7 曲面の面積と面積分

ここでは出てくる関数はすべて C^1 級と仮定する.

$\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S が, $\mathbb{R}^2$ 内の領域 U 上で定義された関数 $P : U \to \mathbb{R}^3$ でパラメータ表示されているとする. このとき S の接平面は P を u, v で偏微分した二つの接ベクトル P_u, P_v で張られる. 教科書の 3 章 4 節に書いてあるように, S の面積 A は, 二つの接ベクトルの張る平行四辺形の面積 $|P_u \times P_v|$ を積分したもので与えられる:

$$A = \int_U |P_u \times P_v| dudv.$$

ここで, $dS = |P_u \times P_v| dudv$ とおき, これを**面素**と呼ぶ.

演習 7.1 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ を $P : (u, v) \mapsto (a \cos v \cos u, a \cos v \sin u, a \sin v)$ $(0 \leq u \leq 2\pi,\ -\pi/2 \leq v \leq \pi/2)$ によりパラメータ表示して, その表面積を計算せよ.

曲面が U 上の関数 $f(x, y)$ を使って $z = f(x, y)$ の形で与えられているときは, $P(x, y) = (x, y, f(x, y))$ と書けば $P_x(x, y) = (1, 0, f_x(x, y))$, $P_y(x, y) = (0, 1, f_y(x, y))$ だから, $P_x \times P_y = (-f_x, -f_y, 1)$ で,

$$dS = |P_x \times P_y| dxdy = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\ dxdy$$

となる. 従って, この場合の曲面の面積は

$$A = \int_U \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\ dxdy$$

で与えられる.

次に, 曲面 S 上で定義された関数 $f : S \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ を考える. P によって U の点と S の点が 1 対 1 に対応していると考えれば, f は U 上の関数とみなすことができる. そのようにして f を $f : U \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto f(u, v)$ と書きなおしたとき, 積分

$$\int_U f(u, v) dS$$

は f を S 上で積分したものと考えることができる. これを f の**面積分**と呼ぶ.

演習 7.2 次で与えられる曲面 S と S 上の関数 $f : S \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ について, 面積分 $\displaystyle\int_U f(u, v) dS$ を求めよ.

(1) $S : 2x + y + 2z = 6$ $(0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2)$, $f(x, y, z) = 4x + 3y - 2z$

(2) $S : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ $(z \geq 0)$, $f(x, y, z) = z$