Aflevering 3b

> Opskriv det generelle differentiale for de følgende funktioner og angiv differentialet i punktet $(1, 2)$:
>
> a. $f(x, y) = xy^2$.
>
> b. $f(x, y) = x^2 \sin(\pi y^2)$.

Opgave a)

$$f(x, y) = x \cdot y^2$$

For at bestemme det generelle differentiale af f, bestemmer jeg $df(x, y)$. Først partielt afleder jeg funktionen hhv. med hensyn til x og y :

- For $\frac{\partial f}{\partial x}$ benytter jeg, at y^2 opfattes som en konstant. Altså reglen $(k \cdot x)' = x$:

  $$\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot y^2) = x$$

- For $\frac{\partial f}{\partial y}$ benytter jeg, at x opfattes som en konstant. Altså reglen $(k \cdot x^n)' = n \cdot k \cdot x^{n-1}$:

  $$\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot y^2) = 2 \cdot x \cdot y$$

Det generelle differentiale $df(x, y)$ er derved:

$$df(x, y) = (x)dx + (2 \cdot x \cdot y)dy$$

Differentialet i punktet $(1, 2)$ bestemmes:

$$df(1, 2) = 1\ dx + 2 \cdot 1 \cdot 2\ dy = df(1, 2) = dx + 4\ dy$$

Opgave b)

$$f(x,y) = x^2 \cdot \sin(\pi \cdot y^2)$$

For at bestemme det generelle differentiale af f, bestemmer jeg $df(x,y)$. Først partielt afleder jeg funktionen hhv. med hensyn til x og y:

- For $\frac{\partial f}{\partial x}$ benytter jeg, at $(\sin(\pi \cdot y^2)) = k$. Jeg benytter mig derfor af $(k \cdot x^n) \coloneqq n \cdot k \cdot x^{n-1}$

  $$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cdot \sin(\pi \cdot y^2)) = 2 \cdot x \cdot \sin(\pi \cdot y^2)$$

- For $\frac{\partial f}{\partial y}$ benytter jeg at $x^2 = k$. Derfor benytter jeg mig af $(k \cdot x^n) \coloneqq n \cdot k \cdot x^{n-1}$

  $$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 \cdot \sin(\pi \cdot y^2))$$

Der er tale om en sammensat funktion. Jeg benytter regnereglerne for differentiering af sammensat funktion til at differentiere ($\sin(\pi \cdot y^2)$):

$$h(y) = f'(g(y)) \cdot g'(y)$$

$$f(y) = \sin(y) \qquad f'(y) = \cos(y)$$

$$g(y) = \pi \cdot y^2 \qquad g'(y) = 2 \cdot \pi \cdot y$$

$$h'(y) = \cos(\pi \cdot y^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot y$$

Derved er det partielle differentierede udtryk mht. y:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 \cdot \sin(\pi \cdot y^2)) = x^2 \cdot h'(y) = x^2 \cdot \cos(\pi \cdot y^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot y$$

Det generelle differentiale $df(x, y)$ er dermed:

$$df(x, y) = (2 \cdot x \cdot \sin(\pi \cdot y^2))dx + (x^2 \cdot \cos(\pi \cdot y^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot y)dy =$$
$$df(x, y) = 2\,x \sin(\pi\, y^2)\; dx + 2\,x^2 \cos(\pi\, y^2)\; \pi\, y\, dy$$

Differentialet i punktet $(1, 2)$ bestemmes:

$$df(1, 2) = (2 \cdot 1 \cdot \sin(\pi \cdot 2^2))dx + (1^2 \cdot \cos(\pi \cdot 2^2) \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2)dy =$$
$$df(1, 2) = 4\,\pi\, dy$$