1　ベクトル場・スカラー場 (その１)

ベクトル場. $\mathbb{R}^n$ 内のある領域 D の各点 $\boldsymbol{r} = (x_1, \ldots, x_n)$ に対し何かベクトル

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = (A_1(\boldsymbol{r}), \ldots, A_n(\boldsymbol{r})) = (A_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, A_n(x_1, \ldots, x_n))$$

が対応しているとき, その対応は**ベクトル場**と呼ばれる (n 変数関数の n 個の組). これはベクトル値関数 $\boldsymbol{A} : D \to \mathbb{R}^n$ と考えることもできる. 例えば, 回転体や流体の各点に対しその速度を対応させる速度場や, 電場・磁場や重力場などの力場はベクトル場として表わされる. なお, $n = 2$ や $n = 3$ のときにベクトル場を図示するときは, 各点 $\boldsymbol{r}$ に対応するベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を $\boldsymbol{r}$ を起点とする矢印として描く.

例. 三次元空間の点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対してその (位置ベクトルとしての) 長さを $r = ||\boldsymbol{r}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で表すことにする. このとき, 原点に置かれた正の点電荷が作る電場は

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{c}{r^3}\boldsymbol{r} = \left(\frac{cx}{r^3}, \frac{cy}{r^3}, \frac{cz}{r^3}\right) \quad (c: \text{定数})$$

と表わされる. これは $\mathbb{R}^3$ から原点 $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ を除いた領域 $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ の各点で定義されているので, 関数 $\boldsymbol{A} : D \to \mathbb{R}^3$ と思うことができる.

スカラー場. $\mathbb{R}^n$ 内のある領域 D の各点 $\boldsymbol{r} = (x_1, \ldots, x_n)$ に対し何か実数 $f(\boldsymbol{r})$ が対応しているとき, これを**スカラー場**ということがある. 言い換えれば, スカラー場とは n 変数関数 $f : D \to \mathbb{R}$ のことである. 例えば温度分布や, 標高分布, 気圧の分布などはスカラー場である.

定数 k に対して $f(x_1, \ldots, x_n) = k$ を満たす点 $(x_1, \ldots, x_n)$ の集合を等高線 ($n = 2$ のとき) とか等位面 ($n = 3$ のとき) と言ったりする.

例. 上記の電場において, 位置 $\boldsymbol{r}$ に電荷量 q の電荷を置いたとき, その電荷が受ける力の大きさは

$$f(\boldsymbol{r}) = ||q\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})|| = \frac{|q|c}{r^2}$$

となる. これは 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ と思うことができる. また, 正の定数 k について, $f(\boldsymbol{r}) = k$ となる等位面は原点を中心とした半径 $\sqrt{|q|c/k}$ の球面である. (k が 0 以下のときは等位面は存在しない.)

スカラー場の勾配. 考えている領域で与えられたスカラー場 f に対し, f の偏微分を成分とするベクトル場 $\operatorname{grad} f$ が

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

により与えられる．これは f の**勾配**と呼ばれる (ここでは横ベクトルで書いているが, 微積分の講義のように縦ベクトルで書くこともある).

勾配の意味. 勾配は, スカラー場の変化の向きと大きさを表す．$\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{r})$ は点 $\boldsymbol{r}$ において f の変化量が最も大きい向きを指し, その長さ $||\,\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{r})||$ はその向きへの変化の大きさを表す.

例えば, f を地図上の標高を表す関数とすると, 地点 $\boldsymbol{r}$ に立って周囲を見渡した時に最も急な上り坂になっている方向が $\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{r})$ であり, 最も急な下り坂になっている方向が $-\,\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{r})$ であるということになる．そしてその坂の傾きの大きさが $||\,\mathrm{grad}\, f(\boldsymbol{r})||$ で表される.

演習 1.1 次で与えられる (x, y)-平面上のスカラー場 f の等高線の概形をいくつか描け．また, 等高線上の点をいくつか適当にとって, $\mathrm{grad}\, f$ の概形も一緒に図示せよ.

(1) $f(x, y) = x + y$
(2) $f(x, y) = xy$
(3) $f(x, y) = x^2 + y^2$
(4) $f(x, y) = x^2 - y^2$

スカラー場の等高線と勾配の関係について. 上の演習において, f の等高線 $f(x, y) = k$ をなす曲線を, ある区間 I で定義された関数 $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, で表す. このとき $f(x(t), y(t)) - k = 0$ が成り立つので, この式の両辺を t で微分すれば,

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) = 0$$

を得る．これは f の勾配と等高線の接ベクトル $(x'(t), y'(t))$ の内積が常に 0 になることを意味する．つまり, 勾配 $\mathrm{grad}\, f$ は等高線の接ベクトルと常に直交する．(言い換えれば, $\mathrm{grad}\, f$ は等高線の法ベクトルを表している.)