به نام خدا

پروژه درس ریاضی مهندسی

استاد:دکتر کربلایی

شماره پروژه:۱

سید محمد امین منصوری طهرانی

۹۴۱۰۵۱۷۴

تاریخ تحویل:۱۱ بهمن

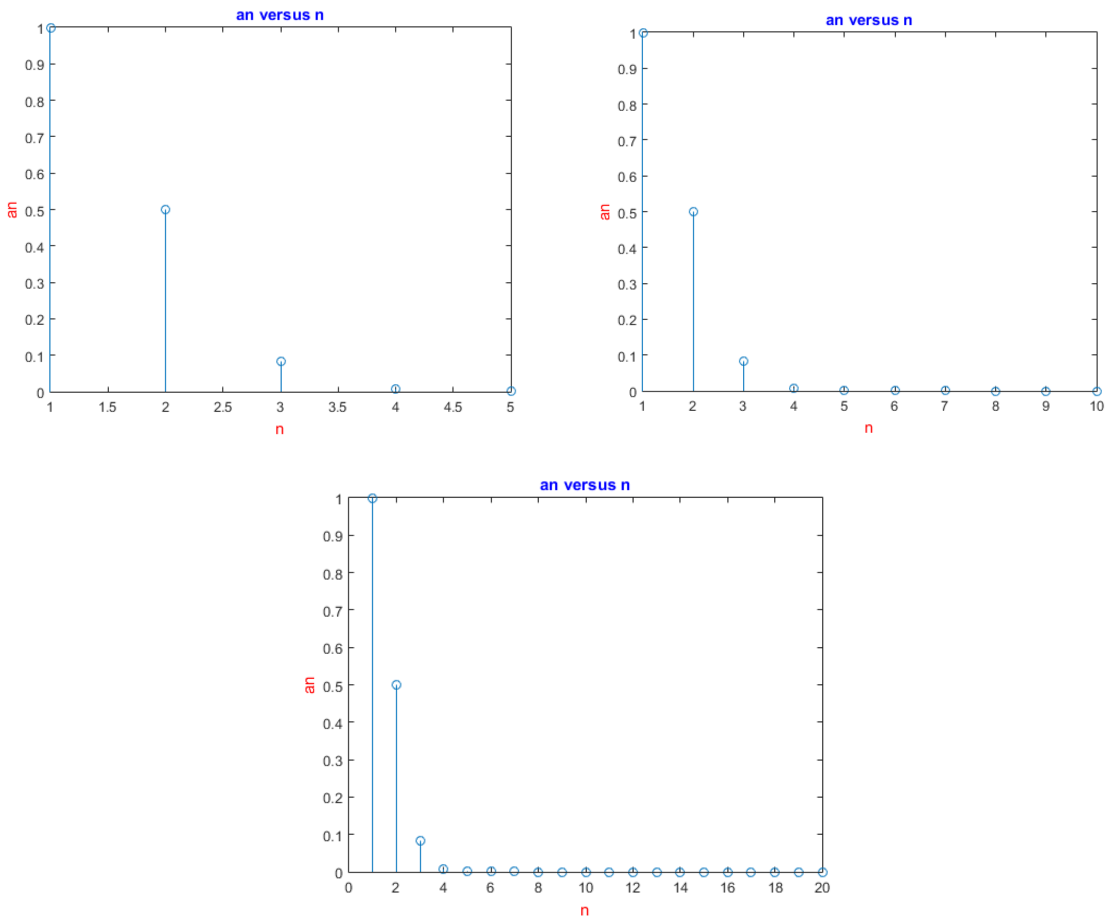
قسمت الف)

پس از run شدن متلب با تقسیم به بازه های 10^{-6} نتیجه عدد زیر خواهد بود:

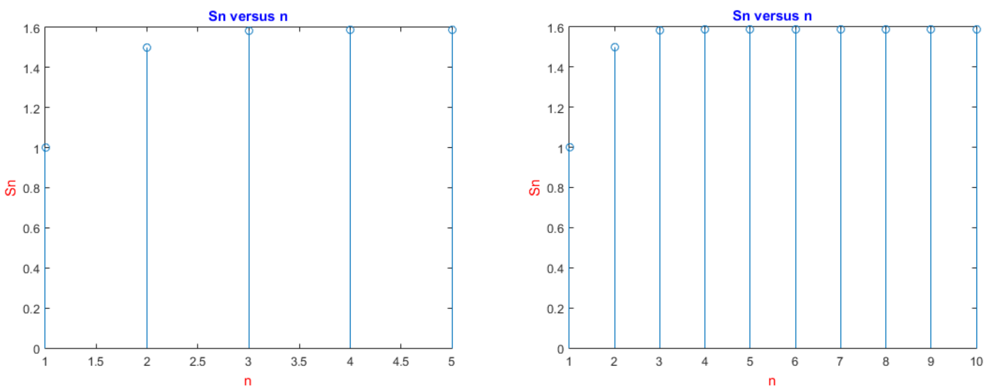
$$0.0000 + 9.9943i$$

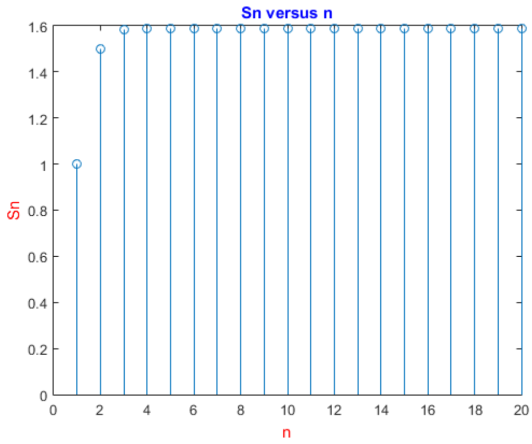
قسمت ب)

در شکل ۱ نمودار a_n و در شکل ۲ نمودار S_n و در شکل ۳ نمودار q_n نشان داده شده اند. هر کدام به ازای n های ۵ و ۱۰ و ۲۰ رسم شده اند.

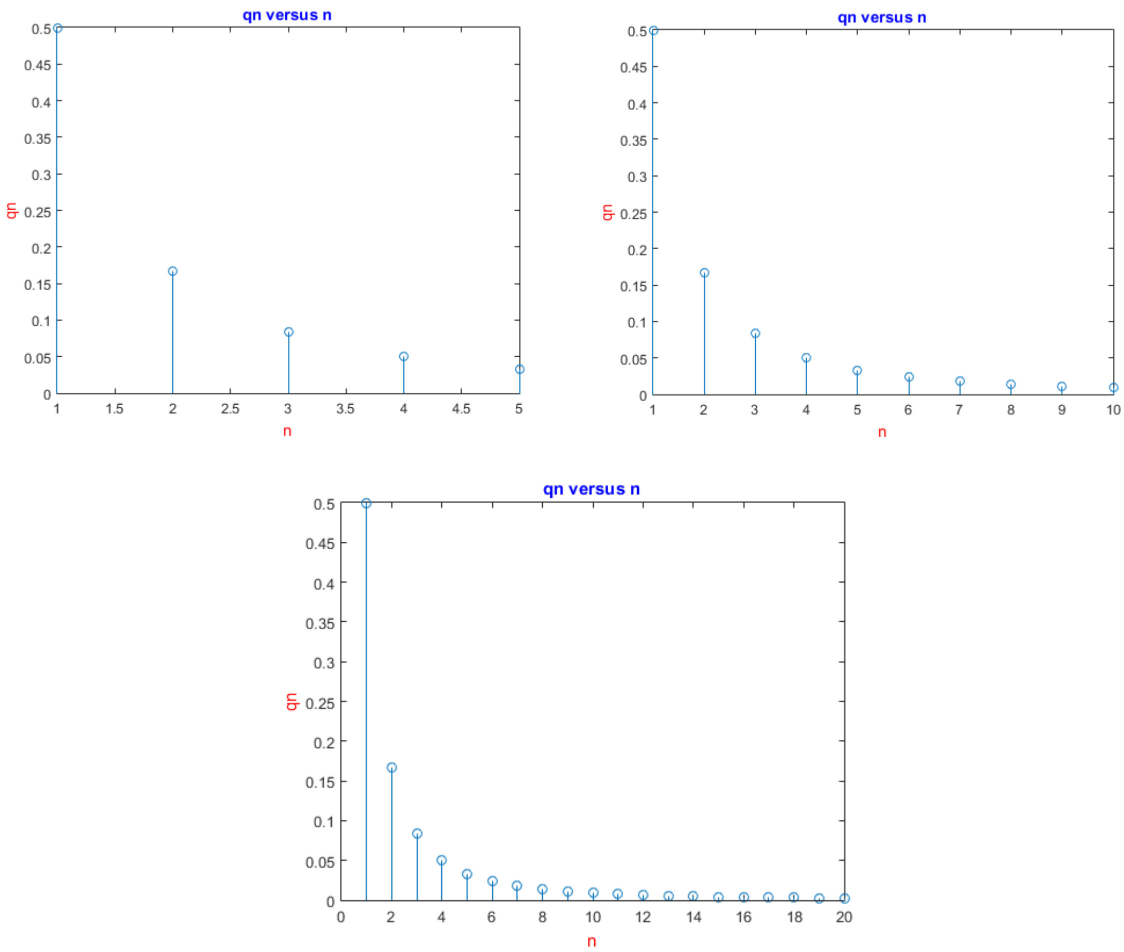


شکل 1





شکل 2



شکل 3

اثبات همگرایی سری S_n:

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که جمله n ام دنباله فوق از $\frac{1}{2^{n-1}}$ کمتر است. از آنجایی که می‌دانیم مجموع زیر به ۲ همگراست پس تعداد جملات محدود آن حتما از ۲ کمتر است و لذا ۲ یک کران بالا برای دنباله فوق می‌باشد. چون در هر جمله نسبت به جمله قبل یک عدد مثبت اضافه شده پس دنباله صعودی و کراندار است و بنابراین همگراست.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots \;\; converges\ to\ 2$$

وقتی مجموع بینهایت جمله را تقریب می‌زنیم خطا برابر جملات باقی مانده است. ابتدا بررسی می‌کنیم که چند جمله باید نگه داشت تا دقت مورد نظر برآورده شود.(وقتی p جمله اول تقریب زده شده است.)

$$Error=\sum_{n=p+1}^{\infty}\frac{1}{n!\,(n-1)!}$$

اگر $p=7$ باشد هر جمله از سری فوق از عددی در سری هندسی زیر کمتر است:

$$\frac{1}{7!\,(6)!},\frac{1}{8!\,(7)!},\frac{1}{9!\,(8)!},\cdots$$

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که جمله اول از 10^{-6} و جمله بعدی از 10^{-8} کمتر است. به همین ترتیب به سری هندسی زیر می‌رسیم:

$$10^{-6},10^{-8},10^{-10},\ldots$$

مجموع سری فوق به عدد 1.01^{-6} همگراست و لذا دقت مورد نظر برآورده شده است.برای مشاهده رقم های بیشتر از ۴ بعد از ممیز از دستور $format\ long$ در $command\ line$ استفاده شد. نتیجه برای دقت ۵ رقم اعشار هست:

$$1.59063$$

اگر $p=10$ باشد هر جمله از سری خطا از عددی در سری هندسی زیر کمتر است:

$$\frac{1}{10!\,(9)!},\frac{1}{11!\,(10)!},\frac{1}{12!\,(11)!},\cdots$$

به سادگی می‌توان مشاهده کرد که جمله اول از 10^{-10} و جمله بعدی از 10^{-12} کمتر است. به همین ترتیب به سری هندسی زیر می‌رسیم:

$$10^{-12},10^{-14},10^{-16},\ldots$$

مجموع سری فوق به عدد 1.01×10^{-12} همگراست و لذا دقت مورد نظر برآورده شده است.با استفاده از متلب نتیجه خواهد بود:

$$1.5906368546$$

قسمت پ)

اگر بسط تیلر e^{z} را حول صفر بنویسیم خواهیم داشت:

$$I=\int(1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots)e^{\frac{1}{z}}\,dz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\oint_C z^n\,e^{\frac{1}{z}}\,dz$$

مشخص است که انتگرال ها با روش مانده به سادگی محاسبه می شوند. در نقطه صفر که داخل مسیر انتگرال گیری است تکین اساسی داریم. با نوشتن سری لوران تابع و یافتن ضریب جمله $\frac{1}{z}$ مانده برای هر انتگرال بدست می‌آید.

$$\oint_C z^n\,e^{\frac{1}{z}}\,dz=2\pi i Res\left(z^n e^{\frac{1}{z}}\right)$$

$$z^n e^{\frac{1}{z}} = z^n\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots\right) \rightarrow Res_{at\ z=0} = \frac{1}{(n+1)!}$$

پس با توجه به روابط صفحه قبل خواهیم داشت:

$$I = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+1)!} = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n-1)!} = 2\pi i L$$