

2 商空間

今回は言葉の定義や教科書の記述を理解すること自体を演習とします。(演習 2.2 以外は教科書に全部答えが書いてありますが, 丸写しではなくなるべく自分の言葉で理解しながら確かめていってください.)

演習 2.1 ベクトル空間 V とその部分空間 W があるとする.

(1) V 上の二項関係 \sim を

$$u \sim v :\Leftrightarrow u - v \in W$$

により定義すると, この関係 \sim が同値関係になることを示せ.

(2) 任意の $v \in V$ に対し, 上記の \sim に関して v が属する同値類 $C(v)$ が教科書の (RC1) ~ (RC3) を満たすことを示せ (6.6 節の最初の方を参照). また逆に, (RC1) ~ (RC3) を満たす任意の V の部分集合 X に対し, ある $v \in V$ が存在して $X = v + W = C(v)$ となることを示せ. (つまり集合として $V/W = V/\sim$ となることを確かめよ.)

(3) V/W の和とスカラー倍およびゼロベクトルの定義を述べ, V/W が確かにベクトル空間の定義を満たしていることを確かめよ.

演習 2.2 教科書 6.6 節の例 (その 1) ~ (その 3) に書いてあることを確かめよ.

演習 2.3 定理 6.16 を証明せよ.