Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Aarhus Universitet
Calculus Tau

Aflevering 10b

Opgave U29

a) Lad X være et reelt tal. Definer en talfølge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ved at

$$a_n = \frac{n - Xn^3}{n^2 + n^3}.$$

Bestem X så $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent med grænseværdi $\lim_{n\to\infty} a_n = -5$.

$$X = \boxed{}\ .$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

b) Lad X være et reelt tal. Definer en talfølge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ved at

$$a_n = \frac{n + (2X-4)(-n)^3}{n+1}.$$

Bestem X så $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent.

$$X = \boxed{}\ .$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

c) Lad X være et reelt tal. Definer en talfælge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ved at

$$a_n = \sin\left(\frac{Xn^2+1}{Xn^2-1}\right).$$

Bestem X så $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ikke* konvergerer mod $\sin 1$.

$$X = \boxed{}\ .$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

Opgave U30

Besvar opgaverne a) og b) fra Fag-opgave 5 (Kemi).

Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Opgave U29

a) **Lad X være et reelt tal. Definer en talfølge $\{\boldsymbol{a_n}\}^{\infty}{}_{\boldsymbol{n=1}}$ ved at**

$$\boldsymbol{a_n = \frac{n - X \cdot n^3}{n^2 + n^3}}$$

Bestem X, så $\{\boldsymbol{a_n}\}^{\infty}{}_{\boldsymbol{n=1}}$ er konvergent med grænseværdien $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} a_n = -5}$.

For at bestemme X, således at betingelserne er opfyldt, betragter jeg udtrykket for a_n, og indser at det er fordelagtigt at opdele brøken.

$$a_n = \frac{n - X\cdot n^3}{n^2+n^3} = \frac{n}{n^2+n^3} - \frac{X\cdot n^3}{n^2+n^3}$$

Udtrykket forkortes. Jeg dividerer udtrykket med n^3:

$$\frac{n}{n^2+n^3} - \frac{X\cdot n^3}{n^2+n^3} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+1} - \frac{X}{\frac{1}{n^2}+1}$$

Jeg undersøger grænseværdien for de forskellige led:

Første led:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1/n^2}{\frac{1}{n}+1}\right) = \frac{0}{0+1} = 0$$

Andet led:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{X}{\frac{1}{n^2}+1}\right) = \frac{X}{1} = X$$

Altså er grænseværdien $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0 - X = -X$. Herfra kan det konkluderes, at $X = 5$ for at opfylde betingelserne. Derfor konstrueres talfølgen som følgende:

$$\boldsymbol{\left\{\frac{n - 5\cdot n^3}{n^2+n^3}\right\}_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow \left\{\frac{1}{n^2+n} - \frac{5\cdot n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}}$$

<u>**Talfølgen kan ses ovenfor.**</u>

b) Lad X være et reelt tal. Definer en talfølge $\{a_n\}^{\infty}{}_{n=1}$ ved at

$$\boldsymbol{a_n = \frac{n + (2 \cdot X - 4) \cdot (-n)^3}{n+1}}$$

Bestem X, så $\{a_n\}^{\infty}{}_{n=1}$ er konvergent.

For at bestemme hvornår talfølgen er konvergent, gennemskues der først hvornår talfølgen ikke er konvergent. Udtrykket betragtes, og deles op.

$$\frac{n + (2 \cdot X - 4) \cdot (-n)^3}{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{(2 \cdot X - 4) \cdot (-n)^3}{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{4 \cdot n^3 - 2 \cdot X \cdot n^3}{n+1}$$

Jeg undersøger grænseværdien for første led:

Første led:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Det konkluderes, at det første led allerede er konvergerende. Det undersøges hvilken værdi for X, der opfylder at andet led bliver konvergent. Nævneren er ikke konvergerende: Derfor kan det kun opfyldes i tilfældet, hvor tællerens sum er 0. Altså kan jeg fremstille ligningen nedenfor, der opfylder betingelserne:

$$\boldsymbol{4 \cdot n^3 - 2 \cdot X \cdot n^3 = 0 \Leftrightarrow X = 2}$$

<u>Jeg bestemmer derfor værdien X, der opfylder betingelserne, til at være 2. Talfølgen kan ses konstrueret nedenfor:</u>

$$\boldsymbol{\{a_n\}^{\infty}{}_{n=1} = \left\{\frac{n + (2 \cdot 2 - 4) \cdot (-n)^3}{n+1}\right\}^{\infty}_{n=1}}$$

c) Lad X være et reelt tal. Definer en talfølge $\{a_n\}^{\infty}{}_{n=1}$ ved at

$$\boldsymbol{a_n = sin\left(\frac{X \cdot n^2 + 1}{X \cdot n^2 - 1}\right)}$$

Bestem X, så $\{a_n\}^{\infty}{}_{n=1}$ ikke konvergerer mod $sin(1)$.

Ved at betragte ligningen kan jeg konkludere at X bliver brugt som en skalar i både tæller og nævner. Det kan gennemskues at grænseværdien $\lim_{n \to \infty} a_n$ for både tæller og nævner vil gøre hhv. additionen og subtraktionen af 1 i tæller og nævner negligerbar.

Jeg opdeler udtrykket:

$$a_n = sin\left(\frac{X \cdot n^2 + 1}{X \cdot n^2 - 1}\right) = \sin\left(\frac{X \cdot n^2}{X \cdot n^2 - 1} + \frac{1}{X \cdot n^2 - 1}\right)$$

Opgavens beskrivelse medfører, at det grænseværdien for skrevne ovenfor, altså $\lim_{n \to \infty} a_n$, må være lig $\sin(1)$. Jeg bekræfter dog lige for en god ordens skyld, ved beregning af grænseværdien for hvert led:

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{X \cdot n^2}{X \cdot n^2 - 1}\right) = 1$$

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{X \cdot n^2 - 1}\right) = 0$$

Der skal altså bestemmes en X-værdi, der opfylder at disse leds sum er forskellig fra 1. Det kan gennemskues at dette er muligt for $X = 0$, da dette fjerner de ovennævnte leds mulighed for at negligere de konstante led:

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{0 \cdot n^2}{0 \cdot n^2 - 1}\right) = 0$$

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{1}{0 \cdot n^2 - 1}\right) = -1$$

<u>Altså bestemmes X-værdien, der opfylder betingelserne, til at være $X = 0$. Den konstruerede talfølge kan ses nedenfor:</u>

$$\{\boldsymbol{a_n}\}^{\infty}{}_{\boldsymbol{n=1}} = \left\{sin\left(\frac{0 \cdot n^2 + 1}{0 \cdot n^2 - 1}\right)\right\}^{\infty}_{\boldsymbol{n=1}} \neq \boldsymbol{sin}(\boldsymbol{1})$$

Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Opgave U30

a) Vis at $\boldsymbol{x_\infty}$ er en løsning til (3)

Funktionsforskriften nedenfor betragtes. Jeg omskriver udtrykket til at være beskrivende for x_{i+1}:

$$f(x) = x^5 - x + 1$$

$$f(x_{i+1}) = \left(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right)^5 - \left(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right) + 1$$

Jeg skal antage at følgen $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ er konvergent, samt sætte $x_\infty = \lim_{i\to\infty} x_i$.
Grænseværdien $\lim_{i+1\to\infty} x_{i+1} = x_\infty$ er den samme. Derved:

$$\lim_{i\to\infty} f(x_{i+1}) = f(x_\infty)$$

$$\lim_{i\to\infty}\left(\left(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right)^5 - \left(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right) + 1\right) = \left(x_\infty - \frac{f(x_\infty)}{f'(x_\infty)}\right)^5 - \left(x_\infty - \frac{f(x_\infty)}{f'(x_\infty)}\right) + 1$$

$$f(x_\infty) = \left(x_\infty - \frac{f(x_\infty)}{f'(x_\infty)}\right)^5 - \left(x_\infty - \frac{f(x_\infty)}{f'(x_\infty)}\right) + 1$$

$$\lim_{i\to\infty} x_i = x_\infty = x_\infty - \frac{f(x_\infty)}{f'(x_\infty)}$$

Dette sidste udtryk ses som en ligning. Jeg ønsker at vise, at x_∞ er en løsning til (3). Det vises, at $f(x) = 0$ fra dette udtryk:

$$\boldsymbol{x_\infty = x_\infty - \frac{f(x_\infty)}{f'(x_\infty)} \Leftrightarrow f(x_\infty) = 0}$$

<u>Derved er det vist, at $\boldsymbol{x_\infty}$ er en løsning til sætning (3)</u>

Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Opgave U30

b) Benyt Newtons metode, startende med $x_0 = -1$, til at finde en løsning til (2) med 4 decimalers nøjagtighed.

$$f(x) = x^5 - x + 1$$

Jeg starter med $x_0 = -1$. Jeg fortsætter iterativt indtil jeg har 4 decimalers nøjagtighed:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{(-1)^5 - (-1) + 1}{5 \cdot (-1)^4 - 1} = -1{,}25$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1{,}25 - \left(\frac{(-1{,}25)^5 - (-1{,}25) + 1}{5 \cdot (-1{,}25)^4 - 1}\right) \approx -1{,}178459$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -1{,}178459 - \left(\frac{(-1{,}178459)^5 - (-1{,}178459) + 1}{5 \cdot (-1{,}178459)^4 - 1}\right) \approx -1{,}167537$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -1{,}167537 - \left(\frac{(-1{,}167537)^5 - (-1{,}167537) + 1}{5 \cdot (-1{,}167537)^4 - 1}\right) \approx -1{,}167304$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = -1{,}167304 - \left(\frac{(-1{,}167304)^5 - (-1{,}167304) + 1}{5 \cdot (-1{,}167304)^4 - 1}\right) \approx -1{,}167304$$

Ved x_5 er der ikke sket nogen ændring i for de første 4 decimaler. Løsningen til (2) kan ses nedenfor:

$$\boldsymbol{f(-1{,}167304) = (-1{,}167304)^5 - (-1{,}167304) + 1 = 0}$$