よくある勘違い

線形代数 I, II 演習で答案などによく見かける勘違いをまとめてみました. 思い当たる人は, 具体例を自分で計算するなどして検証するようにしてください.

線形独立・線形従属について

「線形代数 I 演習」のアンケートへの返答にも書きましたが, 線形独立・線形従属の概念を二項関係のイメージで間違ってとらえてしまう人が少なくないようです. 具体的には, 下記の (1) と (1') とを混同してしまう:

(1) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形独立
(1') $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ のうちどの 2 つも線形独立

あるいはその否定命題として, 次の (2) と (2') とを混同する:

(2) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形従属
(2') $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ のうち, ある $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j$ について $\boldsymbol{a}_i = c\boldsymbol{a}_j$ (c : 定数) と書ける

特に (2) を (2') のように言い換えるケースが多々見られるのですが, それは間違いです. 例えば, 1 つの平面内に 3 つの互いに平行でない空間ベクトルが収まっている場合:

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を考えてみてください. この $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は (1') を満たしますが, 線形従属です. また, 線形従属であっても (2') を満たさないことが分かると思います.

2 つのベクトルの場合は線形独立・線形従属というのは両者が平行か平行でないかによっているわけですが, そのイメージを 3 個以上のベクトルの場合にも当てはめてしまうのがこの勘違いの背景にあるのではないでしょうか. もしそうならば, 線形独立のイメージは次のように修正すべきです:

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形独立 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ のうち, どの 1 つのベクトルも他の $n-1$ 個のベクトルの張る空間と平行でない

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形従属 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ のうち, ある 1 つのベクトルが他の $n-1$ 個のベクトルの張る空間と平行である

行列式・逆行列について

・4×4 以上の行列式をサラスの方法と同様に計算してしまう.

皆さんは演習 4.2 で検証したので, たぶん大丈夫でしょうが, わかっていてもうっかりすると間違えてしまうことがあります.

・ブロック分割された行列の行列式を考える際の勘違い.

4 分割の場合に演習 4.3 で検証しましたね. これもうっかりすると犯しやすい間違いです.

・「行列式」と「行列」を混同する.

かなり基本的なことですが, 行列とスカラーを同一視してはいけません. 行列式はスカラーですから, 行列とは違うのですが, よく混同する人がいます. (数式のイコールの左辺が行列なのに, 右辺が行列式, という風な記述をよく見かけました). 記法上もちゃんと区別して書きましょう. あまり細かくは注意しませんでしたが, 行列は丸かっこ $(\cdots)$ で, 行列式は縦線 $|\cdots|$, という区別をきちんと守っていない答案がいくつかあったように思います.

・正方行列ではない行列・ベクトルに「逆行列」があるように思ってしまう (割り算をしてしまう).

例えば, ベクトルに "逆数" があるように考えて, ベクトルを分母とする数式を書く, などもこれに含まれるでしょう. 乗法の逆元があると便利なことが多いので, つい願望から存在を仮定してしまうのでしょうが, やってはいけないことです.

また, 正方行列であっても, 正則でなければ逆行列は存在しない … ということは皆わかっていると思うのですが, 逆行列を考えるときに正則かどうかのチェックを忘れることはよくありますね.

・「ベクトルの長さ」と「行列式」を混同してしまう？

演習 8.4 の答案で, 行列 X と縦ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}$ について $X\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$ が成り立っているときに, $|X||\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{y}|$ が成り立つという風に書いている人が何人かいました. その時は「行列式は正方行列に対してしか考えられない」というような注意をしたと思うのですが, もしかして, この $|\boldsymbol{a}|$ や $|\boldsymbol{y}|$ は「ベクトルの長さ」を表していたのでしょうか？だとすれば, あの注意にはピンとこなかったかもしれません.

一般に, 行列 A と縦ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ について, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が成り立っていても, $|A||\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{y}|$ が成り立つということはいえません ($|\boldsymbol{x}|, |\boldsymbol{y}|$ がベクトルの長さを表すとして). 例えば,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

とすると $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ ですが, $|A||\boldsymbol{x}| = -\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{y}| = \sqrt{11}$ だから全然違う.