演習レポート (第１回) 解答例

課題 1.1. ベクトル場 $V = x_1\partial_1$ について, 次に答えよ.

(1) V の積分曲線がどのような曲線になるか述べよ.

(2) V が定める 1 係数変換群 Φ を求めよ.

(3) Φ の延長 $\Phi^{(1)}$ を求めよ.

(4) V の延長 $V^{(1)}$ を求めよ.

(5) 例えば $F(x_1, x_2, x_2') = x_1 x_2'$ とおくと $V^{(1)}(F) = 0$ となることを確かめよ.

(6) Φ で不変な常微分方程式はどのようなものか調べよ.

[解答例] (説明のため, 必要以上に丁寧に書いています.)

(1) $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ が V の積分曲線であったとすると, $x_1(t)$, $x_2(t)$ は微分方程式

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = 0 \end{cases}$$

の解である (教科書の §6.2, (6.4) 式). これを書き直すと,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

となる. 教科書の第 3 章で学んだように, この形の方程式の解は

$$\boldsymbol{x}(t) = \exp\left\{ t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \boldsymbol{u} \quad (\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}(0))$$

となるのであった. ここで,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^0 = E, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \exp\left\{ t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} t^n/n! & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって求める積分曲線は

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{u} \quad (\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}(0))$$

である.

(2) (1) の結果より,

$$\Phi = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(3) まず, 教科書の §9.1 のやり方に従って, $x_2' = dx_2/dx_1$ が Φ の元 $\phi(s) = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ でどのように変化するのかを計算する.

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \end{pmatrix} = \phi(s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^s x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

だから, 教科書の (9.4) 式により,

$$\widetilde{x}_2' = \frac{\partial \widetilde{x}_2}{\partial \widetilde{x}_1} = \frac{0 + 1 \cdot x_2'}{e^s + 0 \cdot x_2'} = e^{-s} x_2'.$$

よって,

$$\phi^{(1)}(s) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \widetilde{x}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^s x_1 \\ x_2 \\ e^{-s} x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

すなわち,

$$\phi^{(1)}(s) = \begin{pmatrix} e^s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-s} \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\Phi^{(1)} = \{\phi^{(1)}(s) \mid s \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} e^s & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(4) 教科書の §9.3, 定義 9.5 に従って計算すれば,

$$V_2^{(1)} = 0 + (0-1)x_2' - 0 \cdot (x_2')^2 = -x_2'$$

より,

$$V^{(1)} = x_1 \partial_1 - x_2' \partial_{2'}.$$

(5) まず, $F(x_1, x_2, x_2') = x_1x_2'$ は Φ-不変であることを確認しておこう:

$$F(\phi^{(1)}(s)(x_1, x_2, x_2')) = F(e^s x_1, x_2, e^{-s}x_2') = (e^s x_1)(e^{-s}x_2') = x_1x_2'.$$

だから, $V^{(1)}(F) = 0$ を満たすはずである (例えば教科書の定理 9.9 を参照). 実際,

$$V^{(1)}(F) = x_1\frac{\partial(x_1x_2')}{\partial x_1} - x_2'\frac{\partial(x_1x_2')}{\partial x_2'} = x_1x_2' - x_2'x_1 = 0.$$

また (1 月 26 日の授業では忘れていましたが), 実は x_2 も Φ-不変であり, 従って $V^{(1)}(x_2) = 0$ を満たす.

(6) Φ で不変な常微分方程式は, x_1x_2' と x_2 の関数 $g(x_1x_2', x_2)$ によって

$$g(x_1x_2', x_2) = 0$$

と書かれるものである. (あるいは, これを x_1x_2' に関して解いた形, すなわち, x_2 の関数 $f(x_2)$ によって

$$x_1x_2' = f(x_2), \quad \text{または,} \quad x_2' = \frac{f(x_2)}{x_1}$$

と書かれる方程式である.) □

※1 月 26 日の授業の最後に書いた (6) の答は不十分でした. お詫びして上記のように訂正いたします.

課題 1.2. ベクトル場 $V = x_1\partial_1 - x_2\partial_2$ について, V が定める 1 係数変換群 Φ で不変な常微分方程式はどのようなものか調べよ.

[解答例] これも課題 1.1 と同様の手順で解いていく.

(1) V の積分曲線 $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ の満たすべき微分方程式は

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

なので, これを解いて, 求める積分曲線を得る:

$$\boldsymbol{x}(t) = \exp\left\{t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\boldsymbol{u} \quad (\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}(0)).$$

(2) (1) より, V が定める 1 係数変換群 Φ は

$$\Phi = \left\{ \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(3) 教科書の §9.1, (9.4) 式により,

$$\widetilde{x}_2' = \frac{0 + e^{-s}x_2'}{e^s + 0 \cdot x_2'} = e^{-2s}x_2'.$$

よって,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 \\ \widetilde{x}_2 \\ \widetilde{x}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^s x_1 \\ e^{-s}x_2 \\ e^{-2s}x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^s & 0 & 0 \\ 0 & e^{-s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

従って, Φ の延長 $\Phi^{(1)}$ は

$$\Phi^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} e^s & 0 & 0 \\ 0 & e^{-s} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2s} \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(4) 教科書の定義 9.5 に従って計算すれば,

$$V_2^{(1)} = 0 + (-1-1)x_2' - 0 \cdot x_2' = -2x_2'$$

だから, V の延長 $V^{(1)}$ は

$$V^{(1)} = x_1\partial_1 - x_2\partial_2 - 2x_2'\partial_{2'}.$$

(5) 例えば x_1x_2 と $x_1^2x_2'$ は Φ 不変であり, 実際

$$\begin{aligned} V^{(1)}(x_1x_2) &= x_1\frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_2} - 2x_2'\frac{\partial(x_1x_2)}{\partial x_2'} = x_1x_2 - x_2x_1 - 0 = 0, \\ V^{(1)}(x_1^2x_2') &= x_1\frac{\partial(x_1^2x_2')}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial(x_1^2x_2')}{\partial x_2} - 2x_2'\frac{\partial(x_1^2x_2')}{\partial x_2'} = x_1(2x_1x_2') - 0 - 2x_2'(x_1^2) = 0 \end{aligned}$$

を満たす.

(6) Φ で不変な常微分方程式は, x_1x_2 と $x_1^2x_2'$ の関数 $g(x_1x_2, x_1^2x_2')$ によって

$$g(x_1x_2, x_1^2x_2') = 0$$

と書かれるものである. □