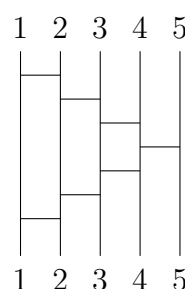
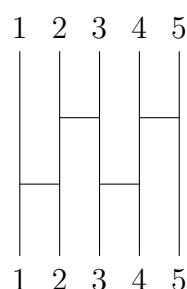


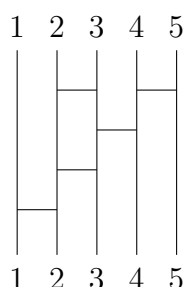
2 置換 の解答例

演習 2.1 (i) $(1, 5, 3, 2, 4)$, 偶置換 (ii) $(1, 4, 5, 2, 3)$, 偶置換(iii) $(1, 3, 5, 2)(4, 6)$, 偶置換 (iv) $(1, 4)(2, 3)$, 偶置換演習 2.2 i 番の縦線と $i+1$ 番の縦線との間に引く横線がちょうど互換 $(i, i+1)$ に対応する. (正解は下記以外にも無数にあり得ます.)

$$(i) (3, 4) \circ (1, 2) \circ (4, 5) \circ (2, 3) \quad (ii) (1, 5) = (1, 2) \circ (2, 3) \circ (3, 4) \circ (4, 5) \circ (3, 4) \circ (2, 3) \circ (1, 2)$$



$$(iii) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2) \circ (2, 3) \circ (3, 4) \circ (2, 3) \circ (4, 5)$$



演習 2.3 S_n 中の偶置換全体の集合を A_n , 奇置換全体の集合を B_n とする. $S_n = A_n \cup B_n$, $A_n \cap B_n = \emptyset$ (空集合¹) で, S_n の元の数 $n!$ 個だから, A_n と B_n の元の個数が等しいことを示せば, その数がちょうど $n!/2$ 個ずつであることがいえる.

A_n と B_n の元の個数が等しいことを証明するには, ある全単射 $f: A_n \rightarrow B_n$ が存在することを示せばよい. そこで, 写像 $f: A_n \rightarrow B_n$ を $\sigma \in A_n$ に対して $f(\sigma) = (1, 2) \circ \sigma$ とすることにより定義する. (σ が偶置換ならば $(1, 2) \circ \sigma$ は奇置換だから, f はちゃんと A_n から B_n への写像になっている.) また同様に, 写像 $g: B_n \rightarrow A_n$ を $\rho \in B_n$ に対し $g(\rho) = (1, 2) \circ \rho$ により定める. そうすると, $(1, 2) \circ (1, 2) = (1)$ (恒等置換) だから, $g \circ f = \text{id}_{A_n}$, $f \circ g = \text{id}_{B_n}$ であることが分かる. よって, 演習 2.3 により f は全単射である. \square

¹つまり A_n と B_n の共通部分がない