※今回から, 授業時間内に演習問題をやる時間がとれない可能性が高いので, やり方を変えて, レポート課題方式にします. このプリントの演習問題すべてに回答し, A4 のレポート用紙にまとめて (枚数は自由) 次回の授業時に提出してください.

4 ベクトル空間とその次元

ある集合 V に和とスカラー倍が定義されていて, ゼロベクトル $\mathbf{0}$ や逆ベクトルの存在, 結合法則や分配法則, などの条件を満たすとき, V を**ベクトル空間**(または**線形空間**) という[1]. スカラーとして実数全体 $\mathbb{R}$ を考えているときは**実ベクトル空間**, 複素数全体 $\mathbb{C}$ を考えているときは**複素ベクトル空間**ということもある.

例 4.1 (1) $V = \{\mathbf{0}\}$ (ゼロベクトルのみ) の場合もベクトル空間と呼ばれる: $\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$, 任意のスカラー c に対し $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$, また $\mathbf{0}$ の逆ベクトルは $\mathbf{0}$ 自身.

(2) 平面ベクトル全体を $\mathbb{R}^2$ と書くと, この $\mathbb{R}^2$ はベクトルとしての和とスカラー倍により実ベクトル空間となる.

(3) 空間ベクトル全体を $\mathbb{R}^3$ と書くと, $\mathbb{R}^3$ もやはり実ベクトル空間となる.

(4) K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする. 一般に, K 成分の n 項縦ベクトル全体を K^n と書くと, K^n はベクトル空間となる.

(5) K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする. x を独立変数とする K 係数の 1 変数多項式全体を $K[x]$ と書く:

$$K[x] = \{c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 \mid n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad c_0, \ldots, c_n \in K\}.$$

この $K[x]$ は多項式としての和と定数倍によりベクトル空間となる. ここで, $n = 0$ で定数項 c_0 だけのものも多項式とみなしていることに注意. 特に, 0 を多項式とみなしたものが, $K[x]$ のゼロベクトル $\mathbf{0}$ にあたる.

V をベクトル空間, W を V の部分集合とするとき, もし W が V の和とスカラー倍で閉じていれば, W もベクトル空間となる. このとき, W を V の**部分 (ベクトル) 空間**という. 詳しく言うと, K をスカラー全体 (ここでは $K = \mathbb{R}$ または $K = \mathbb{C}$) とするとき, W が V の部分空間であるとは, 次の (i)(ii) を満たすことを指す:

(i) $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$.

(ii) 任意の $c \in K$, $v \in W$ に対し, $cv \in W$.

[1]正確な定義は適当な線形代数の教科書を参照してほしいのですが, とりあえずは数ベクトル空間や多項式全体の空間とその部分空間しか考えないので, 当面はこの程度の理解で十分だと思います.

演習 4.2 K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする.

(1) $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ と, K 成分の $n \times n$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対し, 積 $A\boldsymbol{v}$ を

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

により定める. このとき, $W_1 = \{\boldsymbol{v} \in K^n \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\}$ とすると, W_1 は K^n の部分空間になることを示せ.

(2) 微分方程式 $f''(x) - 2xf'(x) + 6f(x) = 0$ を満たす K 係数多項式全体を W_2 とおく:

$$W_2 = \{f(x) \in K[x] \mid f''(x) - 2xf'(x) + 6f(x) = 0\}.$$

このとき, W_2 は $K[x]$ の部分空間になることを示せ.

K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし, V を, K の元をスカラーとするベクトル空間とする. n 個の V の元の組 $v_1, \ldots, v_n$ について,

$${}^{\forall}c_1, \ldots, c_n \in K, \text{“}c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = \boldsymbol{0} \Rightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0\text{”}$$

という条件が成立するとき, $v_1, \ldots, v_n$ は**線形独立**であるという. また, 線形独立でない場合は**線形従属**という.

演習 4.3 V の元の組 $v_1, \ldots, v_n$ が線形独立であっても, もう 1 つ別の元 $v_{n+1} \in V$ を加えた場合, $n+1$ 個の組 $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ は線形従属になることがある. $V = \mathbb{R}^3$ の場合にそのような例を見つけよ.

$V \neq \{\boldsymbol{0}\}$ のとき, V において線形独立となる元の組の個数に最大値があるなら, その最大値を V の**次元**といい, $\dim V$ と書く. またそのとき V は**有限次元**であるという. (なお, $V = \{\boldsymbol{0}\}$ の場合も有限次元といい, その場合の次元は $\dim V = 0$ とする.) つまり, $V \neq \{\boldsymbol{0}\}$ かつ V が有限次元であるとき, $n = \dim V$ とすると, 線形独立な n 個の元の組 $v_1, \ldots, v_n$ が少なくとも 1 組は存在する一方, これにいかなる V の元 v_{n+1} を加えても $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ は線形従属になってしまう ($n+1$ 個以上の線形独立な元の組は存在しない). そのような元の組 $v_1, \ldots, v_n$ を V の**基底**と呼ぶ.

例 4.4 演習 4.2 (1) の W_1 は必ず有限次元となる. $\dim W_1$ を連立線形方程式 $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ の**解の自由度**といい, W_1 の基底を**基本解**という.

演習 4.5 (1) 例 4.1 (5) の $K[x]$ は有限次元でないことを示せ.

(2) 演習 4.2 (2) の W_2 は有限次元で, $\dim W_2 = 1$ となることを示せ. (コツが必要なので, 授業中にヒントを与えます.)