+y}$$

**I det følgende betragter vi funktionen  $f$  givet ved**

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} = (1-x^2) \cdot g(x^2)$$

---

Udtrykket betragtes:

$$g(y) := \frac{1}{1+y}$$

Udtrykket kan med fordel deles op i tæller og nævner for at undersøge taylor rækken:

$$u = 1 + y$$

$$\begin{aligned} g'(y) &= -\frac{1}{u^2} = -\frac{1}{(1+y)^2} & g''(y) &= \frac{2}{(y+1)^3} \\ g'''(y) &= -\frac{6}{(y+1)^4} & g''''(y) &= \frac{24}{(y+1)^5} \end{aligned}$$

Det ses hurtigt at der er en generel følge. Den er bestemt og skrevet op nedenfor:

$$g^{(n)}(y) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(1+y)^{n+1}}$$

Derved:

$$a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!} = (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot y^n$$

**Taylor rækken for funktionen  $g(y)$  kan ses ovenfor.**

### Opgave U33

#### Spørgsmål 2: Find Taylor rækken med udviklingspunkt 0 for $f$ // MIN 1. LØSNING

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} = (1-x^2) \cdot g(x^2)$$

---

Jeg omskriver udtrykket for  $g(x^2)$ :

$$g(x^2) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$$

Det vides allerede, at  $\frac{1}{1-z}$  kan repræsenteres ved

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

, såfremt  $|z| < 1$ . Derved kan  $g(x^2)$  repræsenteres ved:

$$g(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$$

Derfor:

$$f(x) = (1-x^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} - \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n+2} \right)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} - \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n+2} \right)$$

Udtryk omskrevet med de første led bestemt:

$$f(x) = (1 + (-1 \cdot x^2) + (x^4) + (-x^6) + \dots) - (x^2 + (-x^4) + (x^6) + \dots)$$

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 2x^4 - 2x^6 + \dots$$

Udtrykket omskrives til generel form:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$$

**Taylor rækken for funktionen  $f(x)$  kan ses ovenfor.**

### Opgave U33

#### Spørgsmål 2: Find Taylor rækken med udviklingspunkt 0 for $f$ //MIN 2. LØSNING

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} = (1-x^2) \cdot g(x^2)$$

---

Taylor rækken til funktionen  $f(x)$  omkring  $a$  er defineret som:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \dots$$

Udtrykket differentieres for at bestemme de første led:

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2+1)^2} \quad f''(x) = \frac{12x^2-4}{(x^2+1)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-48x^3+48x}{(x^2+1)^4} \quad f^{(4)}(x) = \frac{240x^4-480x^2+48}{(x^2+1)^5}$$

Disse indsættes i Taylor serien:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x-0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} \cdot (x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \cdot (x-0)^4 + \dots$$

$$f(x) = 1 + \frac{0}{1!} \cdot (x-0) - \frac{4}{2!}x^2 + \frac{0}{3!} \cdot (x-0)^3 + \frac{48}{4!}x^4 + \dots$$

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 2x^4 + \dots$$

Dette udtryk omskrives til en sum ved den generelle regel gældende for rækken:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} 1, & n=0 \\ (-1)^n \cdot 2x^{2n}, & n \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 2x^{2n}$$

**Taylor rækken for funktionen  $f(x)$  kan ses ovenfor.**

### Opgave U33

**Spørgsmål 3: Find den afledede  $f^{(3)}(0)$**

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = (1 - x^2) \cdot g(x^2)$$

---

Jeg benytter mig af udtrykket for  $f^{(3)}$  bestemt i spørgsmål 2:

$$f^{(3)}(x) = \frac{-48x^3 + 48x}{(x^2 + 1)^4}$$

$$f^{(3)}(0) = \frac{-48 \cdot 0^3 + 48 \cdot 0}{(0^2 + 1)^4} = \frac{0}{1} = 0$$

**$f^{(3)}(0)$  er bestemt til 0.**

### Opgave U33

**Spørgsmål 4: Find Taylor rækken med udgangspunkt i 0 for den stamfunktion F til F, som antager værdien  $F(0) = 1$**

---

Først bestemmes stamfunktionen:

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \qquad F(x) = -x + 2 \cdot \tan^{-1}(x)$$

Taylor rækken til funktionen  $f(x)$  omkring  $a$  er defineret som:

$$F(x) = F(a) + \frac{F'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{F''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{F^{(3)}(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \dots$$

Udtrykket differentieres for at bestemme de første led:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -1 + \frac{2}{x^2+1} & F''(x) &= -\frac{4x}{(x^2+1)^2} \\ F^{(3)}(x) &= \frac{12x^2-4}{(x^2+1)^3} & F^{(4)}(x) &= \frac{-48x^3+48x}{(x^2+1)^4} \\ F^{(5)} &= \frac{240x^4 - 480x^2 + 48}{(x^2+1)^5} \end{aligned}$$

Disse indsættes i taylor serien:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + \frac{F'(0)}{1!} \cdot (x-0) + \frac{F''(0)}{2!} \cdot (x-0)^2 + \frac{F^{(3)}(0)}{3!} \cdot (x-0)^3 + \dots \\ F(x) &= 1 + x + 0 + \frac{-4}{3!} x^3 + 0 + \frac{48}{5!} x^5 \dots \\ F(x) &= 1 + x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots \end{aligned}$$

Det ses, at denne række har samme adfærd som rækken i spørgsmål 2. Dette er logisk, da de stammer fra samme funktion. Der er dog forskel, da rækken er udtryk ved brøkdeler. Dette kan dog også generaliseres:

$$F(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$$

### Opgave U33

#### Spørgsmål 5: Angiv den afledede, $F^{(3)}(0)$

---

Jeg benytter mig af udtrykket for  $F^{(3)}$  bestemt i spørgsmål 4:

$$F^{(3)}(x) = \frac{12x^2 - 4}{(x^2 + 1)^3}$$

$$F^{(3)}(0) = \frac{12 \cdot 0^2 - 4}{(0^2 + 1)^3} = \frac{4}{1} = 4$$

**$F^{(3)}(0)$  er bestemt til 4.**