

## 6 (行) 基本変形と基本行列 の解答例

演習 6.1 (1) 第 1 行と第 3 行を入れ替える. 結果:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

(2) 第 2 行に第 1 行の  $-3$  倍を加える. 結果:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

(3) 第 3 行に第 1 行の  $-1$  倍を加える. 結果:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

(4) 第 2 行を  $1/2$  倍する. 結果:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

(5) 第 3 行に第 2 行の  $-3$  倍を加える. 結果:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

演習 6.2 (1)  $E_{24}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (2)  $E_{32}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3)  $E_2(1/3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (4)  $E_{21}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5)  $E_{12}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (6)  $P_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

演習 6.3  $A$  に施した基本変形に対応する基本行列を順番に  $Q_1, \dots, Q_r$  とすると,

$$Q_r \cdots Q_1 A = B.$$

$Q_1, \dots, Q_r$  はすべて正則行列であるから, 左から  $Q_r^{-1}, \dots, Q_1^{-1}$  を順番にかけて

$$A = Q_1^{-1} \cdots Q_r^{-1} B$$

を得る. ここで, 正則行列の積は正則行列だから,  $B$  が正則ならば  $A$  も正則である.  
(実際,  $A$  には逆行列  $A^{-1} = B^{-1} Q_r \cdots Q_1$  が存在する.)

演習 6.4 以下はほんの一例です. たぶん最短ではないと思います.

$$E_{13}(3)E_{23}(-3)E_{14}(1)E_{24}(-2)E_{43}(-6)E_{34}(-1)E_{42}(-2)E_{32}(-1)P_{24}E_{41}(-1)E_{31}(-3) \\ E_{21}(-3)P_{12} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4.$$

つまり次のように基本変形を施す:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 12 & 5 \\ 0 & 1 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 10 & 3 \\ 0 & 2 & 12 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(1つの矢印で2回以上の基本変形を表しているところもあります.)