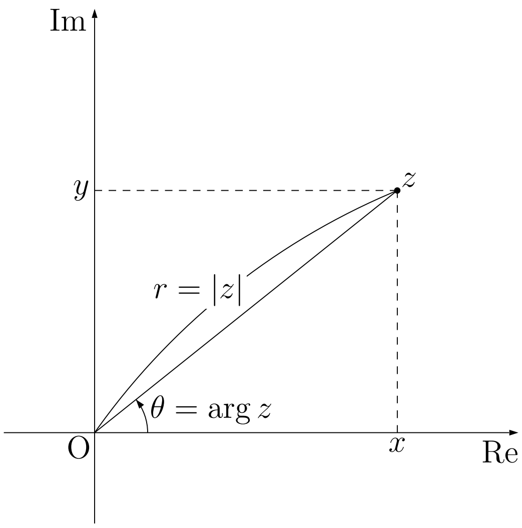
3　複素関数論からの準備

後期の「数学特論 II」で扱うリーマンゼータ関数やガウスの超幾何関数を十分に理解するには, 複素関数論の知識が欠かせない. また, これまでに学んできたベルヌーイ多項式 (とその母関数) やガンマ関数についても, 複素関数として改めてとらえ直しておきたい. そこで, 本章では複素関数論の概略をおさらいしていくことにする (定理の証明などは適当に省略するので, 詳細が知りたい場合は複素関数論の本 (例えば [3], [4, 第 5 章] など) を参考にしてほしい). また, [1], [2], [4, 第 5 章] を参考にして, ベルヌーイ多項式やガンマ関数に関して複素関数論を駆使して新たに得られる事項を補足する.

3.1　複素平面



実数の組 (x, y) に対して定まる複素数

$$z = x + \sqrt{-1}\, y$$

について, x を z の**実部** (**実数部分**), y を z の**虚部** (**虚数部分**) といい,

$$\mathrm{Re}\, z = x, \quad \mathrm{Im}\, z = y$$

と書く. そして, 座標平面の横軸座標に実部, 縦軸座標に虚部をとって, 平面内の点として複素数 z を表すことにする. このようにして複素数を表す平面を**複素平面**といい, 横軸を**実軸**, 縦軸を**虚軸**と呼ぶ.

複素数 $z = x + \sqrt{-1}\, y$ を極座標 (r, θ) で表すとき, r を z の**絶対値**といい,

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

と書く. θ は z の**偏角** (argument) といい,

$$\arg z = \theta$$

で表す. 上の図では $\theta = \arctan \dfrac{y}{x}$ となっているが, 偏角はただ一通りには決まらず, ある角 θ_0 をとるなら $\theta_0 + 2n\pi$ (n は任意の整数) のいずれをとってもよい. また, $z = 0$ に対しては偏角は定義されない. 偏角を一通りに定めたい場合は, 通常 $0 \leq \theta < 2\pi$ あ

るいは $-\pi < \theta \leq \pi$ に制限して用いる (どの範囲に制限するかはその都度決める). それを $\operatorname{Arg} z$ と書き, 偏角の**主値**ということがある.

$z \neq 0$ のとき, 絶対値 r と偏角 θ を用いると, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ なので,

$$z = r\cos\theta + \sqrt{-1}\, r\sin\theta$$

と書ける. これを複素数 z の**極形式**という.

演習 3.1 $\bar{z} = x - \sqrt{-1}\, y$ を z の**共役複素数**という. 次を示せ.

(1) $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$,

(2) $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{1}{2\sqrt{-1}}(z - \bar{z})$.

演習 3.2 2 つの複素数 z_1, z_2 に対し, 次を示せ.

(1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$,

(2) 2π の整数倍の差を除き $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$,

(3) $z_2 \neq 0$ のとき, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$,

(4) $z_2 \neq 0$ のとき, 2π の整数倍の差を除き $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

2 つの複素数 z_1, z_2 の間の距離を $|z_1 - z_2|$ で定めることにより, 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ は距離空間となる. これは, 複素平面を 2 次元ユークリッド距離空間 $\mathbb{R}^2$ と同一視して得られる距離と同じものである. 複素数列の極限や, 関数の極限や連続性などはこの距離に関して定義する. 例えば, $z \to z_0$ のとき $f(z) \to w_0$, または,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

というときの「$z \to z_0$」は $|z - z_0|$ が限りなく小さくなることを表すわけだが, 複素平面において z がどの方向から, どのような過程を経て z_0 に近づくかは任意である. つまり上の式は, z が z_0 にどのような近づき方をしても, それには無関係に $f(z)$ が一定の極限値 w_0 に近づくことを表している. 記号の見掛け上は実数の極限と同様であるが, 実数では 1 次元的に 2 方向 (右から, 左から) だけ考えればよいのに対して, 複素数の場合は 2 次元の広がりがあるので注意を要することがある. 例えば,

$$\frac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z}$$

は, z が実軸方向から 0 に近づくときは 1 に近づくが, 虚軸方向から 0 に近づくときは -1 に近づくので, $z \to 0$ のときの極限値をもたない.

3.2 正則関数

複素数 z を変数とし, 複素数の値をとる関数 $f(z)$ は複素関数と呼ばれる. 別の言い方をすれば, ある与えられた定義域 $D \subset \mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への写像

$$f : D \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z)$$

を複素関数という.

定義 3.3 (微分可能性・正則関数) $f(z)$ を定義域 D で定義された複素関数とする.

(1) ある $z_0 \in D$ において, 極限値

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

が存在するならば, この極限値を $f'(z_0)$ または $\dfrac{df}{dz}(z_0)$ で表し, z_0 における $f(z)$ の**微分係数**という. またこのとき, $f(z)$ は z_0 で**微分可能**であるという.

(2) D 内のある領域 K のすべての点で $f(z)$ が微分可能であるとき, $f(z)$ は K において**正則**である, あるいは K における**正則関数**であるという. 特に, ある点 $z_0 \in D$ において, $f(z)$ が z_0 のある近傍で正則のとき, $f(z)$ は z_0 (のまわり) で正則である, という.

(3) $f(z)$ が領域 K で正則であるとき, K の各点 z に $f'(z) = \dfrac{df}{dz}(z)$ を対応させる複素関数

$$f' : K \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f'(z) = \frac{df}{dz}(z)$$

が定義できる. これを $f(z)$ の**導関数**という.

例 3.4 (1) $f(z) = z^2$ のとき, 任意の $z_0 \in \mathbb{C}$ において

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z + z_0)(z - z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z + z_0) = 2z_0$$

だから, $f(z)$ は z_0 において微分可能で, $f'(z_0) = 2z_0$ である. また z_0 は任意なので, $f(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則であり, その導関数は $f'(z) = 2z$ となる.

(2) $f(z) = \bar{z}$ (共役複素数) のとき, 任意の $z_0 \in \mathbb{C}$ において

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{\mathrm{Re}(z - z_0) - \sqrt{-1}\ \mathrm{Im}(z - z_0)}{\mathrm{Re}(z - z_0) + \sqrt{-1}\ \mathrm{Im}(z - z_0)}$$

となるが, 上記は z が実軸に平行な方向から z_0 に近づくとき 1 に近づき, 虚軸に平行な方向から z_0 に近づくとき -1 に近づくので, $z \to z_0$ のときの極限値は存在しない. よって $f(z)$ はすべての点において微分可能でない.

実数関数のときと同様に, 複素微分についても次のことが成り立つ.

命題 3.5 複素関数 $f(z)$ および $g(z)$ が z_0 で正則ならば, $f(z)+g(z)$, $f(z)g(z)$ も z_0 で正則であり,

$$\{f(z)+g(z)\}' = f'(z)+g'(z), \quad \{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$$

が成立する. また $g(z_0) \neq 0$ ならば $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ も z_0 で正則であり,

$$\left\{\frac{f(z)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g(z)^2}.$$

複素関数 $f(z)$ を実部と虚部に分解して

$$z = x+\sqrt{-1}\,y, \qquad f(z) = u(x,y)+\sqrt{-1}\,v(x,y)$$

と書いたとする. ここで, $u(x,y)$, $v(x,y)$ は 2 変数の実数関数である. 次の定理は, 複素関数の微分可能性を実数関数の関係に読み直したものである.

定理 3.6 (コーシー・リーマンの微分方程式) 複素関数 $f(z) = u(x,y)+\sqrt{-1}\,v(x,y)$ が点 $z_0 = x_0+\sqrt{-1}\,y_0$ で微分可能であるための必要十分条件は, (x_0,y_0) で $u(x,y)$, $v(x,y)$ が全微分可能であり, かつ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.1}$$

が成立することである. 連立偏微分方程式 (3.1) は**コーシー・リーマンの微分方程式**と呼ばれる.

例 3.7 (1) $f(z) = z^2$ のとき, $z^2 = (x+\sqrt{-1}\,y)^2 = x^2-y^2+\sqrt{-1}\,(2xy)$ だから, この場合 $u(x,y) = x^2-y^2$, $v(x,y) = 2xy$ である. どの点においても $u(x,y)$, $v(x,y)$ は全微分可能で,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

なので, コーシー・リーマンの微分方程式を満たす.

(2) $f(z) = \bar{z} = x-\sqrt{-1}\,y$ のとき, $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$ である. どの点においても $u(x,y)$, $v(x,y)$ は全微分可能であるが,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

なので, コーシー・リーマンの微分方程式は満たさない.

複素平面に無限遠点 ∞ を付け加えた $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ を考えて, それを**拡張複素平面** (または**リーマン球面**) ということがある. 複素関数 $f(z)$ の $z=\infty$ における様子を調べるには, $w=1/z$ とおいて, $f(z)=f(1/w)$ の $w=0$ における様子を調べればよい. 特に, $z=\infty$ での正則性を次のように定義する.

定義 3.8 (無限遠点での正則性) $f(1/w)$ が $w=0$ で正則なとき, $f(z)$ は $z=\infty$ で正則であるという.

3.3 べき級数 (整級数)

a を複素数定数, c_n $(n=0,1,2,\dots)$ を複素数定数の列とするとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{3.2}$$

の形の級数を**べき級数** (または**整級数**) という. べき級数が収束するような複素数 z の範囲について, 次のことが成り立つ.

定理 3.9 べき級数 (3.2) が複素平面のある点 $z=z_0$ で収束するならば, $|z-a|<|z_0-a|$ を満たすすべての複素数 z に対し絶対収束する.

この定理により, べき級数 (3.2) は複素平面の点 a を中心としたある円の内部では常に絶対収束する. そうした円の半径のうち最大のものを r とする (ただし, 複素平面全体で絶対収束する場合は $r=\infty$, 点 $z=a$ 以外ですべて発散するなら $r=0$ とする). そうすると, べき級数 (3.2) は円の内部 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|<r\}$ においては常に絶対収束し, 円の外側 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|>r\}$ においては常に発散する. この円をべき級数 (3.2) の**収束円**, 半径 r を**収束半径**と呼ぶ.

べき級数で定義される複素関数は収束円の内部で正則, かつ項別微分ができ, さらに無限回微分可能となる:

定理 3.10

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

を, べき級数によって定義された複素関数とする. 右辺のべき級数の収束半径を r とすると, $f(z)$ は収束円の内部 $\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|<r\}$ において正則であり, さらにその導関数は, 級数を項別に微分して得られるべき級数で与えられる:

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}.$$

しかもこの右辺のべき級数の収束半径も r となる. 従って, この $f'(z)$ について同じ議論を繰り返すことにより, $f(z)$ は収束円の内部の各点において無限回微分可能となる.

収束半径 r を係数の列 $\{c_n\}$ から求めるには, 次の定理が便利である.

定理 3.11 (ダランベールの公式) べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ に対し, もし極限値

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$$

が存在するなら, $r = 1/\rho$ が収束半径である. ただし, $\rho = 0$ のときは収束半径は $r = \infty$ となる. また, 上記の極限が ∞ に発散するなら, 収束半径は $r = 0$ となる.

この定理では収束半径が分からない場合でも, 上極限を使うと, 係数の列 $\{c_n\}$ から必ず収束半径が決まるという次の定理もある.

定理 3.12 (コーシー・アダマールの公式) べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ の収束半径を r とすると,

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

ただし, $r = 0$ のときは右辺の極限は ∞ に発散, $r = \infty$ のときは右辺の極限は 0 に収束する.

演習 3.13 次のべき級数の収束半径を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin^n \frac{n\pi}{3}\right) z^n$

なお, 収束円の周上ではべき級数が収束することも発散することもあり, 一般論ではなんともいえない. ただ, 次はいえる:

演習 3.14 べき級数が収束円の周上のある 1 点で絶対収束するならば, 周上の他のどの点でも絶対収束する. このことを証明せよ.

例 3.15 (収束円周上で収束したり発散したりする例) べき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ の収束半径は, $n/(n+1) \to 1$ $(n \to \infty)$ より 1 である. だから $|z| < 1$ においては常に絶対収束するが, しかし収束円周上では, 例えば $z = 1$ のときは (調和級数なので) 発散するのに対し, $z = -1$ のときは $-\log 2$ に (条件) 収束する.

[最後の部分の証明] $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し,

$$a_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}, \quad b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

とおく. C をオイラー定数とすると, $n \to \infty$ のとき

$$2b_n - \log n \to C, \quad a_n + b_n - \log 2n \to C$$

となるので,

$$\begin{aligned}
-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} &= b_n - a_n \\
&= (2b_n - \log n) - (a_n + b_n - \log 2n) - \log 2 \\
&\to -\log 2 \qquad (n \to \infty), \\
-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{2n-1} &= b_n - a_n - \frac{1}{2n} \\
&\to -\log 2 \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

□

3.4 複素関数としての指数関数と三角関数

3.4.1 指数関数

z が実数のときの e^z のテイラー級数展開

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

の右辺のべき級数を考えると, 定理 3.11 より, 収束半径は ∞ となる. そこで複素関数としての e^z を改めてこのべき級数で定義する. すると定理 3.10 により, e^z は $\mathbb{C}$ で正則な関数で, 導関数は

$$\frac{de^z}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

となる.

実変数の e^z がもっていた重要な性質のうち, 加法法則は複素変数でも成立する:

命題 3.16 任意の複素数 z_1, z_2 に対し,

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

[略証]

$$
\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z_2^l}{l!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z_1^k z_2^l}{k!l!} \quad (k+l=n \text{ となる項をまとめなおす}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} z_1^k z_2^{n-k}\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}.
\end{aligned}
$$

□

また, $z=\sqrt{-1}\,y$ ($y\in\mathbb{R}$) のとき,

$$
\begin{aligned}
e^{\sqrt{-1}\,y} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{-1}\,y)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m y^{2m}}{(2m)!} + \sqrt{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m y^{2m+1}}{(2m+1)!} \\
&= \cos y + \sqrt{-1}\,\sin y
\end{aligned}
$$

となる (これはオイラーの公式と呼ばれ, 本講義では 1.3 節の命題 1.13 の証明中で既に使っている). 従って $x=x+\sqrt{-1}\,y$ ($x,y\in\mathbb{R}$) のとき,

$$
e^z = e^x e^{\sqrt{-1}\,y} = e^x(\cos y + \sqrt{-1}\,\sin y).
$$

従って,

$$
|e^z| = e^x, \qquad \arg e^z = y + 2n\pi \quad (n \text{ は任意の整数})
$$

となる. またこのことから, e^z は $2\pi\sqrt{-1}$ を周期にもつことがわかる:

$$
e^{z+2n\pi\sqrt{-1}} = e^z \qquad (n \text{ は任意の整数}).
$$

3.4.2 三角関数・双曲線関数

z が実数のときの $\cos z$, $\sin z$ のテイラー級数展開

$$
\begin{aligned}
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots, \\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots
\end{aligned}
$$

の右辺のべき級数も収束半径が ∞ となる (任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し, 各項の絶対値をとると $e^{|z|}$ の級数展開の部分級数になる[1]ため, やはり収束する). そこで, 複素関数としての $\cos z, \sin z$ を右辺のべき級数によって定義する. すると $\cos z, \sin z$ は $\mathbb{C}$ で正則な関数となり, 導関数は

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\cos z &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin z, \\ \frac{d}{dz}\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z\end{aligned}$$

となる.

指数関数との関係として

$$\cos z = \frac{e^{\sqrt{-1}\,z} + e^{-\sqrt{-1}\,z}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{\sqrt{-1}\,z} - e^{-\sqrt{-1}\,z}}{2\sqrt{-1}} \tag{3.3}$$

が成り立つので, 実数変数の場合と同様, $\cos z$, $\sin z$ は周期 2π をもつ. またこれにより,

$$e^{\sqrt{-1}\,z} = \cos z + \sqrt{-1}\,\sin z$$

が得られるが, これは z が実数の場合に先程示したオイラーの公式の一般化となっている.

また式 (3.3) と指数関数の加法法則 (命題 3.16) により, 三角関数の加法定理

$$\begin{aligned}\cos(z_1+z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1+z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2\end{aligned}$$

や, 平方定理

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

なども導かれる. このように複素関数としてみると, 三角関数の性質は (3.3) を通じてすべて指数関数の法則から導かれることがわかる.

また, 双曲線関数

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{2m}}{(2m)!}, \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

も $\mathbb{C}$ で正則な関数として改めて定義され, その諸性質はやはり指数関数の法則から導かれる. なお, 変換 $z \mapsto \sqrt{-1}\,z$ により双曲線関数と三角関数は互いに入れ替わる:

$$\cosh\sqrt{-1}\,z = \cos z, \quad \sinh\sqrt{-1}\,z = \sqrt{-1}\,\sin z.$$

だから, 三角関数の性質を使って双曲線関数の性質を導いても良い.

[1]正確には $\cosh|z|, \sinh|z|$ になる.

演習 3.17 (1) 双曲線関数の加法定理

$$\cosh(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$
$$\sinh(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

を示せ.

(2) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ を示せ.

(3) 導関数 $\dfrac{d}{dz}\cosh z,\ \dfrac{d}{dz}\sinh z$ を求めよ.

演習 3.18 $e^z,\ \cos z,\ \sin z,\ \cosh z,\ \sinh z$ をそれぞれ定理 3.6 の形で表し, さらにコーシー・リーマンの微分方程式 (3.1) を満たしていることを示せ.

3.5 複素積分

実数のある区間 $[\alpha,\beta]$ から $\mathbb{C}$ への連続写像

$$C : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto z(t)$$

(またはその像) を複素平面内の曲線と呼ぶ. 複素平面内の曲線のうち, 始点と終点が一致する ($z(\alpha) = z(\beta)$) ものを**閉曲線**, さらに, 始点と終点以外に重複点をもたない閉曲線を**単純閉曲線** (または**ジョルダン閉曲線**) という. $z(t)$ を実部と虚部に分けて $z(t) = x(t) + \sqrt{-1}\,y(t)$ ($x(t), y(t)$ は実数値関数) と書く. $x(t), y(t)$ が $[\alpha,\beta]$ 上で C^1 級 (連続的微分可能) かつ $z'(t) = x'(t) + \sqrt{-1}\,y'(t) \neq 0$ が成り立つとき, C を**滑らかな曲線**と呼ぶことにする. また, 曲線上の有限個の点を除いて $x(t), y(t)$ が C^1 級かつ $z'(t) \neq 0$ が成り立つなら, C を**区分的に滑らかな曲線**と呼ぶ. 以下, 特に断らない限り, 曲線はすべて区分的に滑らかとする.

複素平面内の領域 D で連続な関数 $f(z) = u(x,y) + \sqrt{-1}\,v(x,y)$ と D 内の曲線

$$C : [\alpha,\beta] \to D, \quad t \mapsto z(t) = x(t) + \sqrt{-1}\,y(t)$$

に対し, $f(z)$ の C に沿っての (複素) **積分**を

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &:= \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt \\
&= \int_\alpha^\beta \{u(x(t),y(t)) + \sqrt{-1}\,v(x(t),y(t))\}\{x'(t) + \sqrt{-1}\,y'(t)\}dt \\
&= \int_\alpha^\beta \{u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)\}dt \\
&\quad + \sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \{u(x(t),y(t))y'(t) + v(x(t),y(t))x'(t)\}dt
\end{aligned}$$

で定義する.

命題 3.19 (1) C_1, C_2 を複素平面内の曲線とし, C_1 の終点と C_2 の始点が一致しているとする. C_1 と C_2 をつなげた曲線を C とするとき, C に沿っての積分は C_1, C_2 に沿っての積分の和となる:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz.$$

(2) 複素平面内の曲線 C が $t \mapsto z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ で定義されているとき, C の向きだけを逆にした曲線を $-C : t \mapsto z(-t)$ $(-\beta \le t \le -\alpha)$ と書く. すると, $-C$ に沿っての積分は, C に沿った積分の -1 倍となる:

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz.$$

3.6 コーシーの積分定理

定理 3.20 (コーシーの積分定理) C を複素平面内の単純閉曲線とする. 関数 $f(z)$ が C および C の内部を含む領域で正則ならば,

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

この定理は複素関数論において非常に重要である. 証明は, 導関数 $f'(z)$ の連続性を仮定したうえでグリーンの定理を使う方法 [3] や, 三角形分割により C が限りなく小さい三角形の場合に帰着させる方法 [4, 第 5 章] がある.

定理 3.21 $f(z)$ をある単連結な領域 D で正則な関数とする.

(1) D 内の任意の 2 点 $a, z \in D$ に対し, a から z へと至る曲線 C_1, C_2 があるとき, C_1, C_2 がともに D に含まれているなら

$$\int_{C_1} f(w)dw = \int_{C_2} f(w)dw$$

が成り立つ. つまり, a から z への積分は 2 点を結ぶ積分路の選び方によらない. そこで, それを以下 $\displaystyle\int_a^z f(w)dw$ と書くことにする.

(2) 上記の積分を z の関数とみて

$$F(z) = \int_a^z f(w)dw$$

とおくと, $F(z)$ は D で正則で, その導関数は $F'(z) = f(z)$ となる.

(3) 逆に, D で正則な関数 $G(z)$ が $G'(z)=f(z)$ を満たすならば

$$\int_a^z f(w)dw = G(z)-G(a)$$

が成り立つ.

[略証] (1) C_1 と $-C_2$ をつなげた曲線に対してコーシーの積分定理を適用する.

(2) $h\to 0$ のとき, z と $z+h$ を結ぶ直線 $t\mapsto w(t)=z+th$ $(0\le t\le 1)$ は D に含まれるとしてよいので,

$$\begin{aligned}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} &= \frac{1}{h}\left\{\int_a^{z+h} f(w)dw - \int_a^z f(w)dw\right\}\\ &= \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(w)dw \qquad (\leftarrow \text{これの積分路を上記の直線にとる})\\ &= \frac{1}{h}\int_0^1 f(z+th)hdt = \int_0^1 f(z+th)dt \to \int_0^1 f(z)dt = f(z).\end{aligned}$$

(3) $\{G(z)-F(z)\}'=0$ より $G(z)-F(z)$ は定数関数である. $F(a)=0$ より $G(a)-F(a)=G(a)$ だから, $G(z)-F(z)=G(a)$. □

閉曲線 C の内部に $f(z)$ が正則でない部分 (定義されない部分も含む) がある場合は, 積分の値が 0 になるとは限らない. 例えば, $f(z)=1/z$ のとき, 原点を中心とした半径 1 の円周 $C: t\mapsto e^{\sqrt{-1}\,t}$ $(0\le t\le 2\pi)$ に沿った積分は

$$\int_C \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi}(e^{-\sqrt{-1}\,t})(\sqrt{-1}\,e^{\sqrt{-1}\,t})dt = 2\pi\sqrt{-1}$$

となる. そのような場合でも, 次の定理が成り立つ:

定理 3.22 単純閉曲線 C の内部に, 同じ向き (どちらも左回り, または, どちらも右回り) で回る別の単純閉曲線 C' が含まれているとする. 関数 $f(z)$ が, C, C', および両者に挟まれる部分 (C の内部から C' の内部を除いた部分), を含む領域で正則ならば,

$$\int_C f(z)dz = \int_{C'} f(z)dz$$

が成り立つ (C' の内部に $f(z)$ が正則でない部分があってもかまわない).

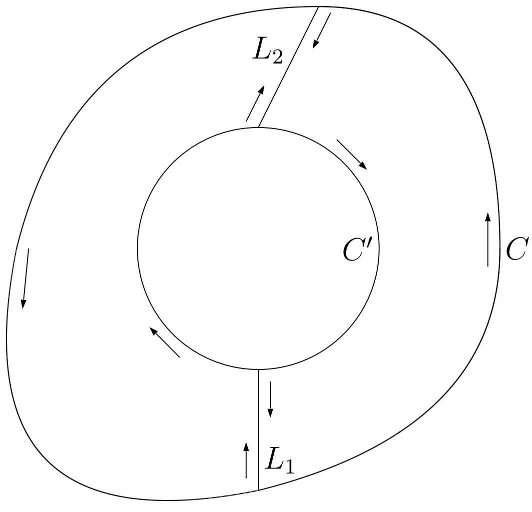
同じように考えていけば, 一般に次が成立する:

定理 3.23 単純閉曲線 C の内部に, 同じ向きで回る, 互いに交わらない有限個の単純閉曲線 $C_1,\dots,C_n$ が含まれているとする. 関数 $f(z)$ が, $C, C_1,\dots,C_n$ および C と $C_1,\dots,C_n$ に挟まれる部分を含む領域で正則ならば,

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz$$

が成り立つ ($C_1,\dots,C_n$ の内部に $f(z)$ が正則でない部分があってもかまわない).

[略証] (定理 3.22) 右図のように, C と C' の間を橋渡しする, 互いに交わらない 2 つの直線 L_1, L_2 を引く. すると, C の一部 (右図では左回り), L_1, L_2, および C' を逆回り (右図では右回り) で回る $-C'$ の一部, を通る単純閉曲線を 2 つ考えることができる. それらの上での積分にコーシーの積分定理を適用し, 両者の和をとると, L_1, L_2 の部分は相殺され, $-C'$ 上の積分は C' 上の積分の -1 倍になるため,

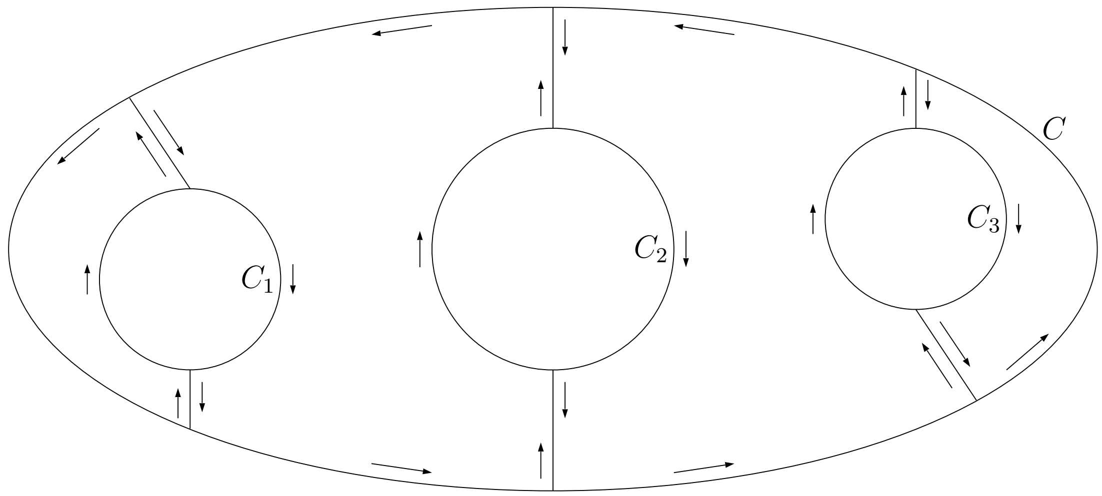


$$0 = \int_C f(z)dz - \int_{C'} f(z)dz$$

を得る.

(定理 3.23) この場合も同様に考えれば,

$$0 = \int_C f(z) - \int_{C_1} f(z)dz - \cdots - \int_{C_n} f(z)dz.$$



□

3.7 コーシーの積分公式とその応用・テイラー級数

定理 3.24 (コーシーの積分公式) 単純閉曲線 C (左回り) とその内部を含む領域で関数 $f(z)$ が正則であるとする. このとき C の内部の任意の点 a について,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

[略証] $f(z)$ の正則性により, 点 a において $f(z)$ は連続だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $|z-a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon$ を満たす $\delta > 0$ が存在する. a を中心とする半径 $\delta/2$ の円を $C' : t \mapsto z(t) = a + \delta e^{\sqrt{-1}t}/2$ とする. δ を十分小さくとって C' は C の内部に含まれているとしてよい. すると定理 3.22 より,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz - f(a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C'} \frac{f(z)}{z-a}dz - f(a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C'} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz.$$

一方,

$$\left|\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C'} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z(t)) - f(a)|dt < \varepsilon$$

で, ε は任意だから, 上の式の左辺は 0 である. □

以下, 特に断らない限り, 閉曲線の向きは左回りとする.

定理 3.25 (テイラー級数展開) 関数 $f(z)$ が点 a で正則なとき, a を中心とした十分小さい円の内部において $f(z)$ はテイラー級数に展開される:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

[略証] a を中心とする円 C の半径を十分小さくとって, C とその内部を含む領域で $f(z)$ が正則であるとしてよい. z を C の内部の任意の点, w を C 上の任意の点とすると, $\left|\dfrac{z-a}{w-a}\right| < 1$ より,

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{f(w)}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n.$$

ここで, 右辺の級数は C 上の w に関して一様に収束する. そこで両辺を C 上で積分して $2\pi\sqrt{-1}$ で割れば, 右辺は項別積分ができて,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right\}(z-a)^n.$$

コーシーの積分公式により, この式の左辺は $f(z)$ に等しい. また, 右辺の級数は C の内部の任意の点 z に対して絶対収束する. よって定理 3.10 により $f(z)$ は C の内部の任意の点で無限回微分可能で, その導関数は項別微分して得られる. とくに

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi\sqrt{-1}}\int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

となる. □

系 3.26 関数 $f(z)$ が領域 D で正則ならば, D 内の任意の点 a において $f(z)$ は無限回微分可能である (従って導関数 $f'(z)$ も D で正則である). さらに, a を中心とする円 C を十分小さくとれば,

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

定理 3.27 (モレラの定理) 領域 D において関数 $f(z)$ が連続で, さらに D に含まれる任意の単純閉曲線 C に対して

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つならば, $f(z)$ は D において正則である.

[略証] 定理 3.21 の証明と同様にして, $f(z)$ には D で正則な原始関数 $F(z)$ が存在することがいえる. すると系 3.26 により, $F(z)$ の導関数 $F'(z) = f(z)$ も D で正則である. □

定理 3.28 領域 D で正則な関数の列 $\{f_n(z)\}$ が D において一様に収束するとき, その極限を $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ とすれば, $f(z)$ も D において正則となる. さらに $f'(z) = \lim_{n\to\infty} f'_n(z)$ が成り立つ.

[略証] 局所的にいえればよいので, D は単連結としてよい. 一様収束性により極限と積分の交換ができるので, D に含まれる任意の単純閉曲線 C に対し,

$$\int_C f(z) dz = \lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z) dz = 0.$$

よってモレラの定理により $f(z)$ は D において正則である.

D の任意の点 z に対し, z を中心とする十分小さい円 C をとれば, C 上の点 w に関して $f_n(w)/(w-z)^2$ は一様に収束するので,

$$\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw = \lim_{n\to\infty} \int_C \frac{f_n(w)}{(w-z)^2} dw.$$

この両辺を $2\pi\sqrt{-1}$ で割れば, 系 3.26 により $f'(z) = \lim_{n\to\infty} f'_n(z)$ を得る. □

定理 3.29 (最大値の原理) (1) 単純閉曲線 C とその内部を含む領域で関数 $f(z)$ が正則であるとする. このとき $M = \max_{z\in C} |f(z)|$ とすると, C の内部の任意の点 a に対し $|f(a)| \leq M$ となる. つまり, C とその内部においては $|f(z)|$ は周上で最大値をとる.

(2) 関数 $f(z)$ が領域 D で正則なとき, D の内部の点で $|f(z)|$ が極大値をとることはない. すなわち, D の内部の任意の点 a と任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $|z-a| < \varepsilon$ かつ $|f(a)| \leq |f(z)|$ を満たす D の点 z が存在する.

[証明] (2) は (1) から容易に導かれるので, 以下 (1) を示す. k を任意の自然数とすると, $f(z)^k$ も C とその内部を含む領域で正則となる. よってコーシーの積分公式により,

$$f(a)^k = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{f(z)^k}{z-a} dz.$$

a から C までの (最小) 距離を ρ とすると, C 上の任意の点 z に対し $|z-a| \geq \rho$, $|f(z)^k| \leq M^k$ だから,

$$|f(a)|^k \leq \frac{M^k}{2\pi\rho} \int_C |dz|.$$

この両辺の k 乗根をとり $k \to \infty$ とすると, $|f(a)| \leq M$ を得る. □

定理 3.30 (リウビルの定理) 関数 $f(z)$ が $\mathbb{C}$ で正則で, さらに任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し $|f(z)| \leq M$ となるような定数 M が存在するならば, $f(z)$ は定数関数である.

[証明] 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し, z を中心とする半径 $R > 0$ の円周 $C : t \mapsto w(t) = z + Re^{\sqrt{-1}t}$ をとると, 系 3.26 より

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.$$

よって,

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R} \int_0^{2\pi} dt = \frac{M}{R}.$$

R はいくらでも大きくとってよいので, $f'(z) = 0$. z は任意なので, これは $f(z)$ が定数関数であることを意味する. □

リウビルの定理の一つの応用として, 代数学の基本定理が証明できる.

定理 3.31 (代数学の基本定理) 次数が 1 以上の任意の複素数係数 1 変数多項式

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}, \quad a_0 \neq 0)$$

に対し, 代数方程式 $f(z) = 0$ は必ず複素数解をもつ.

[証明] $f(z) = 0$ が複素数解をもたないとすると, $g(z) = 1/f(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則で, $|z| \to \infty$ のとき $|g(z)| \to 0$ となる. 従って, ある定数 $M > 0$ があって, 十分大きな $R > 0$ をとると $|z| \geq R \Rightarrow |g(z)| \leq M$ を満たす. 一方, $|z| \leq R$ なる範囲は有界なので $g(z)$ はその範囲で最大値 N をもつ. すると $g(z)$ は任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し $|g(z)| \leq \max\{M, N\}$ を満たすので, リウビルの定理により定数関数であることになる. よって $f(z)$ も定数関数ということになるが, これは次数が 1 以上という仮定に反し, 矛盾が生じる. □

3.8 ローラン展開・極と留数

定理 3.32 (ローラン展開) 複素平面内の点 a を中心とする半径 R_1, R_2 $(0 < R_1 < R_2)$ の円 C_1, C_2, および両者にはさまれた部分

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid R_1 < |z-a| < R_2\}$$

を含む領域で関数 $f(z)$ が正則であるとする. このとき, D 内の任意の点 z において, $f(z)$ は次の級数に一意的に展開される:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

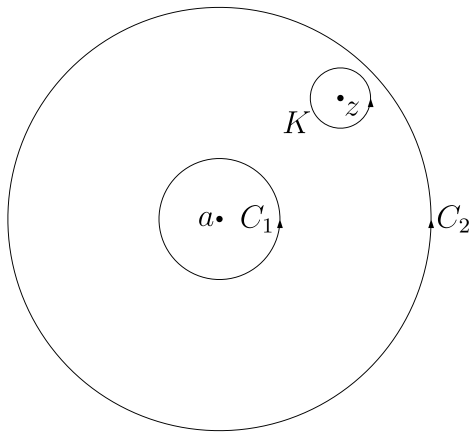
ここで, C は a を中心とする D 内の任意の円である. この級数を**ローラン級数** といい, $f(z)$ をこの形で表すことを, a を中心とする**ローラン展開**という.

[略証] 点 z を中心とし, C_1, C_2 と交わらない任意の円をとり, K とする. 定理 3.23 により,

$$\int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)} dw = \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z)} dw + \int_K \frac{f(w)}{(w-z)} dw.$$

一方, コーシーの積分公式により,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_K \frac{f(w)}{(w-z)} dw.$$



よって,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)} dw - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z)} dw. \tag{3.4}$$

まず, w を C_2 上の点とすると $\left|\dfrac{z-a}{w-a}\right| < 1$ だから, 定理 3.25 の証明と同様に,

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{f(w)}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^n.$$

また, w を C_1 上の点とすると, 今度は $\left|\dfrac{w-a}{z-a}\right| < 1$ なので,

$$\frac{f(w)}{w-z} = -\frac{f(w)}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} = -\frac{f(w)}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} (z-a)^n.$$

よって, それぞれ C_2, C_1 に沿って項別積分して $2\pi\sqrt{-1}$ で割ることにより (3.4) を書き換えると,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_2}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right\}(z-a)^n+\sum_{n=-\infty}^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right\}(z-a)^n$$

を得る. ここで, C を a を中心とする D 内の任意の円とすると, 定理 3.22 により, 上式の C_2, C_1 に沿っての積分は C に沿っての積分と一致する. よって,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{\left\{\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{C}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right\}}_{c_n}(z-a)^n.$$

以下, 一意性を示す. 級数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n(z-a)^n$$

が, D のすべての点 z において $f(z)$ に収束するとする. このとき任意の整数 m に対し $d_m=c_m$ となることを示そう. まず, $f(z)$ を $(z-a)^{m+1}$ で割った

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n(z-a)^{n-m-1}$$

を考える. $R_1<\rho<R_2$ なる実数 ρ をとり, 上式の両辺を a を中心とする半径 ρ の円 $C: t\mapsto z(t)=a+\rho e^{\sqrt{-1}\,t}$ $(0\le t\le 2\pi)$ に沿って積分すると, 右辺は項別積分ができて,

$$\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}dz=\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n\int_C(z-a)^{n-m-1}dz$$

となる. この左辺は $2\pi\sqrt{-1}\,c_m$ である. 右辺は,

$$\int_C(z-a)^{n-m-1}dz=\rho^{n-m}\sqrt{-1}\int_0^{2\pi}e^{(n-m)\sqrt{-1}\,t}dt=\begin{cases}2\pi\sqrt{-1} & (n=m)\\ 0 & (n\neq m)\end{cases}$$

より, $2\pi\sqrt{-1}\,d_m$ となる. よって $d_m=c_m$ がいえた. $\square$

注意 3.33 上記定理において, C_1 の内部でも $f(z)$ が正則であったとする. この場合, $n<0$ のとき $f(z)/(z-a)^{n+1}$ も C_2 の内部で正則だからコーシーの積分定理により $c_n=0$ となる. 従って, ローラン級数は $n\ge 0$ の項しか残らず, 定理 3.25 のテイラー級数と一致する.

上記定理において, 今度は C_1 の内部から点 a を除いた領域で $f(z)$ が正則で, 点 a では $f(z)$ が正則でないとする. このように a の近傍において $f(z)$ が正則でないのが点 a のみであるとき, 点 a を $f(z)$ の**孤立特異点**という. すると C_1 の半径は任意に小さくとってよく, $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < R_2\}$ において $f(z)$ はローラン級数に展開できる. このとき, ローラン級数における $n = -1$ のところの係数

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C f(w)dw$$

を $f(z)$ の点 a における**留数**といい, $\mathrm{Res}[f; a]$ などと書くことがある. さらに, ローラン級数の $n < 0$ の部分がどうなるかによって, 孤立特異点 a を次の 3 つのタイプに分類する.

(1) **$n < 0$ なるすべての n について $c_n = 0$ のとき.**
この場合, ローラン級数は $n \geq 0$ の項しか残らず, $z \neq a$ において

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

となる. ここでもし $f(a) = c_0$ なら $f(z)$ は点 a においても正則であることになるが, 正則ではないとしているので, $f(a) \neq c_0$ であるかまたは $f(z)$ は $z = a$ で定義されていないことになる. このような場合, $f(z)$ の $z = a$ における値を c_0 に定義しなおせば点 a でも正則になるので, 点 a を**見かけの特異点** (または**可除特異点**), あるいは 0 **位の極**ということがある.

(2) **ある自然数 p について $c_{-p} \neq 0$ で, 任意の $n < -p$ については $c_n = 0$ のとき.**
この場合, ローラン級数の負べきの項は $n = -p$ までの有限項のみ出てくる:

$$f(z) = \frac{c_{-p}}{(z-a)^p} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

このとき点 a を $f(z)$ の p **位の極**という.

(3) **任意の $N > 0$ に対し, ある負の整数 $n < -N$ が存在して $c_n \neq 0$ となるとき.**
この場合は, ローラン級数の負べきの項は無限項にわたって続くことになる. このとき点 a は $f(z)$ の**真性特異点**であるという.

定理 3.34 点 $a \in \mathbb{C}$ が関数 $f(z)$ の孤立特異点であったとする.

(1) もし, 極限 $\lim_{z \to a} f(z)$ が (無限遠点ではなく $\mathbb{C}$ 内の確定値として) 存在するなら, a は $f(z)$ の見かけの特異点である. またこのとき a における留数は $\mathrm{Res}[f; a] = 0$ である.

(2) ある自然数 p に対し, 極限

$$l = \lim_{z \to a} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \{(z-a)^p f(z)\}$$

が (無限遠点ではなく $\mathbb{C}$ 内の確定値として) 存在するなら, a は $f(z)$ の p 位以下の極であり, さらに, a における留数が

$$\mathrm{Res}[f;a] = \frac{l}{(p-1)!}$$

により計算される.

[証明] $f(z)$ の a を中心とするローラン級数を

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

と書く.

(1) もしある $n<0$ について $c_n \neq 0$ なら極限 $\lim_{z\to a} f(z)$ は発散してしまうので, すべての $n<0$ について $c_n = 0$ でなければならない. 特に $\mathrm{Res}[f;a] = c_{-1} = 0$ となる.

(2) 項別微分により

$$\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\{(z-a)^p f(z)\} = \sum_{n=-\infty}^{-2} \widetilde{c}_n(z-a)^{n+1} + (p-1)!c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{c}_n(z-a)^{n+1}$$

となる. ここで, $\widetilde{c}_n$ は $p=1$ のときは c_n, $p \geq 2$ のときは $(n+p)\cdots(n+2)c_n$ を表す. さて, もしある $n \leq -2$ について $\widetilde{c}_n \neq 0$ となったとすると極限 l は発散してしまい存在しないことになるので, すべての $n \leq -2$ について $\widetilde{c}_n = 0$ でなければならない. これはすべての $n < -p$ について $c_n = 0$ であることを意味するので, a は $f(z)$ の p 位以下の極である. また, 極限の値は $l = (p-1)!c_{-1} = (p-1)!\,\mathrm{Res}[f;a]$ となるので, 後半もいえる. □

上の定理は留数を実際に計算するときに役に立つ. 特に (2) の $p=1$ の場合がよく用いられる. 留数が計算できれば, それを次のように積分計算に応用することができる.

定理 3.35 単純閉曲線 C およびその内部を含む領域において, 関数 $f(z)$ が有限個の孤立特異点 $a_1, \ldots, a_n$ を除いて正則であるとする. このとき,

$$\int_C f(z)dz = 2\pi\sqrt{-1}(\mathrm{Res}[f;a_1] + \cdots + \mathrm{Res}[f;a_n]).$$

[証明] 定理 3.23 と留数の定義による. □

3.9 有理型関数

定義 3.36 (有理型関数・整関数) (1) ある領域 D において, 関数 $f(z)$ が正則でない点が極に限られるとき, $f(z)$ は D において**有理型**であるという. $f(z)$ が全複素平面 $\mathbb{C}$ において有理型のときは, 単に**有理型関数**であるという.

(2) 全複素平面 $\mathbb{C}$ において正則な関数を**整関数**という.

領域 D において正則な関数 $f(z), g(z)$ があって, $g(z)$ が D において恒等的には 0 でないとき, 商 $f(z)/g(z)$ が D において有理型になることを示そう. まず, $g(z) \neq 0$ なる点においては $f(z)/g(z)$ は正則になるので, 正則でない点は $g(z)$ の零点に限られる. そこで, 正則関数の零点がもつ性質を少し調べることにする.

$g(z)$ が点 a で正則かつ $g(a) = 0$ を満たすとする. $g(z)$ の a におけるテイラー級数展開を

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

と書くと, $c_0 = g(a) = 0$ となる. しかし $g(z)$ が恒等的に 0 ではないなら, どこかで $c_n \neq 0$ となる n が存在するはずである. そこで, $c_n \neq 0$ となる自然数 n のうちで最小ものを p とする (これは $g^{(n)}(a) \neq 0$ となる n のうち最小のものでもある). すると,

$$g(z) = (z-a)^p \sum_{n=p}^{\infty} c_n (z-a)^{n-p}, \qquad c_p \neq 0$$

と書ける. このとき, a は $g(z)$ の p **位の零点**であるという.

次の定理は, 正則関数の零点の近くには他の零点がないことを示すもので, 零点孤立の原理と呼ばれている.

定理 3.37 (零点孤立の原理) $g(z)$ を恒等的に 0 ではない正則関数とし, a を $g(z)$ の零点とする. このときある $\rho > 0$ がとれて,

$$0 < |z-a| < \rho \Rightarrow g(z) \neq 0$$

を満たす.

[証明] a を p 位の零点とすると, 上記の議論により, $g(z)$ は a の近傍において

$$g(z) = (z-a)^p \widetilde{g}(z), \qquad \widetilde{g}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} c_n (z-a)^{n-p}, \qquad c_p = \widetilde{g}(a) \neq 0 \tag{3.5}$$

と書ける. $\widetilde{g}(z)$ はべき級数として $g(z)$ と同じ収束半径をもつので, $\widetilde{g}(z)$ は収束円内で正則, とくに連続関数となる. 従って, 連続性の定義における ε として $|c_p|/2$ をとると, ある $\rho > 0$ が存在して

$$|z-a| < \rho \Rightarrow |\widetilde{g}(z) - \widetilde{g}(a)| < \frac{|c_p|}{2}$$

を満たす. すると,

$$|z-a|<\rho \Rightarrow |\widetilde{g}(z)| \geq |\widetilde{g}(a)| - |\widetilde{g}(z)-\widetilde{g}(a)| > |c_p| - \frac{|c_p|}{2} = \frac{|c_p|}{2} > 0.$$

$z \neq a$ のとき $\widetilde{g}(z) \neq 0 \Rightarrow g(z) \neq 0$ だから, この ρ が求めるものである. □

系 3.38 領域 D において正則な関数 $f(z), g(z)$ があって, $g(z)$ が D において恒等的には 0 でないとき, 商 $f(z)/g(z)$ は D において有理型となる.

[証明] $f(z)/g(z)$ が正則でない点は $g(z)$ の零点に限られるので, 零点孤立の原理により, それらは孤立特異点となる. a が $g(z)$ の p 位の零点のとき, $g(z)$ は a の近傍において (3.5) の形に書ける. すると $f(z)/g(z)$ は a の近傍において

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{(z-a)^p} \cdot \frac{f(z)}{\widetilde{g}(z)}$$

と書け, また, $f(z)/\widetilde{g}(z)$ は a で正則だから, a は $f(z)/g(z)$ の p 位以下の極となることがわかる. □

3.10 解析接続

零点孤立の原理の応用として, 次の定理を示すことができる.

定理 3.39 べき級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ について, その収束円の内部から a を除いた部分におけるある点列 $\{a_n\}$ が存在して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ かつすべての n に対し $f(a_n) = 0$ となるなら, $f(z)$ は恒等的に 0 である.

[証明] $f(z)$ が恒等的に 0 ではないと仮定して矛盾を導く. まず, $f(z)$ は収束円の内部で正則, 特に連続なので, $f(a) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$. よって a は $f(z)$ の零点である. すると零点孤立の原理により, a の近くには $f(z)$ の他の零点は存在しないはずである. しかしそれは $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $f(a_n) = 0$ に矛盾する. □

さらに, この定理を拡張すると, 次の重要な結果が導かれる.

定理 3.40 (一致の定理) $f_1(z), f_2(z)$ を領域 D で正則な関数とする. D 内のある 1 点 a に収束する $D-\{a\}$ 内の点列 $\{a_n\}$ が存在して, すべての n に対し $f_1(a_n) = f_2(a_n)$ を満たすなら, D において常に $f_1(z) = f_2(z)$ となる. 特に, D 内のある曲線上で $f_1(z) = f_2(z)$ ならば, D 全体で $f_1(z) = f_2(z)$ となる.

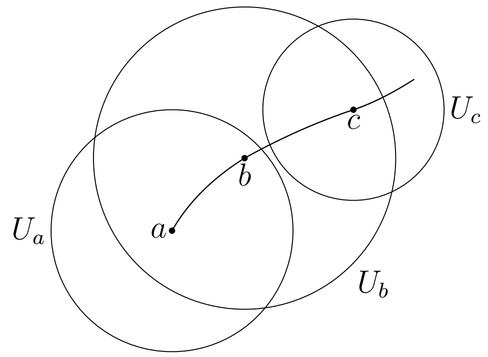
[略証] $g(z) = f_1(z) - f_2(z)$ とおき, $g(z)$ に定理 3.39 を適用すると, a のある近傍 U において常に $g(z) = 0$ となることがいえる. 以下, $g(z_1) \neq 0$ となる D 内の点 z_1 が存在すると仮定して矛盾を導く. U の内部の 1 点を適当にとって z_0 とし, z_0 と z_1 を適当な連続曲線 C で結ぶ. すると, C と $g(z)$ の連続性により, C 上の点を z_0 から z_1 までたどっていくときに, ある点 z' までは $g(z) = 0$ で z' を過ぎると $g(z) \neq 0$ となるような, C 上の点 z' が存在する. このとき, z' は $g(z)$ の孤立していない零点で, しかも z' の近傍において $g(z)$ は恒等的に 0 ではない, という状況が成立してしまう. それは零点孤立の原理に反する. □

ある領域 D で正則な関数 $f(z)$ と, D に含まれる領域 D_0 で定義された関数 $f_0(z)$ があって, もし D_0 においては常に $f(z) = f_0(z)$ となるならば, $f(z)$ を $f_0(z)$ の D への**解析接続** (または**解析的延長**) という.

解析接続について一般的に論じる場合はべき級数を用いる. 一般に, ある点 $a \in \mathbb{C}$ を中心とし, 零でない収束半径をもつべき級数

$$P(z;\ a) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

があるとする.



このべき級数の収束円の内部を U_a とおくと, べき級数が表す関数は少なくとも U_a では正則なので, $b \in U_a$ かつ $b \neq a$ なる点においてもテイラー級数に展開される. それを

$$P(z;\ b) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (z-b)^n$$

とおく. このべき級数の収束半径は b から U_a の境界までの距離よりは小さくないはずで, 多くの場合, 収束円が U_a の外にはみ出すことになる. このとき, $P(z;\ b)$ の収束円の内部を U_b とおくと, $U_a \cap U_b$ では $P(z;\ a) = P(z;\ b)$ となるので, $U_a \cup U_b$ で正則な関数 $f(z)$ で, U_a においては $f(z) = P(z;\ a)$, U_b においては $f(z) = P(z;\ b)$ となるようなものが定義できる. この $f(z)$ は $P(z;\ a)$ および $P(z;\ b)$ の $U_a \cup U_b$ への解析接続である. さらにこれを続けて, 別の点 $c \in U_b$, $c \neq b$ をとり, そこでの $f(z)$ のテイラー級数展開をとって $P(z;\ c)$ とすると, $P(z;\ c)$ の収束円がさらに $U_a \cup U_b$ をはみ出すことが期待される. $P(z;\ c)$ の収束円の内部を U_c とすれば, 同様にして, さらに大きな領域 $U_a \cup U_b \cup U_c$ で正則な関数に $f(z)$ を解析接続していくことができる.

このようにして, 点 a を始点とするある曲線上に次々に点 $b, c, \ldots$ をとっていき, そ

こでのテイラー級数展開を使って解析接続を行っていく. それを可能な限りあらゆる方向に行ったとき, めいっぱいまで大きな範囲で正則な 1 つの関数に解析接続される. それを (ワイエルシュトラスの意味での) **解析関数**と呼ぶことがある. また, その点を通って解析接続できないという点があるときは, それをその解析関数の (見かけでない) **特異点**という.

例 3.41 原点 $z=0$ を中心とするべき級数

$$P(z;\ 0) = 1 + z + z^2 + \cdots$$

の収束半径は 1 で, このべき級数の表す関数は収束円の内部で $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ に等しい. 収束円内の任意の点 a ($|a|<1$) をとり, $f(z)$ の a におけるテイラー級数展開 $P(z;\ a)$ を求めてみる. もし $\left|\dfrac{z-a}{1-a}\right| < 1$ ならば,

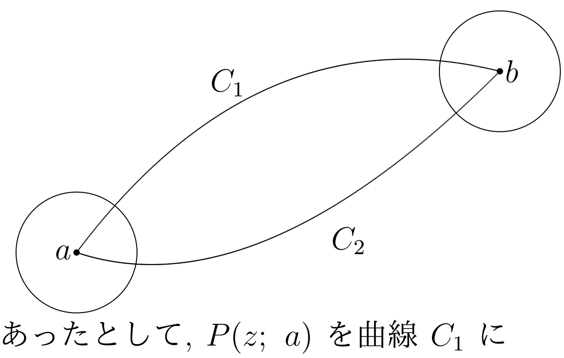
$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{1-a}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}} \tag{3.6}$$

となるので,

$$P(z;\ a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(1-a)^{n+1}}$$

を得る. この級数は $\left|\dfrac{z-a}{1-a}\right| < 1$ すなわち $|z-a| < |1-a|$ で成り立つので, 収束半径は $|1-a|$, いいかえると収束円は $z=1$ を通る円である. いま $|a|<1$ と仮定したが, $f(z)$ のテイラー級数展開 (3.6) は $a=1$ を除く $\mathbb{C}$ の任意の点 a で成り立ち, それらの収束円はどれも $z=1$ を通る円である. このようにして $P(z;\ 0)$ を特異点 $z=1$ を除く全平面に解析接続することができる.

3.11 多価関数とリーマン面



前節で, ある点 a におけるべき級数 $P(z;\ a)$ から出発して, 解析接続によって 1 つの解析関数が作られることを述べたが, このようにして得られた関数の, 別の点 b におけるテイラー級数 $P(z;\ b)$ が, 解析接続の経路 (a と b を結ぶ曲線) によって異なる値をとることがある.
いま, 点 a と点 b を結ぶ 2 つの曲線 C_1, C_2 があったとして, $P(z;\ a)$ を曲線 C_1 に

沿って解析接続したときの点 b におけるテイラー級数を $P_1(z;\ b)$, 曲線 C_2 に沿ったときのそれを $P_2(z;\ b)$ とする. もし $P_1(z;\ b)$ と $P_2(z;\ b)$ が異なるとすれば, 点 b における $P_1(z;\ b)$ から出発して C_1 を逆向きに沿って解析接続し, 点 a を経由して C_2 に沿って点 b に戻った時に, $P_1(z;\ b)$ とは異なるべき級数 $P_2(z;\ b)$ が得られるということになる. この場合, 得られる解析関数は**多価**であるという.

曲線 C_1 と C_2 とが囲む領域内に特異点が存在しない場合, $P_1(z;\ b)$ と $P_2(z;\ b)$ とは必ず一致する. 従って, ある点 b から出発して閉曲線に沿って解析接続し, また点 b に戻った時に関数が元とは別の値をとるとすれば, それは特異点を 1 周以上周っている場合に限られる. このような特異点をその多価関数の**分岐点**といい, そのときとり得る異なる関数値を**分枝**または**枝**と呼ぶ.

ある解析関数を考えてそれが多価関数になるとき, 複素平面を拡張して, いくつかの複素平面を張り合わせたような複素多様体 (**リーマン面**) を考え, その上では考えている関数が 1 価関数になるように工夫することがある. とりあえずいくつか例をみていこう.

例 3.42 ($\sqrt{z}$ のリーマン面) $w^2 = z$ を満たす関数 $w = f(z)$ を求めよう. $z \neq 0$ のときは $w \neq 0$ でなければならず, $z = |z|e^{\sqrt{-1}\theta}$ なる θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ をとれば,

$$w^2 = (|w|e^{\sqrt{-1}\arg w})^2 = |w|^2 e^{2\sqrt{-1}\arg w} = z = |z|e^{\sqrt{-1}\theta}$$

だから,

$$|w| = \sqrt{|z|}, \qquad \arg w = \frac{\theta}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

を得る. このうち $n = 0$ と $n = 1$ に対応するものをそれぞれ

$$w_0 = \sqrt{|z|}e^{\sqrt{-1}\,\frac{\theta}{2}}, \qquad w_1 = \sqrt{|z|}e^{\sqrt{-1}\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = -w_0$$

とおくと, 他の n に対応するものはすべてこの w_0 か w_1 のどちらかに一致する. そこで, 与えられた $z \neq 0$ に対してこの 2 つの値をとる 2 価関数を

$$w = f(z) = \sqrt{z}$$

と定義する[2].

いま, ある点 $z = |z|e^{\sqrt{-1}\theta}$ から出発して左回りに原点 0 を 1 周しまたもとの点に戻ると, z は $|z|e^{\sqrt{-1}(\theta+2\pi)}$ となるから, w_0 は w_1 となり, w_1 は w_0 となる. 右回りでも同様で, したがって, 原点 0 を 1 周するごとに $f(z)$ の分枝は w_0 と w_1 の間で入れ替わる.

[2]なお, $z = 0$ のときは 1 つの値 $f(0) = 0$ をとるとして良いが, すぐあとで見るように, $z = 0$ はこの関数の分岐点となる

また, 無限遠点 $z=\infty$ での様子をみることにする．それには $z=1/v$ とおいて $v=0$ の近くで様子をみれば良い．$v=|v|e^{\sqrt{-1}\theta}$ とおくと $z=1/v=(1/|v|)e^{-\sqrt{-1}\theta}$ だから,

$$w_0=\frac{1}{\sqrt{|v|}}e^{-\sqrt{-1}\,\frac{\theta}{2}},\qquad w_1=\frac{1}{\sqrt{|v|}}e^{-\sqrt{-1}\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}=-w_0$$

となり, z が無限遠点を 1 周するごとに w_0 と w_1 が入れ替わる．この意味で無限遠点も $f(z)$ の分岐点と考える．

上記の原点と無限遠点以外の点を 1 周してもこのようなことは起こらないので, 分岐点はこの 2 点のみである．そこで, 複素平面を 2 枚用意してそれぞれを D_0, D_1 とし, それぞれの原点と無限遠点を結ぶ「線分」, 例えば実軸の正の部分, を切り開いたものを重ね合わせ, D_0 の実軸の上端と D_1 の実軸の下端を貼り合わせ, D_0 の実軸の下端と D_1 の上端を貼り合わせて, D_0 と D_1 を連結させた複素多様体 $\widetilde{D}$ を考える．すると, $\widetilde{D}$ において, D_0 上のある点 z_0 から出発して原点を 1 周しようとすると, 実軸上の継ぎ目の部分から D_1 平面のほうに移り, D_1 上の点 z_1 に到達する．さらに z_1 から出発して原点を 1 周しようとすると, 今度は実軸上の継ぎ目の部分から D_0 平面のほうに戻り, ようやく D_0 上の点 z_0 に戻ってくる．この $\widetilde{D}$ 上において, D_0 上では w_0 の方をとり D_1 上では w_1 の方をとる関数を $f(z)$ とすれば, $f(z)$ は $\widetilde{D}$ 上においては 1 価関数として定義される．この $\widetilde{D}$ が $\sqrt{z}$ のリーマン面である．

例 3.43 (対数函数 $\log z$ のリーマン面) $e^w=z$ を満たす関数 $w=f(z)$ を考えよう．$z\neq 0$ とし, $z=|z|e^{\sqrt{-1}\theta}$ なる θ $(0\leq\theta<2\pi)$ をとれば,

$$e^w=e^{\mathrm{Re}\,w}e^{\sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\,w}=z=|z|e^{\sqrt{-1}\theta}$$

だから,

$$e^{\mathrm{Re}\,w}=|z|,\qquad \mathrm{Im}\,w=\theta+2n\pi\quad(n\in\mathbb{Z}),$$

言い換えれば,

$$w=\log|z|+\sqrt{-1}(\theta+2n\pi)\quad(n\in\mathbb{Z})$$

を得る．右辺は n によって異なる点を指すので, 各 n に対応するものを w_n と書くことにする．そして, 与えられた $z\neq 0$ に対して無限個の値 w_n $(n\in\mathbb{Z})$ をとる多価関数を

$$w=f(z)=\log z$$

と定義する．

いま, ある点 z から出発して原点 0 を左回りに 1 周してもとに戻ると, 各 w_n は w_{n+1} となる．右回りの場合は各 w_n が w_{n-1} となる．また, 無限遠点での様子をみるため $z=1/v$ とおくと, $v=|v|e^{\sqrt{-1}\theta}$ のとき

$$w_n=-\log|v|+\sqrt{-1}(-\theta+2n\pi)\quad(n\in\mathbb{Z})$$

だから, z が無限遠点を 1 周するごとに各 w_n はやはり w_{n+1} または w_{n-1} となる. 原点と無限遠点以外の点を 1 周してもこのようなことは起こらないので, 分岐点はこの 2 点のみである.

そこで, 複素平面を無限枚用意してそれを D_n $(n \in \mathbb{Z})$ とし, それぞれの実軸の正の部分を切り開き, 各整数 n について D_n の実軸の上端と D_{n+1} の実軸の下端を貼り合わせていってできる複素多様体 $\widetilde{D}$ を考える. この $\widetilde{D}$ 上において, 各 n について D_n 上では w_n をとる関数を $f(z)$ とすれば, $f(z)$ は $\widetilde{D}$ 上においては 1 価関数として定義される. この $\widetilde{D}$ が $\log z$ のリーマン面である.

一般の場合は, おおざっぱにいうと次のようにリーマン面を作るとよい. 点 a におけるべき級数 $P(z;\ a)$ から出発して曲線 C に沿って解析接続していったときの C の終点におけるテイラー級数を $P(z;\ C)$ と書くことにする. 点 a を始点とし, それに沿って $P(z;\ a)$ を解析接続していけるような曲線全体の集合を $\mathcal{C}$ とおき, $\mathcal{C}$ に次のような同値関係を入れる:

$$C_1 \sim C_2 :\Leftrightarrow C_1 \text{ と } C_2 \text{ の終点が一致, かつ, } P(z;\ C_1) = P(z;\ C_2) \qquad (C_1, C_2 \in \mathcal{C}).$$

$\mathcal{C}$ を同値関係 $\sim$ で割った商集合 $\mathcal{C}/\sim$ に複素多様体の構造を入れると, それが $P(z;\ a)$ から出発して作られる解析関数のリーマン面になる.

3.12 複素関数としてのベルヌーイ多項式とその母関数

第 1 章で学んだベルヌーイ数・ベルヌーイ多項式とその母関数を複素関数論を使って見直してみよう. まず, 母関数表示 (定理 1.5, 定理 1.8 (3)) を級数の収束性を込めて再証明することにする.

定理 3.44 (母関数) (1) 複素関数 $\dfrac{ze^z}{e^z-1}$ の原点 0 を中心とするローラン級数は, ベルヌーイ数 B_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を使って

$$\frac{ze^z}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$$

により与えられる. なお, 右辺のべき級数の収束半径は 2π である.

(2) 任意の実数 x に対し, 複素関数 $\dfrac{ze^{xz}}{e^z-1}$ の原点 0 を中心とするローラン級数は, ベルヌーイ多項式 $B_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ を使って

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!} z^k$$

により与えられる. なお, 右辺のべき級数の収束半径は 2π である.

[証明] (1) e^z-1 の零点は $z=2n\pi\sqrt{-1}$ (n は整数) で, $e^z-1=e^{z-2n\pi\sqrt{-1}}-1=(z-2n\pi\sqrt{-1})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-2n\pi\sqrt{-1})^{n-1}$ だから, すべて 1 位の零点である. 一方, 分子の ze^z は $z=0$ で 1 位の零点をもつのみである. 従って $\dfrac{ze^z}{e^z-1}$ は見かけの特異点 0 と 1 位の極 $2n\pi\sqrt{-1}$ ($n=\pm1,\pm2,\dots$) をもち, それ以外に特異点をもたない. 特に, 0 から最も近い特異点は $\pm2\pi\sqrt{-1}$ なので, $\dfrac{ze^z}{e^z-1}$ は $0<|z|<2\pi$ の範囲で (負べきの項をもたない) ローラン級数に展開できる. それを

$$\frac{ze^z}{e^z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}z^k$$

と書くことにする. すると, 定理 1.5 の証明中の式と同様にして,

$$\begin{aligned}(e^z-1)\frac{ze^z}{e^z-1} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}z^k\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k\right)\frac{z^n}{n!}\\ &= ze^z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nz^n}{n!}\end{aligned}$$

を得る. するとローラン級数 (実際はテイラー級数) の一意性により,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}b_k=n \qquad (n=1,2,3,\dots)$$

となるが, これはベルヌーイ数が満たす漸化式 (定義 1.2) に他ならないので, $b_k=B_k$ ($k=0,1,2,\dots$) である.

(2) (1) と同様に, 任意の実数 x に対し, $\dfrac{ze^{xz}}{e^z-1}$ は 0 を見かけの特異点にもち, また 0 から最も近い特異点は $\pm2\pi\sqrt{-1}$ なので, $0<|z|<2\pi$ の範囲で (負べきの項をもたない) ローラン級数に展開される. それを

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k(x)}{k!}z^k$$

と書くことにする. まず, $x=1$ のときを考えると (1) より $b_k(1)=B_k$ ($k=0,1,2\dots$) となることが分かる. また,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k'(x)}{k!}z^k=\frac{z^2e^{xz}}{e^z-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{k-1}(x)}{(k-1)!}z^k$$

より,

$$b_0'(x) = 0, \qquad b_k'(x) = kb_{k-1}(x) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

を得る. あとは系 1.9 を使えば, k に関する帰納法により $b_k(x) = B_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, 3, \dots)$ を得る. □

第 2 章の最後でスターリング級数を導くときにもベルヌーイ多項式を用いたが, その際に考えた周期関数 $B_k(t-[t])$ ($[t]$ は t を超えない最大の整数) について, 次の公式が知られている.

定理 3.45 k を自然数とするとき, $B(t-[t])$ は次のようにフーリエ級数展開される:

$$B_k(t-[t]) = -k! \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{e^{2\pi\sqrt{-1}\,nt}}{(2\pi\sqrt{-1}\,n)^k}. \tag{3.7}$$

ここで, $k \geq 2$ のときはすべての実数 t について右辺の級数が絶対一様収束して (3.7) が成立するが, $k = 1$ のときは t が整数でないとき, 右辺を

$$-\lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{e^{2\pi\sqrt{-1}\,nt}}{2\pi\sqrt{-1}\,n}$$

と解釈して成立する.

[略証] $0 < t < 1$ とし, 有理型関数 $f(z) = \dfrac{e^{tz}}{e^z - 1}$ を考える. $f(z)$ は $z = 2\pi\sqrt{-1}\,n$ $(n \in \mathbb{Z})$ で 1 位の極をもち, 定理 3.34 (2) により, 留数は,

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}[f; 2\pi\sqrt{-1}\,n] &= \lim_{z\to 2\pi\sqrt{-1}\,n} (z - 2\pi\sqrt{-1}\,n) f(z) = \lim_{z\to 2\pi\sqrt{-1}\,n} \frac{e^{tz}}{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(z-2\pi\sqrt{-1}\,n)^{m-1}}{m!}} \\ &= e^{2\pi\sqrt{-1}\,nt} \end{aligned}$$

と計算される.

十分大きな自然数 N をとり $R = 2\pi(N+1/2)$ とおく. 複素平面の 4 点 $R+\sqrt{-1}R$, $-R+\sqrt{-1}R$, $-R-\sqrt{-1}R$, $R-\sqrt{-1}R$ を結ぶ長方形の積分路 C_N をとり, z を C_N の内部にある点とし, $z \neq 2\pi\sqrt{-1}\,n$ $(n \in \mathbb{Z})$ とする. w の関数 $g(w) = \dfrac{f(w)}{w-z}$ は z および $2\pi\sqrt{-1}\,n$ $(n \in \mathbb{Z})$ で 1 位の極をもち, 留数は,

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}[g; z] &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{f(w)}{w-z} dw = f(z) \qquad (C \text{ は } z \text{ を中心とする十分小さい円}), \\ \mathrm{Res}[g; 2\pi\sqrt{-1}\,n] &= \lim_{w\to 2\pi\sqrt{-1}\,n} \frac{(w - 2\pi\sqrt{-1}\,n) f(w)}{w-z} = \frac{e^{2\pi\sqrt{-1}\,nt}}{2\pi\sqrt{-1}\,n - z} \end{aligned}$$

となる. よって定理 3.35 により,

$$\begin{aligned}\int_{C_N}\frac{f(w)}{w-z}dw &= 2\pi\sqrt{-1}\left(f(z)+\sum_{n=-N}^{N}\frac{e^{2\pi\sqrt{-1}\,nt}}{2\pi\sqrt{-1}\,n-z}\right)\\ &= 2\pi\sqrt{-1}\left(f(z)-\frac{1}{z}-\sum_{\substack{n=-N\\ n\neq 0}}^{N}\frac{e^{2\pi\sqrt{-1}\,nt}}{z-2\pi\sqrt{-1}\,n}\right)\end{aligned}$$

となる. $N\to\infty$ のとき左辺は 0 に収束することが証明できるので, $0<|z|<2\pi$ のとき,

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{z}+\lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{n=-N\\ n\neq 0}}^{N}\frac{e^{2\pi\sqrt{-1}\,nt}}{z-2\pi\sqrt{-1}\,n}\\ &= \frac{1}{z}-\lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{n=-N\\ n\neq 0}}^{N}\frac{e^{2\pi\sqrt{-1}\,nt}}{2\pi\sqrt{-1}\,n(1-\frac{z}{2\pi\sqrt{-1}\,n})}\\ &= \frac{1}{z}-\lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{n=-N\\ n\neq 0}}^{N}\frac{e^{2\pi\sqrt{-1}\,nt}}{2\pi\sqrt{-1}\,n}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2\pi\sqrt{-1}\,n}\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

この式と, 定理 3.44 (2) から得られる次の式:

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k(t)}{k!}z^{k-1}$$

との係数を比較して, $0<t<1$ における定理の式を得る. $k\geq 2$ のときは, 定理の右辺の級数は $0\leq t\leq 1$ で絶対一様収束し, $B_k(t)$ もこの範囲で連続だから, $0\leq t\leq 1$ で定理の式が成立する. あとは定理の式の右辺が周期関数であることから, 左辺を周期的に拡張すればよい. □

この定理から, 後期の「数学特論 II」で扱う予定のリーマンゼータ関数の, 正の偶数点での値が求められる.

系 3.46 k を 2 以上の偶数とする. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}=-\frac{1}{2}\frac{B_k}{k!}(2\pi\sqrt{-1})^k.$$

証明は上記の定理で $t=0$ とおけばよい.

3.13 複素関数としてのガンマ関数

定理 3.47 第二種オイラー積分

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

は z が複素変数になっても $\mathrm{Re}\, z > 0$ の範囲で収束し, またこの範囲で正則となる.

[略証] 収束性は $|t^{z-1}| = t^{\mathrm{Re}\, z - 1}$ より, 実数変数の場合に帰着される. 正則性はモレラの定理 (定理 3.27) により証明できる. $\mathrm{Re}\, z > 0$ の範囲における任意の閉曲線 C をとると,

$$\int_C \Gamma(z) dz = \int_0^\infty e^{-t} \left(\int_C t^{z-1} dz \right) dt$$

となるが, コーシーの積分定理により $\displaystyle\int_C t^{z-1} dz = 0$, 従って $\displaystyle\int_C \Gamma(z) dz = 0$. □

定理 3.48 $1/\Gamma(z)$ のワイエルシュトラスによる無限積表示

$$z e^{Cz} \prod_{n=1}^\infty \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}}$$

は z が複素変数になっても意味をもち, しかも整関数となる. よって一致の定理により, 少なくとも $\mathrm{Re}\, z > 0$ においては $1/\Gamma(z)$ と一致する.

そこで, $1/\Gamma(z)$ をこの無限積表示により再定義する. すると式より $1/\Gamma(z)$ は $z = 0, -1, -2, \ldots$ において 1 位の零点をもつ整関数で, 従って, $\Gamma(z)$ は $z = 0, -1, -2, \ldots$ において 1 位の極をもつ有理型関数として再定義される. また, その極以外の点において

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}$$

が成立する.

[証明] 無限積表示の右辺が, 任意の $R > 0$ に対し $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ で一様収束することを示す. そうすれば定理 3.28 により整関数であることがいえて, 残りの主張が容易に従う.

まず,

$$u_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}} - 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

とおく. $R<n$ なる自然数 n を任意にとり, $w=z/n$ と書くと,

$$\begin{aligned}(1+w)e^{-w}-1 &= -1+(1+w)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m w^m}{m!} = -1+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m w^m}{m!}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m w^{m+1}}{m!} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m w^m}{m!}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1} w^m}{(m-1)!} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left(-\frac{1}{m}+1\right)w^m \\ &= \sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1} w^m}{(m-2)!\cdot m} = w^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1} w^m}{m!\cdot(m+2)}\end{aligned}$$

なので, $(1+w)e^{-w}-1$ は $w=0$ を 2 位の零点としてもつ. 従って,

$$\frac{(1+w)e^{-w}-1}{w^2} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1} w^m}{m!\cdot(m+2)}$$

は (右辺のべき級数の収束半径が ∞ なので) w の整関数となる. すると最大値の原理 (定理 3.29) より, 有界閉領域 $\{w\in\mathbb{C}\mid |w|\le 1\}$ におけるこの関数の絶対値は境界線 $|w|=1$ において最大値をとる. $|w|=1$ のとき

$$\left|\frac{(1+w)e^{-w}-1}{w^2}\right| = |(1+w)e^{-w}-1| \le |1+w||e^{-w}|+1 \le 2e+1 < 7$$

だから, その最大値は 7 よりは小さい.

以上より, $|z|\le R$ のとき, $R<n$ なる任意の自然数 n に対し, $|w|=|z/n|\le 1$ だから,

$$|u_n(z)| = |(1+w)e^{-w}-1| < 7|w^2| = \frac{7|z|^2}{n^2} \le \frac{7R^2}{n^2}.$$

さらに, 系 3.46 ($k=2$ の場合) により無限級数 $\displaystyle\sum_{n>R}\frac{7R^2}{n^2}$ は収束するので, 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ は $|z|\le R$ において絶対一様収束することがいえる. とくに $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(z)|$ は有界閉領域 $\{z\in\mathbb{Z}\mid |z|\le R\}$ における連続関数となるので, この領域で最大値をもつ. それを M とおく.

次に,

$$P_m(z) = \prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} \qquad (m=1,2,3,\dots)$$

とおくと,

$$\lim_{m\to\infty}P_m(z) = \lim_{m\to\infty}\left\{P_1(z)+\sum_{l=2}^{m}(P_l(z)-P_{l-1}(z))\right\}$$

なので, 級数 $\displaystyle\sum_{l=2}^{\infty}(P_l(z)-P_{l-1}(z))$ が $|z|\le R$ で絶対一様収束することを示せば証明が終わる. 上記より, $|z|\le R$ において

$$|P_l(z)|=\left|\prod_{n=1}^{l}(1+u_n(z))\right|\le\prod_{n=1}^{l}(1+|u_n(z)|)\le\prod_{n=1}^{l}e^{|u_n(z)|}=e^{\sum_{n=1}^{l}|u_n(z)|}\le e^M.$$

さらに $l\ge 2$ のとき $P_l(z)=(1+u_l(z))P_{l-1}(z)$ だから,

$$|P_l(z)-P_{l-1}(z)|=|u_l(z)P_{l-1}(z)|\le e^M|u_l(z)|.$$

ここで, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n(z)$ は $|z|\le R$ において絶対一様収束することから, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, z によらないある自然数 N が存在して

$$\sum_{l=N}^{\infty}|u_l(z)|<\frac{\varepsilon}{e^M}$$

を満たす. このとき

$$\sum_{l=N}^{\infty}|P_l(z)-P_{l-1}(z)|\le e^M\sum_{l=N}^{\infty}|u_l(z)|<\varepsilon.$$

よって, 級数 $\displaystyle\sum_{l=2}^{\infty}(P_l(z)-P_{l-1}(z))$ が $|z|\le R$ で絶対一様収束することがいえた. □

この他, 一致の定理を用いれば, 第 2 章で示した公式のほとんどは複素変数でも成立することがいえる.

参考文献

[1] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信「ベルヌーイ数とゼータ関数」牧野書店.

[2] 小松勇作「特殊函数」近代数学講座 9, 朝倉書店.

[3] 洲之内治男, 猪俣清二「関数論」サイエンス社.

[4] 高木貞治「解析概論」岩波書店.