Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Aarhus Universitet
Calculus Tau

Aflevering 12b

Opgaven indeholder ingen Sci2u-del, og består af følgende opgaver, U32 og U33.

$\boxed{\text{Opgave U32}}$ I denne opgave betragtes potensrækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n. \tag{1}$$

Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Opgave U32

Spørgsmål 1: Et af følgende alternativer angiver konvergensradius R for potensrækken (1). Hvilket?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^n$$

Grundet at nævneren altid vil være større end tælleren, uanset hvilken værdi der indsættes for x, så vil det betyde at grænseværdien $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^n$ for en vilkårlig stor x-værdi, vil være 0.

<u>Derfor bestemmes svaret til at være [3]:</u>

$\underline{\boldsymbol{R = \infty}}$

Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Opgave U32

Spørgsmål 2: Betragt funktionen

$$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^n}$$

Angiv den anden afledede af f i 0.

Ved at omskrive udtrykket lidt, kan jeg lettere differentiere udtrykket:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot (-1)^n \cdot (2n)!^{-1}$$

Dette kan også skrives som:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot (-1)^n \cdot (2n)!^{-1} = x^0 \cdot a_0 + x^1 \cdot a_1 + x^2 \cdot a_2 + \cdots + x^n \cdot a_n$$

Hvor

$$a_n = (-1)^n \cdot (2n)!^{-1}$$

Jeg benytter mig af sætning 9.15 i lærebogen, og ved at den differentierede funktion $f'(x)$ kan findes på formen nedenfor:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + \cdots + n \cdot x^{n-1} \cdot a_n$$

Jeg benytter mig af samme sætning til at bestemme den dobbeltafledte:

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \cdot n \cdot a_n \cdot x^{n-2} = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot x + 12a_4x^2 + \cdots + (n-1) \cdot n \cdot x^{n-1} \cdot a_n$$

Jeg bestemmer $f''(0)$:

$$f''(0) = 2 \cdot a_2 + 6 \cdot a_3 \cdot 0 + 12 \cdot a_4 \cdot 0^2 + \cdots + (n-1) \cdot n \cdot 0^{n-1} \cdot a_n = 2a_2$$

Jeg substituerer a_2 med udtrykket fra tidligere:

$$f''(0) = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot \left(\frac{(-1)^2}{(2 \cdot 2)!}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\right) = \frac{2}{24} = \frac{1}{\mathbf{12}}$$

Svaret, der er et helt tal mellem 0 og 99, er bestemt til 12.

Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Opgave U32

Spørgsmål 3: Angiv de første led i Taylor rækken med udviklingspunkt 0 for den afledte $\boldsymbol{f'}$:

$$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{x}}{}-\frac{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{240}}+$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

Udtrykket for $f(x)$ differentieres, og andet led undersøges:

$$a_n=\frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot x^{n-1}$$

De første led i Taylor rækken bestemmes vha. udtrykket ovenfor:

$$f'(x)=\left(1\cdot\frac{-1}{2\cdot 1}\cdot 1\right)+\left(2\cdot\frac{1}{24}\cdot x\right)+\left(3\cdot\frac{-1}{720}\cdot x^2\right)+\cdots$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{x}{\mathbf{12}}-\frac{x^2}{240}+\cdots$$

Det manglende tal i nævneren for taylorrækken er bestemt til at være 12.

Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Opgave U32

Spørgsmål 4: Angiv de første led i Taylor rækken med udviklingspunkt 0 for stamfunktionen F til f som opfylder at F(0) = 0:

$$\boldsymbol{x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{\ } \cdot x^3 - \cdots}$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

Først bestemmes stamfunktionen til $f(x)$:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot a_n \cdot x^{n+1}$$

De første led bestemmes vha. udtrykket ovenfor:

$$F(x) = x - \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1}{2+1} \cdot \frac{(-1)^3}{24} \cdot x^{2+1}\right) - \cdots$$

$$F(x) = x - \frac{1}{4}x^2 + \left(\frac{1}{\mathbf{72}}x^3\right) - \cdots$$

<u>Det manglende tal i nævneren for taylorrækken er bestemt til at være 72.</u>

Opgave U32

Spørgsmål 5: Et af følgende alternativer angiver konvergensradius R for potensrækken (2). Hvilket?

$[\mathbf{1}]\boldsymbol{R} = \mathbf{0}$
$[\mathbf{2}]\boldsymbol{R} = \mathbf{1}$
$[\mathbf{3}]\boldsymbol{R} = \infty$
$[\mathbf{4}]\boldsymbol{R} = \mathbf{2}$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 1 og 4.

For en potensrække på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

Kan konvergensradius bestemmes ved

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(|\frac{a_n}{a_{n+1}}|\right)$$

Såfremt at denne grænseværdi er defineret. I dette tilfælde er $z^n = x^{n+1}$. Grænseværdien undersøges:

$$a_n = \frac{n \cdot (-1)^n}{(2n)!}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right) = \left|\frac{\left(\frac{n\cdot(-1)^n}{(2n)!}\right)}{\left(\frac{(n+1)\cdot(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!}\right)}\right|$$

Da der er tale om den numeriske værdi, må det gælde at parentesen for $(-1)^n$ og $(-1)^{n+1}$ kan ophæves. Brøkerne kan aldrig blive negative, så der opstår ingen problematik ved at ophæve som følgende nedenfor:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n\cdot\frac{1}{(2n)!})}{(\frac{(n+1)\cdot 1}{(2(n+1))!})}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\frac{n}{(2n)!})}{(\frac{n+1}{(2n+2)!})}\right)$$

Jeg benytter herefter at

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Til at omskrive udtrykket:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\frac{n}{(2n)!})}{\left(\frac{n+1}{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!}\right)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\frac{n}{1})}{\left(\frac{n+1}{(2n+2)\cdot(2n+1)}\right)}\right)$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\cdot\big((2n+2)\cdot(2n+1)\big)}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\,n^3+6\,n^2+2\,n}{n+1}\right) = \infty$$

Fra disse omskrivninger ses det let, at grænseværdien må være uendelig. Derfor angives det korrekte svar til at være $[3]\ \boldsymbol{R = \infty}$.

Opgave U32

Spørgsmål 6: Angiv grænseværdien:

$$\lim_{x \to 0} F^{(3)}(x)$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

Jeg bestemmer først $F^{(3)}(x)$. Jeg kender $F(x)$ fra spørgsmål 4):

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot a_n \cdot x^{n+1}$$

Jeg differentierer udtrykket 3 gange:

$$F'(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$F''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

$$F'''^{(x)} = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \cdot a_n \cdot x^{n-2}$$

Det indses, at for $x \to 0$ vil hvert led af sumrækken blive multipliceret med 0, dog med undtagelse af når $n = 2$. Dette vises nedenfor ved beregning af de første led af sumrækken:

$$F'''(x) = (n^2 \cdot a_n \cdot x^{n-2}) + (n^2 \cdot a_n \cdot x^{n-2}) + (n^2 \cdot a_n \cdot x^{n-2}) + \cdots$$

$$F'''(x) = (2^2 \cdot a_2 \cdot x^{2-2}) + (3^2 \cdot a_3 \cdot x^{3-2}) + (4^2 \cdot a_4 \cdot x^{4-2}) + \cdots$$

$$F'''(x) = (2^2 \cdot a_2 \cdot 1) + (3^2 \cdot a_3 \cdot x^1) + (4^2 \cdot a_4 \cdot x^2) + \cdots$$

Grænseværdien for dette udtryk bestemmes:

$$\lim_{x \to 0} F'''(x) = \lim_{x \to 0}\big((2^2 \cdot a_2 \cdot 1) + (3^2 \cdot a_3 \cdot x^1) + (4^2 \cdot a_4 \cdot x^2) + \cdots\big) = 2^2 \cdot a_2$$

Alle andre led end for $n = 2$ vil blive ganget med en faktor gående mod nul. Derved vil grænseværdien være leddet af sumrækken hvor $n = 2$:

$$\lim_{x \to 0} F'''(x) = 2^2 \cdot a_2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\right) = \frac{4}{24} = \frac{1}{\mathbf{6}}$$

Det manglende tal i nævneren for taylorrækken er bestemt til at være 6.

Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Opgave U33

Spørgsmål 1: Find Taylor rækken med udviklingspunkt 0 for funktionen

$$\boldsymbol{g(y) = \frac{1}{1+y}}$$

I det følgende betragter vi funktionen $\boldsymbol{f}$ givet ved

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} = (1-x^2)\cdot g(x^2)}$$

Udtrykket betragtes:

$$g(y) \coloneqq \frac{1}{1+y}$$

Udtrykket kan med fordel deles op i tæller og nævner for at undersøge taylor rækken:

$$u = 1 + y$$

$$g'(y) = -\frac{1}{u^2} = -\frac{1}{(1+y)^2} \qquad g''(y) = \frac{2}{(y+1)^3}$$

$$g'''(y) = -\frac{6}{(y+1)^4} \qquad g''''(y) = \frac{24}{(y+1)^5}$$

Det ses hurtigt at der er en generel følge. Den er bestemt og skrevet op nedenfor:

$$g^{(n)}(y) = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(1+y)^{n+1}}$$

Derved:

$$a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!} = (-1)^n$$

$$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot y^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot y^n}$$

<u>**Taylor rækken for funktionen $\boldsymbol{g(y)}$ kan ses ovenfor.**</u>

Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Opgave U33

Spørgsmål 2: Find Taylor rækken med udviklingspunkt 0 for f //MIN 1. LØSNING

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = (1 - x^2) \cdot g(x^2)}$$

Jeg omskriver udtrykket for $g(x^2)$:

$$g(x^2) = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{1 - (-x^2)}$$

Det vides allerede, at $\frac{1}{1-z}$ kan repræsenteres ved

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

, såfremt $|z| < 1$. Derved kan $g(x^2)$ repræsenteres ved:

$$g(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$$

Derfor:

$$f(x) = (1 - x^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n+2} \right)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} - \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n+2} \right)$$

Udtryk omskrevet med de første led bestemt:

$$f(x) = (1 + (- \cdot x^2) + (x^4) + (-x^6) + \cdots) - (x^2 + (-x^4) + (x^6) + \cdots)$$

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 2x^4 - 2x^6 + \cdots$$

Udtrykket omskrives til generel form:

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$$

Taylor rækken for funktionen $f(x)$ kan ses ovenfor.

Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Opgave U33

Spørgsmål 2: Find Taylor rækken med udviklingspunkt 0 for f //MIN 2. LØSNING

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} = (1-x^2)\cdot g(x^2)}$$

Taylor rækken til funktionen $f(x)$ omkring a er defineret som:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}\cdot(x-a)^3 + \cdots$$

Udtrykket differentieres for at bestemme de første led:

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2+1)^2} \qquad f''(x) = \frac{12x^2-4}{(x^2+1)^3}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-48x^3+48x}{(x^2+1)^4} \qquad f^{(4)}(x) = \frac{240x^4-480x^2+48}{(x^2+1)^5}$$

Disse indsættes i taylor serien:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}\cdot(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\cdot(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\cdot(x-0)^4 + \cdots$$

$$f(x) = 1 + \frac{0}{1!}\cdot(x-0) - \frac{4}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}\cdot(x-0)^3 + \frac{48}{4!}x^4 + \cdots$$

$$f(x) = 1 - 2x^2 + 2x^4 + \cdots$$

Dette udtryk omskrives til en sum ved den generelle regel gældende for rækken:

$$\boldsymbol{f(x)\sum_{n=0}^{\infty}\begin{cases} 1, & n=0 \\ (-1)^n\cdot 2x^{2n}, & n\geq 1\end{cases}}$$

$$\boldsymbol{f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot 2x^{2n}}$$

Taylor rækken for funktionen $f(x)$ kan ses ovenfor.

Opgave U33

Spørgsmål 3: Find den afledede $\boldsymbol{f^{(3)}(0)}$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = (1 - x^2) \cdot g(x^2)}$$

Jeg benytter mig af udtrykket for $f^{(3)}$ bestemt i spørgsmål 2:

$$f^{(3)}(x) = \frac{-48x^3 + 48x}{(x^2 + 1)^4}$$

$$f^{(3)}(0) = \frac{-48 \cdot 0^3 + 48 \cdot 0}{(0^2 + 1)^4} = \frac{0}{1} = 0$$

$\boldsymbol{f^{(3)}(0)}$ er bestemt til 0.

Opgave U33

Spørgsmål 4: Find Taylor rækken med udgangspunkt i 0 for den stamfunktion F til F, som antager værdien $\boldsymbol{F(0) = 1}$

Først bestemmes stamfunktionen:

$$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \qquad F(x) = -x + 2 \cdot \tan^{-1}(x)$$

Taylor rækken til funktionen $f(x)$ omkring a er defineret som:

$$F(x) = F(a) + \frac{F'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{F''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \frac{F^{(3)}(a)}{3!} \cdot (x-a)^3 + \cdots$$

Udtrykket differentieres for at bestemme de første led:

$$F'(x) = -1 + \frac{2}{x^2+1} \qquad F''(x) = -\frac{4x}{(x^2+1)}$$

$$F^{(3)}(x) = \frac{12x^2-4}{(x^2+1)^3} \qquad F^{(4)}(x) = \frac{-48x^3+48x}{(x^2+1)^4}$$

$$F^{(5)} = \frac{240x^4 - 480x^2 + 48}{(x^2+1)^5}$$

Disse indsættes i taylor serien:

$$F(x) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} \cdot (x-0) + \frac{F''(0)}{2!} \cdot (x-0)^2 + \frac{F^{(3)}(0)}{3!} \cdot (x-0)^3 + \cdots$$

$$F(x) = 1 + x + 0 + \frac{-4}{3!}x^3 + 0 + \frac{48}{5!}x^5 \cdots$$

$$F(x) = 1 + x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots$$

Det ses, at denne række har samme adfærd som rækken i spørgsmål 2. Dette er logisk, da de stammer fra samme funktion. Der er dog forskel, da rækken er udtryk ved brøkdele. Dette kan dog også generaliseres:

$$\boldsymbol{F(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}}$$

Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Opgave U33

Spørgsmål 5: Angiv den afledede, $\boldsymbol{F^{(3)}(0)}$

Jeg benytter mig af udtrykket for $F^{(3)}$ bestemt i spørgsmål 4:

$$F^{(3)}(x) = \frac{12x^2 - 4}{(x^2+1)^3}$$

$$F^{(3)}(0) = \frac{12 \cdot 0^2 - 4}{(0^2+1)^3} = \frac{4}{1} = 4$$

$\boldsymbol{F^{(3)}(0)}$ er bestemt til 4.