# 10 固有値・固有ベクトルの応用 の解答例

※訂正: 旧バージョンの「線形代数 III」と書いてあった部分は「線形代数続論」の間違いでした。すみません。

**演習 10.1** (1) $P$ の各列を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とすれば, $AP = A(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) = (A\boldsymbol{v}_1, \ldots, A\boldsymbol{v}_n)$ である.

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

の両辺に左から $P$ をかければ,

$$\begin{aligned} AP &= (A\boldsymbol{v}_1, \ldots, A\boldsymbol{v}_n) \\ &= P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix} = (\alpha_1\boldsymbol{v}_1, \ldots, \alpha_n\boldsymbol{v}_n) \end{aligned}$$

を得る. この式の各列を比較すれば, $A\boldsymbol{v}_i = \alpha_i\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ となることが分かる. よって, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は $A$ の固有値で, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は $A$ の固有ベクトルである.

(2) $P = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ とすると, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は線形独立だから, $P$ は正則行列となる. また, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は $A$ の固有ベクトルだから, 固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が存在して $A\boldsymbol{v}_i = \alpha_i\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ となる. よって,

$$AP = (A\boldsymbol{v}_1, \ldots, A\boldsymbol{v}_n) = (\alpha_1\boldsymbol{v}_1, \ldots, \alpha_n\boldsymbol{v}_n) = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

この両辺に左から $P^{-1}$ をかければ,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

を得る.

(3)(i) 対角化可能である. 実際, 例えば $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とすれば,

$$P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は 1 のみで, 固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$($c$ は 0 でない定数) という形のものしか存在しない. よって, 2 つの線形独立な固有ベクトルをとることができないので, 対角化不可能である.

(iii) 対角化可能である. 実際, 例えば $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば,

$$
\begin{aligned}
P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

**注意 1.** この問題はちょっとシラバスの範囲を超えていて,「線形代数続論」でこれから勉強することの一部を先取りしているような感じです. 教科書でいうと, 最も関連の深いのは定理 7.3 です. ただ, その定理 7.3 の証明では, 今回の問題のようなことは「明らか」とされており, 行間の中に埋没している感じになっています. だから, その行間を埋める作業が今回の問題だといってもいいかもしれません. 皆さんの答案の中で, 定理 7.3 の証明を参考にしたと思われるものもあったのですが, 残念ながら上記のような理由で, ちょっと焦点がおかしい答案になってしまっていました.

**注意 2.** (3) (iii) は実は引っ掛け問題で, (ii) からの類推で「対角化不可能」とする人が多いだろうと思っていました (実際, 多かったです). 対角化不可能となる条件は,「固有方程式が重解をもつとき」ではなく, あくまで「線形独立な固有ベクトルの数が足りないとき」であることに注意してください.

なお, (iii) の $P$ を見つけるには, 固有値 2 に対する固有ベクトルを一つ見つければいいというわけにはいかず,「固有値 2 に対する固有ベクトル全体」を見渡す必要があるわけです. 一般に, ある固有値に対する固有ベクトル全体と零ベクトルの集合は「固有空間」といって, これは「線形代数続論」に登場する概念の中でも最も重要なものの一つです.

**注意 3.** (1) や (2) の証明で, $AP = (\alpha_1 \boldsymbol{v}_1, \ldots, \alpha_n \boldsymbol{v}_n)$ という式の代わりに

$$AP = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n$$

というような式を書いている人が結構いたのですが, これでは左辺が行列なのに対して, 右辺が列ベクトルになってしまって全然つじつまがあいません. この他にも「(スカラー) = (列ベクトル)」となってしまう式を書いている人もいたのですが, 記号を読

み書きするときには, それが何を意味しているのか, もう少し想像力を働かせるようにしてください.

**注意 4.** (3) で, 「固有値〜に対する固有ベクトルが存在しないので, 対角化不可能である」というような答案を書いている人 (固有値の計算を間違えてしまった人に多い) が何人かいたのですが, 「固有ベクトルが存在しない固有値」など定義上ありえません. 固有値が正しく計算できていれば固有ベクトルは必ず存在するはずなので, 固有ベクトルが見つからなかった時点で計算ミスを疑うべきでした.

**演習 10.2** (1) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ とすると, $\boldsymbol{y}' = \lambda\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ なので, もし $\boldsymbol{y}$ が微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の解ならば, $\lambda\boldsymbol{v}e^{\lambda t} = A\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ が成り立つ. これの両辺に $e^{-\lambda t}$ をかければ, $\lambda\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v}$ となって, $\lambda$ が $A$ の固有値, $\boldsymbol{v}$ が $\lambda$ に対する固有ベクトル (または $\boldsymbol{v}$ が零ベクトル[1]) であることが分かる.

逆に, $\boldsymbol{v}$ が $A$ の固有値 $\lambda$ に対する固有ベクトルであったとすると, $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ だから, この両辺に $e^{\lambda t}$ をかければ $A\boldsymbol{v}e^{\lambda t} = \lambda\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ を得る. これは $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ が微分方程式 $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ の解であることを意味する.

(2) $\boldsymbol{y} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-6t}$.

(3) $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-6t}$. つまり, $\begin{cases} y_1(t) = 4e^{-t} + e^{-6t} \\ y_2(t) = 2e^{t} - 2e^{-6t}. \end{cases}$

**注意 5.** 今回は連立微分方程式の例でしたが, これは 2 階の微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (a, b \text{ は定数})$$

を解く場合にも使えるテクニックです.

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

とおけば, もとの方程式を $\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}$ と書くことができて, 連立微分方程式と同様にして解く事が可能になります.

なお, 行列 $A$ が対角化可能な場合は今回の問題のようにすれば解く事ができますが, そうでない場合はまた違った解が出てきます. 興味がある人は適当な微分方程式の教科書をあたってみてください.

[1] $\boldsymbol{v}$ が零ベクトルの場合を除外していなかったのは出題ミスです