# 6. 体の拡大次数

$K$ を体とする．実ベクトル空間や複素ベクトル空間と同様にして, $K$ の元をスカラーとするベクトル空間を定義することができる．これを $K$-ベクトル空間 (または「$K$ 上のベクトル空間」) という．例えば, $R$ を可換環, $K$ をその部分体とすると, $R$ は自然に $K$-ベクトル空間になる．線形独立, 線形従属, 基底, 次元 ($\dim_K$ と書く) などの概念や線形写像についても, これまで学んできた線形代数と同様に考えることができる．

**問題 6.1.** $R$ を整域, $K$ をその部分体とする．もし $\dim_K R < \infty$ ならば, $R$ は体であることを示せ．(★★★)

$L$ を体, $K$ をその部分体とする．このとき $K$ から見た場合, $L$ は $K$ の**拡大体**であるという．またこの状況を $L/K$ と表すこともある．$L$ を $K$-ベクトル空間とみたときの次元 $\dim_K L$ を $[L : K]$ と書き, $L/K$ の**拡大次数**という．

**問題 6.2.** 自然数 $n$ について, もし $a^2 \mid n$ かつ $a > 1$ なる自然数 $a$ が存在しないなら, $n$ は無平方 (square-free) であるという．

(1) $n$ を 1 より大きい無平方な自然数とするとき, $[\mathbb{Q}(\sqrt{n}) : \mathbb{Q}] = 2$ となることを示せ．(★★)

(2) $n, m$ を 1 より大きい無平方な自然数, $n$ と $m$ は互いに素とするとき, $[\mathbb{Q}(\sqrt{n}, \sqrt{m}) : \mathbb{Q}] = 4$ となることを示せ．(★★★)

(3) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ を求めよ．(★★)

(4) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$ を求めよ．(★★★)

$L$ を体 $K$ の拡大体とする．$a \in L$ について, あるゼロでない $K$ 係数多項式 $f(x) \in K[x] \setminus \{0\}$ が存在して $f(a) = 0$ となるとき, $a$ は $K$ **上代数的**であるという．特に, $\mathbb{Q}$ 上代数的な複素数を**代数的数**と呼び, そうでないものを**超越数**と呼ぶ.

体拡大 $L/K$ について, $L$ のすべての元が $K$ 上代数的であるとき, $L/K$ は**代数拡大**であるという．

**問題 6.3.** $[L : K] < \infty$ ならば $L/K$ は代数拡大であることを示せ．(★★)

**問題 6.4.** $L$ を体, $M$ を $L$ の部分体, $K$ を $M$ の部分体とする (つまり $K \subset M \subset L$). このとき, $L/M$ と $M/K$ が共に代数拡大ならば $L/K$ も代数拡大であることを示せ．(★★★)