1 数列の極限 の解答例

演習 1.1 (i) $|1-a_n| < 0.1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{n+1} < 0.1 \Leftrightarrow 10 < n+1 \Leftrightarrow 9 < n$ だから, 例えば $N = 10$ とすればよい. (N は 10 以上の自然数ならば何でも良い.)

(ii) 上と同様に考えれば, $|1-a_n| < 0.01 \Leftrightarrow 99 < n$ なので, 例えば $N = 100$ とすればよい. (N は 100 以上の自然数ならば何でも良い.)

(iii) 任意に実数 $\varepsilon > 0$ をとったとき, $|1-a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1}{\varepsilon} < n+1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 < n$ なので, $\dfrac{1}{\varepsilon} \leq N$ となる自然数 N をとれば, $n \geq N \Rightarrow |1-a_n| < \varepsilon$ を満たす. ${}^\forall\varepsilon > 0$ に対してそのような N がとれたので, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ が証明できた.

演習 1.2 まず, 次に注意: $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対し,

$$a_n = \frac{n^2}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - 2(n+1) + 1}{n+1} = (n+1) - 2 + \frac{1}{n+1} = n - 1 + \frac{1}{n+1} > n - 1.$$

(i) $N = 101$ とすれば, $n \geq N \Rightarrow a_n > n - 1 \geq N - 1 = 100 = M$ となる.

(ii) 任意に実数 $M > 0$ をとったとき, $N \geq M + 1$ となる自然数 N をとれば, $n \geq N \Rightarrow a_n > n - 1 \geq N - 1 \geq M$ となる. 従って, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

(別解) (i) $a_n > 100 \Leftrightarrow n^2 - 100n - 100 > 0 \Leftrightarrow n < 50 - 10\sqrt{26}$ または $50 + 10\sqrt{26} < n$. $51^2 = 2601$ より $10\sqrt{26} < 51$ すなわち $50 + 10\sqrt{26} < 101$ だから, $N = 101$ とすればよい.

(ii) $a_n > M \Leftrightarrow n^2 - Mn - M > 0 \Leftrightarrow n < \dfrac{M - \sqrt{M^2 + 4M}}{2}$ または $\dfrac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2} < n$ だから, $\dfrac{M + \sqrt{M^2 + 4M}}{2} < N$ となるように自然数 N をとれば, $n \geq N$ のとき $a_n > M$ となる. したがって, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

演習 1.3 (i) 例えば $\varepsilon = 2$ とすれば, ${}^\forall N \in \mathbb{N}$ に対し, $n = 2N + 1 > N$ をとるとき $|a - a_n| = |1.2 - (-1)^{2N+1}| = |1.2 - (-1)| = 2.2 > \varepsilon$ となる. (ε は 2.2 以下の正の実数ならば何でも良い.)

(ii) 例えば $\varepsilon = 1$ とすれば, ${}^\forall N \in \mathbb{N}$ に対し, $n = 2N > N$ をとるとき $|a - a_n| = |-0.3 - (-1)^{2N}| = |-0.3 - 1| = 1.3 > \varepsilon$ となる. (ε は 1.3 以下の正の実数ならば何でも良い.)

(iii) $a \geq 0$ のときは, 例えば $\varepsilon = 0.9$ とすれば $^\forall N \in \mathbb{N}$ に対し, $n = 2N+1 > N$ をとるとき $|a - a_n| = |a - (-1)^{2N+1}| = |a - (-1)| = a + 1 \geq 1 > \varepsilon$ となる. $a < 0$ のときは, 例えば $\varepsilon = 1$ とすれば, $^\forall N \in \mathbb{N}$ に対し, $n = 2N > N$ をとるとき $|a - a_n| = |a - (-1)^{2N}| = |a - 1| = -a + 1 > \varepsilon$ となる. 従って, $\{a_n\}$ はいかなる実数 a にも収束せず, 発散する.

(iv) $\{a_n\}$ が $+\infty$ に発散 $\Leftrightarrow$ "$^\forall M > 0, {}^\exists N \in \mathbb{N}, {}^\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n > M$" で, これの否定命題を考えると,

$$\{a_n\} \text{ が } +\infty \text{ に発散しない} \Leftrightarrow {}^\exists M > 0, {}^\forall N \in \mathbb{N}, {}^\exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \text{ かつ } a_n \leq M$$

となる. まずこの命題を証明すればよい. $M = 2$ とすれば, $a_n = \pm 1$ だから, $a_n \leq M$ は常に成り立つので, $n \geq N$ となる $n \in \mathbb{N}$ を適当にとれば条件を満たす. 従って $\{a_n\}$ は $+\infty$ には発散しない.

上と同様に, 「$\{a_n\}$ が $-\infty$ に発散する」ことの否定命題を作ると,

$$\{a_n\} \text{ が } -\infty \text{ に発散しない} \Leftrightarrow {}^\exists M > 0, {}^\forall N \in \mathbb{N}, {}^\exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \text{ かつ } a_n \geq -M$$

となる. $M = 2$ とすれば, やはり $a_n \geq -M$ は常に成り立つので, $n \geq N$ となる $n \in \mathbb{N}$ を適当にとれば条件を満たす. 従って $\{a_n\}$ は $-\infty$ にも発散しない.

注意. (iii) で $\varepsilon = |1 - |a||$ とすればよい, としている人がいましたが, $a = \pm 1$ のときには $\varepsilon = 0$ となってしまってうまくいかないので, そこを直す必要があります. (そこだけ直せば, 上のものよりすっきりした良い別解となっています.)

演習 1.4 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ に注意すると, $^\forall \varepsilon > 0$ に対し, $\dfrac{1}{4\varepsilon^2} < N$ となる自然数 N をとれば, $n \geq N$ のとき,

$$a_n < \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{N}} < \varepsilon.$$

よって, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が証明できた.