# Fortran 演習: 提出課題 4（多倍長演算）

通常の浮動小数点数(実数)の精度には限りがあり，任意精度で近似値を求めたい場合には用いることが出来ず，多倍長演算(または任意精度演算)と呼ばれる手法を用いることになる．ここでは多倍長演算が用いられる代表例である円周率$\pi$の計算を考えよう．

以下では最も簡単な実装を考える．まず任意の数値$x$を 10 進数で

$$x = (-1)^s \sum_{j=1}^{N} \tilde{x}_j \times 10^{-j+e}$$

の形で表そう．ここで$\tilde{x}_j \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$は各桁の数値を，$s \in \{0,1\}$は符号を，$e \in \mathcal{Z}$ は値の絶対値を保持するための整数である．従って項数$N$を十分大きく取り，$\tilde{x}_j$を配列として保持すれば，メモリの許す限り任意の精度(桁数)で数値を表すことが出来る．例えば $x = 1.41$ を表すには $N \geq 3$ とし，$\tilde{x}_1 = 1, \tilde{x}_2 = 4, \tilde{x}_3 = 1$ ($\tilde{x}_4$以降は全て 0)，$s = 0, e = 1$ とすれば良い．なお以下の円周率の計算では $s = 0, e = 1$ の場合が扱えれば十分であるので常にこれを仮定しても良い．すなわち，小数点以下$N$桁までの数値は長さ$N$の整数配列で表すことが出来る．(整数部まで含めれば長さは$N+1$である．)

ここでは円周率の計算に，Machin の公式および$\tan^{-1}(x)$の Taylor 展開を用いることによって得られる以下の級数展開を用いよう．

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}(a_k - b_k) = (a_0 - b_0) - \frac{a_1 - b_1}{3} + \frac{a_2 - b_2}{5} - \frac{a_3 - b_3}{7} \cdots$$

ただし

$$a_k \equiv 16\left(\frac{1}{5}\right)^{2k+1}, \quad b_k \equiv 4\left(\frac{1}{239}\right)^{2k+1}$$

と置いた．簡単な評価から，小数点以下 $l$ 桁目まで(ただし $l \gg 1$ )を正しく求めるには $k = [l/2\log_{10}(5)]$ 程度までで上記の級数を打ち切って良いことが分かる．

ここで，$a_{k+1} = a_k/5^2$，$b_{k+1} = b_k/239^2$で与えられることに注意すれば，

- 多倍長数同士の加算(足し算)
- 多倍長数同士の減算(引き算)
- 多倍長数の整数(通常の `integer`)での除算(割り算)

が実装出来れば円周率の計算が出来ることが分かる．筆算の要領でこれらの演算を実装し，実際に円周率の多倍長計算を行うプログラムを作成せよ．以下は小数点以下 100 桁までを求めた結果である．

```
$ ./a.out 100
PI = 3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
       5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
```

この例ではコマンドラインで求める桁数(この場合は 100)を与えている．このようにコマンドライン引数を利用するには，サブルーチン `get_command_argument` (Fortran 2003 以降では標準)を利用すると良い．ただし，必ずしもこの例のように実装する必要は無く，標準入力から項数を読み込むようにしても良い．