Andreas Hald Søndergaard Mandøe
AU-id: AU715910

Aarhus Universitet
Calculus Tau

Aflevering 11b

Opgave U31

Opgaven tager udgangspunkt i den uendelige række

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729} - \cdots \tag{1}$$

Opgave U31

a) **Rækken (1) kan skrives på formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Find et udtryk for a_n.**

$$\boldsymbol{a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{X^n}}$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

Fra naturen af rækken, kan jeg se at nævneren bliver 3 gange så stor ved hver iteration af rækken. Da eksponenten bliver n+1 stor for hver ny iteration, så må den konstante værdi med eksponenten n være $X = 3$. Det færdige udtryk kan ses nedenfor:

$$\boldsymbol{a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{3^n}}$$

<u>**Tallet, der opfylder betingelserne, bestemmes til at være 3.**</u>

b) Find summen af den uendelige række (1).

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{3}{X}$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

Den k'te afsnitssum er:

$$s_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \cdots + a_k$$

$$s_k = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots + a_k$$

Jeg kan med fordel bestemme udtrykket for $\frac{1}{3}s_k$. Da jeg har kendskab til alternerende rækker undersøges $\frac{1}{3}s_k$, da det giver egenskaben til at konkludere noget om s_k senere:

$$\frac{1}{3}s_k = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \cdots \pm \frac{1}{3}a_k$$

Det indses at summen af disse rækker må være:

$$s_k + \frac{1}{3}s_k = \frac{4}{3}s_k$$

Da $\frac{1}{3}s_k$ består af samme talrække som s_k, undtaget første led, men med modsat fortegn, må det gælde at $\frac{4}{3}s_k = 1$. Derved bestemmes s_k ved:

$$1 = \frac{4}{3}s_k \Leftrightarrow s_k = \frac{3}{4}$$

<u>Svaret, der er et helt tal mellem 0 og 99, bestemmes til at være 4.</u>

c) Lad $\boldsymbol{a_n}$ være tallene fra spørgsmål a) og b). Find summen af følgende uendelige rækker:
i)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{2^n \cdot a_n}$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

Den k'te afsnitssum er:

$$s_k = 2^0 \cdot a_0 + 2^1 \cdot a_1 + 2^2 \cdot a_2 + 2^3 \cdot a_3 + 2^4 \cdot a_4 \cdots + 2^n \cdot a_k$$

$$s_k = 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \cdots + 2^n \cdot a_k$$

Jeg kan med fordel bestemme udtrykket for $\frac{2}{3}s_k$. Da jeg har kendskab til alternerende rækker undersøges $\frac{1}{3}s_k$, da det giver egenskaben til at konkludere noget om s_k senere:

$$\frac{2}{3}s_k = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots + 2^n \cdot a_k$$

Da $\frac{2}{3}s_k$ består af samme talrække som s_k, undtaget første led, men med modsat fortegn, må det gælde at $\frac{5}{3}s_k = 1$. Derved bestemmes s_k ved:

$$\boldsymbol{1 = \frac{5}{3}s_k \Leftrightarrow s_k = \frac{3}{5}}$$

<u>Svaret, der er et helt tal mellem 0 og 99, bestemmes til at være 5.</u>

ii)

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n}$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

Den k'te afsnitssum er:

$$s_k = (-1)^0 \cdot a_0 + (-1)^1 \cdot a_1 + (-1)^2 \cdot a_2 + (-1)^3 \cdot a_3 + (-1)^4 \cdot a_4 \cdots + (-1)^n \cdot a_k$$

$$s_k = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + (-1)^n \cdot a_k$$

Jeg kan med fordel bestemme udtrykket for $-\frac{1}{3}s_k$. Da jeg har kendskab til alternerende rækker undersøges $-\frac{1}{3}s_k$, da det giver egenskaben til at konkludere noget om s_k senere:

$$-\frac{1}{3}s_k = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots + a_k$$

Da $-\frac{1}{3}s_k$ består af samme talrække som s_k, undtaget første led, men med modsat fortegn, må det gælde at $\frac{2}{3}s_k = 1$. Derved bestemmes s_k ved:

$$\boldsymbol{1 = \frac{2}{3}s_k \Leftrightarrow s_k = \frac{3}{2}}$$

<u>**Svaret, der er et helt tal mellem 0 og 99, bestemmes til at være 2.**</u>

iii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 2^n \cdot a_n$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

Den k'te afsnitssum er:

$$s_k = (-1)^0 \cdot 2^0 \cdot a_0 + (-1)^1 \cdot 2^1 \cdot a_1 + (-1)^2 \cdot 2^2 \cdot a_2 + (-1)^3 \cdot 2^3 \cdot a_3 + (-1)^4 \cdot 2^4 \cdot a_4 \cdots + (-1)^n \cdot 2^n \cdot a_k$$

$$s_k = 1 + \frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots + 2^n \cdot a_k$$

Jeg kan med fordel bestemme udtrykket for $-\frac{2}{3}s_k$. Da jeg har kendskab til alternerende rækker undersøges $-\frac{2}{3}s_k$, da det giver egenskaben til at konkludere noget om s_k senere:

$$-\frac{2}{3}s_k = -\frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \cdots + a_k$$

Da $-\frac{2}{3}s_k$ består af samme talrække som s_k, undtaget første led, men med modsat fortegn, må det gælde at $\frac{1}{3}s_k = 1$. Derved bestemmes s_k ved:

$$\mathbf{1 = \frac{1}{3}s_k \Leftrightarrow s_k = 3}$$

<u>**Svaret, der er et helt tal mellem 0 og 99, bestemmes til at være 3.**</u>

iv)

$$\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\infty}(\boldsymbol{a_n - a_{n-1}})$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

Den k'te afsnitssum er:

$$s_k = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$$

$$s_k = \left(-\frac{1}{3} - 1\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{27} - \frac{1}{9}\right) + \cdots + (-1)^n \cdot a_k$$

Jeg kan med fordel bestemme udtrykket for $-\frac{1}{3}s_k$. Jeg har valgt $-\frac{1}{3}$ som min faktor, da jeg ønsker at bestemme en ny talrække, begyndende med modsat fortegn for andet led af den oprindelige række. $-\frac{1}{3}s_k$ opfylder, at den består af samme talrække som s_k, undtaget første led, og med modsat fortegn:

$$s_k - \frac{1}{3}s_k = \frac{2}{3}s_k$$

Da $-\frac{1}{3}s_k$ består af samme talrække som s_k, undtaget første led, men med modsat fortegn, må det gælde at $\frac{2}{3}s_k = -\frac{4}{3}$ Derved bestemmes s_k ved:

$$\boldsymbol{-\frac{4}{3} = \frac{2}{3}s_k \Leftrightarrow s_k = -\frac{12}{3} = 2s_k \Leftrightarrow s_k = -\frac{6}{3} = -2}$$

<u>**Svaret, der er et helt tal mellem 0 og 99, bestemmes til at være 2.**</u>

d) Lad a_n være tallene fra spørgsmålene a), b), c). Lad k være det største naturlige tal som opfylder, at den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cdot (a_n)^2$$

er konvergent. Find k.

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

Jeg kan beskrive denne talfølge således:

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cdot \left(\frac{(-1)^n}{3^n}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \cdot \left(\frac{(-1)^n}{3^n}\right)^2$$

Jeg indser at denne talfølge kun vil være konvergerende, i tilfældet hvor tælleren er mindre end nævneren. Jeg kan omskrive dette omtryk til lettere at undersøge hvornår dette er tilfældet:

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cdot \left(\frac{(-1)^n}{3^n}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \cdot \frac{1}{3^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \cdot \frac{1}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{9^n}$$

Jeg opstiller ligningen ud fra kriterierne ovenfor:

$$\frac{k^n}{9^n} < 1 \Leftrightarrow k < 9$$

<u>Svaret, der er et helt tal mellem 0 og 99, bestemmes til at være 8.</u>

e) Lad a_n være tallene fra spørgsmålene a), b), c) og k det naturlige tal fra d). Find summen

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} k^n \cdot (a_n)^2}$$

Skriv dit svar, et helt tal mellem 0 og 99.

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} 8^n \cdot \left(\left(\frac{(-1)^n}{3^n}\right)\right)^2 = 9}$$

Den k'te afsnitssum er:

$$s_k = 8^0 \cdot (a_0)^2 + 8^1 \cdot (a_1)^2 + 8^2 \cdot (a_2)^2 + \cdots + 8^n \cdot (a_n)^2$$

$$s_k = 1 \cdot 1^2 + 8 \cdot \frac{1}{9} + 64 \cdot \frac{1}{27} + \cdots + 8^n \cdot (a_n)^2$$

Jeg kan med fordel bestemme udtrykket for $-\frac{8}{9}s_k$. Jeg har valgt $-\frac{8}{9}$ som min faktor, da jeg ønsker at bestemme en ny talrække, begyndende med modsat fortegn for andet led af den oprindelige række. $-\frac{8}{9}s_k$ opfylder, at den består af samme talrække som s_k, undtaget første led, og med modsat fortegn:

$$s_k - \frac{8}{9}s_k = \frac{1}{9}s_k$$

Da $-\frac{8}{9}s_k$ består af samme talrække som s_k, undtaget første led, men med modsat fortegn, må det gælde at $\frac{1}{9}s_k = 1$ Derved bestemmes s_k ved:

$$\boldsymbol{1 = \frac{1}{9}s_k \Leftrightarrow s_k = 9}$$

Svaret, der er et helt tal mellem 0 og 99, bestemmes til at være 9.