16 既約多項式

前回同様 K は $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ のいずれかとし, 多項式環 $K[X]$ を考える.

多項式 $f(X) \in K[X]$ が次の (i)(ii) を満たすとき, $f(X)$ は**既約**であるという:

(i) $\deg f(X) \geq 1$,

(ii) $g(X), h(X) \in K[X]$ が $f(X) = g(X)h(X)$ を満たすなら $\deg g(X) = 0$ または $\deg h(X) = 0$ のいずれかである.

また, $K[X]$ のイデアル I が**素イデアル**であるとは, 次の (i), (ii) を満たすことをいう:

(i) $I \neq K[X]$,

(ii) $g(X), h(X) \in K[X]$ かつ $g(X)h(X) \in I$ ならば必ず $g(X) \in I$ または $h(X) \in I$ が成り立つ.

問題 16.1 多項式 $f(X) \in K[X]$ (ただし $\deg f(X) \geq 1$) について, 次の (a),(b) が同値であることを示せ.

(a) $f(X)$ は既約多項式である.

(b) $f(X)$ で生成されるイデアル $I(f(X))$ は素イデアルである.

問題 16.2 (1) $f(X) \in K[X]$, $2 \leq \deg f(X) \leq 3$ とする. このとき $f(X)$ が既約多項式であるための必要十分条件は, すべての $a \in K$ に対し $f(a) \neq 0$ となることであることを示せ.

(2) $K = \mathbb{R}$ のとき, すべての $a \in \mathbb{R}$ に対し $f(a) \neq 0$ となるが, 定数 ($\deg f(X) = 0$) でも既約多項式でもないような $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ の例を挙げよ.

問題 16.3 (教科書の問題 2.21 の類題) 実数 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ を

$$\alpha^3 = -2 + \sqrt{3}, \quad \beta^3 = -2 - \sqrt{3}$$

を満たすようにとる (それぞれ唯一つ存在する). このとき $f(X) = X^3 - 3X + 4 \in \mathbb{R}[X]$ について, 次に答えて $f(X)$ が $\mathbb{R}[X]$ において既約でないことを確かめよ.

(1) $f(\alpha + \beta) = 0$ であることを示せ.

(2) $f(X) = (X - a)(X^2 + bX + c)$ を満たす実数 a, b, c を求めよ.

問題 16.4 多項式 $f(X) \in K[X]$ について, $f(X)$ が既約多項式であることと $f(X+1)$ が既約多項式であることとは同値であることを示せ.

[1] ホームページ http://www.math.tsukuba.ac.jp/~amano/lec2012-2/e-algebra-ex/index.html