

14. 既約多項式

前回同様 K は $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のいずれかとし, 多項式環 $K[X]$ を考える.

問題 14.1. 多項式 $f(X) \in K[X]$ (ただし $\deg f(X) \geq 1$) について, 次が同値であることを示せ.

- (a) $f(X)$ は既約多項式である.
- (b) $f(X)$ で生成されるイデアル $\langle f(X) \rangle$ は素イデアルである.

問題 14.2. (1) $f(X) \in K[X]$, $2 \leq \deg f(X) \leq 3$ とする. このとき $f(X)$ が既約多項式であるための必要十分条件は, すべての $a \in K$ に対し $f(a) \neq 0$ となることであることを示せ.

(2) $K = \mathbb{R}$ のとき, すべての $a \in \mathbb{R}$ に対し $f(a) \neq 0$ となるが, 定数でも既約多項式でもないような $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ の例を挙げよ.

問題 14.3. (教科書の問題 2.21 の類題) 実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を

$$\alpha^3 = -2 + \sqrt{3}, \quad \beta^3 = -2 - \sqrt{3}$$

を満たすようにとる (それぞれ唯一つ存在する). このとき $f(X) = X^3 - 3X + 4 \in \mathbb{R}[X]$ について, 次に答えて $f(X)$ が $\mathbb{R}[X]$ において既約でないことを確かめよ.

- (1) $f(\alpha + \beta) = 0$ であることを示せ.
- (2) $f(X) = (X - a)(X^2 + bX + c)$ を満たす実数 a, b, c を求めよ.

問題 14.4. 多項式 $f(X) \in K[X]$ について, $f(X)$ が既約多項式であることと $f(X+1)$ が既約多項式であることは同値であることを示せ.

問題 14.5. (1) $f(X) = X^2 + X + 1$ が $\mathbb{Q}[X]$ において既約であることを示せ.

(2) $f(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ が $\mathbb{Q}[X]$ において既約であることを示せ.

(3) 一般に, p を素数とすると, $f(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + 1$ は $\mathbb{Q}[X]$ において既約であることを示せ.

[ヒント] 問題 14.4 により, $f(X+1)$ が既約であることを示せばよい. $f(X) = (X^p - 1)/(X - 1)$ だから $f(X+1) = ((X+1)^p - 1)/X$ となることに注意.

問題 14.6. 次の多項式が $\mathbb{Q}[X]$ において既約かどうかを判定せよ.

- (1) $X^3 + 4X^2 + 2X + 2$
- (2) $X^3 + 2X + 4$
- (3) $X^3 - 6X - 9$
- (4) $2X^4 + 6X^3 + 12X + 30$
- (5) $2X^5 + 20X^4 + 30X^2 + 10X + 5$