4　行列式の定義 (その２)／行列式の性質

演習 4.1 次の行列式を計算せよ.

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$　　(ii) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 4 & 8 & -6 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 7 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

演習 4.2 A を n 次の正方行列とし, 列ベクトル $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ を用いて A が

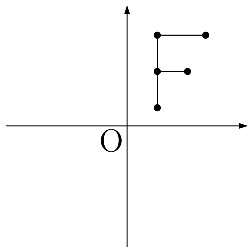
$$A = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

と書けていたとする. このとき, もし $\det A \neq 0$ ならば $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ は線形独立であることを, 講義で習った行列式の性質 (教科書で言うと定理 3.8〜3.11 にあたる) を用いて証明せよ.

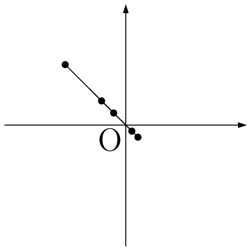
[ヒント] 対偶 ($\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ が線形従属ならば $\det A = 0$ となること) を示せばよい.

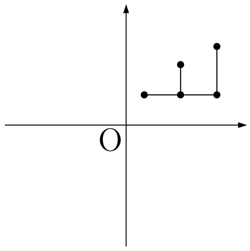
(裏面に続く)

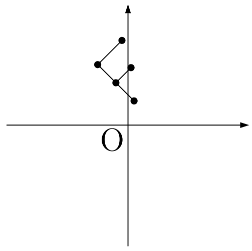
演習 4.3 右の図形は平面上の 5 点を線分で結んだものである. これを下の (ア)〜(ウ) の行列が表す 1 次変換により移したところ, それぞれ (エ)〜(カ) のどれかになった. 行列と図形の正しい組み合わせを答えよ. また, その答えに至った理由を説明せよ.



(ア) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$　　(イ) $\begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$　　(ウ) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(エ) 

(オ) 

(カ) 

※時間が余った人は, 次も考えてみてください.

演習 4.4 A を 3 次の実正方行列とすると, $\det A$ の絶対値は, A が表す 1 次変換が図形の体積を何倍に拡大するかを示している (cf. 教科書の補題 3.7). それでは, $\det A$ の正負は何を表しているか考察せよ. (いくつか具体例を作って $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ がどう移るかを考えてみると良いかもしれません.)