9 曲面の面積と面積分

曲面の面積. $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 S が, $\mathbb{R}^2$ 内の領域 D 上で定義された関数 $\boldsymbol{r} : D \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto \boldsymbol{r}(u, v)$ でパラメータ表示されているとする. このとき S の接平面は $\boldsymbol{r}$ を u, v で偏微分した二つの接ベクトル $\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v$ で張られるのであった. このとき, S の面積 A は, 二つの接ベクトルの張る平行四辺形の面積 $||\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v||$ を積分したもので与えられる:

$$A = \int_D ||\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|| dudv.$$

ここに出てくる曲面内の微小面積 $dS = ||\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|| dudv$ を**面素**と呼ぶ. これを使って上の積分を

$$A = \int_S dS$$

のように表すこともある. このような積分は**面積分**と呼ばれる.

例題. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ の表面積を計算せよ.

ベクトル場の面積分. 空間 $\mathbb{R}^3$ を流れるある流体の流速の場を $\boldsymbol{v}$ とする. このとき単位時間に曲面 S を通過する流体の体積を面積分を用いて表してみよう. $\boldsymbol{n}$ を S の単位法ベクトル場とすると, 面素 dS を単位時間に $\boldsymbol{n}$ の向きに通過する流体の微小体積は

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

となる. すると, この量を足し合わせた面積分

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_D \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v) dudv$$

が求める量となる. $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n} dS$ を面素ベクトルと呼び, 上の積分を

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = \int_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$$

と書くこともある.

演習 9.1 球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ とベクトル場 $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (x, y, z)$ に対して面積分

$$\int_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$$

を計算せよ.