

Aflevering 10b

Opgave U29

- a) Lad X være et reelt tal. Definer en talfølge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ved at

$$a_n = \frac{n - Xn^3}{n^2 + n^3}.$$

Bestem X så $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent med grænseværdi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -5$.

$$X = \boxed{}.$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

- b) Lad X være et reelt tal. Definer en talfølge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ved at

$$a_n = \frac{n + (2X - 4)(-n)^3}{n + 1}.$$

Bestem X så $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent.

$$X = \boxed{}.$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

- c) Lad X være et reelt tal. Definer en talfølge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ved at

$$a_n = \sin\left(\frac{Xn^2 + 1}{Xn^2 - 1}\right).$$

Bestem X så $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ikke* konvergerer mod $\sin 1$.

$$X = \boxed{}.$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

Opgave U30

Besvar opgaverne a) og b) fra Fag-opgave 5 (Kemi).

Opgave U29

a) Lad X være et reelt tal. Definer en talfølge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ved at

$$a_n = \frac{n - X \cdot n^3}{n^2 + n^3}$$

Bestem X , så $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent med grænseværdien $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -5$.

For at bestemme X , således at betingelserne er opfyldt, betragter jeg udtrykket for a_n , og indser at det er fordelagtigt at opdele brøken.

$$a_n = \frac{n - X \cdot n^3}{n^2 + n^3} = \frac{n}{n^2 + n^3} - \frac{X \cdot n^3}{n^2 + n^3}$$

Udtrykket forkortes

$$\frac{n}{n^2 + n^3} - \frac{X \cdot n^3}{n^2 + n^3} = \frac{1}{n^2 + n} - \frac{X \cdot n}{n + 1}$$

Jeg undersøger grænseværdien for de forskellige led:

Første led:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n} \right) = 0$$

Andet led:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X \cdot n}{n + 1} \right) = X$$

Altså er grænseværdien $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0 - X = -X$. Herfra kan det konkluderes, at $X = 5$ for at opfylde betingelserne. Derfor konstrueres talfølgen som følgende:

$$\left\{ \frac{n - 5 \cdot n^3}{n^2 + n^3} \right\}_{n=1}^{\infty} \Leftrightarrow \left\{ \frac{1}{n^2 + n} - \frac{5 \cdot n}{n + 1} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

Talfølgen kan ses ovenfor.

b) Lad X være et reelt tal. Definer en talfølge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ved at

$$a_n = \frac{n + (2 \cdot X - 4) \cdot (-n)^3}{n + 1}$$

Bestem X , så $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent.

For at bestemme hvornår talfølgen er konvergent, gennemskues der først hvornår talfølgen ikke er konvergent. Udtrykket betragtes, og deles op.

$$\frac{n + (2 \cdot X - 4) \cdot (-n)^3}{n + 1} = \frac{n}{n + 1} + \frac{(2 \cdot X - 4) \cdot (-n)^3}{n + 1} = \frac{n}{n + 1} + \frac{4 \cdot n^3 - 2 \cdot X \cdot n^3}{n + 1}$$

Jeg undersøger grænseværdien for første led:

Første led:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + 1} = 1$$

Det konkluderes, at det første led allerede er konvergerende. Det undersøges hvilken værdi for X , der opfylder at andet led bliver konvergent. Nævneren er ikke konvergerende: Derfor kan det kun opfyldes i tilfældet, hvor tællerens sum er 0. Altså kan jeg fremstille ligningen nedenfor, der opfylder betingelserne:

$$4 \cdot n^3 - 2 \cdot X \cdot n^3 = 0 \Leftrightarrow X = 2$$

Jeg bestemmer derfor værdien X , der opfylder betingelserne, til at være 2. Talfølgen kan ses konstrueret nedenfor:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{n + (2 \cdot 2 - 4) \cdot (-n)^3}{n + 1} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

c) Lad X være et reelt tal. Definer en talfølge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ved at

$$a_n = \sin\left(\frac{X \cdot n^2 + 1}{X \cdot n^2 - 1}\right)$$

Bestem X , så $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ikke konvergerer mod $\sin(1)$.

Ved at betragte ligningen kan jeg konkludere at X bliver brugt som en skalar i både tæller og nævner. Det kan gennemsues at grænseværdien $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ for både tæller og nævner vil gøre hhv. additionen og subtraktionen af 1 i tæller og nævner negligerbar.

Jeg opdeler udtrykket:

$$a_n = \sin\left(\frac{X \cdot n^2 + 1}{X \cdot n^2 - 1}\right) = \sin\left(\frac{X \cdot n^2}{X \cdot n^2 - 1} + \frac{1}{X \cdot n^2 - 1}\right)$$

Opgavens beskrivelse medfører, at det grænseværdien for skrevne ovenfor, altså $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, må være lig $\sin(1)$. Jeg bekræfter dog lige for en god ordens skyld, ved beregning af grænseværdien for hvert led:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X \cdot n^2}{X \cdot n^2 - 1}\right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{X \cdot n^2 - 1}\right) = 0$$

Der skal altså bestemmes en X -værdi, der opfylder at disse leds sum er forskellig fra 1. Det kan gennemsues at dette er muligt for $X = 0$, da dette fjerner de ovennævnte leds mulighed for at negligere de konstante led:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{0 \cdot n^2}{0 \cdot n^2 - 1}\right) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{0 \cdot n^2 - 1}\right) = -1$$

Altså bestemmes X -værdien, der opfylder betingelserne, til at være $X = 0$. Den konstruerede talfølge kan ses nedenfor:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sin\left(\frac{0 \cdot n^2 + 1}{0 \cdot n^2 - 1}\right) \right\}_{n=1}^{\infty} \neq \sin(1)$$

Opgave U30

a) Vis at x_∞ er en løsning til (3)

Funktionsforskriften nedenfor betragtes. Jeg omskriver udtrykket til at være beskrivende for x_{i+1} :

$$f(x) = x^5 - x + 1$$

$$f(x_{i+1}) = \left(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right)^5 - \left(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right) + 1$$

Jeg skal antage at følgen $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ er konvergent, samt sætte $x_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$.

Grænseværdien $\lim_{i+1 \rightarrow \infty} x_{i+1} = x_\infty$ er den samme. Derved:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{i+1}) = f(x_\infty)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\left(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right)^5 - \left(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\right) + 1 \right) = \left(x_\infty - \frac{f(x_\infty)}{f'(x_\infty)}\right)^5 - \left(x_\infty - \frac{f(x_\infty)}{f'(x_\infty)}\right) + 1$$

$$f(x_\infty) = \left(x_\infty - \frac{f(x_\infty)}{f'(x_\infty)}\right)^5 - \left(x_\infty - \frac{f(x_\infty)}{f'(x_\infty)}\right) + 1$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x_\infty = x_\infty - \frac{f(x_\infty)}{f'(x_\infty)}$$

Dette sidste udtryk ses som en ligning. Jeg ønsker at vise, at x_∞ er en løsning til (3). Det vises, at $f(x) = 0$ fra dette udtryk:

$$x_\infty = x_\infty - \frac{f(x_\infty)}{f'(x_\infty)} \Leftrightarrow f(x_\infty) = 0$$

Derved er det vist, at x_∞ er en løsning til sætning (3)

Opgave U30

- b) Benyt Newtons metode, startende med $x_0 = -1$, til at finde en løsning til (2) med 4 decimalers nøjagtighed.**
-

$$f(x) = x^5 - x + 1$$

Jeg starter med $x_0 = -1$. Jeg fortsætter iterativt indtil jeg har 4 decimalers nøjagtighed:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -1 - \frac{(-1)^5 - (-1) + 1}{5 \cdot (-1)^4 - 1} = -1,25$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1,25 - \left(\frac{(-1,25)^5 - (-1,25) + 1}{5 \cdot (-1,25)^4 - 1} \right) \approx -1,178459$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -1,178459 - \left(\frac{(-1,178459)^5 - (-1,178459) + 1}{5 \cdot (-1,178459)^4 - 1} \right) \approx -1,167537$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -1,167537 - \left(\frac{(-1,167537)^5 - (-1,167537) + 1}{5 \cdot (-1,167537)^4 - 1} \right) \approx -1,167304$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = -1,167304 - \left(\frac{(-1,167304)^5 - (-1,167304) + 1}{5 \cdot (-1,167304)^4 - 1} \right) \approx -1,167304$$

Ved x_5 er der ikke sket nogen ændring i for de første 4 decimaler. Løsningen til (2) kan ses nedenfor:

$$f(-1,167304) = (-1,167304)^5 - (-1,167304) + 1 = 0$$