3 部分群

G を群, e を G の単位元とする. G の部分集合 H が次の条件 (i)-(iii) を満たすとき, H は G の**部分群**と呼ばれる:

(i) 任意の $x, y \in H$ について, $xy \in H$,
(ii) $e \in H$,
(iii) 任意の $x \in H$ について $x^{-1} \in H$.

平たくいえば, G の部分集合のうち, G と同じ演算で群になっているものを部分群と呼ぶわけである. G がどのような群であれ, G 自身と単位元のみの集合 $\{e\}$ は必ず G の部分群となる (これを自明な部分群と呼ぶ). なお, H が G の部分群であることを $H \leq G$ (または $H < G$) と表すことがある.

問題 3.1 G を群, H を G の部分集合とする. H が G の部分群であることと, 次の (i')(ii') を満たすことが同値であることを示せ:
(i') H は空集合でない,
(ii') 任意の $x, y \in H$ について, $x^{-1}y \in H$.

問題 3.2 G を群, H, K を G の部分群とするとき, $H \cap K$ も G の部分群になることを示せ.

問題 3.3 G を群, H, K を G の部分群とする. 次を示せ.
(1) $H \cup K$ が G の部分群 $\Leftrightarrow$ $H \subset K$ または $K \subset H$.
(2) HK が G の部分群 $\Leftrightarrow$ $HK = KH$. (ここで, $HK = \{hk \mid h \in H,\ k \in K\}$.)

問題 3.4 実数全体 $\mathbb{R}$ は加法 $+$ に関して群となる. この群 $(\mathbb{R}, +)$ について, 次の問題に答えよ.
(1) $\mathbb{R}$ には $\{0\}$ 以外の有限部分群が存在しないことを証明せよ.
(2) H を $\mathbb{R}$ の部分群とする. もし $H \neq \mathbb{R}$ ならば, H はいかなる開区間も含まないことを示せ.

[1]ホームページ http://www.math.tsukuba.ac.jp/~amano/lec2012-2/e-algebra-ex/index.html