6 行列式の性質 (その３) の解答例

いつも前回の問題を解説するのに時間をとられすぎているので, やはりプリント化することにしました.

演習 6.1 やり方はいろいろあるので, 以下はほんの一例です.

(i) 第１行に関して余因子展開:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 8 \end{vmatrix} = -3(8-16) = 24.$$

(ii) 第２列, 第３列から第１列を引いた後で第１行に関して余因子展開:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -20.$$

(iii) 第３行に関して余因子展開:

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -4(24+4+8-18) = -72.$$

(iv) 第４列に関して余因子展開:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-4-4+3+4+2-6) = -10.$$

演習 6.2

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$
$$A_{21} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix},$$
$$A_{31} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{33} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

より,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} |A_{11}| & -|A_{21}| & |A_{31}| \\ -|A_{12}| & |A_{22}| & -|A_{32}| \\ |A_{13}| & -|A_{23}| & |A_{33}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 5 \\ 14 & -2 & -6 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

また, $|A| = 2|A_{11}| - 2|A_{12}| + (-1)|A_{13}| = 2$ だから,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} -11 & 2 & 5 \\ 14 & -2 & -6 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/2 & 1 & 5/2 \\ 7 & -1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

演習 6.3 (i) 第2行, 第3行から第1行を引いて,

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \\ x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1) \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 \\ 1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\{(x_3 + x_1) - (x_2 + x_1)\} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

(ii) 曲線 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ が3点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ を通るためには, a_0, a_1, a_2 が

$$\begin{cases} y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \\ y_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 \\ y_3 = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 \end{cases}$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

を満たすことが必要十分である. ここで, $X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}$ とおくと, x_1, x_2, x_3 が互いに異なることと (i) より, $\det X \neq 0$ であることがわかる. よって, X は正則行列で, 逆行列 X^{-1} が存在する. 式 (6.1) の両辺に左から X^{-1} をかければ,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = X^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

を得る. 条件を満たす a_0, a_1, a_2 はこれひとつしかないので, 3点を通る $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ の形の曲線は唯一つだけ存在する.