9　行列の対角化 の解答例

演習 9.1 (1) P の各列を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とすれば, $AP = A(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (A\boldsymbol{v}_1, \ldots, A\boldsymbol{v}_n)$ である.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

の両辺に左から P をかければ,

$$\begin{aligned} AP &= (A\boldsymbol{v}_1, \ldots, A\boldsymbol{v}_n) \\ &= P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix} = (\alpha_1\boldsymbol{v}_1, \ldots, \alpha_n\boldsymbol{v}_n) \end{aligned}$$

を得る. この式の各列を比較すれば, $A\boldsymbol{v}_i = \alpha_i\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ となることが分かる. よって, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は A の固有値で, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は A の固有ベクトルである.

(2) $P = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ とすると, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は線形独立だから, P は正則行列となる. また, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は A の固有ベクトルだから, 固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が存在して $A\boldsymbol{v}_i = \alpha_i\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ となる. よって,

$$AP = (A\boldsymbol{v}_1, \ldots, A\boldsymbol{v}_n) = (\alpha_1\boldsymbol{v}_1, \ldots, \alpha_n\boldsymbol{v}_n) = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

この両辺に左から P^{-1} をかければ,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

を得る.

演習 9.2 (1) 対角化可能である. 実際, 例えば $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とすれば,

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は 1 のみで, 固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$($c$ は 0 でない定数) という形のものしか存在しない. よって, 2 つの線形独立な固有ベクトルをとることができないので, 対角化不可能である.

(3) 対角化可能である. 実際, 例えば $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば,

$$\begin{aligned} P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

演習 9.3 (1) $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ とおくと, A の固有多項式は

$$\begin{vmatrix} x-a & -c \\ -c & x-b \end{vmatrix} = x^2 - (a+b)x + (ab - c^2)$$

となる. これの判別式を計算すれば,

$$(a+b)^2 - 4(ab - c^2) = (a-b)^2 + 4c^2 \geq 0.$$

よって固有多項式は実数根しかもたない.

(2) 固有方程式が重解をもつときは, 上記の判別式は 0 でなければならないので, $a = b$, $c = 0$ である. よって A は対角行列である.

(3) $\alpha(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = {}^t(\alpha\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = {}^t(A\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{u}{}^tA\boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{u}(\beta\boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})$. よって $(\alpha-\beta)(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = 0$ となるが, 仮定より $\alpha \neq \beta$ であったから, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ を得る. すなわち $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交する.

(4) A の固有方程式が重解をもつときは, (2) より A は既に対角行列だから, $P = E$ (単位行列) とすればよい. 次に, A が相異なる 2 つの固有値 α, β をもつ場合を考える. α, β に関する A の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ とする. 必要なら適当にスカラー倍して $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は単位ベクトルであったとしてよい. (3) より $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は直交するので線形独立である. よって演習 9.1 より A は対角化可能で, $P = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ とすれば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となる．あとはこの P が直交行列であることを示せばよい．${}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{u} = 0$, ${}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} = ||\boldsymbol{u}||^2 = 1$, ${}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{v}||^2 = 1$ だから,

$$ {}^tPP = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{u} \\ {}^t\boldsymbol{v} \end{pmatrix} (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} & {}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} \\ {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{u} & {}^t\boldsymbol{v}\boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

よって ${}^tP = P^{-1}$ である．