演習レポート (第 2 回) 解答例

課題 2.1. $\mathrm{O}(2) = \{A \in \mathrm{M}_2\mathbb{R} \mid {}^tAA = E\}$ と $\mathrm{SO}(2) = \{A \in \mathrm{O}(2) \mid \det A = 1\}$ のリー環 $\mathfrak{o}(2)$, $\mathfrak{so}(2)$ を考える.

(1) $\mathfrak{o}(2) = \{X \in \mathrm{M}_2\mathbb{R} \mid {}^tX + X = O\}$ となることを示せ.

(2) 教科書の命題 10.14 と (1) より $\mathfrak{so}(2) = \{X \in \mathrm{M}_2\mathbb{R} \mid {}^tX + X = O,\ \mathrm{tr}\, X = 0\}$ となることが分かる. 一方, 演習 4.21 により $\mathrm{SO}(2) = G_J$ なので, 命題 10.15 により $\mathfrak{so}(2) = \mathfrak{g}_J = \mathbb{R}J$ となるはずである. これを直接的に確かめよ.

[解答例] (1) リー環の定義 (教科書の §10.3, 定義 10.13) により, $X \in M_2\mathbb{R}$ について,

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{o}(2) \quad &\Leftrightarrow \quad G_X = \{\exp(sX) \mid s \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{O}(2) \ \Leftrightarrow\ \exp(sX) \in \mathrm{O}(2) \quad ({}^\forall s \in \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \quad {}^t(\exp(sX))(\exp(sX)) = E \quad ({}^\forall s \in \mathbb{R}). \end{aligned} \tag{2.1}$$

また, 教科書の §4.2, 命題 4.11 により,

$$ {}^t(\exp(sX)) = \exp {}^t(sX) = \exp(s\,{}^tX). $$

ここで, 教科書の §4.2, 命題 4.7 を用いて (2.1) の左辺を $\exp\{s({}^tX + X)\}$ と書き直したいところだが, この場合は前提条件が満たされているかどうかは分からない (${}^tXX = X{}^tX$ とは限らない) ので, 命題 4.7 は使えない. そこで, 別の方法を考える.

系 4.9 により $(\exp(sX))^{-1} = \exp(-sX)$ なので, (2.1) の両辺に右から $(\exp(sX))^{-1}$ をかければ,

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{o}(2) \quad &\Leftrightarrow \quad \exp(s\,{}^tX) = \exp(-sX) \quad ({}^\forall s \in \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \quad {}^tX = -X \\ &\Leftrightarrow \quad {}^tX + X = O \end{aligned}$$

を得る. 上式の二つ目の ($\Leftrightarrow$) は次のように証明される: まず ($\Leftarrow$) は明らか. ($\Rightarrow$) は, 両辺を s で微分して $s = 0$ とおけば,

$$ {}^tX = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp(s\,{}^tX) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp(-sX) = -X. $$

あるいは, 教科書の §4.4, 定理 4.18 の行列対数関数を用いても ($\Rightarrow$) を証明できる. $||\exp(s\,{}^tX) - E|| < 1$, $||\exp(-sX) - E|| < 1$, $||sX|| < \log 2$ となるような十分小さい $s > 0$ をとれば,

$$ s\,{}^tX = \log(\exp(s\,{}^tX)) = \log(\exp(-sX)) = -sX $$

となるので, ${}^tX = -X$ を得る.
　以上により, $\mathfrak{o}(2) = \{X \in \mathrm{M}_2\mathbb{R} \mid {}^tX + X = O\}$ が示された.
　(2) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2\mathbb{R}$ とおくとき,

$${}^tX + X = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a & c+b \\ b+c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = d = 0,\ b = -c$$

となる. 従って, ${}^tX + X = O$ ならば自動的に $\operatorname{tr} X = 0$ も満たされ,

$$\mathfrak{so}(2) = \mathfrak{o}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; c \in \mathbb{R} \right\} = \{cJ \mid c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}J$$

であることが確かめられる. □

課題 2.2. 教科書の 10.2 節で $\mathrm{SL}_2\mathbb{R}$ の岩澤分解

$$\mathrm{SL}_2\mathbb{R} = \mathrm{SO}(2) \cdot G_H \cdot G_N$$

について学んだ. 実は, これと同様の分解がリー環についても成立する. $\mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ が次のようにベクトル空間の直和に分解されることを示せ:

$$\mathfrak{sl}_2\mathbb{R} = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{g}_H \oplus \mathfrak{g}_N.$$

[解答例] 任意の $X \in \mathfrak{sl}_2\mathbb{R}$ に対し, ある $X_J \in \mathfrak{so}(2)$, $X_H \in \mathfrak{g}_H$, $X_N \in \mathfrak{g}_N$ が一意的に存在して,

$$X = X_J + X_H + X_N$$

と書けることを示せばよい.
　(存在性) $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ とおく. これに対し,

$$X_J = cJ \in \mathfrak{so}(2), \quad X_H = aH \in \mathfrak{g}_H, \quad X_N = (b+c)N \in \mathfrak{g}_N$$

とおけば $X = X_J + X_H + X_N$ を満たす.
　(一意性) 任意の $X_J, X'_J \in \mathfrak{so}(2)$, $X_H, X'_H \in \mathfrak{g}_H$, $X_N, X'_N \in \mathfrak{g}_N$ について,

$$X_J + X_H + X_N = X'_J + X'_H + X'_N \tag{2.2}$$

が成り立つならば $X_J = X'_J$ かつ $X_H = X'_H$ かつ $X_N = X'_N$ となることを示せばよい. そこで, $X_J = cJ$, $X'_J = c'J$, $X_H = aH$, $X'_H = a'H$, $X_N = bN$, $X'_N = b'N$ とおい

て, (2.2) が成立するときに $c = c'$ かつ $a = a'$ かつ $b = b'$ となることを示そう. もし (2.2) が成り立つならば,

$$\begin{aligned} X_J + X_H + X_N &= \begin{pmatrix} a & b-c \\ c & -a \end{pmatrix} \\ = \quad X'_J + X'_H + X'_N &= \begin{pmatrix} a' & b'-c' \\ c' & -a' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

だから, 各成分を比較して $a = a'$, $c = c'$, $b - c = b' - c'$ を得る. 従って $b = b'$ もいえるので, これで証明ができた. $\square$