1 平面ベクトル・複素数 の解答例

演習 1.1 (1) $c_1\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1+2c_2=5\\-3c_1+4c_2=3\end{cases}$
$\Leftrightarrow c_1=\frac{7}{5},\ \ c_2=\frac{9}{5}.$

(2) $c_1\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}c_1+2c_2=-1\\-3c_1+4c_2=4\end{cases}$
$\Leftrightarrow c_1=-\frac{6}{5},\ \ c_2=\frac{1}{10}.$

(3) 解き方は上と同様で,

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{2}{5}\boldsymbol{a}_1+\frac{3}{10}\boldsymbol{a}_2,\quad \boldsymbol{e}_2=-\frac{1}{5}\boldsymbol{a}_1+\frac{1}{10}\boldsymbol{a}_2.$$

演習 1.2 (1) まず, $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$ を $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表してみると, $\boldsymbol{e}_1=-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{e}_2=-2\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$ と書ける. よって, 任意の $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ に対して,

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2=-\left(\frac{3}{2}x_1+2x_2\right)\boldsymbol{a}_1-\left(\frac{1}{2}x_1+x_2\right)\boldsymbol{a}_2.$$

(2) ($\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ について) $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-2c_1+4c_2=0\\c_1-3c_2=0\end{cases}\Rightarrow c_1=c_2=0$. よって $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ は線形独立.

($\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3$ について) $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{cases}-2c_1+c_2=0\\c_1+c_2=0\end{cases}\Rightarrow c_1=c_2=0$. よって $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_3$ は線形独立.

($\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ について) $c_1\boldsymbol{a}_2+c_2\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\begin{cases}4c_1+c_2=0\\-3c_1+c_2=0\end{cases}\Rightarrow c_1=c_2=0$. よって $\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は線形独立.

(3) (1) より $\boldsymbol{a}_3=c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2$ を満たす $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ が存在するはず. このとき $c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$ だから, $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ は線形従属である. (具体的には $c_1=-\frac{7}{2}$, $c_2=-\frac{3}{2}$.)

演習 1.3 平面上の任意の点 (x, y) に対して, これに対応する (位置) ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をとる. すると,

(x, y) が求める直線上にある $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}$ が直交する $\Leftrightarrow (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow a_1x + a_2y = 0$ となるから, 求める直線の方程式は

$$a_1x + a_2y = 0$$

である.

演習 1.4

(1)
$$\begin{aligned} z_1z_2 &= |z_1||z_2|(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2) \\ &= |z_1||z_2|\{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \sqrt{-1}(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\} \\ &= |z_1||z_2|\{\cos(\theta_1+\theta_2) + \sqrt{-1}\sin(\theta_1+\theta_2)\}. \end{aligned}$$

(2) まず, 3 つのベクトルを極形式で表すと

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} &= \cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{4}, \\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} &= \cos\frac{2\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}, \\ \sqrt{3}-\sqrt{-1} &= 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + \sqrt{-1}\sin\frac{11\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

である. 一般に, $z = |z|(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$ のとき, $z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + \sqrt{-1}\sin(n\theta))$ となることに注意すれば,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^{100} &= \cos(25\pi) + \sqrt{-1}\sin(25\pi) = -1, \\ \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{100} &= \cos\frac{200\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{200\pi}{3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \\ (\sqrt{3}-\sqrt{-1})^4 &= 2^4\left(\cos\frac{22\pi}{3} + \sqrt{-1}\sin\frac{22\pi}{3}\right) = 16\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) = -8-8\sqrt{-3}. \end{aligned}$$

(3) $z^3 = -1$ のとき, $|z|^3 = |z^3| = 1$ だから, $|z| = 1$ でなければならない. そこで, $z = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ とおくと,

$$z^3 = -1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos(3\theta) = -1 \\ \sin(3\theta) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow 3\theta = \pi + 2n\pi \ \ ({}^{\exists}n : \text{整数}) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2n\pi}{3} \ \ ({}^{\exists}n : \text{整数}).$$

ここで, n が何であろうと z の値は $\theta = \pi, \pm\dfrac{\pi}{3}$ のいずれかの場合と一致するから, 3 乗して -1 となる複素数は $z = -1, \dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{3}$ の 3 つがすべてである.