Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910
Aarhus Universitet

Klassisk fysisk, Aflevering 1

Indholdsfortegnelse

Opgave 1) **2**
a) *2*
b) *4*
c) *4*
d) *5*
Opgave 2) **6**
a) *6*
b) *7*
c) *8*
d) *9*

Opgave 1)

a)

Jeg ønsker at dele bevægelsen for flyet op i et x- og y-komponent. Dette simplificerer opgaven. Jeg ved, at den ønskede retning efter kompensering for sidevinden er stik syd. Jeg kender også størrelsen på den ønskede hastighed i retningen syd.

$$v_{ønsket} = \begin{pmatrix} 0 \\ 920\,\dfrac{km}{t} \end{pmatrix}$$

$$v_{vind} = \begin{pmatrix} 150\,\frac{km}{t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{vind} + v_{justering} = v_{ønsket}$$

Fra denne opstillede ligning kan jeg isolere for $v_{justering}$:

$$\begin{pmatrix} 150\,\dfrac{km}{t} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{justering_x} \\ v_{justering_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 920\,\dfrac{km}{t} \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overrightarrow{v_{justering}} = \begin{pmatrix} v_{justering_x} \\ v_{justering_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -150\,\frac{km}{t} \\ 920\,\frac{km}{t} \end{pmatrix}$$

Jeg kender nu størrelsen for x- og y-komponenterne for justeringen. Jeg bestemmer retningen ved at finde vinklen, der dannes med y-aksen. Skitse kan ses nedenfor:

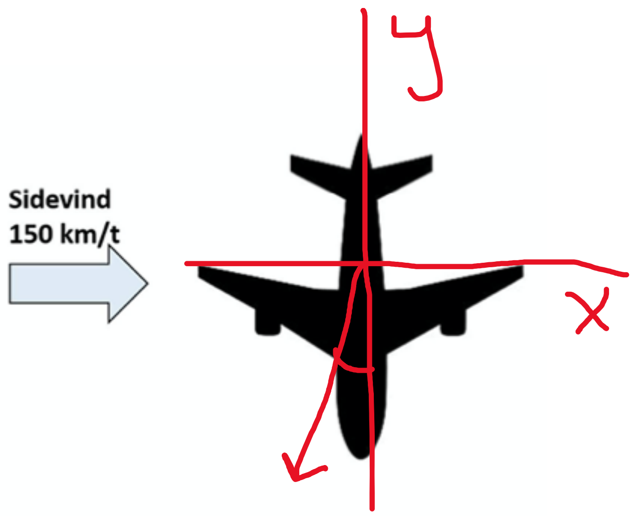
Jeg bestemmer denne vinkel med trigonometri:

$$\sin(v) = \frac{mod}{hyp}$$

Jeg mangler at bestemme hypotenusen (Længden af justeringsvektoren):

$$\left|\overrightarrow{v_{justering}}\right| = \sqrt{\left(150\,\frac{km}{t}\right)^2 + \left(920\,\frac{km}{t}\right)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{v_{justering}}\right| = 932{,}1480\,\frac{km}{t}$$



Jeg kan nu bestemme vinklen:

$$\sin(v) = \frac{150\frac{km}{t}}{932{,}1480\frac{km}{t}} \Leftrightarrow v = 9\,°$$

Dette er vinklen dannet fra y-aksen. Jeg aflæser tilsvarende retning med kompasset:

$$180° + 9° = 189°$$

Flyvemaskinen skal flyve i retningen $189°$ for at kompensere for sidevinden.

b)

I opgave 1.a bestemte jeg størrelsen på justeringsvektoren. Denne størrelse vil være tilsvarende til farten, da det er den samlede mængde hastighed, uafhængigt at retning. Derved:

Flyvemaskinen skal flyve med en samlet fart på $930\ \frac{km}{t}$ for at bibeholde en hastighed på $920\frac{km}{t}$ mod syd.

c)

Jeg bestemmer mit ønskede drop-off punkt ved først at bestemme hvor længe kassen er om at falde til jorden. Der er tale om en konstant acceleration for denne bevægelse, da det er tyngdeaccelerationen der påvirker kassen. Jeg benytter mig derfor af tabel 2.1 fra vores lærebog:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$0m = 450m + 0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \left(-9{,}82\,\frac{m}{s^2}\right) \cdot t^2 \Leftrightarrow t = 9{,}5734s\ \wedge t = -9{,}5734s$$

Jeg anvender den positive løsning, da jeg ikke er interesseret i en negativ tidsmængde. Jeg kan nu bestemme hvor langt kassen flyver frem i x-aksen på denne tid. Dette vil være x-komponenten for distancen fra drop-off pointet til punktet p. Da der ikke er vind/friktion eller lign, så vil hastigheden i x-aksen ikke ændre sig for kassen i løbet af faldet:

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v) \cdot t$$

$$x = 0m + \frac{1}{2}\left(150\,\frac{km}{t} + 150\,\frac{km}{t}\right) \cdot 9{,}5734s = 398{,}89m = 4{,}0 \cdot 10^2 m$$

Kassen skal smides $4{,}0 \cdot 10^2 m$ før punktet p (i x-aksens retning).

d)

Hastigheden i x-aksen:

<u>Som argumenteret i 1.c, så vil hastigheden være konstant for hele faldet. Derfor vil hastigheden være den samme når den rammer jorden, som da den begyndte faldet:</u>

$$\boldsymbol{v_x = 150\,\frac{km}{t}}$$

Hastigheden i y-aksen:

Kassen bliver udsat for en konstant acceleration i y-aksens retning, af tyngdeaccelerationen. Jeg kan derfor bestemme dens hastighed ved brug af tabel 2.1. Jeg angiver tyngdeaccelerationen med et positivt fortegn, da jeg ønsker at finde hastigheden i retningen nedad:

$$v = v_0 + a \cdot t$$
$$v = 0\frac{km}{t} + 9.82\frac{m}{s^2} \cdot 9{,}5734s = 94\frac{m}{s}$$

<u>Kassen rammer jorden med $\boldsymbol{94\,\frac{m}{s}}$ i y-aksens retning.</u>

Opgave 2)

a)

Bilen undgår at falde af banen, såfremt den resulterende krafts y-komponent er ≥ 0 for bilen, fra perspektivet hvor toppen af loopet angiver den største y-værdi for bilens bevægelse. Dette kan også forstås således, at der skal være en normalkraft tilstede før bilen holder sin kontakt med banen. Jeg ønsker derfor at bestemme hastigheden der skal til, før normalkraften bliver vilkårligt tæt på 0. Jeg genkender, at loopet repræsenterer en jævn cirkelbevægelse.

Den resulterende kraft ved toppunktet vil være bestemt ved:

$$F_{res} = \vec{n} + \vec{F_g} = m \cdot \vec{a}$$

Jeg er kun interesseret for y-aksens komponenter i øjeblikket hvor vognen er på toppen. Jeg omskriver min ligning:

$$\vec{n} = n_y = n$$

$$\vec{F_g} = F_y = m \cdot g$$

$$\vec{a} = a_y = \frac{v^2}{r}$$

$$n + m \cdot g = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Jeg isolerer hastigheden i dette udtryk:

$$n + m \cdot g = \frac{m \cdot v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{n \cdot r}{m} + g \cdot r}$$

Jeg undersøger grænseværdien for udtrykket ved normalkraften gående mod 0:

$$v_{min} = \lim_{n \to 0} \sqrt{\frac{n \cdot r}{m} + g \cdot r} = \sqrt{g \cdot r}$$

Jeg kan nu bestemme minimumhastigheden:

$$v_{min} = \sqrt{9.82 \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}21m} = 1{,}436036211 \frac{m}{s}$$

Den mindste fart bilen kan komme rundt i loopet på, er $\mathbf{1{,}4 \frac{m}{s}}$.

b)

Jeg kan bestemme den nødvendige startfart for bilen ved loopet, ved at se på mekaniske sammenhænge:

$$E_{samlet} = E_{pot} + E_{kin}$$
$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$
$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Jeg kan bestemme den samlede energi for når bilen er ved sit toppunkt, ved minimum fart:

$$E_{pot-top} = 0{,}038kg \cdot 9.82\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}21m \cdot 2 = 0{,}1567272J$$

$$E_{kin-top} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}038kg \cdot \left(1{,}436036211\frac{m}{s}\right)^2 = 0{,}03918179998\,J$$

$$E_{samlet_{top}} = 0{,}1567272J + 0{,}03918179998\,J = 0{,}19590899998J$$

Når vi ikke antager nogen luftmodstand, friktion eller anden lign. Påvirkende faktor, så vil den samlede energi være den samme for bilen i punktet hvor en begynder sit loop. Vi ved dog, at den potentielle energi vil være 0 ved dette tidspunkt. Derved kan vi udlede hastigheden:

$$E_{samlet_{top}} = E_{kin_{bund}} = 0{,}19590899998J$$

$$E_{kin_{bund}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 0{,}19590899998J$$
$$\Updownarrow$$
$$v = 3{,}211074586\frac{m}{s}$$

Bilens fart inden loopet, ved tilfældet hvor den har mindst mulig hastighed i toppen af loopet, er $\mathbf{3{,}2\frac{m}{s}}$.

c)

Jeg ønsker at bestemme hvor meget en fjeder skal komprimeres, før bilen opnår en hastighed på $3{,}211074586\frac{m}{s}$ X efter at være accelereret af fjederen. Jeg anvender nogle mekaniske principper til at fastlægge, at den potentielle energi for bilen, når fjederen er komprimeret, må være den samme som den kinetiske energi af bilen efter accelerationen:

$$E_{pot_{før}} = E_{kin_{efter}}$$

Den potentielle energi før fjederens acceleration er givet ved formlen for elastisk potentiel energi:

$$E_{pot_{fjeder}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$
$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Jeg kan nu isolere udtrykket for x:

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot 120\frac{N}{m} \cdot x^2 = 0{,}19590899998J$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 0{,}05714149106m$$

<u>Fjederen skal komprimeres $0{,}057m$ for at bilen opnår mindst mulig fart i toppen af loopet.</u>

d)

Jeg ønsker at bestemme starthastigheden for bilen i det 65cm lange interval, der opfylder at bilen når min tidligere bestemte minimumhastighed. Denne nye starthastighed skal jeg benytte til at bestemme den nye komprimering af fjederen, som gjort i 1.c.

Jeg genkender, at problemet stillet næsten er ens med eksempel 5.8 i vores lærebog. Jeg anvender derfor dette eksempels udledning som præcedens for følgende formel, udledt af formel 2.11:

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{-2 \cdot a_x}$$

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot \mu \cdot g}$$

Jeg isolerer for v_0:

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot \mu \cdot g}$$

$$\Updownarrow$$

$$v_0 = \sqrt{-2 \cdot \Delta x \cdot \mu \cdot g + v^2}$$

$$v_0 = \sqrt{-2 \cdot (0{,}65m - 0m) \cdot 1{,}9 \cdot \left(-9{,}82\frac{m}{s^2}\right) + \left(3{,}211074586\frac{m}{s}\right)^2} = 5{,}879319689\frac{m}{s}$$

Jeg bestemmer den komprimering der skal til, for at opnå en fart på $5{,}879319689\frac{m}{s}$ ved starten af det beskadigede stykke af banen. Jeg benytter mig af samme fremgangsmåde som opgave 1.e:

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot 120\frac{N}{m} \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}038kg \cdot \left(5{,}879319689\frac{m}{s}\right)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 0{,}104623607m \wedge x = -0{,}104623607m$$

Fjederen skal komprimeres $\mathbf{0{,}10m}$, således at der bliver kompenseret for friktion og bilen stadigvæk opnår mindstehastigheden i toppen af loopet.