

Aflevering 7b

Opgave U25

Lad D betegne området i planen begrænset af linjerne $x = 0$ og $x = 4$ samt graferne for funktionerne $y = x^2$ og $y = -x$.

- a) Tegn en skitse af området D .
- b) Beskriv D som type I område.
- c) Opstil et itereret integral til beregning af dobbeltintegralet

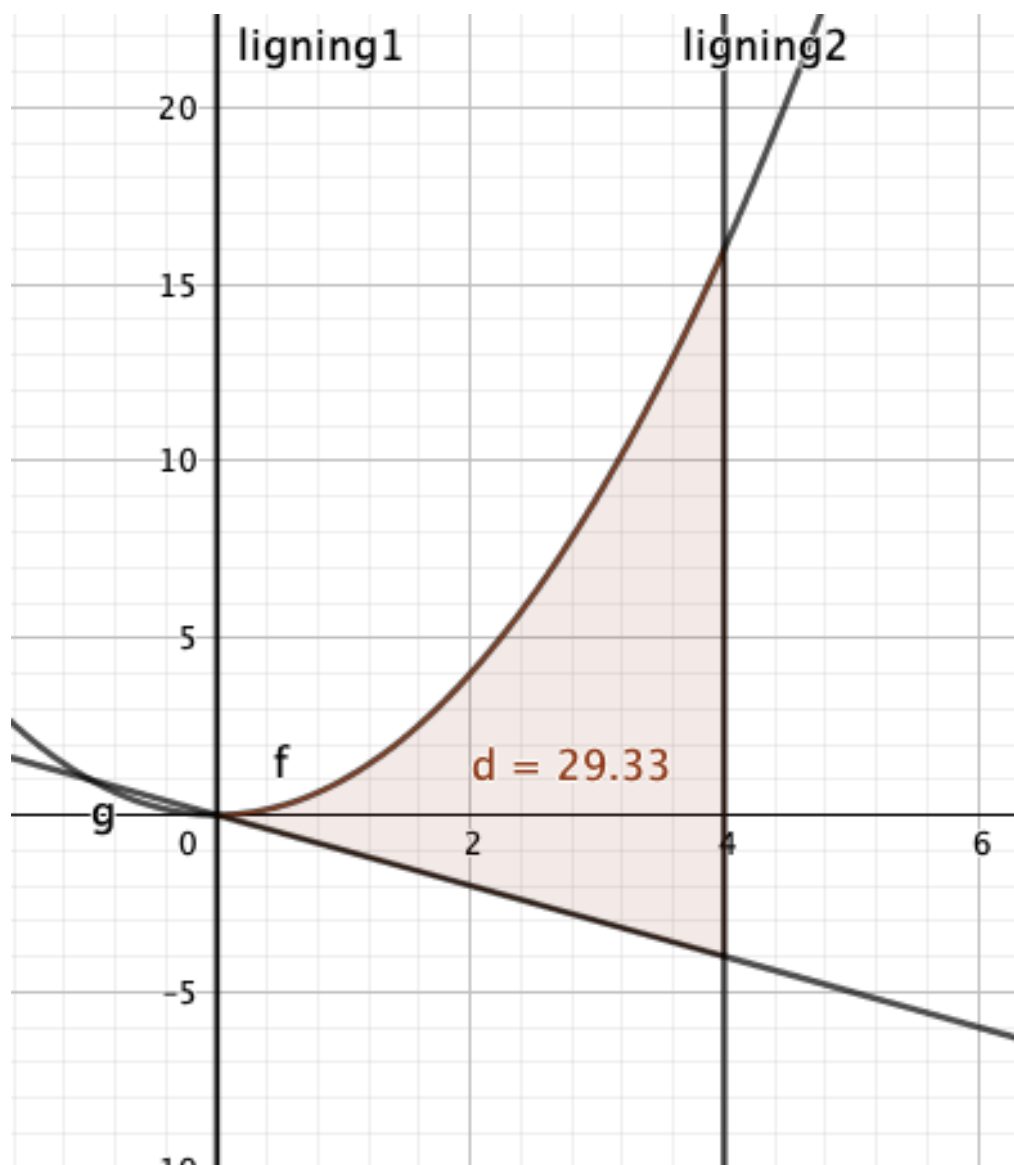
$$\iint_D xy \, dA.$$

- d) Beregn værdien af dobbeltintegralet

$$\iint_D xy \, dA.$$

Opgave a)

Jeg skitserer området vha. CAS-værktøjet GeoGebra:



Opgave b)

Et type 1 område er defineret ved vertikale linjer $x = a$ og $x = b$, samt kurverne $y = g(x)$ og $y = h(x)$, hvor vi antager at $g(x) < h(x)$ og $a < b$:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{x=a}^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

I dette tilfælde vil området D være defineret ved:

$$\int_0^4 \int_{-x}^{x^2} f(x, y) dy dx$$

Opgave c)

Jeg opskrifter det itererede integrale ved at indsætte min funktionsforskrift i udtrykket for beskrivelsen af D:

$$\int_0^4 \int_{-x}^{x^2} f(x, y) dy dx$$

$$f(x, y) = x \cdot y$$

$$\int_0^4 \int_{-x}^{x^2} x \cdot y dy dx$$

Det itererede integrale til beregning af dobbeltintegralet kan ses ovenfor.

Opgave d)

Jeg beregner det itererede integrale ved samme fremgangsmåde som beregning af et bestemt integrale. Jeg skal blot bestemme det bestemte integrale af et andet bestemt integrale. Derved foretager jeg integration af 2 omgange:

$$\int_0^4 \int_{-x}^{x^2} x \cdot y \, dy dx = \int_0^4 \left[\frac{1}{2} x \cdot y^2 \right]_{y=-x}^{y=x^2} dx$$

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{2} x \cdot (x^2)^2 \right) - \left(\frac{1}{2} x \cdot (-x)^2 \right) dx = \int_0^4 \frac{1}{2} x^5 - \frac{1}{2} x^3 dx$$

$$\int_0^4 \frac{1}{2} x^5 - \frac{1}{2} x^3 dx = \left[\frac{1}{12} x^6 - \frac{1}{8} x^4 \right]_{x=0}^{x=4} = \frac{4^6}{12} - \frac{4^4}{8} - \left(\frac{0}{12} - \frac{0}{8} \right) = \frac{4^6}{12} - \frac{4^4}{8} = \frac{927}{3} = 309 + \frac{1}{3}$$

Værdien af dobbeltintegralet bestemmes til 309,333..., vha. af det opstillede itererede integrale.
