地球物理数値解析 レポート課題（天野担当分）

- 2025 年 6 月 1 日の 23:59 JST（日本標準時）までに UTOL に PDF ファイルをアップロードすること．
- 満点は 100 点とし，これ以上になった場合には満点とする．ただし，出席点はこれとは別に全体で評価する．

課題 A （配点：30 点）

天野担当分の講義や資料に関する感想を述べよ．

課題 B （配点：30 点）

以下の文章の空欄に入る適切な語句や文，式などを答えよ．

線形移流方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (c > 0)$$

の解析解$u(x,t)$は，初期条件が$u(x,t=0) = u_0(x)$のとき <u>（B-1）</u> で与えられ．一見すると簡単に解けそうに見えるが，数値的に解くのはそれほど容易なことではない．

以下ではn番目の時間ステップ，i番目の格子点での値をu_i^nと書くことにする．有限差分法で，例えば時間方向に 1 次精度の差分式 <u>（B-2）</u> を用い，空間方向に 2 次精度の差分式 <u>（B-3）</u> を用いると，FTCS スキームは <u>（B-4）</u> と書くことができる．Taylor 展開を用いることでより高精度の差分式を得ることもできるが，高精度の差分式を用いたからといって良いスキームになるとは限らない．実際に，von Neumann の安定性解析を適用すると，このスキームは <u>（B-5）</u> であることがわかり，実用には適さない．
同様に安定性解析を適用すると FTBS スキームは <u>（B-6）</u> ，FTFS スキームは <u>（B-7）</u> であることがわかる．これらの安定性解析の結果は物理的には <u>（B-8）</u> と解釈することができ，これは数値流体力学における風上差分法の考え方の基礎となる．
なお，von Neumann の安定性解析で数値的安定性が保証される場合でも，数値解が必ずしも正確な解を与えるとは限らないことに注意が必要である．例えば，仮に振幅が一定であったとしても，典型的には波長に依存した <u>（B-9）</u> があらわれ，時間がとともに初期の波形が崩れてしまうことがある．また，通常は特に短波長において <u>（B-10）</u> ため解が鈍ってしまい，シャープな構造を維持することは難しい．安定性と精度はトレードオフの関係にある．

FTCS スキームの安定性について考えるにあたって，最低次の打切り誤差を評価してみると <u>（B-11）</u> となり，これが実効的な <u>（B-12）</u> として作用して数値解が発散する原因となることがわかる．FTCS スキームと Lax-Wendroff スキームを比較してみると，違いは Lax-Wendroff スキームの <u>（B-13）</u> の項だけであるが，この

項が安定性を改善している．Lax-Wendroff スキームは時間・空間ともに 2 次精度であり，古典的な数値流体力学では実用的に用いられてきたが，急峻な勾配があるときには ＿（B-14）＿ （オーバーシュート・アンダーシュート）が生じることがよく知られている．これは ＿（B-15）＿ が示すように 2 次精度以上の線形のスキームでは避けることができず，スキームに何らかの非線形性を導入することが必要となっている．古典的によく用いられてきたのは ＿（B-16）＿ であるが，問題に合わせた調整が必要であり，現在ではあまり用いられなくなっている．

Burgers 方程式や Euler 方程式などの双曲型偏微分方程式の多くは保存形で書くことができる．したがって，これらの方程式を解くための数値スキームについても保存形が用いられることが多い．離散的な保存形は基礎方程式を ＿（B-17）＿ することで得られる．保存形の数値スキームを使うと，境界条件の影響を除いて ＿（B-18）＿ という好ましい性質がある．

非線形の双曲型偏微分方程式を考えるときに重要となるのが特性曲線の考え方である．特性速度 $\lambda(x)$ に沿ってある物理量 J が一定となるとき，この J を ＿（B-19）＿ と呼ぶ．特性曲線は$x-t$の空間で，特性速度で定義される微分方程式 ＿（B-20）＿ の解である．線形移流方程式では$\lambda(x)$は ＿（B-21）＿ ，J は ＿（B-22）＿ である．線形移流方程式では異なる初期条件からスタートする特性曲線が交わることはないが，Burgers 方程式のような非線形の方程式では特性曲線が交わることがある．このような場合，特性曲線の交点で ＿（B-23）＿ となるため，数学的に一意な解が存在せず，有限の粘性項（拡散項）が必要となる．同様のことは流体力学の Euler 方程式においても成り立ち，有限振幅の音波は有限時間で ＿（B-24）＿ に発展する．実用的な数値スキームには（陰に陽に）人工的な ＿（B-25）＿ が含まれているため，陽に粘性を含まない方程式であってもこのような数値解を安定に得ることができる．

保存形の数値スキームを用いるとき，数値解が収束するならば元の微分方程式の （B-26）＿ に収束することが保証される．これが圧縮性数値流体力学で保存形のスキームが好まれる理由である．ただし，収束する解が ＿（B-27）＿ を満たす物理的な解であるとは限らないので注意が必要である．

複数の独立変数に対する非線形双曲型偏微分方程式を考えるとき，特性速度は独立変数の数だけ存在する．例えば，Euler 方程式について考えると，(ρ, v, p)の 3 つの独立変数があるため，3 つの特性速度$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$が存在するが，これらは物理的には （B-28）＿ ， ＿（B-29）＿ ， ＿（B-30）＿ に対応する．

課題 C （配点：40 点）

講義内容を踏まえて，Euler 方程式（またはより一般の多変数の非線形双曲型偏微分方程式）の数値解法を設計するにあたって，線形移流方程式の数値解法，特に風上差分法の考え方がどのように生かされるか議論せよ．ただし，以下の語句を用いること．

- 特性速度
- ヤコビアン
- 固有値・固有ベクトル
- 対角化
- Riemann 問題

課題 D

1.（配点：10 点）

線形移流方程式の数値解を 1 次精度風上差分法および Lax-Wendroff 法を用いて求め，誤差ϵがそれぞれ$\epsilon \propto (\Delta x)^1$および$\epsilon \propto (\Delta x)^2$となることを示せ．なお，計算領域は$0 \leq x \leq 1$，境界条件は周期境界条件，初期条件は

$$u(x) = \sin(2\pi x)$$

とする．ただし，$t = 1$における数値解と解析解の差から

$$\epsilon = \sqrt{\int |\ u(x) - u_{\mathrm{analytic}}(x)\ |^2\ dx} = \sqrt{\sum_i |\ u_i^n - u_{\mathrm{analytic}}(x_i)\ |^2\ \Delta x}$$

を誤差と定義しよう．もちろんΔxを小さくとるにはΔtも小さくしなければならないので，$t = 1$まで計算するのに必要なステップ数が増えることに注意せよ．少なくとも 1 桁以上はΔxを変化させて，ϵとΔxの関係を両対数でプロットすること．

2.（配点：10 点）

以下の設定のもとで非粘性 Burgers 方程式の数値解を 1 次精度風上差分法および 2 段階 Lax-Wendroff 法（人工粘性あり）を用いて求め，両者を比較・考察せよ． 計算領域は$-1 \leq x \leq +1$，境界条件は周期境界条件，初期条件は

$$u(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < -\frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} < x < +\frac{1}{3} \\ 0 & +\frac{1}{3} < x < 1 \end{cases}$$

とする．

3.（配点：25 点）

1 次元 Euler 方程式について，周期境界条件のもとで正方向，および負方向に伝播する音波の固有モードをそれぞれ初期条件に選んだときの時間発展を 2 段階 Lax-Wendroff 法によって数値的に求めよ．それぞれの場合について振幅依存性を考察すること．ただし，初期条件でエントロピー一定を仮定し，ある固有モードを考えているときには，もう一方のモードの振幅は 0 になるように初期条件を選ぶこと.

4.（配点：25 点）

1 次元 Euler 方程式について，Sod の衝撃波管問題を考えよう．初期条件は

$$(\rho, v, p) = \begin{cases} (1, 0, 1) & x < 0 \\ (0.125, 0, 0.1) & x > 0 \end{cases}$$

で，$\gamma = 1.4$とし，境界条件としては対称境界($\partial/\partial x = 0$)を採用せよ．
任意の計算スキームで$t \simeq 0.5$程度まで計算した数値解からそのスキーム性質を考察すること．例えば，2 段階 Lax-Wendroff 法を用いる場合には，(i) Courant 数を固定してΔxを変える，(ii) Courant 数を変える, (iii) 人工粘性係数や人工粘性の表式を変え

る，などして結果を考察するとよい．この問題に適した人工粘性の与え方が他の初期条件（例えば衝撃波がより強い場合，弱い場合）でも有効かどうか試してみるのも面白い．