Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Aarhus Universitet
Calculus Tau

Aflevering 9b

U27

a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 6y' - 7y = 0. \tag{1}$$

b) Find den løsning til (1), der opfylder begyndelsesværdi-betingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = 8$.

c) Find den løsning y til (1) som opfylder at $e^x y(x) = 2$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

U28

a) Find den løsning y til den logistiske differentialligning

$$y' = y - 2y^2 \ , \tag{2}$$

som opfylder begyndelsesværdi-betingelsen $y(0) = 1$.

b) Lad y være løsningen fra a). Find grænseværdien $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Opgave U27

a) Find den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y'' - 6y' - 7y = 0$$

Jeg bestemmer den fuldstændige løsning ved fremgangsmåden præsenteret i afsnit 7.1 af lærebogen. Jeg bestemmer først determinanten af differentialligningen:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 64$$

Da determinanten er $>$ 0, vil polynomiet have to reelle rødder, givet ved:

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \text{ og } r_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

Jeg bestemmer disse rødder:

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-6)+\sqrt{64}}{2 \cdot 1} = 7$$

$$r_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-6)-\sqrt{64}}{2 \cdot 1} = -1$$

Funktionen y er løsning til differentialligningen, set nedenfor:

$$y(x) = A \cdot e^{r_1 \cdot x} + B \cdot e^{r_2 \cdot x}$$

Jeg indsætter rødderne:

$$\underline{\boldsymbol{y(x) = A \cdot e^{7x} + B \cdot e^{-x}}}$$

Den fuldstændige løsning kan ses ovenfor.

b) Find den løsning til (1), der opfylder begyndelsesværdi-betingelserne y(0)=0 og y'(0)=8.

Jeg benytter den fuldstændige løsning til at finde den bestemte løsning, der opfylder betingelserne:

$$y(0) = A \cdot e^{7 \cdot 0} + B \cdot e^{-0} = A + B = 0$$

$$y'(x) = 7A \cdot e^{7x} - B \cdot e^{-x}$$
$$y'(0) = 7A \cdot e^{0} - B \cdot e^{-0} = 7A - B = 8$$

Jeg isolerer for A og B:

$$A + B = 0 \Leftrightarrow A = -B$$

$$7A - B = 8 \Leftrightarrow 7A = B + 8 \Leftrightarrow -8B = 8 \Leftrightarrow B = -1$$

$$A = -B \Leftrightarrow A = -(-1) = 1$$

Altså: $A = 1$ og $B = -1$. Jeg indsætter disse værdier i den fuldstændige løsning:

$$\underline{\boldsymbol{y(x) = e^{7x} - e^{-x}}}$$

<u>Løsningen kan ses ovenfor.</u>

c) Find den løsning til y til (1) som opfylder at $\boldsymbol{e^x \cdot y(x) = 2}$ for alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

Jeg betragter ligningen, og skriver hele funktionen:

$$e^x \cdot y(x) = 2 \Leftrightarrow e^x \cdot (A \cdot e^{7x} + B \cdot e^{-x})$$

Jeg benytter mig af potensregneregler til at forkorte ligningen:

$$e^x \cdot (A \cdot e^{7x} + B \cdot e^{-x}) = A \cdot e^{7x+x} + B \cdot e^{-x+x} = A \cdot e^{8x} + B$$

Jeg sætter denne ligning lig 2 og betragter den:

$$e^x \cdot y(x) = A \cdot e^{8x} + B = 2$$

$e^x \cdot y(x)$ består af 2 led, set ovenfor. Løsningen opfylder, at ligningen er lig konstanten 2, til enhver x-værdi. B-leddet er konstant i forvejen. A-leddet er dog ikke konstant, og vil variere ved ændring i x-værdi, medmindre $A = 0$. Jeg bestemmer derfor værdien $A = 0$, og løser for B:

$$0 \cdot e^{8x} + B = 2 \Leftrightarrow B = 2$$

Jeg indsætter disse værdier i den fuldstændige løsning:

$$\underline{\boldsymbol{y(x) = 0 \cdot e^{7x} + 2 \cdot e^{-x} = 2 \cdot e^{-x}}}$$

Løsningen for $\boldsymbol{y(x)}$, der opfylder betingelserne, kan ses ovenfor.

Opgave U28

a) **Find den løsning y til den logistiske differentialligning $y' = y - 2y^2$, som opfylder begyndelsesværdi-betingelsen $y(0) = 1$.**

Jeg bestemmer den fuldstændige løsning ved fremgangsmåden præsenteret i afsnit 7.2 af lærebogen. Der beskrives hvordan løsningen $y(x)$ kan bestemmes ved:

$$y(x) = \frac{\frac{b}{a}}{1+A\cdot e^{-bx}} = \frac{\frac{1}{2}}{1+A\cdot e^{-(1)\cdot x}} = \frac{0{,}5}{A\cdot e^{-x}+1}$$

$$y(x) = \frac{1}{\frac{a}{b}+B\cdot e^{b\cdot x}} = \frac{1}{\frac{2}{1}+B\cdot e^{1\cdot x}} = \frac{1}{B\cdot e^{x}+2}$$

$$y(x) = \frac{1}{B\cdot e^{x}+2} = \frac{0{,}5}{A\cdot e^{-x}+1}$$

$$y(0) = \frac{1}{B+2} = \frac{0{,}5}{A+1}$$

Jeg bestemmer A og B vha. mine kendte ligninger:

$$\frac{1}{B+2} = \frac{0{,}5}{A+1} = 1$$

$$\frac{1}{B+2} = 1 \Leftrightarrow B = -1$$

$$\frac{0{,}5}{A+1} = 1 \Leftrightarrow A = -0{,}5$$

Jeg indsætter disse værdier i den fuldstændige løsning:

$$y(x) = \frac{\frac{b}{a}}{1+A\cdot e^{-bx}}$$

$$\boldsymbol{y(x) = \frac{0{,}5}{1-0{,}5\cdot e^{-x}}}$$

<u>Løsningen, der opfylder betingelserne, kan ses ovenfor.</u>

b) Lad y være løsningen fra a). Find grænseværdien $\lim_{x\to\infty} y(x)$

Jeg betragter løsningen fra a), og lader x-værdien gå mod uendelig:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{0{,}5}{1-0{,}5\cdot e^{-x}} = 0{,}5$$

For $\lim_{x\to\infty} e^{-x}$ vil grænseværdien være 0, da en vilkårligt stor negativ værdi som eksponent for Eulers tal vil være et tal vilkårligt tæt på 0:

Derved ved $y(x) = \frac{0{,}5}{1-0{,}5\cdot e^{-x}}$ komme vilkårligt tæt på $y(x) = \frac{0{,}5}{1-0} = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$.

Grænseværdien $\lim_{x\to\infty} \frac{0{,}5}{1-0{,}5\cdot e^{-x}}$ er bestemt til 0,5.