Aflevering 4b

Øvelse U12. I denne opgave betragtes funktionen

$$f(x,y) = 4x^2y + 5xy^2 + x^3 \ .$$

a) Beregn den partielle afledede f_y af funktionen f mht. y.

Jeg bestemmer den partielt afledede f_y

$$f(x,y) = 4x^2 \cdot y + 5 \cdot x \cdot y^2 + x^3$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f) = 4x^2 + 10xy$$

b) Beregn gradienten $\nabla f(x,y)$ af funktionen f.

Jeg bestemmer gradienten af funktionen f ved at bestemme $\frac{\partial}{\partial x}(f)$ og $\frac{\partial}{\partial y}(f)$. Jeg har allerede bestemt $\frac{\partial}{\partial y}(f)$, og beregner derfor blot $\frac{\partial}{\partial x}(f)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f) = 8 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2 + 3x^2$$

Derved:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \left(8xy + 5y^2 + 3x^2, 4x^2 + 10xy\right)$$

c) Angiv enhedsvektoren $\overline{u}$ i retningen givet ved vektoren $(8, -6)$

Jeg bestemmer først længden af vektoren. Jeg benytter mig af pytagoras formel:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$c = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = c = 10$$

Jeg har bestemt længden for vektoren. Jeg ønsker at bestemme værdierne for enhedsvektoren $\vec{e}$, hvor længden er 1. Derfor:

$$\vec{e} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}}{10} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

d) Udregn den retningsafledede af f i punktet $(2,1)$ i retningen af enhedsvektoren $\overline{u}$ fundet i delspørgsmål c).

Jeg bestemmer den retningsafledte ved benyttelse af sætning 3.10:

$$D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u}$$

$$D_{\vec{u}}f = \begin{bmatrix} 8\cdot x\cdot y + 5\cdot y^2 + 3\cdot x^2 \\ 4\cdot x^2 + 10\cdot x\cdot y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.8 \\ -0.6 \end{bmatrix} = D_{\vec{u}}f = 0.8(8\cdot x\cdot y + 5\cdot y^2 + 3\cdot x^2) - 0.6(4x^2 + 10\cdot x\cdot y)$$

$$D_{\vec{u}}f = 6.4\,xy + 4\,y^2 + 2.4\,x^2 - 2.4\,x^2 - 6\,xy = 0.4\,xy + 4\,y^2$$

Jeg bestemmer den retningsafledte til punktet (2,1):

$$D_{\vec{u}}f(2,1) = 0.4\cdot 2 + 4\cdot 1^2 = 0.8 + 4 = 4.8$$

e) Angiv den enhedsvektor $\overline{v}$, der giver den største retningsafledede af f i punktet $(2,1)$

Jeg bestemmer enhedsvektoren $\vec{v}$ der giver den største retningsafledte af f i punktet (2,1) ved formlen:

$$\vec{v} = \frac{\nabla f(x,y)}{|\nabla f(x,y)|}$$

Jeg bestemmer enhedsvektoren til punktet (2,1):

$$\vec{v} = \frac{\nabla f(2,1)}{|\nabla f(2,1)|} = \frac{\begin{bmatrix} 33 \\ 36 \end{bmatrix}}{\sqrt{33^2 + 36^2}}$$

Jeg udregner udtrykket. Jeg anvender at:

$$\sqrt{(k \cdot x)^2 + (k \cdot y)^2} = k \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{3 \cdot 11^2 + 3 \cdot 12^2} = 3 \cdot \sqrt{11^2 + 12^2}$$

Derved;

$$\vec{v} = \frac{\begin{bmatrix} 33 \\ 36 \end{bmatrix}}{3 \cdot \sqrt{265}} = \begin{bmatrix} \frac{11\sqrt{265}}{265} \\ \frac{12\sqrt{265}}{265} \end{bmatrix}$$

f) Angiv værdien af den største retningsafledede af f i punktet $(2, 1)$

Jeg bestemmer den retningsafledte til punktet (2,1) med benyttelse af sætning 3.10 igen:

$$D_{\vec{v}} f = \nabla f \cdot \vec{v}$$

$$D_{\vec{u}} f(2, 1) = \begin{bmatrix} 36 \\ 33 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{11\sqrt{265}}{265} \\ \frac{12\sqrt{265}}{265} \end{bmatrix} = 3 \cdot \sqrt{265}$$