Skriftlig aflevering 1b

For fisk, der vandrer langt for at gyde, gælder det om at have så mange energireserver tilbage som muligt, når de når frem. Derfor er det vigtigt at minimere det samlede energiforbrug under vandringen. Energiforbruget pr. tid, og derved også iltoptagelseshastigheden ($\dot{V}_{O_2}$), kan med god tilnærmelse anses for at være eksponentielt afhængende af svømmehastigheden:

$$\dot{V}_{O_2} = a \cdot e^{kv}.$$

Her er v svømmehastigheden og a og k er positive konstanter. Brutto (den totale omkostning) og netto (det der går til selve svømningen) 'Cost of Transport' ($bCOT$ og $nCOT$) er defineret som energiforbruget eller iltforbruget pr. distance og beregnes som:

$$bCOT = \frac{\dot{V}_{O_2}}{v}$$
$$nCOT = \frac{\dot{V}_{O_2} - \dot{V}_{O_2}(0)}{v}$$

hvor $\dot{V}_{O_2}(0)$ er iltforbruget ved hastigheden 0.

1) Find hastigheden v hvor $bCOT$ opnår sit minimum samt den tilhørende minimumsværdi.
2) Find grænseværdien af $nCOT$ når hastigheden v går mod 0.
3) Skitser $\dot{V}_{O_2}$, $bCOT$ og $nCOT$ som funktioner af svømmehastigheden v og angiv på plottet de tre funktioners minimumsværdier, $v_{\min}$, $bCOT_{\min}$, og $nCOT_{\min}$.

Opgave 1)

For at bestemme hastigheden v, hvor b_{COT} opnår sit minimum og tilhørende minimumsværdi, ønsker vi at bestemme hvornår hældningskoefficienten for b_{COT} er 0. Altså differentierer vi udtrykket, sætter udtrykket lig 0 og isolerer v:

$$V_{O_2} = a \cdot e^{kv} \qquad b_{COT} = \frac{V_{O_2}}{v} \qquad b_{COT} = \frac{a \cdot e^{kv}}{v}$$

$$b_{COT}' = \left(\frac{a \cdot e^{kv}}{v}\right)' = \left(a \cdot e^{kv} \cdot \frac{1}{v}\right)' = \frac{a \cdot e^{kv} \cdot k}{v} - \left(a \cdot e^{kv} \cdot v^{-2}\right)$$

$$b_{COT}' = \frac{a \cdot e^{kv} \cdot k}{v} - \left(a \cdot e^{kv} \cdot v^{-2}\right) = a \cdot e^{kv} \cdot \left(\frac{k}{v} - v^{-2}\right) = \frac{a \cdot e^{kv}}{v} \cdot \left(k - v^{-1}\right)$$

Jeg sætter udtrykket lig med nul:

$$b_{COT}' = \frac{a \cdot e^{kv}}{v} \cdot \left(k - v^{-1}\right) = 0$$

Vha. nulreglen kan jeg argumentere for, at $v^{-1} = \frac{1}{v}$ må være lig med k, da parentesen skal give 0 før udtrykket er sandt. Derfor:

$$\frac{1}{v} = k \Rightarrow \frac{1}{k} = v$$

Vi har nu fundet hastigheden v til funktionens minimum. Der er ikke tale om flere mulige løsninger, da leddet $\frac{a \cdot e^{kv}}{v}$ ikke kan være lig med nul. Jeg undersøger funktionen for at vise, at der er tale om et minimum. Dette kan også afledes fra funktionsforskriften. Dette undersøges ved at differentiere den første afledte funktion igen:

$$b_{COT}' = \frac{a \cdot e^{kv}}{v} \cdot \left(k - \frac{1}{v}\right)$$

Jeg benytter produktreglen med 3 funktioner til at finde frem til:

$$b_{COT}'' = a \cdot k \cdot e^{kv} \cdot \frac{1}{v} \cdot \left(k - \frac{1}{v}\right) + a \cdot e^{kv} \cdot \left(-v^{-2}\right) \cdot \left(k - \frac{1}{v}\right) + a \cdot e^{kv} \cdot v^{-3}$$

Jeg indsætter $v = \frac{1}{k}$:

$$b_{COT}'' = a \cdot k \cdot e^{1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{k}\right)} \cdot (k - k) + a \cdot e^{1} \cdot \left(-\frac{1}{k}^{-2}\right) \cdot (k - k) + a \cdot e^{1} \cdot \frac{1}{k}^{-3}$$

Her bør man indse, at de første to led vil være lig 0, da der står $(k - k) = 0$ som del af produktet i begge led. Derved reduceres udtrykket til:

$$a \cdot e \cdot k^{3}$$

Da a og k er konstanter kun består af positive tal, er den anden afledte positiv. Derfor er der tale om et minimumspunkt, da den første afledte funktion til vores undersøgte punkt er lig nul.

For at finde funktionsværdien, altså den tilhørende minimumsværdi, indsætter vi punktet $\frac{1}{k}$ i formlen for brutto Cost of Transport og reducerer udtrykket:

$$b_{COT}(v) = \frac{a \cdot e^{kv}}{v} \Rightarrow \frac{a \cdot e^{k \cdot \frac{1}{k}}}{v} \Rightarrow \frac{a \cdot \mathrm{e}}{k^{-1}} = \frac{a \cdot \mathrm{e} \cdot k}{1} = a \cdot \mathrm{e} \cdot k$$

Punktet hvor b_{COT} opnår sit minimum, samt den tilhørende minimumsværdi vil altså være:

$$(a, a \cdot \mathrm{e} \cdot k)$$

Opgave 2)

Jeg finder grænseværdier af n_{COT} når hastigheden v går mod 0 ved at undersøge om der er en grænseværdi for:

$$\lim_{v \to 0}\left(n_{COT} = \frac{V_{O_2} - V_{O_2}(0)}{v} \right)$$

Jeg omskriver udtrykket for n_{COT}:

$$n_{COT} = \frac{V_{O_2} - V_{O_2}(0)}{v} \qquad n_{COT} = \frac{a \cdot e^{kv} - a}{v}$$

L' Hospitals regel fortæller os at:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)} \right)$$

Jeg angiver tæller og nævner i udtrykket for n_{COT} som hhv. $f(v)$ og $g(v)$, og differentierer begge funktioner, for at kunne undersøge grænseværdien vha. L' Hospitals regel:

$$f(v) = a \cdot e^{kv} - a \qquad f'(v) = a \cdot k \cdot e^{kv}$$

$$g(v) = v \qquad g'(v) = 1$$

Jeg indsætter de differentierede udtryk, og undersøger grænseværdien igen:

$$\lim_{v \to 0}\left(\frac{a \cdot k \cdot e^{k \cdot v}}{1} \right) = \frac{a \cdot k \cdot e^{0}}{1} = ak$$

For $\lim_{v \to 0}(n_{COT})$ er grænseværdien $a \cdot k$