7 対数関数—解答例

演習 7.1 [解答例] (1) $r = \log_a M$, $s = \log_a N$ とおくと, 対数の定義により $a^r = M$, $a^s = N$. よって,

$$MN = a^r a^s = a^{r+s}.$$

よって対数の定義により,

$$\log_a MN = r + s = \log_a M + \log_a N.$$

(2) r, s はまた上記の通りとすると,

$$\frac{M}{N} = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}.$$

よって対数の定義により,

$$\log_a \frac{M}{N} = r - s = \log_a M - \log_a N.$$

(3) $r = \log_a M$ とすると,

$$M^k = (a^r)^k = a^{kr}.$$

よって対数の定義により,

$$\log_a M^k = kr = k \log_a M.$$

□

演習 7.2 [解答例] $p = \log_b a$, $q = \log_a x$ とおくと, 対数の定義により $b^p = a$, $a^q = x$. よって,

$$x = a^q = (b^p)^q = b^{pq}.$$

よって対数の定義により,

$$\log_b x = pq = (\log_b a)(\log_a x).$$

この両辺を $\log_b a$ で割って与式を得る. □

演習 7.3 [解答例] (1) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$.

(2) $\log_{10} \dfrac{1}{1000} = \log_{10} 10^{-3} = -3$.

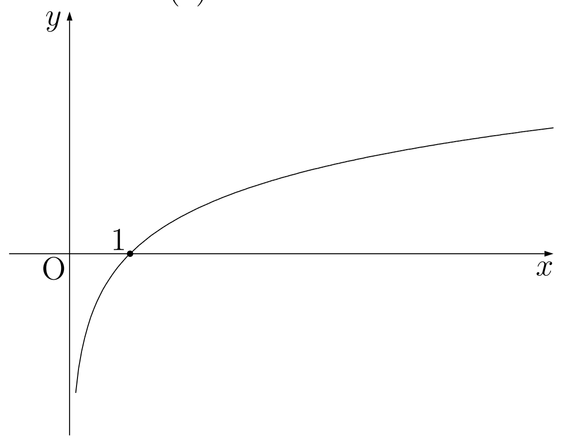
(3) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{243} = \log_{\frac{1}{3}} (3^5)^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{5}{2}} = -\dfrac{5}{2}$.

(4) $\log_2 \frac{4}{5} + 2\log_2 \sqrt{10} = \log_2 \left(\frac{4}{5} \cdot (\sqrt{10})^2\right) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3.$

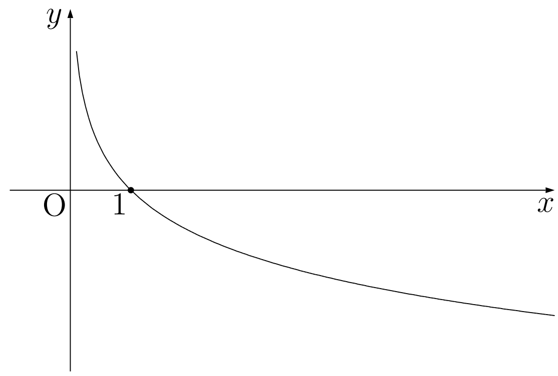
(5) $\log_3 \sqrt{12} + \log_3 \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 \left(\frac{\sqrt{12}\cdot\frac{3}{2}}{(\sqrt[3]{3})^{\frac{3}{2}}}\right) = \log_3 \left(\frac{2(3)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{3}{2}}{(3^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}}\right) = \log_3 \left(\frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}\right) =$ $\log_3 3 = 1.$

演習 7.4 [解答例]

(1) $a > 1$ のとき



(2) $0 < a < 1$ のとき



演習 7.5 [解答例] $10^9 \leqq 2^n < 10^{10}$ となる最小の自然数 n を求めればよい. 常用対数をとると, 条件は $9 \leqq n\log_{10} 2 < 10$ となるが,

$$\frac{9}{\log_{10} 2} \fallingdotseq 29.90, \quad \frac{10}{\log_{10} 2} \fallingdotseq 33.22$$

なので, 求める自然数は $n = 30$ である.

[問題文訂正]
(訂正前) $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3$
(訂正後) $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$
演習 7.5 で, 求める自然数 n を特定するには, $\log_{10} 2$ が 0.3 よりも実際に大きいという情報が必要でした. お詫びして訂正いたします.

演習 7.6 [解答例] $200 \times 2^n = 10^8$ すなわち $2^{n+1} = 10^6$ となるような n を求める. 常用対数をとると, $\log_{10}(2^{n+1}) = (n+1)\log_{10} 2$ だから, $(n+1)\log_{10} 2 = 6$, すなわち,

$$n = \frac{6}{\log_{10} 2} - 1 \fallingdotseq 19.93 - 1 = 18.93 \quad [\text{時間}].$$

ここで, 0.93 時間は $0.93 \times 60 = 55.8$ 分だから, バクテリアが 1 億個になるのは約 18 時間 56 分後である.