電気数学 II・演習 (担当: 天野勝利)　　演習問題 (6 月〜7 月) の解答例　2006 年 7 月 4 日

1. (1) $e^{3x-1}-2=-1 \Leftrightarrow e^{3x-1}=1 \Leftrightarrow e^{3x-1}=e^0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \Leftrightarrow \underline{x=1/3}$.

(2) $2^{3x+2}=4^{x-3} \Leftrightarrow 2^{3x+2}=2^{2x-6} \Leftrightarrow 3x+2=2x-6 \Leftrightarrow \underline{x=-8}$.

(3) $3^{-x-1}<1/3 \Leftrightarrow 3^{-x-1}<3^{-1} \Leftrightarrow -x-1<-1 \Leftrightarrow x+1>1 \Leftrightarrow \underline{x>0}$.

(4) $\log_2(x+5)>1+\log_2 x \Leftrightarrow \log_2(x+5)>\log_2 2x \Leftrightarrow x+5>2x \Leftrightarrow 5>x$. $\therefore\ \underline{0<x<5}$.

(5) $\log_{10}(2x-1)-\log_{10}(x+2)=0 \Leftrightarrow \log_{10}(2x-1)=\log_{10}(x+2) \Leftrightarrow 2x-1=x+2 \Leftrightarrow \underline{x=3}$. (別解: (与式) $\Leftrightarrow \log_{10}\{(2x-1)/(x+2)\}=\log_{10}1 \Leftrightarrow (2x-1)/(x+2)=1 \Leftrightarrow \cdots$ 以下同様.)

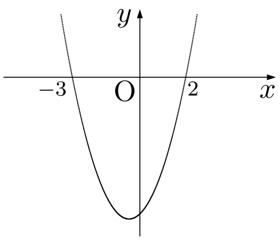
(6) $\log_5(x-1)+\log_5(x+3)=1 \Leftrightarrow \log_5(x-1)(x+3)=\log_5 5 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)=5 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0 \Rightarrow x=2,-4$. 前提条件の $x>1$ より, $\underline{x=2}$.

2. 4^n の (10 進法による) 桁数が 31 桁以上 $\Leftrightarrow 10^{30} \leqq 4^n \Leftrightarrow \log_2 10^{30} \leqq \log_2 4^n \Leftrightarrow 30\log_2 10 \leqq 2n \Leftrightarrow 15\log_2 10 \leqq n$. ここで, $49.5<15\log_2 10<49.95$ より, 条件を満たす最小の自然数は $\underline{n=50}$. (別解: $30 \leqq \log_{10}4^n \Leftrightarrow 15 \leqq n\log_{10}2$. ここで, $0.3<\log_{10}2$ より $15<50\log_{10}2$ だから, $n=50$ は条件を満たす. しかし $\log_{10}2<0.303$ より, $49\log_{10}2<15$ となってしまい, $n=49$ は条件を満たさない.)

3. (1) $-3<x<2$　(2) $x\neq -3/2$　(3) $x<-3,\ 3<x$　(4) x はすべての実数　(5) $-3\leqq x\leqq 1$　(6) 解はない.

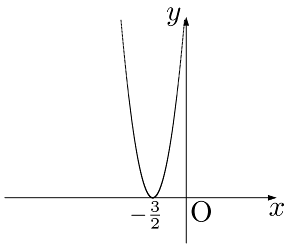
※判別式 D の計算と, 関連する 2 次関数のグラフは次の通り:

(1) $y=x^2+x-6$



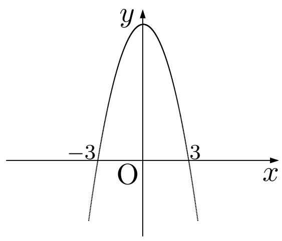
$D=25>0$

(2) $y=4x^2+12x+9$



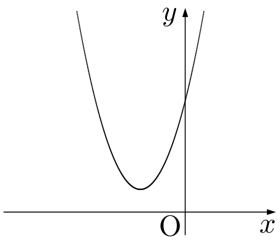
$D=144-144=0$

(3) $y=-x^2+9$



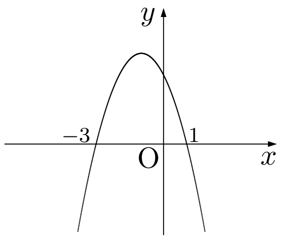
$D=36>0$

(4) $y=x^2+4x+5$



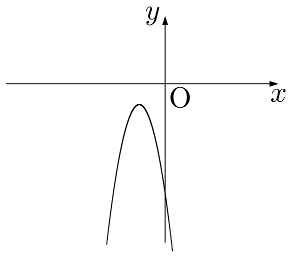
$D=-4<0$

(5) $y=-x^2-2x+3$



$D=16>0$

(6) $y=-3x^2-7x-5$



$D=49-60=-11<0$

4. まず, P を r の関数で表すと, $P=I^2r=\dfrac{9r}{(r+0.1)^2}$ となるので,

$$P\leqq 10 \Leftrightarrow 9r\leqq 10(r+0.1)^2 \Leftrightarrow 9r\leqq 10r^2+2r+0.1 \Leftrightarrow 0\leqq 10r^2-7r+0.1.$$

そこでこの 2 次不等式を解けばよい. 判別式を計算すると, $D=49-4=45>0$ だから, 2 次方程式 $10x^2-7x+0.1=0$ の二つの (実数) 解を α,β $(\alpha<\beta)$ とすると, 上の 2 次不等式の

解は $r \leqq \alpha$, $\beta \leqq r$ となる. (ただし, 抵抗 r は負の値をとらないので, $0 \leqq r$ という前提条件もあることに注意.) 解の公式を使うと,

$$\alpha = \frac{7-3\sqrt{5}}{20}, \quad \beta = \frac{7+3\sqrt{5}}{20}$$

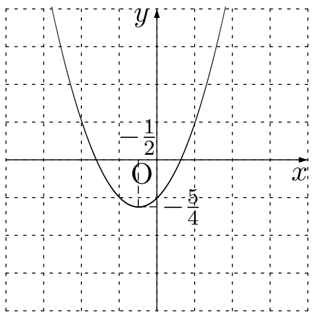
がわかる. $\alpha > 0$ なので, 答えは,

$$(0 \leqq)\ r \leqq \frac{7-3\sqrt{5}}{20}, \quad \frac{7+3\sqrt{5}}{20} \leqq r.$$

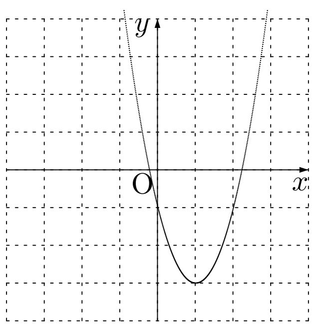
(実際にはこんなに微妙な調節ができる可変抵抗はないかもしれませんが…)

5. 基本変形すると, (1) $y = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$ (2) $y = 2(x-1)^2 - 3$ (3) $y = -\frac{1}{3}(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$.

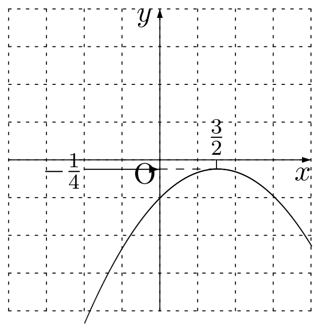
(1)



(2)



(3)



6. (1) $x > \frac{1}{2}$ (2) $x \neq -1$ (3) $1 \geqq x$.

7. (1) 連立方程式を整理すると,

$$\begin{cases} rI_1 - 3I_2 = -1 \\ 5I_1 + 8I_2 = 8 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} r & -3 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

よって, クラメルの公式により,

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 8 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{16}{8r+15}, \qquad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} r & -1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r & -3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{8r+5}{8r+15}.$$

(2) $I_1 + I_2 = 1.2 \Leftrightarrow 8r + 21 = 1.2(8r+15) \Leftrightarrow 1.6r = 3 \Leftrightarrow \underline{r = 15/8\ (= 1.875)}$.

8.

関数: $y = e^x$ グラフ: (ア) $\xrightarrow{\text{操作: (a)}}$ 関数: $y = -e^x$ グラフ: (カ) $\xrightarrow{\text{操作: (c)}}$ 関数: $y = -e^{-x}$ グラフ: (エ)

$\xrightarrow{\text{操作: (b)}}$ 関数: $y = 1 - e^{-x}$ グラフ: (ウ) $\xrightarrow{\text{操作: (d)}}$ 関数: $y = 1 - e^{-x-2}$ グラフ: (オ)