線形代数基礎演習 (担当: 天野勝利) 2006 年 5 月 2 日

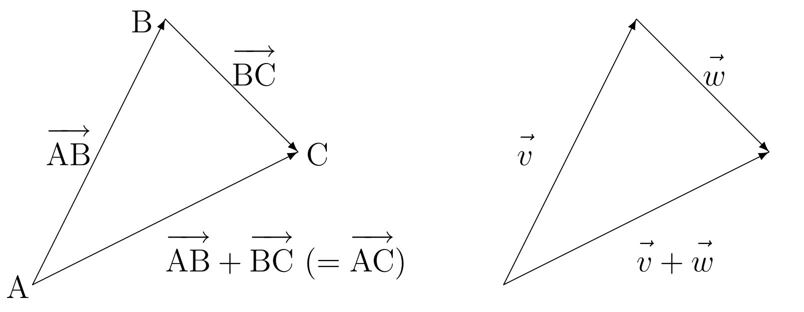
# ベクトルの加法とスカラー倍

ベクトルという概念は力学で用いられる物理量を表現するために生まれ, その後しだいにいろいろな他の分野にも応用されるようになったものです. 力学の理論展開 (幾つかの物理量の間に成立する法則を述べたり, ある現象に付随する物理量たちの相互の関係を調べたり) のためには, 幾つかのベクトルを組み合わせたり, スカラーとベクトルを組み合わせたり, といった操作が必要になります. 具体的には, これからお話しする[1] **ベクトルの加法**や**スカラー倍**, また今度お話しする予定の**内積**や**外積**, それからこの講義では扱いませんが**ベクトルの微分や積分**が重要です. こういった操作がとてもうまく機能して (微分がベクトルの加法やスカラー倍を保存する, つまり線形作用である, 等々), 力学の理論をより簡明に記述するのに成功したため, 今ではベクトルは欠かせない概念となっているわけです.

## 1 ベクトルの加法

### 1.1 ベクトルの和

まず, 変位ベクトルの和について考えてみましょう. 例えば, ある人が東に 3 km 歩いた後, さらに東に 5 km 歩いたら, 結局その人は東に $3+5$ km 歩いたことになりますが, そういうことの一般化として定義します. 質点が点 A から点 B に移動した後で, さらに点 B から点 C に移動したときの位置の変位を, それぞれの段階ごとの変位ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の和 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とする. (この場合, これは「点 A から点 C に移動したときの変位」なので, 実は $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ に他ならない.)




これと同様に, 一般のベクトルの和も次のように定義します: ベクトル $\vec{v},\vec{w}$ について, $\vec{v}$ の終点と $\vec{w}$ の始点をそろえて描いたときに, $\vec{v}$ の始点から $\vec{w}$ の終点へ行くベクトルを $\vec{v}+\vec{w}$ とする.

では, これを成分表示で書いてみるとどうなるでしょうか? つまり, $\vec{v}=(a,b)$, $\vec{w}=(c,d)$ と成分表示されているとすると, $\vec{v}+\vec{w}$ はどのような成分表示をもつベクト

[1] といっても講義ではすでにやっていますが (プリント作成が遅れているので… )

ルでしょうか? 成分表示とは, そのベクトルを (変位ベクトルと考えたときに) 「$x$ 軸方向の変位」と「$y$ 軸方向の変位」に分解して表示しているものであることを思い出しましょう. ベクトルの和をとる操作を, $x$ 軸方向と $y$ 軸方向に分解すると, $x$ 軸方向には「$a$ 進んだ後, $c$ 進む」＝「$a+c$ 進む」となり, $y$ 軸方向には「$b$ 進んだ後, $d$ 進む」＝「$b+d$ 進む」となるので, 結局,

$$\vec{v}+\vec{w}=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

という結論になります (代数的には, これをベクトルの和の定義と思っても良いです). つまり, 単に成分ごとに足し算をすれば良いわけです. とくに今の考察からみてとれることとして, ベクトルを足す順番を変えても, 和は同じベクトルになる, ということがあります:

$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}.$$

これは**可換法則**と呼ばれます. 他に, これも少し考えてみると分かるのではないかと思いますが,

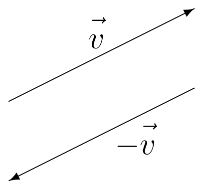
$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})\ (=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\ \text{と書く})$$

が成り立ちます. つまり, $\vec{u}$ と $\vec{v}$ との和をとってその結果と $\vec{w}$ との和をとってできるベクトルと, $\vec{v}$ と $\vec{w}$ の和をとってその結果と $\vec{u}$ との和をとってできるベクトルとは等しい, というわけです. 両者が等しいのでカッコをとって $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ と書いてしまうこともあります. これは**結合法則**と呼ばれています.

結合法則と可換法則を満たす演算のことを一般に「加法」と呼びます. だからこの節のタイトルも「ベクトルの加法」としているわけです.

### 1.2 逆ベクトル, ゼロベクトル

数の足し算引き算が自由にできるようになるには, 負の数や 0 の概念が必要となりますが, ベクトルにおいてこれに該当するのが**逆ベクトル**と**ゼロベクトル**です. ベクトル $\vec{v}$ に対して, $\vec{v}$ と大きさが等しく向きが反対のベクトルを $-\vec{v}$ と書いて, $\vec{v}$ の逆ベクトルと呼びます.




$\vec{v}=(a,b)$ のとき,
$-\vec{v}=-(a,b)=(-a,-b)$

成分表示で書くならば, $\vec{v}=(a,b)$ のとき, $-\vec{v}=(-a,-b)$ となります. 「$x$ 軸方向に $-a$ 進み, $y$ 軸方向に $-b$ 進む」あるいは「$x$ 軸方向に $a$ 戻り, $y$ 軸方向に $b$ 戻る」ベクトルというわけです.

さて, $\vec{v}$ と $-\vec{v}$ との和をとると, $\vec{v}+(-\vec{v})=(0,0)$ という, 大きさがゼロの, いわば「動かない」ベクトルがでてきます. 大きさがゼロのベクトルを**ゼロベクトル**(零ベクトル[2]) といい, (スカラーの 0 と区別するために) 太文字で $\mathbf{0}$ とか上に矢印をつけて $\vec{0}$ などと書きます. しかし面倒臭いときはゼロベクトルを 0 と書いても大抵は通じるので, 誤解の恐れがなければそれでも良いです.

変位ベクトルで言うと, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の逆ベクトルというのは「点 B から点 A まで移動したときの位置の変位」すなわち $-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ となります. 二つの和をとると, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ で, この $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$ がゼロベクトルとなるわけです. (この場合は「動かない」というよりは,「点 A から点 B に移動した後, 点 B から点 A へ移動したので, 位置の変位という視点でみると, 結局点 A から動かなかったことと同じだね」という感じ.)

あるベクトル $\vec{v}$ とゼロベクトルとの和は, 和の定義を考えれば当然ですが, もとのベクトル $\vec{v}$ と同じものになります:

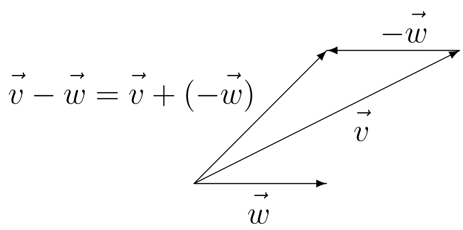
$$\vec{v}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}, \qquad (a,b)+(0,0)=(0,0)+(a,b)=(a,b).$$

成分表示も $\vec{0}=(0,0)$ ですから, 各成分ごとに 0 を足す, ということでまったく変わらないわけです.

### 1.3 ベクトルの差

ベクトル $\vec{v}$ と $\vec{w}$ が与えられたときに, ベクトルの差 $\vec{v}-\vec{w}$ というのはどういう意味を持つベクトルとして定義すべきでしょうか? これには二通りの考え方があって, どちらの考え方で定義しても結論は同じものになります.

第一の考え方は単純に, $\vec{v}$ と, $\vec{w}$ の逆ベクトル $-\vec{w}$ との和と考えるものです. つまり, $\vec{v}-\vec{w}=\vec{v}+(-\vec{w})$ とする.

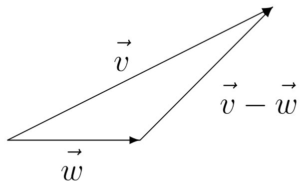



教科書ではこれでベクトルの差を定義していますし, 定義としてはこれで良いのですが, ここでは後々の応用のために, もう少し別の観点からベクトルの差を考えておくことにします. それが第二の考え方です.

[2]余談ですが, 「零ベクトル」書いた場合は「れいべくとる」と読んでください. 零の読みは「ゼロ」ではなくあくまで「れい」です. といっても私などは「通じればどっちでもいいじゃん」と思ってしまう方ですが…

第二の考え方は, $\vec{v}-\vec{w}$ を「$\vec{w}$ を足すと $\vec{v}$ になるベクトル」とするものです. つまり, 下の四角のところに入るベクトルです.

$$\vec{w}+\boxed{\ ??\ }=\vec{v}$$




で, それは何か? ということを考えてみると, $\vec{w}$ の終点から $\vec{v}$ の始点に向かうベクトルがそれだということがわかります. この考え方は, 後で位置ベクトルと変位ベクトルの関係 ($\varDelta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$) について考えるときに役に立つと思います. さっきの図と比べてみると, $\vec{v}+(-\vec{w})$ を平行移動したものに見えますが……実際同じベクトルであることを代数的に確かめてみることにします. そこで,

$$\vec{w}+\vec{x}=\vec{v}$$

を満たすベクトル $\vec{x}$ を代数的に求めてみましょう. これは, 一次方程式を解くのと似たような方法で求めることができます. つまり, 左辺の $\vec{w}$ を右辺に「移項」します. 両辺に $-\vec{w}$ を足すと, 左辺は (分配法則と交換法則を思い出して) $\vec{w}+\vec{x}+(-\vec{w})=\vec{w}+(-\vec{w})+\vec{x}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}$ となるので,

$$\vec{x}=\vec{v}+(-\vec{w})$$

を得る. よって, さっきの定義と同じものだということが確認できます[3].

ところで, ベクトルの差を成分表示で表すとどうなるかというと, $\vec{v}=(a,b)$, $\vec{w}=(c,d)$ とすると, $-\vec{w}=(-c,-d)$ でしたから,

$$\vec{v}-\vec{w}=(a,b)+(-c,-d)=(a-c,b-d)$$

となります. つまり, 各成分について引き算したものになるわけです.

## 2 ベクトルのスカラー倍

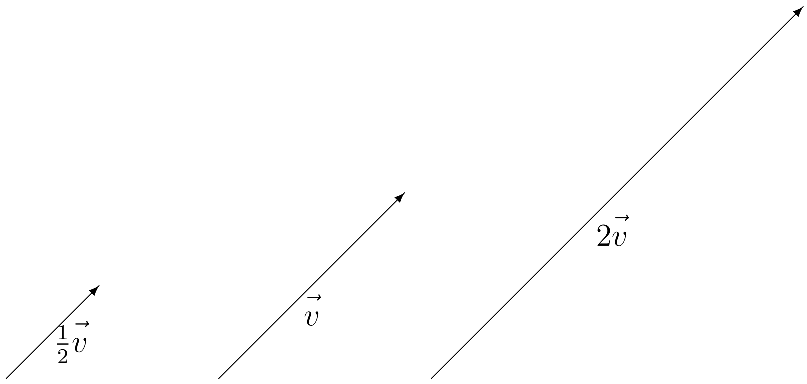
力学で用いる物理量に**運動量**というものがありますが, それは次のように定義されます:

$$(\text{運動量})=(\text{質量})\cdot(\text{速度}).$$

ここで, 質量はスカラー, 速度はベクトルです. これはベクトルのスカラー倍というものであって, 運動量はベクトルになります.

[3]先日の講義では, $\vec{v},\vec{w},\vec{x}$ をそれぞれ成分表示して, 連立方程式を解いて確認しましたが, このように説明した方が良かったかもしれません. まあ, 本質的には同じことをやっているわけですが.

ベクトルのスカラー倍はどうやって定義するのかというと, まず $k$ を正の数 (スカラー), $\vec{v}$ をベクトルとするとき, 向きが $\vec{v}$ と等しく大きさが $k|\vec{v}|$ ($\vec{v}$ の大きさの $k$ 倍) のベクトルを $k\vec{v}$ と書き, $\vec{v}$ の $k$ 倍とします.




成分表示で書くと, $\vec{v} = (a, b)$ のとき, $k\vec{v} = (ka, kb)$ となります. 成分ごとに $k$ をかけるわけです. また, $k = 0$ のときの $k\vec{v}$ は, 大きさが 0 倍のベクトルということで, ゼロベクトルとします. それから, $k$ を正の数とするとき, $(-k)\vec{v}$ は $k\vec{v}$ の逆ベクトルとして定義します. つまり, $\vec{v} = (a, b)$ とするとき, $(-k)\vec{v} = -k\vec{v} = -(ka, kb) = (-ka, -kb)$ です. だから, 一般に, $k$ が正の数でも負の数でも 0 であっても, スカラー倍は $k(a, b) = (ka, kb)$ となります.

## 3　成分表示によるまとめ

今までの話を成分表示についてまとめてみると,

| | | |
|---|---|---|
| ベクトルの和: | $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ | (←成分ごとの足し算) |
| ベクトルの差: | $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$ | (←成分ごとの引き算) |
| スカラー倍: | $k(a, b) = (ka, kb)$ | (←成分ごとにスカラーをかける) |

となります. これまで幾何的な意味から説明してきたので少々長くなりましたが, 代数的な計算としては非常に簡単であって, これだけです.

## 4　可換法則, 結合法則, 分配法則など

以上述べてきたベクトルの加法とスカラー倍について, 次のことが成り立ちます. $k, l$ をスカラー, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ をベクトルとするとき,

(i) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,　(ii) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$,
(iii) $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$,　(iv) $(k + l)\vec{v} = k\vec{v} + l\vec{v}$,
(v) $(kl)\vec{v} = k(l\vec{v})$.

(i) は既に述べた可換法則 (または交換法則), (ii) は結合法則です．また, (v) のようなものも結合法則と言います．(iii), (iv) のようなものは**分配法則**と呼ばれます．各々の式の両辺はそれぞれ幾何的には別々のニュアンスをもつベクトルであるわけですが, 成分表示して両方を表示してみると同じベクトルであることがわかります (各自, 確かめてみてください).

…と , いきなり沢山数式が出てきて少し戸惑ってしまうかもしれませんが, 要するに, ここで何が言いたいのかといいますと, つまり, ベクトルの計算は, みなさんが「数学基礎演習」の授業で練習している, 整式 (多項式) の加法, 減法, 積, と大体同じようなセンスでやってしまっても良い, ということです．スカラーとベクトルの区別はきちんと意識しておく必要がありますが, 代数的な計算の際には「分配法則を使って展開」とか「同類項をまとめる」とか, 先程もやったように「移項」をするとかいったことが自由にできるわけです. それについてはこの講義の演習で身につけていきましょう.

## 5　オマケ

スペースが余ったので, オマケとして, 最初の講義で板書した, 力学で用いられる物理量の図式をここに再録しておきます.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{位置の変位} \arrow[dr, dashed, "\frac{1}{\Delta t}\text{倍 (スカラー倍)}"] & & \\
\text{位置ベクトル} \arrow[ur, dashed] \arrow[rr, "\frac{d}{dt}"] & & \text{速度} \arrow[r, "\frac{d}{dt}"] \arrow[d, "\text{質量倍 (スカラー倍)}"'] & \text{加速度} \arrow[d, "\text{質量倍 (スカラー倍)}"] \\
 & & \text{運動量} & \text{力}
\end{tikzcd}
$$

矢印の根元の方にある「位置ベクトル」や「位置の変位」がベクトルであるため, それらに微分やスカラー倍を施した他の物理量もベクトルになるわけです. ただしこれは, 各物理量の相関関係を大雑把に図式化したにすぎないものなので, それぞれの定義や関係については力学を勉強するときに詳しく学んでください. 例えば「質量倍」と書いている二本の矢印について, 「(運動量)=(質量)・(速度)」は運動量の定義である一方, 「(力)=(質量)・(加速度)」はニュートンの法則というものですが「力の定義」と言うとやや語弊があるかも.