1. 抛骰子

    (a) 3个硬币都是正面的概率
    $P = \frac{1}{8}$

    (b) 刚好有一个正面的概率
    $P = \frac{3}{8}$

    (c) 已知至少有一个正面，求至少有两个正面的概率
    设$X \sim \mathrm{Binom}(3, \frac{1}{2})$，则

$$P(X \geq 2 | X \geq 1) = \frac{P(X \geq 1 | X \geq 2) P(X \geq 2)}{P(X \geq 1)} = \frac{4}{7}$$

2. 算概率
    已知A, C独立，B, C独立，$A \cap B = \emptyset$且:

$$P(A \cup C) = \frac{2}{3}$$
$$P(B \cup C) = \frac{3}{4}$$
$$P(A \cup B \cup C) = \frac{11}{12}$$

    求$P(A), P(B), P(C)$
    由容斥原理

$$\begin{cases} P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) \\ P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) \\ P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{cases}$$

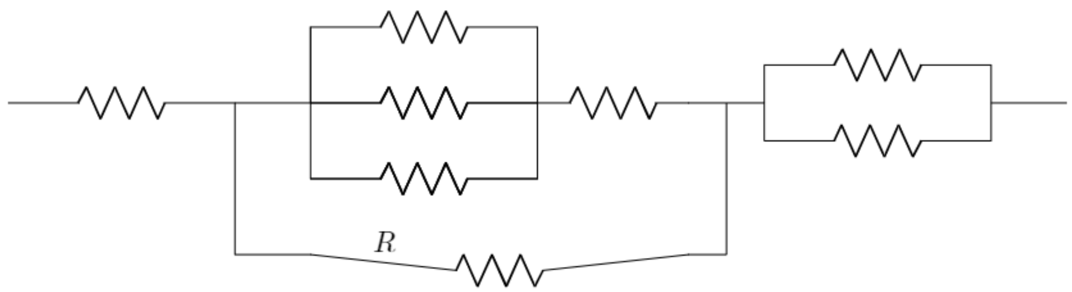
    又由独立性和$A \cap B = \emptyset$

$$\begin{cases} P(A) + P(C) - P(A)P(C) = \frac{2}{3} \\ P(B) + P(C) - P(B)P(C) = \frac{3}{4} \\ P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(C) - P(B)P(C) = \frac{11}{12} \end{cases}$$

    解得

$$\begin{cases} P(A) = \frac{1}{3} \\ P(B) = \frac{1}{2} \\ P(C) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

3. 电路



    称系统运作，当且仅当这个电路为通路。已知每个电阻都有$\frac{1}{2}$的概率工作，并且每个电阻是否工作相互独立。求系统运作的概率。
    假设R工作，概率为$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (1 - (\frac{1}{2})^2) = \frac{3}{16}$
    假设R不工作，概率为$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times (1 - (\frac{1}{2})^3) \times \frac{1}{2} \times (1 - (\frac{1}{2})^2) = \frac{21}{256}$
    故系统运作的概率为$\frac{69}{256}$

4. 季节与女孩
假设生男生女概率都为$\frac{1}{2}$，每一胎相互独立，出生在四个季节概率都为$\frac{1}{4}$，并且季节和男女独立。现在有两个孩子。

   (a) 给定至少有一个男孩，求两个都是男孩的概率
   设X表示男孩的数量的随机变量

$$P(X=2|X\geq 1)=\frac{P(X\geq 1|X=2)P(X=2)}{P(X\geq 1)}=\frac{1}{3}$$

   (b) 给定第一胎或者第二胎是男孩，求都是男孩的概率
   设A_i表示第i胎是男的的事件。

$$P(A_1\cap A_2|A_1\cup A_2)=\frac{P(A_1\cup A_2|A_1\cap A_2)P(A_1\cap A_2)}{P(A_1\cup A_2)}=\frac{1}{3}$$

   (c) 给定第一胎是夏天出生的女孩，求两个都是女孩的概率
   设B_i表示第i胎是女孩，S_i表示第i胎在夏天出生

$$P(B_1\cap B_2|B_1\cap S_1)=\frac{P(B_1\cap B_2\cap S_1)}{P(B_1\cap S_1)}=\frac{1}{2}$$

   (d) 给定第一胎或者第二胎是夏天出生的女孩，求两个都是女孩的概率
   设B_i表示第i胎是女孩，S_i表示第i胎在夏天出生

$$P(B_1\cap B_2\Big|[B_1\cap S_1]\cup[B_2\cap S_2])=\frac{P([B_1\cap S_1]\cup[B_2\cap S_2]\Big|B_1\cap B_2)P(B_1\cap B_2)}{P([B_1\cap S_1]\cup[B_2\cap S_2])}=\frac{(1-(\frac{3}{4})^2)\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{64}}=\frac{7}{15}$$

5. 已知$X\sim\text{Hgeom}(w,b,n)$，试求:(提示:使用 Indicator Variable)

   (a) $E(X)$
   设I_i表示i号球被选中。不妨设$1\sim w$为白球，$w+1\sim w+b$为黑球。
   则$P(I_i=1)=\frac{n}{w+b}$
   则$X=\sum_{i=1}^{w}I_i, E(X)=\frac{wn}{w+b}$

   (b) $E(\binom{X}{2})$
   注意到$E(X^2)=E(\sum_{i=1}^{w}I_i^2+2\sum_{i=1}^{w}\sum_{j=1}^{i-1}I_iI_j)$。
   而$P(I_i=1\cap I_j=1)=\frac{\binom{w+b-2}{n-2}}{\binom{w+b}{n}}=\frac{n(n-1)}{(w+b)(w+b-1)}$。 故$E(X^2)=\frac{wn}{w+b}+\frac{w(w-1)n(n-1)}{(w+b)(w+b-1)}$

   (c) $Var(X)$
   $Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{wn}{w+b}+\frac{w(w-1)n(n-1)}{(w+b)(w+b-1)}-(\frac{wb}{w+b})^2$

6. Monty Hall Problem，你的汽车在三道门的概率分别为$p_3\leq p_2\leq p_1, p_1+p_2+p_3=1$。你选择了某个门后，主持人会等概率打开没有汽车的一扇门展示给你。请问你的最优策略是什么？
假设我选择i号门，主持人开了j号门，另一个门为k号门。设A_x表示汽车在x门后的事件，B_x表示主持人知道我选择了i号门后打开x号门的事件。

$$P(A_i|R_j)=\frac{P(R_j|A_i)P(A_i)}{P(R_j|A_i)P(A_i)+P(R_j|A_j)P(A_j)+P(R_j|A_k)P(A_k)}=\frac{p_i}{p_i+2p_k}$$

同理

$$P(A_k|R_j)=\frac{P(R_j|A_k)P(A_k)}{P(R_j|A_i)P(A_i)+P(R_j|A_j)P(A_j)+P(R_j|A_k)P(A_k)}=\frac{2p_k}{p_i+2p_k}$$

因此，你的策略应当是$2p_k>p_i$时，选择换门。

7. 餐厅优惠大酬宾，第一个来到餐厅而之前有人和你生日相同的人获得免单。请问第几个人免单的几率最大?
   设q_i表示第i个人拿奖的概率。可知

$$q_i = 1 \times \frac{365-1}{365} \cdots \times \frac{365-i+2}{365} \times \frac{i-1}{365}$$

   则令$\frac{q_{i+1}}{q_i} \geq 1$，解得$i \leq 19$。故$q_{20}$是最大值。

8. 投一个公平硬币，如果投到HT就停止。设N表示停止时的长度

   (a) 求$P(N=n)$的递推式
   注意到停下来时，序列必须满足以下形式:

$$\underbrace{TTT\ldots TTH}_{i\text{ pieces}}\underbrace{HHH\ldots HHT}_{j\text{ pieces}}$$

   此处$i, j \geq 1$，设随机变量$X=i, Y=j$，注意到X, Y独立同分布于FS($\frac{1}{2}$)并且$N=X+Y$。
   由$P(X=i)=(\frac{1}{2})^{i-1}\frac{1}{2}$
   因此$P(N=n)=P(X+Y=n)=\sum_{i=1}^{n-1} P(X=i)P(Y=n-i)=(n-1)(\frac{1}{2})^n$。
   所以$P(N=n)=\frac{n-1}{2n-4}P(N=n-1)$

   (b) 求$E(N)$
   $E(N)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)=4$

   (c) 求$Var(N)$
   $E(N^2)=E(X^2+2XY+Y^2)=2E(X^2)+2E(X)E(Y)$。
   对于$E(X^2)=\sum_{i=0}^{+\infty} i^2(\frac{1}{2})^i$，则可令$E(X^2)-\frac{1}{2}E(X^2)=\sum_{i=0}^{+\infty}(2i+1)(\frac{1}{2})^{i+1}$得$E(X^2)=6$。
   故$E(N^2)=20$，$Var(N)=E(N^2)-E(N)^2=4$

   (d) 设Y为投到HH停下来，感性解释为什么$E(Y)>E(N)$
   如果你投了一个H出来，那么以后你只要投一个T就能停止了。