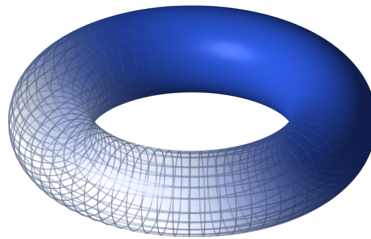




Bachelorarbeit

# Der Endlichkeitssatz für $H^1(X, \mathcal{O})$ auf kompakten Riemannschen Flächen



Aurelio Marafioti  
7306409

2. September 2018

Betreuung: Prof. Dr. George Marinescu  
Mathematisches Institut  
Universität zu Köln

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
2.1	Einführung in die Garbentheorie . . . . .	2
2.2	Garbenkohomologie . . . . .	5
2.3	Differentialformen . . . . .	9
2.4	Überlagerungen . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Der Endlichkeitssatz</b>	<b>12</b>
3.1	Die $\mathcal{L}^2$ -Norm . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Folgerungen</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Der Satz von Riemann-Roch</b>	<b>22</b>
<b>6</b>	<b>Das topologische Geschlecht</b>	<b>29</b>
	<b>Notationsverzeichnis</b>	<b>30</b>

# **1 Einleitung**

## 2 Einführung

### 2.1 Einführung in die Garbentheorie

Hier wird zunächst eine Einführung in die Theorie der Garben gegeben, welche sich mithilfe der Garbenkohomologie als nützliches Werkzeug für die Untersuchung der Riemannschen Flächen erweisen werden. Diese wird im nächsten Abschnitt erläutert. Motivierende Beispiele für die gegebenen Definitionen lassen sich darunter finden.

**Definition 2.1** (Prägarbe). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{T}$  die Topologie auf  $X$ . Eine *Prägarbe* abelscher Gruppen ist ein Paar  $(\mathcal{F}, \rho)$ , bestehend aus:

- Einer Familie  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U))_{U \in \mathcal{T}}$  abelscher Gruppen
- Einer Familie  $\rho = (\rho_V^U)_{U, V \in \mathcal{T}, V \subset U}$  von Gruppenhomomorphismen  $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ .

Diese sollen auf natürliche Weise zusammenpassen, das bedeutet:

$$\rho_U^U = \text{id}_{\mathcal{F}(U)} \quad (2.1.1)$$

und das folgende Diagramm soll kommutieren

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_W^U} & \mathcal{F}(W) \\ \rho_V^U \downarrow & \nearrow \rho_W^V & \\ \mathcal{F}(V) & & \end{array}$$

für alle  $W \subset V \subset U$  offen in  $X$ . Die Elemente in  $\mathcal{F}(U)$  für  $U \subset X$  offen heißen (*lokale*) *Schnitte* und die Elemente in  $\mathcal{F}(X)$  heißen *globale Schnitte*. Wir schreiben für einen Schnitt  $f \in \mathcal{F}(U)$  auch  $p_V^U(f) = f|_V$  und nennen die  $p_V^U$  Einschränkungshomomorphismen. Außerdem schreibt man oft nur  $\mathcal{F}$  statt  $(\mathcal{F}, p)$ , wenn die Einschränkungshomomorphismen in natürlicher Weise gegeben sind (siehe dazu die Beispiele).

**Definition 2.2** (Garbe). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $(\mathcal{F}, p)$  eine Prägarbe abelscher Gruppen auf  $X$ . Falls nun für jede offene Menge  $U \subset X$  und jede Familie von offenen Mengen  $U_i \subset U$  mit  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  gilt:

- Für  $f, g \in \mathcal{F}(U)$  mit  $f|_{U_i} = g|_{U_i}$  gilt  $f = g$
- Gegeben  $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$  mit  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$  für alle  $i, j \in I$ , so gibt es ein  $f \in \mathcal{F}(U)$ , sodass  $f|_{U_i} = f_i$  für alle  $i \in I$ ,

dann heißt  $(\mathcal{F}, p)$  *Garbe*.

*Bemerkung.* Analog dazu lassen sich Prägarben, sowie Garben auch auf Vektorräumen, Ringen und weiteren algebraischen Objekten definieren.

**Beispiel 2.1.** (i) Für einen topologischen Raum  $X$  und  $U \subset X$  offen sei  $\mathcal{C}(U)$  der Vektorraum aller stetigen Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Für  $V \subset U$  offen sei  $p_V^U : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(V)$  der übliche Einschränkungshomomorphismus. Dann ist  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, p)$  eine Garbe, genannt Garbe der stetigen Funktionen auf  $X$ .

(ii) Seien  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $\mathcal{O}(U)$  für  $U \subset X$  offen die holomorphen Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Mit dem üblichen Einschränkungshomomorphismus bildet auch  $\mathcal{O}$  die Garbe der holomorphen Funktionen auf  $X$ . Analog bildet  $\mathcal{M}$  die Garbe der meromorphen Funktionen auf  $X$  und  $\mathcal{E}$  die der stetigen.

Die in dem Beispiel gegebenen Garben sind alles Garben von Vektorräumen bzw. Ringen. Als nächstes interessiert uns, wie die Elemente der  $\mathcal{F}(U)$  in der Nähe eines Punktes  $a \in X$  aussehen. Wir betrachten dazu die disjunkte Vereinigung

$$\dot{\bigcup}_{U \in \mathcal{T}, a \in U} \mathcal{F}(U).$$

**Definition 2.3** (Halm, Keim). Sei  $\mathcal{F}$  eine Garbe auf dem topologischen Raum  $X$ . Zwei Elemente  $f \in \mathcal{F}(U)$  und  $g \in \mathcal{F}(V)$  für  $U, V \subset X$  offen und  $a \in U \cap V$  heißen äquivalent,

$$f \sim_a g,$$

genau dann, wenn es eine offene Menge  $W \subset X$  mit  $a \in W \subset U \cap V$  gibt mit

$$f|_W = g|_W.$$

In anderen Worten sind diese in der Nähe von  $a$  gleich. Dann ist die Menge (abelsche Gruppe, Vektorraum, etc.)

$$\mathcal{F}_a := \left( \dot{\bigcup}_{U \ni a} \mathcal{F}(U) \right) / \sim_a$$

der *Halm* der Garbe  $\mathcal{F}$  in  $a$ . Die Elemente eines Halms, also Äquivalenzklassen, heißen *Keime*.

**Beispiel 2.2.** Für die Garbe  $\mathcal{O}$  der holomorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}$  ist ein Element von  $\mathcal{O}_a$  repräsentiert durch eine holomorphe Funktion in einer offenen Umgebung von  $a$ . Also kann man diese mit ihrer Taylorentwicklung als

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i (z - a)^i$$

schreiben. Dann repräsentieren zwei Funktionen den selben Keim genau dann, wenn sie die selbe Taylorentwicklung besitzen, also ist

$$\mathcal{O}_a \cong \mathbb{C}\{z - a\},$$

wobei letzteres der Ring der konvergenten Potenzreihen um  $(z - a)$  mit komplexen Koeffizienten ist.

Man kann für Garben nun auch Homomorphismen definieren und damit den Begriff der exakten Sequenz.

## 2 Einführung

**Definition 2.4** (Garbenhomomorphismus). Seien  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  Garben abelscher Gruppen über dem topologischen Raum  $X$ . Als *Garbenhomomorphismus* bezeichnen wir eine Familie von Gruppenhomomorphismen

$$\alpha_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

für  $U \subset X$  offen, sodass diese kompatibel mit den jeweiligen Einschränkungsabbildungen sind. Damit ist gemeint, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \rho'_V{}^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

für  $U \subset V$  offen kommutiert. Sind alle  $\alpha_u$  Gruppenisomorphismen, so heißt  $\alpha$  *Garbenisomorphismus*. Analog kann man die Definition für Ringe und Vektorräume formulieren.

**Definition 2.5** (Exakte Sequenz). Ein Garbenhomomorphismus  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  induziert für alle  $x \in X$  einen Homomorphismus der Halme

$$\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x.$$

Wir nennen dann eine Sequenz

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

von Garbenhomomorphismen *exakt*, falls die Sequenz

$$\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}$$

exakt ist, also  $\ker \beta_x = \operatorname{Im} \alpha_x$ . Analog nennen wir die Sequenz

$$\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_{n-2}} \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-1}} \mathcal{F}_n$$

*exakt*, falls für  $1 \leq k \leq n-2$  die Sequenzen

$$\mathcal{F}_k \xrightarrow{\alpha_k} \mathcal{F}_{k+1} \xrightarrow{\alpha_{k+1}} \mathcal{F}_{k+2}$$

exakt sind. Ein *Garbenmonomorphismus* ist ein Garbenhomomorphismus, sodass

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$$

exakt ist und ein *Garbenepimorphismus* ein solcher, sodass

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

exakt ist.

## 2.2 Garbenkohomologie

In diesem Abschnitt werden wir nun die Kohomologie von Garben erläutern, um die erste Kohomologiegruppe  $H^1(X, \mathcal{F})$  für eine Riemannschen Fläche  $X$  und eine Garbe abelscher Gruppen  $\mathcal{F}$  zu definieren, das Objekt unserer Betrachtung in dieser Arbeit.

**Definition 2.6** (Kokettengruppe). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{F}$  eine Garbe abelscher Gruppen auf  $X$ . Außerdem sei eine offene Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  von  $X$  gegeben. Definiere für  $q = 0, 1, 2, \dots$  die  $q$ -te *Kokettengruppe* von  $(\mathcal{F})$  bezüglich der Überdeckung  $\mathfrak{U}$  als

$$C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \prod_{(i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q}).$$

Die Elemente von  $C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  heißen  $q$ -Koketten und sind Familien

$$(f_{i_0, \dots, i_q})_{i_0, \dots, i_q \in I}, \text{ sodass } f_{i_0, \dots, i_q} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_q})$$

für alle  $(i_0, \dots, i_q) \in I^{q+1}$ . Die Addition zweier Koketten ist komponentenweise definiert.

**Definition 2.7** (Kozykel, Koränder). Seien die *Korandoperatoren*

$$\begin{aligned} \delta : C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &\rightarrow C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \\ \delta : C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &\rightarrow C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

wie folgt definiert:

- (i) Für  $(f_i)_{i \in I}$  sei  $\delta((f_i)) = (g_{i,j})$ , wobei

$$g_{i,j} = f_j - f_i \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

Die Komponenten auf der rechten Seite werden zunächst auf  $U_i \cap U_j$  eingeschränkt und dann subtrahiert.

- (ii) Für  $(f_{i,j})_{i,j \in I} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  sei  $\delta((f_{i,j})) = (g_{i,j,k})$ , wobei

$$g_{i,j,k} := f_{j,k} - f_{i,k} + f_{i,j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j \cap U_k).$$

Wieder werden hier die Komponenten auf der rechten Seite eingeschränkt auf  $U_i \cap U_j \cap U_k$ .

Diese Korandoperatoren bilden Gruppenhomomorphismen, da die Addition der  $q$ -Koketten komponentenweise definiert war. Sei nun

$$\begin{aligned} Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &:= \ker(\delta : C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^2(\mathfrak{U}, \mathcal{F})) \\ B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &:= \text{Im}(\delta : C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})). \end{aligned}$$

Die Elemente aus  $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  heißen *(1-)Kozykel* und die aus  $B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  *(1-)Koränder*.

Folglich ist eine 1-Kokette  $(f_{i,j}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  genau dann ein Kozykel, wenn

$$f_{i,k} = f_{i,j} + f_{j,k} \text{ auf } U_i \cap U_j \cap U_k$$

## 2 Einführung

für alle  $i, j, k \in I$  gilt. Man nennt dies die *Kozykelrelation*. Es folgt, dass  $f_{i,i} = 0$  und  $f_{i,j} = -f_{j,i}$  gilt, wenn man  $i = j = k$  bzw. für letzteres  $k = i$  setzt. Außerdem ist jeder Korand demnach ein Kozykel und wird auch *zerfallender Kozykel* genannt. Ein 1-Kozykel  $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  zerfällt genau dann, wenn eine 0 – *Kokette*  $(g_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  existiert, sodass

$$f_{i,j} = g_j - g_i \text{ auf } U_i \cap U_j$$

für alle  $i, j \in I$

**Definition 2.8** (1.Kohomologiegruppe bzgl. der Überdeckung  $\mathfrak{U}$ ). Die Quotientengruppe

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) / B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

heißt *1. Kohomologiegruppe* mit Koeffizienten in  $\mathcal{F}$  bezüglich der Überdeckung  $\mathfrak{U}$ . Die Elemente heißen *Kohomologieklassen* und zwei Kozykel in der selben Kohomologiekasse heißen *kohomolog*.

Zwei Kozykel sind also genau dann kohomolog, wenn ihre Differenz ein Korand ist bzw. wenn sie zerfällt. Diese Definition hängt noch von der ausgewählten Überdeckung ab, wir wollen sie aber nur noch von der Riemannschen Fläche  $X$  abhängig machen. Die Idee hinter den folgenden Definitionen ist, eine immer feinere Überdeckung zu wählen, um schließlich die Kohomologiegruppe zu erhalten.

**Definition 2.9** (feinere Überdeckung). Eine offene Überdeckung  $\mathfrak{V} = (V_k)_{k \in K}$  wird *feiner* als eine offene Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  für zwei beliebige Indexmengen  $I$  und  $K$  genannt,  $\mathfrak{V} < \mathfrak{U}$ , falls eine Abbildung

$$\begin{aligned} \tau : K &\rightarrow I, \\ k &\mapsto \tau k \end{aligned}$$

mit

$$V_k \subset U_{\tau k}$$

existiert, genannt *Verfeinerungsabbildung*. Das bedeutet, dass jedes  $V_k$  in mindestens einem  $U_i$  komplett enthalten ist.

Diese Abbildung induziert eine Abbildung

$$\begin{aligned} t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &\rightarrow Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \\ (f_{i,j}) &\mapsto (g_{k,l}), \end{aligned}$$

wobei

$$g_{k,l} := f_{\tau k, \tau l} \mid V_k \cap V_l$$

für  $k, l \in K$ . Folglich bleibt das Zerfallen eines Kozykels unter der Abbildung erhalten, das heißt mit der Quotientenabbildung wird auch eine Abbildung

$$\tau_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$$

induziert.



## 2 Einführung

Es muss noch folgendes gezeigt werden, damit diese Abbildung wohldefiniert ist und wir sie zur Definition der Kohomologiegruppe nutzen können.

**Lemma 2.1.** *Die oben genannte induzierte Abbildung zwischen Kohomologiegruppen hängt nicht von der Wahl der Verfeinerungsabbildung ab und ist injektiv.*

*Beweis.* Zunächst wird der erste Teil gezeigt. Sei also eine weitere Verfeinerungsabbildung  $\tilde{\tau} : K \rightarrow I, (f_{i,j} \mapsto \tilde{g}_{k,l})$  gegeben. Dann ist  $V_K \subset U_{\tau k} \cap U_{\tilde{\tau} k}$  für alle  $k \in K$ , folglich ergibt die Definition

$$h_k := f_{\tau k, \tilde{\tau} k} \mid V_k \in \mathcal{F}(V_k)$$

Sinn. Schließlich gilt auf  $V_k \cap V_l$

$$\begin{aligned} g_{k,l} - \tilde{g}_{k,l} &= f_{\tau k, \tau l} - f_{\tilde{\tau} k, \tilde{\tau} l} \\ &= f_{\tau k, \tau l} + f_{\tau l, \tilde{\tau} k} - f_{\tau l, \tilde{\tau} k} - f_{\tau k, \tilde{\tau} l} \\ &= f_{\tau k, \tilde{\tau} k} - f_{\tau l, \tilde{\tau} l} \\ &= h_k - h_l. \end{aligned}$$

Folglich zerfällt  $g_{k,l} - (\tilde{g}_{k,l})$ , also sind die Kozykel kohomolog und damit sind die induzierten Abbildungen gleich. Für Injektivität zeigen wir:

Für einen Kozykel  $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ , dessen Bild unter der induzierten Abbildung in  $Z^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$ , muss auch der Kozykel selbst zerfallen. Dann ist der Kern der induzierten Abbildung zwischen den Kohomologiegruppen 0, also folgt Injektivität.

Sei also  $f_{\tau k, \tau l} = g_k - g_l$  auf  $V_k \cap V_l$ , wobei  $g_k \in \mathcal{F}(V_k)$ . Es gilt dann nach Kozykelrelation auf  $U_i \cap V_k \cap V_l$ , dass

$$g_k - g_l = f_{\tau k, \tau l} = f_{\tau k, i} + f_{i, \tau l} = f_{i, \tau l} - f_{i, \tau k}.$$

Daraus folgt

$$f_{i, \tau k} + g_k = f_{i, \tau l} + g_l.$$

Dann kann man auf  $(U_i \cap V_k)_{k \in K}$  die Garbeneigenschaft anwenden und erhält ein  $h_i \in \mathcal{F}(U_i)$  mit

$$h_i \mid U_i \cap V_k = f_{i, \tau k} + g_k.$$

Daraus ergibt sich auf  $U_i \cap U_j \cap V_k$

$$f_{i,j} = f_{i, \tau k} + f_{\tau k, j} = f_{i, \tau k} + g_k - f_{j, \tau k} - g_k = h_i - h_j.$$

Der Index  $k$  war beliebig, also muss die obige Gleichung nach der Garbeneigenschaft auch auf ganz  $U_i \cap U_j$  gelten. Damit zerfällt  $(f_{i,j})$  auf  $\mathfrak{U}$ .  $\square$

Damit lässt sich nun eine Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung aller Überdeckungen einführen, ähnlich zur Definition von Definition 2.3.

**Definition 2.10.** Zwei Kohomologieklassen  $\xi \in H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$  und  $\eta \in H^1(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$  heißen äquivalent ( $\xi \sim \eta$ ), falls es eine offene Überdeckung  $\mathfrak{U}$  mit  $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}'$  gibt, sodass  $t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}}(\xi) = t_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}'}(\eta)$ . Die Menge der Äquivalenzklassen heißt *induktiver Limes* der Kohomologiegruppen  $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ .

**Definition 2.11.** Die 1. Kohomologiegruppe des topologischen Raumes  $X$  mit Koeffizienten in  $\mathcal{F}$  ist

$$H^1(X, \mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) := \left( \bigcup_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \right) / \sim.$$

*Bemerkung.* Wenn die Garbe aus Vektorräumen besteht, wie in dem hier betrachteten Fall  $\mathcal{O}$ , so bilden die Kokettengruppen auch Vektorräume. Damit genau so die Kozyklen- und Korändergruppen als Bild und Kern einer linearen Abbildung zwischen Vektorräumen. Folglich bildet auch die erste Kohomologiegruppe als Quotientengruppe auch einen Vektorraum. Dies ist vom großem Vorteil, denn schließlich lassen sich endlich-dimensionale Vektorräume deutlich leichter auf Isomorphie untersuchen oder unterscheiden als Gruppen.

Für die folgenden Beispiele siehe (Forster, einfügen!).

**Beispiel 2.3.** (i)  $H^1(X, \mathcal{E}) = 0$ , wobei mit  $\mathcal{E}$  die Garbe der differenzierbaren Funktionen bezeichnet wird.

(ii)  $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$ , wobei mit  $\mathbb{C}$  die Garbe der konstanten Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{C}$  bezeichnet wird und  $X$  einfach zusammenhängend ist.

(iii)  $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$  analog zu (ii).

(iv) Falls  $X$  eine offene Kreisscheibe in  $\mathbb{C}$  ist, gilt  $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ .

Ein wichtiger Satz, der bei der Bestimmung der Kohomologiegruppen hilft, ist der folgende Satz, benannt nach dem Mathematiker Jean Leray.

**Satz 2.1 (Leray).** Sei  $\mathcal{F}$  eine Garbe abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum  $X$ . Falls es eine offene Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  gibt, sodass  $H^1(U_i, \mathcal{F}) = 0$  für jedes  $i \in I$ , dann gilt

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}).$$

$\mathfrak{U}$  heißt dann Leraysche Überdeckung

*Beweis.* Wir zeigen, dass

$$\tau_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{U}} : H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

ein Isomorphismus ist für alle  $\mathfrak{V} = (V_k)_{k \in K}$ . Dann ist  $\mathfrak{U}$  die feinste Überdeckung und es bleibt in Definition 2.11 nur die Kohomologiegruppe von  $\mathfrak{U}$ . Nach Lemma 2.1 bleibt noch Injektivität zu zeigen. Sei als  $\tau : K \rightarrow I$  eine Verfeinerungsabbildung und sei  $(f_{k,l}) \in Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$ . Wir konstruieren einen Kozykel  $(F_{i,j} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$ , sodass

$$(F_{\tau k, \tau l}) - (f_{k,l})$$

in  $\mathfrak{V}$  zerfällt, also die beiden kohomolog sind. Für die Überdeckung  $(U_i \cap V_k)_{k \in K}$  schreiben wir  $U_i \cap \mathfrak{V}$ . Nach Voraussetzung ist also  $H^1(U_i \cap \mathfrak{V}) = 0$ , also zerfällt jeder Kozykel und es gibt  $g_{i,k} \in \mathcal{F}(U_i \cap V_k)$  mit

$$f_{k,l} \mid (U_i \cap V_k \cap V_l) = g_{i,k} - g_{i,l}.$$

## 2 Einführung

Dann gilt auf  $U_i \cap U_j \cap V_k \cap V_l$

$$g_{i,k} - g_{i,l} = g_{j,k} - g_{j,l},$$

woraus

$$g_{j,k} - g_{i,k} = g_{j,l} - g_{i,l}$$

folgt. Nach den Garbeneigenschaften kann man ein  $F_{i,j} \in \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_l$  finden, sodass

$$F_{i,j} \mid (U_i \cap U_j \cap V_k) = g_{j,k} - g_{i,k}.$$

Dann erfüllt  $(F_{i,j})$  die Kozykelrelation, also  $(F_{i,j} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$ . Setzen wir  $h_k := g_{\tau k, k} \mid V_k \in \mathcal{F}(V_k)$ , so gilt auf  $V_k \cap V_l$

$$\begin{aligned} F_{\tau k, \tau l} - f_{k,l} &= (g_{\tau l, k} - g_{\tau k, k}) - (g_{\tau l, k} - g_{\tau l, l}) \\ &= g_{\tau l, l} - g_{\tau k, k} = h_l - h_k. \end{aligned}$$

Damit zerfällt  $(F_{\tau k, \tau l}) - (f_{k,l})$ , die beiden Kozykel sind also kohomolog. Somit ist die Abbildung surjektiv.  $\square$

Die Definitionen lassen sich auch auf höher dimensionale Kohomologiegruppen fortführen, falls man Mannigfaltigkeiten von höherer Dimension betrachtet. Es ist aber auch möglich, die 0-te Kohomologiegruppe zu definieren.

**Definition 2.12.** Sei  $\mathcal{F}$  eine Garbe abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum  $X$ . Analog zu den vorherigen Definitionen sei

$$\begin{aligned} Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &:= \ker \left( C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \right), \\ B^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &:= 0, \\ H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) &:= Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) / B^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Dann gehört eine 0-Kokette  $(f_i)_{i \in I}$  genau dann zu  $Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ , wenn  $f_i \mid U_i \cap U_j = f_j \mid U_i \cap U_j$  für alle  $i, j \in I$ . Mit der Garbeneigenschaft kann man diese Elemente zu einem globalen Element  $f \in \mathcal{F}(X)$  fortsetzen, somit ergibt sich eine Isomorphie

$$H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = Z^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X).$$

Dies motiviert die folgende Definition:

**Definition 2.13.** Die nullte Kohomologiegruppe des topologischen Raums  $X$  bezüglich der Garbe abelscher Gruppen  $\mathcal{F}$  ist

$$H^0(X, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)$$

## 2.3 Differentialformen

Wir wollen knapp die lokale Gestalt einer Differentialform 1. Ordnung auf einer Riemannschen Fläche angeben, sowie die Ableitung einer Funktion und die verschiedenen Garben von Differentialformen definieren. Für eine exakte Definition des Begriffs Differentialform siehe [1, Kapitel 9, S.54].

## 2 Einführung

**Definition 2.14.** Sei  $f$  eine differenzierbare Funktion auf einer offenen Teilmenge  $Y \subset X$  der Riemannschen Fläche  $X$ . Lokal auf  $U \cap Y$  für jede komplexe Karte  $(U, z)$  mit  $z = x + iy$  ist die Ableitung von  $f$

$$df = \frac{\partial f(z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(z)}{\partial y} dy.$$

Dann ist die Ableitung der Karten  $z, \bar{z} : U \rightarrow \mathbb{C}$

$$dz = dx + i dy, d\bar{z} = dx - i dy.$$

Zusammen mit den Differentialoperatoren des "Wirtinger Kalküls"

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

kann man also auf  $U \cap Y$

$$df = \frac{\partial f(z)}{\partial z} dz + \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} d\bar{z} =: d'f + d''f.$$

schreiben.

**Definition 2.15** (lokale Gestalt von Differentialformen). Sei  $\omega$  eine Differentialform auf der offenen Teilmenge  $Y \subset X$  der Riemannschen Fläche  $X$ . Dann kann man auf  $U \cap Y$  für jede Karte  $(U, z)$  mit  $z = x + iy$  schreiben

$$\omega = f dx + g dy$$

für Funktionen  $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ . Mit einer Umformung analog zum Wirtinger Kalkül

$$\phi := \frac{1}{2} (f - ig), \psi := \frac{1}{2} (f + ig)$$

auch als

$$\omega = \phi dz + \psi d\bar{z}.$$

Falls  $\omega$  sich bezüglich jeder komplexen Karte  $(U, z)$  auf  $U \cap Y$  schreiben lässt als

- (i)  $\omega = f dz + g d\bar{z}$ , wobei  $f, g \in \mathcal{E}(U \cap Y)$ , so heißt  $\omega$  *differenzierbar*,  $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(Y)$ . Falls für alle  $f, g$  gilt  $f \equiv 0$  bzw.  $g \equiv 0$  so ist  $\omega \in \mathcal{E}^{1,0}(Y)$  bzw.  $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}(Y)$ .
- (ii)  $\omega = f dz$ , wobei  $f \in \mathcal{O}(U \cap Y)$ , so heißt  $\omega$  *holomorph*,  $\omega \in \Omega$ .

Falls  $\omega$  auf einer offenen Teilmenge  $Y' \subset Y$  holomorph ist, sodass  $Y \setminus Y'$  nur aus isolierten Punkten besteht und  $\omega$  in jedem Punkt  $a \in Y \setminus Y'$  einen Pol hat, so heißt  $\omega$  *meromorph*,  $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(Y)$ . Zusammen mit den natürlichen Einschränkungsabbildungen sind  $\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{1,0}, \mathcal{E}^{0,1}, \Omega, \mathcal{M}^{(1)}$  Garben von Vektorräumen über  $X$ .

**Definition 2.16** (Rücktransport von Differentialformen). Jede holomorphe Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei Riemannschen Flächen induziert für jede offene Menge  $U \subset X$  einen Homomorphismus

$$F* : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{E}(F^{-1}(U)), F*(f) := f \circ F.$$

Analog kann man diesen für Differentialformen 1. Ordnung definieren. Wir wissen aus den vorigen Definitionen, dass sich diese lokal als endliche Summe  $\sum f_j dg_j$  schreiben lassen. Sei

$$F * (\sum f_j dg_j) := \sum (F * f_j) d(F * g_j).$$

Für ein  $f \in \mathcal{E}(U)$  gilt also

$$F * (df) = d(F * f).$$

Analog für die Operatoren  $d'$  und  $d''$ .

-

## 2.4 Überlagerungen

Es werden kurz der Begriff der Überlagerung und elementare Eigenschaften dieser erläutert. Wir erinnern uns zunächst an elementare topologische Definitionen:

Eine Teilmenge  $A \subset X$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt diskret falls jedes  $a \in A$  eine Umgebung  $V$  besitzt mit  $V \cap A = \{a\}$ . Eine Abbildung  $p : Y \rightarrow X$  heißt diskret, falls  $p^{-1}(x) \subset Y$  für jedes  $x \in X$  diskret ist. Die Abbildung heißt offen, falls  $p(U) \subset X$  für alle offenen Teilmengen  $U \subset Y$  auch offen ist.

**Definition 2.17** (Überlagerung). Eine Abbildung  $p : Y \rightarrow X$  heißt *Überlagerung*, falls sie offen, diskret und stetig ist.

Für  $y \in Y$  und  $x := p(y)$ , sagt man  $y$  liegt über  $x$  und nennt  $x$  den *Spurpunkt* von  $y$ .

Ein Punkt  $y \in Y$  heißt *Verzweigungspunkt* von  $p$ , falls es keine Umgebung  $V$  von  $y$  gibt, sodass  $p|_V$  injektiv ist. Falls es keinen solchen Punkt gibt, heißt  $p$  *unverzweigt*.

Die Mächtigkeit der Mengen  $p^{-1}(x)$  heißt *Blätterzahl* in  $X$ . Falls diese global konstant ist, heißt sie *Blätterzahl* der Überlagerung.

Es folgt direkt, dass jede nicht konstante Abbildung zwischen Riemannschen Flächen eine Überlagerung ist. [1, S.18]

## 3 Der Endlichkeitssatz

Nun wollen wir zum Beweis der Endlichkeitssatzes kommen, welcher das eigentliche Thema dieser Arbeit ist. Dazu benötigen wir noch einige Zwischenschritte, ein wichtiges Werkzeug stellt dabei die  $\mathcal{L}^2$ -Norm dar.

### 3.1 Die $\mathcal{L}^2$ -Norm

**Definition 3.1.** Sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $f \in \mathcal{O}(U)$  eine holomorphe Funktion. Wir definieren

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(D)} := \left( \iint_D |f(x+iy)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Falls  $\|f\|_{\mathcal{L}^2(D)} < \infty$ , nennen wir  $f$  *quadratisch integrierbar*, den Raum der quadratisch integrierbaren holomorphen Funktionen nennen wir  $\mathcal{L}^2(D, \mathcal{O})$ . Für  $f, g \in \mathcal{L}^2(D, \mathcal{O})$  definieren wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \iint_D f(x+iy) \overline{g(x+iy)} dx dy.$$

Dieses Skalarprodukt ist wohldefiniert, da für alle  $z \in D$  gilt, dass  $\langle f, g \rangle \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(D)} \|g\|_{\mathcal{L}^2(D)}$  nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

**Beispiel 3.1.** (i) Sei  $B = B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$  die Kreisscheibe mit Radius  $r \in \mathbb{R}$  und Mittelpunkt  $a \in \mathbb{C}$  und  $\psi_n(z) = (z - a)^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \iint_B \psi_n(z) \overline{\psi_m(z)} dx dy = \int_0^r \int_0^{2\pi} t^{n+m} e^{i(n-m)\phi} t dt d\phi.$$

Für  $n \neq m$  verschwindet das Integral und für  $n = m$  ergibt sich

$$\|\psi_n\|_{\mathcal{L}^2(B)} = \sqrt{\langle \psi_n, \psi_n \rangle} = \frac{\sqrt{\pi} r^{n+1}}{\sqrt{n+1}}.$$

(ii) Sei  $f \in \mathcal{L}^2(B, \mathcal{O})$  mit der Taylorentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

um den Punkt  $a$ . Dann gilt nach der Parsevalschen Gleichung

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(B)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \frac{\pi r^{2n+2}}{n+1}.$$

**Satz 3.1.** Sei  $D \subset \mathbb{C}$  offen und  $D_r := \{z \in \mathbb{C} : B(z, r) \subset D\}$  die Menge aller Punkte in  $D$ , deren Distanz zum Rand kleiner oder gleich  $r$  ist. Dann gilt für  $f \in \mathcal{L}^2(D, \mathcal{O})$ , dass

$$\|f\|_{D_r} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi} r} \|f\|_{\mathcal{L}^2(D)},$$

wobei  $\|f\|_{D_r} = \sup_{z \in D_r} |f(z)|$  die Supremumsnorm ist.

### 3 Der Endlichkeitssatz

*Beweis.* Sei  $a \in D_r$  und  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  die Taylorentwicklung von  $f$  um  $a$ . Dann folgt mithilfe von Beispiel 3.1.1, dass

$$|f(a)| = |c_0| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r} \|f\|_{\mathcal{L}^2(B(a,r))} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}r} \|f\|_{\mathcal{L}^2(D)},$$

wobei der letzte Schritt aus  $B(a,r) \subset D$  folgt. Da  $a \in D_r$  beliebig war, ist die Aussage bewiesen.  $\square$

Mithilfe zu der obigen Definition können wir die  $\mathcal{L}^2$  – Norm auch für Koketten bezüglich der Garbe der holomorphen Funktionen definieren, da deren Komponenten genau holomorphe Funktionen darstellen.

**Definition 3.2.** Sei  $X$  eine riemannsche Fläche und  $(U_i^*, z_i)_{1 \leq i \leq n}$  eine endliche Familie von Karten, sodass  $z_i(U_i^*) \subset \mathcal{C}$  Kreisscheiben sind und seien die Mengen  $U_i \subset U_i^*$  offen. Wir schreiben  $\mathfrak{U} := (U_i)_{1 \leq i \leq n}$  und  $\mathfrak{U}^* := (U_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ .

(i) Für eine 0-Kokette  $\eta = (f_i) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$  sei

$$\|\eta\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U})}^2 := \sum_i \|f_i\|_{\mathcal{L}^2(U_i)}^2.$$

(ii) Für eine 1-Kokette  $\xi = (f_{i,j}) \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$  sei

$$\|\xi\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U})}^2 := \sum_{i,j} \|f_{i,j}\|_{\mathcal{L}^2(U_i \cap U_j)}^2.$$

Hier wird die Norm der Komponentenfunktionen bezüglich der Karte  $z$  ausgerechnet, das heißt

$$\|f_i\|_{\mathcal{L}^2(U_i)} := \|f_i \circ z_i^{-1}\|_{\mathcal{L}^2(z_i(U_i))}$$

und

$$\|f_{i,j}\|_{\mathcal{L}^2(U_{i,j})} := \|f_{i,j} \circ z_i^{-1}\|_{\mathcal{L}^2(z_i(U_i \cap U_j))}.$$

Analog heißt eine Kokette *quadratisch integrierbar*, falls die Norm endlich ist.

Den Raum der quadratisch integrierbaren Koketten bezeichnen wir mit  $C_{\mathcal{L}^2}^q(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$  für  $q = 0, 1$  und den Raum der Kozykel in  $C_{\mathcal{L}^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$  mit  $Z_{\mathcal{L}^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ . Dieser bildet einen abgeschlossenen Untervektorraum.

*Bemerkung.* Die Mengen  $(U_i^*)_{1 \leq i \leq n}$  müssen für diese Definition nicht  $X$  überdecken.

Dieses Lemma wird für den Beweis des darauffolgenden Lemmas, dem Schlüssel zu dem Endlichkeitssatz, benötigt.

**Lemma 3.1.** Seien  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für die Menge

$$A := \left\{ f \in \mathcal{L}^2(D); f(a_j) = f'(a_j) = \dots = f^{(n-1)}(a_j) = 0, j = 1, \dots, k \right\}$$

aller quadratisch integrierbaren Funktionen, die in allen  $a_j$  mindestens eine  $n$ -fache Nullstelle haben:

$$\text{kodim}(A, \mathcal{L}^2(D)) \leq kn$$

### 3 Der Endlichkeitssatz

*Beweis.* Wir definieren uns die lineare Hilfsabbildung

$$T : \mathcal{L}^\infty(\mathcal{D})/A \longrightarrow \mathbb{C}^{k \times n}$$

$$f \longmapsto \begin{bmatrix} f(a_1) & \cdots & f^{(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ f(a_k) & \cdots & f^{(n-1)}(a_k) \end{bmatrix}.$$

Diese ist wohldefiniert, da für  $f, g \in \mathcal{L}^2(D)$  mit  $f - g \in A$  gilt, dass  $T(f - g) = 0$ , also  $T(f) = T(g)$ . Des weiteren ist die Abbildung injektiv, da per Definition  $T(f) = 0$  genau dann, wenn  $f \in A$  und somit  $f$  das neutrale Element im Quotientenraum definiert.

Damit ist Dimension des linken Raumes kleiner oder gleich des rechten, also  $\leq kn$ .  $\square$

Nun können wir zu einer ersten Endlichkeitsaussage kommen, welche sich als sehr wichtig für den Beweis des Endlichkeitssatzes erweisen wird.

**Lemma 3.2.** *Seien  $D' \subset D \subset \mathbb{C}$  offene Mengen und  $D'$  relativ Kompakt in  $D$  (Notation  $D' \Subset D$ ). Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es einen abgeschlossenen Untervektorraum mit endlicher Kodimension  $A \subset \mathcal{L}^2(D, \mathcal{O})$ , sodass*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(D')} \leq \varepsilon \|f\|_{\mathcal{L}^2(D)}, \text{ für } f \in A.$$

*Beweis.* Aus der relativen Kompaktheit von  $D'$  folgt, dass man endlich viele komplexe Zahlen  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$  wählen kann, sodass:

(i)  $B(a_j, r) \subset D$  für  $j = 1, \dots, k$

(ii)  $D' \subset D \subset \bigcup_{j=1}^k B(a_j, r/2)$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig und wähle  $n \in \mathbb{N}$ , sodass  $2^{-n-1}k > \varepsilon$ .

Sei  $A$  wie in Lemma 3.1, dann hat  $A$  endliche Kodimension und ist abgeschlossen. Eine Funktion  $f \in A$  hat um  $a_j$  die Taylorentwicklung

$$f(z) = \sum_{i=n}^{\infty} c_i (z - a_j)^i,$$

wobei  $c_i \in \mathbb{C}$ . Deshalb gilt nach Korollar 3.1

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(B(a_j, r/2))}^2 = \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-2i-2} \frac{\pi r^{2i+2}}{i+1} |c_i|^2 \leq 2^{-2n-2} \|f\|_{\mathcal{L}^2(B(a_j, r))}^2.$$

Die Eigenschaften i) und ii) implizieren

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(B(a_j, r))} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(D)},$$

sowie

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(D')} \leq \sum_{j=1}^k \|f\|_{\mathcal{L}^2(B(a_j, r/2))}.$$

Dies ergibt

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2(D')} \leq k 2^{-n-1} \|f\|_{\mathcal{L}^2(D)} \leq \varepsilon \|f\|_{\mathcal{L}^2(D)}.$$

$\square$



### 3 Der Endlichkeitssatz

Direkt hieraus folgt die analoge Aussage für integrierbare Kozykel:

**Korollar 3.1.** Sei  $\mathfrak{V} = (V_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $\mathfrak{U} = (U_i)_{1 \leq i \leq n}$  und  $V_i \Subset U_i$  für  $i = 1, \dots, n$ . Dies schreiben wir ab jetzt als  $\mathfrak{V} \ll \mathfrak{U}$ , wobei  $\mathfrak{V}$  Schrumpfung von  $\mathfrak{U}$  heißt.

Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  einen abgeschlossenen Untervektorraum  $A \subset Z_{\mathcal{L}}^1(U, \mathcal{O})$  mit endlicher Kodimension, sodass

$$\|\xi\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{V})} \leq \varepsilon \|\xi\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U})}$$

für alle  $\xi \in A$  gilt.

Wir können also die Norm von Kozykeln über einer Schrumpfung durch die über größeren Überdeckung abschätzen, und das sogar beliebig klein respektive dem Vektorraum  $A$ . Dass dieser eine endliche Kodimension hat, werden wir im Beweis des nächsten Lemmas benutzen.

**Lemma 3.3.** Sei  $X$  eine riemannsche Fläche und  $\mathfrak{U}^*$  eine endliche Familie von Karten auf  $X$ , definiert wie in Definition 3.2. Seien außerdem die Schrumpfungen  $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{V} \ll \mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$  gegeben. Dann gibt es ein  $C > 0$ , sodass gilt:

Für alle  $\xi \in Z_{\mathcal{L}^2}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$  gibt es  $\zeta \in Z_{\mathcal{L}^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$  und  $\eta \in C_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{W}), \mathcal{O}}^0$  mit

$$\zeta = \xi + \delta\eta$$

über  $\mathfrak{W}$  und

$$\max \left( \|\zeta\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U})}, \|\eta\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{W})} \right) \leq C \|\xi\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{V})}.$$

*Beweis.* Zunächst zeigen wir die Zerlegung. Sei also  $\xi = (f_{i,j} \in Z_{\mathcal{L}}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}))$  gegeben, dann kann man  $f$  auch als Element in  $Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{E})$  auffassen. Da  $H^1(X, \mathcal{E}) = 0^1$ , zerfällt jeder Kozykel in  $Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{E})$ , folglich gibt es  $(g_i) \in C^0(\mathfrak{V}, \mathcal{E})$  mit

$$f_{i,j} = g_j - g_i \text{ auf } V_i \cap V_j.$$

Wegen Holomorphie ist  $d''f_{i,j} = 0$ , also

$$d''g_j = d''g_i \text{ auf } V_i \cap V_j.$$

Nach der Garbeneigenschaft gibt es folglich eine Differentialform  $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}$  mit  $\omega|_{V_i} = g_i$ . Da  $|\mathfrak{W}| \Subset |\mathfrak{V}|$  gibt es eine differenzierbare Funktion  $\psi \in \mathcal{E}(X)$ , sodass

$$\text{supp}(\psi) \subset |\mathfrak{V}| \text{ und } \psi|_{|W|} = 1.$$

Also lässt sich  $\psi\omega$  mit  $\psi\omega|_{(|\mathfrak{U}^*| \setminus |\mathfrak{W}|)} = 0$ ,  $\psi\omega|_{|\mathfrak{W}|} = 1$  als Element von  $\mathcal{E}(|\mathfrak{U}^*|)$  auffassen. Nach dem Lemma von Dolbeault<sup>2</sup> gibt es Funktionen  $h_i \in \mathcal{E}(U_i^*)$ , sodass

$$d''h_i = \psi\omega \text{ auf } U_i^*.$$

Aus  $d''h_i = d''h_j$  auf  $U_i^* \cap U_j^*$  folgt

$$F_{i,j} := h_j - h_i \in \mathcal{O}(U_i^* \cap U_j^*).$$

---

<sup>1</sup>vgl. Forster

<sup>2</sup>Forster S.97

### 3 Der Endlichkeitssatz

Wir setzen  $\zeta := (F_{i,j})|_{\mathfrak{U}}$ , dann erfüllt es die Kozykelrelation. Da  $\mathfrak{U} \ll \mathfrak{U}^*$ , ist außerdem  $\zeta \in Z_{\mathcal{L}^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ .

Auf  $W_i$  gilt  $d''h_i = \psi\omega = \omega = d''g_i$ , also ist  $h_i - g_i \in \mathcal{O}(W_i)$ . Nach Konstruktion ist  $h_i - g_i$  auch beschränkt auf  $W_i$ , daher gilt

$$\eta := (h_i - g_i)|_{\mathfrak{W}} \in C_{\mathcal{L}^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O}).$$

Des weiteren ist  $F_{i,j} - f_{i,j} = (h_j - g_j) - (h_i - g_i)$  auf  $W_i \cap W_j$ . Aus diesem Grund gilt

$$\zeta - \xi = \delta\eta \text{ auf } \mathfrak{W},$$

womit der erste Teil der Behauptung gezeigt wäre.

Für die Abschätzung betrachten wir den Vektorraum

$$H := Z_{\mathcal{L}^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \times Z_{\mathcal{L}^2}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}) \times C_{\mathcal{L}^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

mit der Norm

$$\|(\zeta, \xi, \eta)\|_H := \left( \|\zeta\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U})}^2 + \|\xi\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{V})}^2 + \|\eta\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{W})}^2 \right)^{1/2}.$$

Dieser ist als Produkt von Hilberträumen <sup>3</sup> auch ein Hilbertraum. Sei

$$L := \{(\zeta, \xi, \eta) \in H; \zeta = \xi + \delta\eta \text{ auf } \mathfrak{W}\}.$$

Dieser Raum ist abgeschlossen, also auch ein Hilbertraum. Nach dem ersten Teil des Beweises ist die Abbildung

$$\pi : L \rightarrow Z_{\mathcal{L}^2}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O}), (\zeta, \xi, \eta) \mapsto \xi$$

surjektiv. Nach dem Satz von Banach<sup>4</sup> gibt es eine Konstante  $C > 0$ , sodass für alle  $\xi \in Z_{\mathcal{L}^2}^1(\mathfrak{V}, \mathcal{O})$  ein  $x = (\zeta, \xi, \eta) \in L$  existiert mit  $\pi(x) = \xi$  und  $\|x\|_H \leq C \|\xi\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{V})}$ . Damit ist die zweite Aussage des Satzes erfüllt.  $\square$

Nun kommen wir zu einer ähnlichen Aussage, die aber nicht die Integrierbarkeit der jeweiligen Elemente voraussetzt und daher zu einem wichtigen Resultat über die Kohomologiegruppen führt.

**Lemma 3.4.** *Mit den selben Voraussetzungen wie in Lemma 3.3 gibt es einen endlich-dimensionalen Untervektorraum  $S \subset Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ , sodass gilt: Für alle  $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$  gibt es  $\sigma \in S$  und  $\eta \in C^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$  mit*

$$\sigma = \xi + \delta\eta \text{ auf } \mathfrak{W}.$$

*Damit sind  $\sigma$  und  $\xi$  eingeschränkt auf  $\mathfrak{W}$  kohomolog, folglich hat der Einschränkungshomomorphismus*

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

*ein endlich-dimensionales Bild.*

*Beweis.* Wähle  $C > 0$  wie in Lemma 3.3 und  $\varepsilon := \frac{1}{2C}$ . Dann gibt es nach Korollar 3.1 einen abgeschlossenen Untervektorraum  $A \subset Z_{\mathcal{L}^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$  mit endlicher Kodimension, sodass

$$\|\xi\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{V})} \leq \varepsilon \|\xi\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U})}.$$

---

<sup>3</sup>Forster...

<sup>4</sup>EINFÜGEN

### 3 Der Endlichkeitssatz

Sei  $S$  das eindeutig bestimmte orthogonale Komplement von  $A$  in  $Z_{\mathcal{L}^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ , das heißt

$$Z_{\mathcal{L}^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = A \oplus S.$$

Wir konstruieren zunächst per vollständiger Induktion Elemente

$$\zeta_n \in Z_{\mathcal{L}^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}), \eta_n \in C_{\mathcal{L}^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O}), \xi_n \in A, \sigma_n \in S$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\zeta_n = \xi_{n-1} + \delta\eta_n$  auf  $\mathfrak{W}$
- (ii)  $\zeta_n = \xi_n + \sigma_n$
- (iii)  $\max(\|\zeta_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{W})}) \leq 2^{-n}CM$

**Induktionsanfang** Sei nun  $\xi \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$  beliebig. Aus  $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{U}$  folgt

$$\|\xi\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{W})} =: M < \infty.$$

Also gibt es nach Lemma 3.3  $\zeta_0 \in Z_{\mathcal{L}^2}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$  und  $\eta_0 \in C_{\mathcal{L}^2}^0(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$  mit

$$\zeta_0 = \xi + \delta\eta_0 \text{ auf } \mathfrak{W}$$

und  $\max(\|\zeta_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_0\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{W})}) \leq CM$ . Sei

$$\zeta_0 = \xi_0 + \sigma_0$$

mit  $\xi_0 \in A$  und  $\sigma_0 \in S$  die orthogonale Zerlegung. Mit  $\xi_{-1} := \xi$  ist damit der Induktionsanfang getan.

**Induktionsschritt**  $n \mapsto n+1$

Gelte nun die Aussage für  $n \in \mathbb{N}$ , fest aber beliebig. Es gibt also die orthogonale Zerlegung  $\zeta_n = \xi_n + \sigma_n$ , daraus folgt

$$\|\xi_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U})} \leq \|\zeta_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U})}^2 \leq 2^{-n}CM.$$

und somit

$$\|\xi_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{W})}^2 \leq \varepsilon \|\xi_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U})}^2 \leq 2^{-n}\varepsilon CM \leq 2^{-n-1}M.$$

Nach Lemma 3.3 gibt es wieder Elemente  $\zeta_{n+1} \in Z_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{O})}^1$  und  $\eta \in C_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U}, \mathcal{O})}^0$  mit

$$\zeta_{n+1} = \xi_n + \delta\eta_{n+1} \text{ auf } \mathfrak{W}$$

und

$$\max(\|\zeta_{n+1}\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_{n+1}\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{W})}) \leq C \|\xi_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{W})} \leq 2^{-n-1}CM.$$

Außerdem gibt es die orthogonale Zerlegung  $\zeta_{n+1} = \xi_{n+1} + \sigma_{n+1}$  mit  $\xi_{n+1} \in A$  und  $\sigma_{n+1} \in S$ . Damit ist der Induktionsschritt beendet.

Fasst man alle Gleichungen für  $n = 1, \dots, k$  zusammen, erhält man

$$\xi_k + \sum_{n=0}^k \sigma_n = \xi + \delta \left( \sum_{n=0}^k \eta_n \right) \text{ auf } \mathfrak{W}$$

### 3 Der Endlichkeitssatz

und

$$\max(\|\xi_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U})}, \|\sigma_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{U})}, \|\eta_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathfrak{W})}) \leq 2^{-n}CM.$$

Daher gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = 0$  und folglich konvergieren die Reihen

$$\sigma := \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \in S, \eta := \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \in C_{\mathcal{L}^2}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}).$$

Auf  $\mathfrak{W}$  gilt nun  $\sigma = \xi + \delta\eta$ . □

Im nächsten Schritt, dem wichtigsten für den Beweis des Endlichkeitssatzes, wird die Aussage des endlichdimensionalen Bildes von Überdeckungen auf offene Teilmengen einer riemannschen Fläche erweitert.

*Bemerkung.* Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche und  $Y \subset X$  offen. Für eine Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  ist  $\mathfrak{U} \cap Y := (U_i \cap Y)_{i \in I}$  eine Überdeckung von  $Y$ . Dann lässt sich der Einschränkungshomomorphismus

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O})$$

durch den induktiven Limes (THM? Kohomologiegruppe) auf einen Einschränkungshomomorphismus

$$H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O})$$

fortsetzen.

**Satz 3.2.** *Sei  $X$  eine riemannsche Fläche und seien  $Y_1 \Subset Y_2 \subset X$  offen. Dann hat der Einschränkungshomomorphismus*

$$H^1(Y_2, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y_1, \mathcal{O})$$

*ein endlich-dimensionales Bild.*

*Beweis.* Wir wählen eine endliche Familie von Karten  $(U_i^*, z_i)_{1 \leq i \leq n}$  auf  $X$  und die relativ kompakten offenen Teilmengen

$$W_i \Subset V_i \Subset U_i \Subset U_i^*,$$

sodass

- (i)  $Y_1 \subset \bigcup_{i=1}^n W_i =: Y' \Subset Y'' := \bigcup_{i=1}^n U_i \subset Y_2$ ,
- (ii)  $z_i(U_i^*), z_i(U_i), z_i(V_i), z_i(W_i)$  sind alles offene Kreisscheiben in  $\mathbb{C}$ .

Seien  $\mathfrak{U} := (U_i)_{1 \leq i \leq n}$  und  $\mathfrak{W} := (W_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Dann hat nach Lemma 3.4 der Einschränkungshomomorphismus

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})$$

ein endlich-dimensionales Bild. Außerdem gilt wegen Beispiel 2.3 und Eigenschaft (ii), dass  $H^1(U_i, \mathcal{O}) = H^1(W_i, \mathcal{O}) = 0$ . Dann folgt aus dem Satz von Leray Satz 2.1  $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) = H^1(Y'', \mathcal{O})$  und  $H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O}) = H^1(Y', \mathcal{O})$ . Da der Einschränkungshomomorphismus sich aufteilen lässt in

$$H^1(Y_2, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y'', \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y', \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y_1, \mathcal{O}),$$

ist die Aussage beweisen. □

**Korollar 3.2** (Endlichkeitssatz). *Für eine kompakte riemannsche Fläche  $X$  gilt*

$$\dim H^1(X, \mathcal{O}) < \infty.$$

*Beweis.* Da  $X$  kompakt ist, kann man in Satz 3.2 die Mengen  $Y_1 = Y_2 = X$  wählen. Dann ist der Einschränkungshomomorphismus die Identitätsabbildung auf  $H^1(X, \mathcal{O})$ . Da diese ein endlich-dimensionales Bild hat, ist der Vektorraum  $H^1(X, \mathcal{O})$  endlich-dimensional.  $\square$

Nach diesem Satz können wir nun den Begriff Geschlecht auf sinnvolle Weise definieren.

**Definition 3.3** (Geschlecht). Für eine kompakte Riemannsche Fläche  $X$  nennen wir die natürliche Zahl

$$g := \dim H^1(X, \mathcal{O})$$

ihr *Geschlecht*.

Aus der Definition der Kohomologie ergibt sich direkt, dass das Geschlecht eine Invariante unter Biholomorphie für Riemannsche Flächen darstellt. Aus Beispiel 2.3 folgt nun, dass das Geschlecht einer Kreisscheibe 0 ist, also auch genau die Anzahl der Löcher, welche das topologisch definierte Geschlecht zählen würde. In Kapitel 4 werden wir mit ein bisschen Arbeit zeigen, dass die topologische Definition des Geschlechts tatsächlich mit der kohomologischen Übereinstimmt.

## 4 Folgerungen

In diesem Kapitel werden einige Folgerungen des Endlichkeitssatzes ausgeführt, die sich auf die Existenz von holomorphen und meromorphen Funktionen auf riemannschen Flächen und bestimmter Teilmengen davon beziehen. Zur Verallgemeinerung zeigen wir hier Aussagen nicht nur für kompakte riemannsche Flächen, sondern auch für relativ kompakte Teilmengen dieser. Wir wissen bereits, dass auf kompakten Riemannschen Flächen alle holomorphen Funktionen konstant sind. [1, S.10,2.8], doch wie sieht es für die meromorphen aus? Der folgende Satz liefert eine auf relative Kompaktheit verallgemeinerte Antwort.

**Satz 4.1.** *Sei  $Y \subseteq X$  eine relativ kompakte offene Teilmenge einer riemannschen Fläche  $X$ . Dann gibt es für alle  $a \in Y$  eine meromorphe Funktion  $f \in \mathcal{M}(Y)$ , welche einen Pol in  $a$  hat und auf  $Y \setminus \{a\}$  holomorph ist.*

*Beweis.* Nach Satz 3.2 kann man  $k := \dim \operatorname{Im}(H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O})) < \infty$  wählen. Sei  $(U_1, z_1)$  eine beliebige Koordinatenumgebung von  $a$  mit  $z(a) = 0$  und  $U_2 := U_1 \setminus \{a\}$ . Dann bildet  $\mathfrak{U} := (U_1, U_2)$  eine Überdeckung von  $X$ . Die Funktionen  $z^{-j}$  sind holomorph auf  $U_1 \cap U_2 = U_2$ , also repräsentieren diese Kozykel

$$\zeta_j \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \text{ für } j = 1, \dots, k+1$$

mit

$$\zeta_j = (\zeta_{j1,1}, \zeta_{j1,2}, \zeta_{j2,1}, \zeta_{j2,2}) = (0, z^{-j}, z^j, 0).$$

Außerdem muss

$$\dim \operatorname{Im}(H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathfrak{W}, \mathcal{O})) \leq k < k+1$$

#### 4 Folgerungen

gelten. Dies bedeutet, dass  $\zeta_j|Y \in Z^1(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O})$  linear abhängig modulo der Koränder sind, genauer:

Es gibt  $c_1, \dots, c_{k+1} \in \mathbb{C}$ , nicht alle gleich 0, und  $\eta = (f_1, f_2) \in C^0(\mathfrak{U} \cap Y, \mathcal{O})$ , sodass

$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j \zeta_j = \delta \eta \text{ auf } \mathfrak{U} \cap Y,$$

also diese Summe kohomolog zum Nullelement ist. Folglich ist

$$\sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j} = f_2 - f_1 \text{ auf } U_1 \cap U_2 \cap Y.$$

Nach den Garbenaxiomen gibt es also ein  $f \in \mathcal{M}(Y)$  mit

$$f|_{U_1 \cap Y} = f_1 + \sum_{j=1}^{k+1} c_j z^{-j}$$

und

$$f|_{U_2 \cap Y} = f_2.$$

Dieses  $f$  hat eine Polstelle in  $a$  und ist holomorph auf  $Y \setminus \{a\}$ . □

Es existieren also nicht triviale meromorphe Funktionen, wir können sogar eine Menge von Stützpunkten vorgeben:

**Korollar 4.1.** *Gegeben einer Menge von Stützpunkten  $(a_i, c_i) \in X \times \mathbb{C}$  für  $i = 1, \dots, n$ , sodass die  $a_i$  paarweise verschieden sind und  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche, existiert eine meromorphe Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , sodass*

$$f(a_i) = c_i$$

für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt.

*Beweis.* Für  $i \neq j$  kann man den vorherigen Satz mit  $Y = X$  anwenden. Also gibt es ein  $f_{i,j} \in \mathcal{M}(X)$ , welches holomorph in  $a_j$  und einen Pol in  $a_i$  hat. Wähle  $\lambda_{i,j} \in \mathbb{C}^*$ , sodass

$$f_{i,j}(a_k) \neq f_{i,j}(a_j) - \lambda_{i,j} \text{ für } k = 1, \dots, n.$$

Dann ist die Funktion

$$g_{i,j} := \frac{f_{i,j} - f_{i,j}(a_j)}{f_{i,j} - f_{i,j}(a_j) + \lambda_{i,j}}$$

meromorph. Außerdem ist sie wegen der Wahl von  $\lambda_{i,j}$  holomorph in  $a_k, 1 \leq k \leq n$  und es gilt mit Grenzwertbildung  $g_{i,j}(a_i) = 1$ , sowie  $g_{i,j}(a_j) = 0$ . Demnach erfüllen die Funktionen

$$h_i := \prod_{j \neq i} g_{i,j} \text{ für } i = 1, \dots, n$$

die Gleichung  $h_i(a_j) = \delta_{ij}$ , folglich können wir

$$f := \sum_{i=1}^n c_i h_i$$

wählen und die gewünschten Bedingungen sind erfüllt. □

## 4 Folgerungen

Die nächste Aussage beantwortet uns die Frage, ob auf nicht kompakten Riemannschen Flächen nicht konstante holomorphe Funktionen existieren.

**Korollar 4.2.** *Sei  $Y \Subset X$  eine relativ kompakte offene Teilmenge einer nicht kompakten riemannschen Fläche  $X$ . Dann existiert eine holomorphe Funktion  $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ , die nicht konstant auf allen Zusammenhangskomponenten von  $X$  ist.*

*Beweis.* Da  $X$  nicht kompakt ist lässt sich ein Gebiet  $Y \Subset Y' \Subset X$  wählen, sodass  $Y' \neq Y$ . Wähle nun  $a \in Y' \setminus Y$ , dann kann man Satz 4.1 auf  $a$  anwenden und erhält eine solche Funktion. Nach Konstruktion im Beweis von Satz 4.1, ist diese nicht konstant.  $\square$

Eine weitere zentrale Aussage über nicht kompakte riemannsche Flächen ist der folgende Satz.

**Satz 4.2.** *Sei  $X$  eine nicht kompakte riemannsche Fläche und seien  $Y \Subset Y' \subset X$  offen. Dann gilt*

$$\text{Im}(H^1(Y', \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O})) = 0.$$

*Beweis.* Wir zeigen, dass eine beliebige Kohomologieklassse in  $H^1(Y', \mathcal{O})$  eingeschränkt auf  $Y$  gleich 0 ist.

Wir wissen nach Satz 3.2, dass

$$L := \mathfrak{S}(H^1(Y', \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Y, \mathcal{O}))$$

ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist. Sei  $n \in \mathbb{N}$  seine Dimension. Wähle  $\xi_1, \dots, \xi_n \in H^1(Y', \mathcal{O})$  als die Kohomologieklassen, welche eingeschränkt auf  $Y$  den Vektorraum  $L$  aufspannen und  $f \in \mathcal{O}(Y)$  nach Korollar 4.2 als eine holomorphe Funktion, welche auf keienr Zusammenhangskomponente konstant ist. Durch komponentenweise Multiplikation lassen sich Produkte  $f\xi_\nu \in H^1(Y', \mathcal{O})$  definieren. Da wir die  $\xi_\nu$  als Basisvektoren gewählt hatten, existieren Konstanten  $c_{\nu\mu} \in \mathbb{C}$ , sodass

$$f\xi_\nu = \sum_{\mu=1}^n c_{\nu\mu} \xi_\mu \text{ auf } Y \text{ für } \nu = 1, \dots, n$$

gilt. Sei

$$F := \det(f\delta_{\nu\mu} - c_{\nu\mu})_{1 \leq \nu, \mu \leq n}.$$

Da die Determinante eine multilineare Abbildung ist und  $f$  holomorph, so ist auch  $F$  holomorph auf  $Y'$  und wegen der Wahl der  $c_{\nu\mu}$  verschwindet diese Funktion auf keiner Zusammenhangskomponente von  $Y'$  identisch. Außerdem ergibt sich wegen der Wahl von  $F$

$$F\xi_\nu \mid Y = 0 \text{ für } \nu = 1, \dots, n.$$

Sei nun  $\zeta \in H^1(Y', \mathcal{O})$  eine beliebige Kohomologieklassse und  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $Y'$ , sodass jedes  $U_i$  maximal eine Nullstelle von  $F$  enthält. Die Überdeckung kann so gewählt werden, da  $F$  in keiner Zusammenhangskomponente identisch verschwindet. Dann lässt sich  $\zeta$  durch einen Kozykel  $(f_{i,j}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$  repräsentieren. Dann folgt, dass für  $i \neq j$  die Einschränkung  $F \mid U_i \cap U_j \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$  nirgends verschwindet. Dann kann man also durch komponentenweise Division einen Kozykel  $(g_{i,j} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}))$ , sodass  $f_{i,j} = Fg_{i,j}$  gilt. Wählen wir nun  $\xi \in H^1(Y, \mathcal{O})$  als die zu  $(g_{i,j})$  gehörige Kohomologieklassse, so ergibt sich also  $\zeta = F\xi$ . Dann gilt  $\zeta \mid Y = F\xi \mid Y = 0$ .  $\square$

*Bemerkung.* Analog zum Endlichkeitssatz lässt sich also auch folgern, dass jede relativ kompakte offene Teilmenge einer nicht kompakten riemannschen Fläche Geschlecht 0 hat.

Daraus kann man eine Verallgemeinerung des Lemmas von Dolbeault auf Riemannschen Flächen [1, S.97,13.2] folgern.

**Korollar 4.3.** *Sei  $X$  eine nicht kompakte riemannsche Fläche und seien  $Y \subseteq Y' \subset X$  offen. Dann gibt es für jede Differentialform  $\omega \in \mathcal{E}^{0,1}$  ein  $f \in \mathcal{E}(Y)$  mit*

$$d''f = \omega|_Y.$$

*Beweis.* Nach dem Lemma von Dolbeault [1, S.97,13.2] ist dieses Problem lokal auf Kreisscheiben lösbar. Folglich gibt es eine offene Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$  von  $Y'$  und für jedes  $i \in I$  differenzierbare Funktionen  $f_i \in \mathcal{E}(U_i)$  mit  $d''f_i = \omega|_{U_i}$ . Dann gilt für die Differenzen  $f_i - f_j \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ , sie repräsentieren also nach der Kozykelrelation einen Kozykel  $(f_i - f_j) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ . Nach dem vorherigen Satz 4.2 zerfällt der Kozykel eingeschränkt auf  $Y$ , also existieren holomorphe Funktionen  $g_i \in \mathcal{O}(U_i \cap Y)$ , sodass

$$f_i - f_j = g_i - g_j \text{ auf } U_i \cap U_j \cap Y$$

gilt. Umgeformt ergibt sich

$$f_i - g_i = f_j - g_j.$$

Nach Garbenaxiom finden wir also eine Funktion  $f \in \mathcal{E}(Y)$  mit

$$f = f_i - g_i \text{ auf } U_i \cap Y \text{ für alle } i \in I.$$

Genau diese Funktion löst die Gleichung  $d''f = \omega|_Y$ . □

*Bemerkung.* Die letzten zwei Aussagen lassen sich tatsächlich, mit anderen Mitteln weiter verallgemeinern:

Es lässt sich zeigen, dass für jede nicht kompakte Riemannsche Fläche  $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$  gilt [1, S.179,26.1] und dass die Differentialgleichung sogar global lösbar ist. [1, S.179,25.6].

## 5 Der Satz von Riemann-Roch

In diesem Kapitel wollen wir eine weitere Anwendung des Endlichkeitssatzes für kompakte Riemannsche Flächen zeigen, nämlich den Satz von Riemann-Roch. Dieser trifft mithilfe des Geschlechts Aussage über das Verhalten bzw. die Anzahl verschiedener meromorpher Funktionen auf Riemannschen Flächen, deren Pol- und Nullstellen in bestimmter Weise eingeschränkt werden.

**Definition 5.1** (Divisor). Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche. Eine Abbildung

$$D : X \rightarrow \mathbb{Z}$$

heißt *Divisor*, falls in jeder kompakten Teilmenge  $K \subset X$  nur endlich viele  $x \in K$  existieren, sodass  $D(x) \neq 0$ . Die Divisoren bilden eine abelsche Gruppe  $\text{Div}(X)$ . Wir schreiben  $D \leq D'$  für  $D, D' \in \text{Div}(X)$ , falls  $D(x) \leq D'(x)$  für alle  $x \in X$ .



Man kann nun sowohl meromorphen Funktionen, als auch meromorphen Differentialformen einen Divisor zuordnen.

**Definition 5.2** (Ordnung, Hauptdivisor und kanonischer Divisor). Sei  $Y \subset X$  eine offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche und  $f \in \mathcal{M}(Y)$  eine meromorphe Funktion. Für einen Punkt  $a \in Y$  nennen wir

$$\text{ord}_a f := \begin{cases} 0, & f \text{ ist in } a \text{ holomorph und ungleich } 0, \\ k, & f \text{ hat in } a \text{ eine Nullstelle } k\text{-ter Ordnung,} \\ -k, & f \text{ hat in } a \text{ einen Pol } k\text{-ter Ordnung,} \\ \infty, & f \text{ ist in einer Umgebung von } a \text{ identisch } 0. \end{cases}$$

Dann ist auch für jede meromorphe Funktion  $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$  die Abbildung

$$(f) : X \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto \text{ord}_x f$$

ein Divisor, genannt *kanonischer Divisor*. Falls  $(f) \geq D$  für einen Divisor  $D$ , so heißt  $f$  *Viel-faches* des Divisors  $D$ . Sei  $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(Y)$  und  $(U, z)$  eine Koordinatenumgebung von  $a \in X$ , also kann man auf  $U \cap Y$  schreiben  $\omega = f dz$ , wobei  $f \in \mathcal{M} \cap \mathcal{Y}$ . Dann definieren wir analog

$$\text{ord}_a \omega := \text{ord}_a f.$$

Dann ist auch  $x \mapsto \text{ord}_x \omega$  ein Divisor, notiert mit  $(\omega)$ , genannt *kanonischer Divisor*. Zwei Divisoren  $D, D'$  nennen wir *äquivalent*, falls ihre Differenz  $D' - D$  ein Hauptdivisor ist.

*Bemerkung.* Eine Funktion  $f$  ist genau dann holomorph, wenn  $(f) \geq 0$ . Außerdem gelten folgende Beziehungen zwischen den oben genannten Divisoren:

- $(fg) = (f) + (g)$ ,
- $(f\omega) = (f) + (\omega)$ ,
- $(1/f) = -(f)$ .

**Definition 5.3** (Grad eines Divisors). Für eine kompakte Riemannsche Fläche  $X$  ist jeder Divisor  $D \in \text{Div}(X)$  nur an endlich vielen Punkten ungleich 0. Dann lässt sich der Grad definieren als:

$$\deg : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}, \tag{5.0.2}$$

$$\deg D := \sum_{x \in X} D(x). \tag{5.0.3}$$

*Bemerkung.* Für Hauptdivisoren  $(f)$  auf kompakten Riemannschen Flächen gilt  $\deg(f) = 0$ , da dort meromorphe Funktionen die selbe Anzahl von Polstellen wie Nullstellen haben [Forsterr]. Daher haben äquivalente Divisoren den selben Grad.

**Definition 5.4** (Die Garben  $\mathcal{O}_D$  und  $\Omega_D$ ). Sei  $D \in \text{Div}(X)$  ein Divisor einer Riemannschen Fläche  $X$ . Wir definieren

$$\mathcal{O}_D(U) := \{f \in \mathcal{M}(U); \text{ord}_x(f) \geq -D \text{ für alle } x \in U\}$$

als Menge aller meromorphen Funktionen auf  $U$ , die ein Vielfaches des Divisors  $D$  sind. Dann gilt für den Nulldivisor  $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$  und  $\mathcal{O}_D$  bildet mit den natürlichen Einschränkungshomomorphismen eine Garbe. Analog dazu sei die Garbe  $\Omega_D$  definiert durch

$$\Omega_D := \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(U); \text{ord}_x(\omega) \geq -D \text{ für alle } x \in U\}.$$

Genauso gilt  $\Omega_0 = \Omega$ .

**Lemma 5.1.** (i) Für zwei äquivalente Divisoren  $D, D' \in \text{Div}(X)$  sind die Garben  $\mathcal{O}_D$  und  $\mathcal{O}_{D'}$  isomorph.

(ii) Für einen kanonischen Divisor  $K = (\omega)$  einer nicht verschwindenden Differentialform  $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$  sind die Garben  $\Omega_{D+K}$  und  $\Omega_D$  isomorph.

*Beweis.* (i) Wähle  $\psi \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ , sodass  $D - D' = (\psi)$ . Dann haben wir den Garbenisomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_D &\rightarrow \mathcal{O}_{D'}, \\ f &\mapsto \psi f. \end{aligned}$$

(ii) Schreibe  $\omega$  in einer Kartenumgebung  $(U, z)$  als  $\omega = f dz$ , sodass  $f \in \mathcal{M}(X)$ . Dann gibt es den Garbenisomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{D+K} &\rightarrow \Omega_D, \\ f &\mapsto f\omega. \end{aligned}$$

□

Wir können nun mit einfachen Mitteln eine wichtige Aussage über die Garbe  $\mathcal{O}_D$  treffen.

**Satz 5.1.** Sei  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche und sei  $D \in \text{Div}(X)$  ein Divisor mit  $\deg D < 0$ . Dann gilt

$$H^0(X, \mathcal{O}_D) = 0.$$

*Beweis.* Angenommen die Kohomologiegruppe wäre nicht die triviale Gruppe, dann gäbe es  $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D)$  mit  $f \neq 0$ . Dann würde auch  $(f) \geq -D$  gelten und somit

$$\deg(f) \geq -\deg D > 0.$$

Das ist ein Widerspruch zu  $\deg(f) = 0$ , da  $f$  holomorph ist. □

**Definition 5.5** (Die Garben  $\mathcal{H}_{D'}^D$ ). Für zwei Divisoren  $D, D' \in \text{Div}(X)$  einer Riemannschen Fläche  $X$  mit  $D \leq D'$  gilt für jede offene Menge  $U \subset X$ , dass  $\mathcal{O}_D(U) \subset \mathcal{O}_{D'}(U)$ . Damit hat man

## 5 Der Satz von Riemann-Roch

auf natürliche Weise einen Garbenepimorphismus  $\mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D'}$ , bestehend aus Inklusionsabbildungen. Dann kann man auch den Quotient der Halme  $\mathcal{O}_{D',x}/\mathcal{O}_{D,x}$  betrachten. Wir definieren die Garbe  $\mathcal{H}_{D'}^D$  durch

$$\mathcal{H}_{D'}^D(U) := \prod_{x \in U} \mathcal{O}_{D',x}/\mathcal{O}_{D,x}.$$

Dann gilt für den Halm  $\mathcal{H}_{D',x}^D = \mathcal{O}_{D',x}/\mathcal{O}_{D,x}$ . Damit gibt es also einen Garbenepimorphismus  $\mathcal{O}_{D'} \rightarrow \mathcal{H}_{D'}^D$ , dessen Kern  $\mathcal{O}_D$  ist. Insgesamt gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow \mathcal{O}_{D'} \longrightarrow \mathcal{H}_{D'}^D \longrightarrow 0.$$

Wir können wieder eine Aussage über die Kohomologiegruppe der Garbe  $\mathcal{H}_{D'}^D$  treffen.

**Lemma 5.2.** *Mit der selben Notation wie oben gilt*

$$H^1(X, \mathcal{H}_{D'}^D) = 0.$$

*Falls  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche ist, so gilt außerdem*

$$\dim H^0(X, \mathcal{H}_{D'}^D) = \deg D' - \deg D.$$

*Beweis.* Sei  $S := \{x \in X; D(x) \neq D'(x)\}$  die Menge aller Punkte, an denen die Divisoren nicht gleich sind. Da  $D - D'$  auch ein Divisor ist, muss diese Menge diskret und abgeschlossen sein. Wir wählen nun eine beliebige Kohomologieklassse  $\xi \in H^1(X, \mathcal{H}_{D'}^D)$ , welche durch einen Kozykel in  $Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{H}_{D'}^D)$  repräsentiert wird für eine offene Überdeckung  $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ . Wir können eine feinere Überdeckung  $(V_k)_{k \in K} = \mathfrak{V} < \mathfrak{U}$  wählen, sodass jedes  $V_k$  maximal einen Punkt aus  $S$  enthält. Dann gilt für  $k \neq l$ , dass

$$\mathcal{H}_{D'}^D(V_k \cap V_l) = 0$$

und somit auch

$$Z^1(\mathfrak{V}, \mathcal{H}_{D'}^D) = 0$$

. Folglich ist  $\xi = 0$ .

Falls  $X$  nun kompakt ist, ist der Divisor  $D - D'$  nur an endlich vielen Punkten verschieden von 0, und somit ist  $S$  endlich. Dann folgt

$$\dim H^0(X, \mathcal{H}_{D'}^D) = \dim \prod_{x \in S} \mathcal{O}_{D',x}/\mathcal{O}_{D,x} = \sum_{x \in S} (D'(x) - D(x)) = \deg D - \deg D'.$$

□

Das folgende Korollar ergibt sich aus der exakten Garbensequenz in Definition 5.5, da aus jeder exakten Garbensequenz eine exakte Kohomologiesequenz folgt, siehe für den Beweis letzterer Aussage [FORSTER KAPITEL 15]

**Korollar 5.1.** *Es gibt eine exakte Garbensequenz*

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \longrightarrow 0$$

Schließlich kann der Satz von Riemann-Roch formuliert werden. Er gibt uns Auskunft über die Dimension der nullten und ersten Kohomologiegruppen bezüglich  $\mathcal{O}_D$  und wie diese im Verhältnis miteinander stehen. Aus ihm lassen sich wichtige Folgerungen ziehen.

**Satz 5.2** (Riemann-Roch). *Für jeden Divisor  $D$  einer kompakten Riemannschen Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g$  sind die Kohomologiegruppen  $H^0(X, \mathcal{O}_D)$  und  $H^1(X, \mathcal{O}_D)$  endlich-dimensional und es gilt*

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) = 1 - g + \deg D.$$

*Beweis.* Es soll ein induktives Argument auf den Divisor angewandt werden. Dazu betrachten wir zunächst den Nulldivisor  $D = 0$ .

Für  $D = 0$  gilt  $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$  und somit  $H^0(X, \mathcal{O}) = \mathcal{O}(X)$ . Also haben wir  $\dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1$ , da  $\mathcal{O}(X)$  nur aus den konstanten Funktionen besteht[1, S. 10], und  $\dim H^1(X, \mathcal{O}) = g < \infty$  nach 3.2. Da  $\deg D = 0$ , wird die Aussage des Satzes erfüllt.

Seien  $D, D' \in \text{Div}(X)$  mit  $D \leq D'$ . Für einen der Divisoren sei die Aussage des Satzes bereits erfüllt. Wir betrachten die exakte Kohomologiesequenz aus ?THM? ?? und zerlegen sie in zwei exakte Sequenzen. Dazu seien

$$\begin{aligned} V &:= \text{Im} \left( H^0(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}_{D'}^D) \right) \\ W &:= H^0(X, \mathcal{H}_{D'}^D) / V. \end{aligned}$$

Dann ist die Sequenz

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \rightarrow V \rightarrow 0$$

exakt, da

$$\ker(V \rightarrow 0) = V = \text{Im} \left( H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{H}_{D'}^D) \right) = \text{Im} \left( H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) \rightarrow V \right)$$

gilt und der Rest nach 5.1 Exaktheit erfüllt. Die Sequenz

$$0 \rightarrow W \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \rightarrow 0$$

ist auch exakt, da nach der Definition von  $W$  und der Exaktheit von 5.1 genau  $\ker \left( H^0(X, \mathcal{H}_{D'}^D) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D) \right) = V$  herausgeteilt wird, und somit die Abbildung  $W \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D)$  injektiv ist. Also gilt

$$\ker \left( W \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_D) \right) = 0 = \text{Im}(0 \rightarrow W).$$

Nach der Dimensionsformel[ref?] und Lemma 5.2 ist  $\dim V + \dim W = \dim H^0(X, \mathcal{H}_{D'}^D) = \deg D' - \deg D$ , also sind beide Räume endlich-dimensional. Wenden wir das Splitting Lemma(siehe dazu das Buch [2, S. 147]) auf die zwei Sequenzen an, erhalten wir

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) &= H^0(X, \mathcal{O}_D) \oplus V, \\ H^1(X, \mathcal{O}_D) &= H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) \oplus W. \end{aligned}$$

Da die Aussage für einen der beiden Divisoren gilt, sind die dem entsprechenden Kohomologiegruppen endlich-dimensional und somit direkt alle auftretenden Räume. Dann folgen die Dimensionsgleichungen

$$\begin{aligned} \dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) + \dim V, \\ \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) &= \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) + \dim W. \end{aligned}$$

## 5 Der Satz von Riemann-Roch

Diese Gleichungen ergeben durch Addition

$$\begin{aligned}\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) + \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) + \dim V + \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) + \dim W \\ &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) + \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) + \deg D' - \deg D.\end{aligned}$$

Durch Umformen erhält man

$$\begin{aligned}\dim H^0(X, \mathcal{O}_{D'}) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_{D'}) - \deg D' &= \\ &= \dim H^0(X, \mathcal{O}_D) + \dim H^1(X, \mathcal{O}_D) - \deg D.\end{aligned}$$

Falls die Aussage für einen der beiden Divisoren gilt, so muss sie folglich auch für den anderen gelten. Damit gilt sie für jeden Divisor  $D' \geq 0$ . Sei  $D$  ein beliebiger Divisor. Dann ist  $D' = \max\{0, D\} \geq 0$  ein Divisor mit  $D \leq D'$ . Damit gilt die Aussage für jeden Divisor.  $\square$

Eine ähnliche Aussage wie im Existenzsatz für Abbildungen[VERWEIS EINFÜGEN] kann man mithilfe des Satzes von Riemann-Roch, nun treffen. Sie liefert auch eine Einschränkung der Polstellenordnung durch das Geschlecht der Fläche.

**Satz 5.3.** *Für eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g$  gibt es für jeden Punkt  $a \in X$  eine nicht-konstante meromorphe Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$ , welche in  $a$  eine Polstelle der Ordnung  $\leq g + 1$  hat und holomorph in  $X \setminus \{a\}$  ist.*

*Beweis.* Sei  $D \in \text{Div}(X)$  definiert durch

$$D(x) := \begin{cases} g + 1, & x = a, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist  $\deg D = g + 1$  und es gilt nach Riemann-Roch(5.2)

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) \geq 1 - g + \deg D = 2$$

Also existiert eine nicht konstante Funktion  $f \in H^0(X, \mathcal{O}_D) = \mathcal{O}_D(X)$ . Diese erfüllt wegen der Definition von  $\mathcal{O}_D$  genau die Bedingungen.  $\square$

**Korollar 5.2.** *Für jede kompakte Riemannsche Fläche  $X$  gibt es eine Überlagerung  $f : X \rightarrow \mathbb{P}_1$  mit Blätterzahl  $\leq g + 1$ .*

*Beweis.* Die Abbildung aus Satz 5.3 lässt sich als (nicht konstante) holomorphe Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{P}_1$  auffassen[1, S.8, Satz 1.15], ist also eine Überlagerung der Zahlenkugel[1, S.18, Satz 4.2]. Nach Satz 4.24 in [1] hat dann jeder Punkt die Vielfachheit  $\leq g + 1$ , folglich ist die Blätterzahl  $\leq g + 1$ .  $\square$

**Korollar 5.3.** *Jede Riemannsche Fläche vom Geschlecht null ist isomorph zur Riemannschen Zahlenkugel  $\mathbb{P}_1$ .*

## 5 Der Satz von Riemann-Roch

*Beweis.* Die Abbildung aus dem vorherigen Korollar hat in diesem Fall in jedem Punkt die Vielfachheit 1, damit ist sie injektiv. Nach [1, Satz 2.7] ist sie surjektiv und damit ist die Umkehrabbildung nach [1, Korollar 2.5] holomorph.  $\square$

Eine weitere wichtige Folgerung betrifft den Grad von kanonischen Divisoren:

**Satz 5.4.** *Sei  $\omega$  eine nichtverschwindende, meromorphe Differentialform auf einer kompakten Riemannschen Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g$ . Dann gilt*

$$\deg(\omega) = 2g - 2.$$

*Beweis.* Sei  $K := \omega$ . Nach dem Satz von Riemann-Roch 5.2 gilt die Gleichung

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_K) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_K) = 1 - g + \deg K.$$

Außerdem ist nach Lemma 5.1 Teil (ii)  $\Omega \cong \mathcal{O}_K$  und nach [1, 17.10]  $\dim H^0(X, \Omega) = g$ , sowie nach [1, 17.11]  $\dim H^1(X, \Omega) = \dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1$ . Eingesetzt ergibt sich

$$1 - g + \deg K = \dim H^0(X, \Omega) - \dim H^1(X, \Omega) = g - 1.$$

Daraus folgt durch Umformung direkt die Aussage.  $\square$

**Satz 5.5** (Riemann-Hurwitz-Formel). *Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine  $n$ -blättrige holomorphe Überlagerung zwischen zwei kompakten Riemannschen Flächen. Sei  $g$  das Geschlecht von  $X$ ,  $g'$  das von  $Y$  und  $v(f, x)$  die Vielfachheit, mit der  $f$  im Punkt  $x \in X$  den Wert  $f(x)$  annimmt. Dann gilt die Riemann-Hurwitz-Formel*

$$2g - 2 = n(2g' - 2) + \sum_{x \in X} (v(f, x) - 1)$$

*Beweis.* Für eine nicht verschwindende, meromorphe Differentialform  $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(Y)$  gilt nach Satz 5.4, dass  $\deg(\omega) = 2g' - 2$ . Da  $f^*\omega$  eine nicht verschwindende Differentialform auf  $X$  ist gilt ebenso  $\deg(f^*\omega) = 2g - 2$ . Sei  $x \in X$  mit  $f(x) = y \in Y$ . Nach dem Satz über die lokale Gestalt holomorpher Funktionen [1, S.9, Satz 2.1] können wir zwei Koordinatenumgebungen  $(U, z)$  von  $x$  und  $(U', w)$  von  $y$  wählen mit  $z(x) = 0$  und  $w(y) = 0$ , sodass sich lokal schreiben lässt  $w \circ f = z^k$ , wobei  $k = v(f, x)$ . In  $U'$  wählen wir  $\omega = \psi(w) dw$  für eine meromorphe Funktion  $\psi \in \mathcal{M}(Y)$ . Dann ergibt sich auf  $U$  für den die zurückgeholte Form

$$f^*\omega = \psi(z^k) d(z^k) = k z^{k-1} \psi(z^k) dz.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \text{ord}_x(f^*\omega) &= \text{ord}_x(k z^{k-1} \psi(z^k)) \\ &= \text{ord}_x(k z^{k-1}) + \text{ord}_x(\psi(z^k)) \\ &= k - 1 + k \text{ord}_y(\psi(w)) \\ &= v(f, x) - 1 + v(f, x) \text{ord}_y(\omega). \end{aligned}$$

Wegen der Definition von Vielfachheit gilt

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} v(f, x) = n.$$

Mit beiden Gleichungen zusammen ergibt sich für  $y \in Y$

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{ord}_x(f^*\omega) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} (v(f, x) - 1) + n \text{ord}_y(\omega),$$

insgesamt also

$$\begin{aligned} \deg(f^*\omega) &= \sum_{x \in X} \text{ord}_x(f^*\omega) = \sum_{y \in Y} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{ord}_x(f^*\omega) \\ &= \sum_{y \in Y} \left( \sum_{x \in f^{-1}(y)} (v(f, x) - 1) + n \text{ord}_y(\omega) \right) \\ &= \sum_{x \in X} (v(f, x) - 1) + n \sum_{y \in Y} \text{ord}_y(\omega) \\ &= \sum_{x \in X} (v(f, x) - 1) + n \deg(\omega). \end{aligned}$$

Setzen wir nun (\*) und (\*\*) für die linke und rechte Seite ein, so folgt die Behauptung.  $\square$

## 6 Das topologische Geschlecht

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass das bekannte topologische Geschlecht mit dem von uns definierten kohomologischen Geschlecht übereinstimmt. Eine Fläche im topologischen Sinn ist eine 2– Dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Sie wird orientierbar genannt, wenn die Kartenwechselhomöomorphismen die Orientierung des  $\mathbb{R}^2$  einhalten. Folglich ist jede Riemannsche Fläche nach Definition orientierbar.

Eine Triangulierung ist eine spezielle Zerlegung einer Fläche in aneinanderliegende Dreiecke, für eine Definition siehe (Einfügen). Es lässt sich zeigen, dass jede Fläche ohne Rand diese besitzt.(Einfügen).

Nun können wir den Begriff des topologischen Geschlechts definieren.

**Definition 6.1** (topologisches Geschlecht, Euler-Charakteristik). Seien  $X$  eine Fläche ohne Rand und seien  $E_x, K_x, F_x$  die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen in der Triangulierung. Sei

$$\chi(X) = E_x - K_x - F_x =: 2 - 2g_{top}.$$

$\chi(X)$  nennen wir *Euler-Charakteristik* von  $X$  und  $g_{top}$  das *topologische Geschlecht*.

*Bemerkung.* (i) Die Eulercharakteristik ist unabhängig von der gewählten Triangulierung (einfügen), von daher sind die beiden Größen wohldefiniert. Außerdem lässt sich zeigen, dass homöomorphe Flächen die selbe Euler-Charakteristik haben, also auch das selbe Geschlecht(Einfügen). Damit haben wir zwei topologische Invarianten.

(ii) Wir hätten das topologische Geschlecht auch auf andere Weise definieren können, zum Beispiel über Schnitte entlang von Kurven oder über die Henkelzerlegung(Einfügen), und dann zeigen, dass die Formel aus der Definition gilt (einfügen). Somit kann man sich leicht vergewissern, dass das topologische Geschlecht tatsächlich die Anzahl der Löcher einer Fläche ohne Rand zählt.

**Satz 6.1.** Für die beiden eingeführten Geschlechterbegriffe einer kompakten Riemannschen Fläche gilt

$$g = g_{\text{top}}.$$

*Beweis.* Nach (Korollar einfügen) existiert eine holomorphe Überlagerung  $f : X \rightarrow \mathbb{P}_1$  mit  $n \leq g+1$  Blättern. Außerdem wissen wir, dass das kohomologische Geschlecht der Riemannschen Zahlenkugel gleich 0 ist, somit folgt nach Riemann-Hurwitz??, dass

$$2g - 2 = \sum_{x \in X} (v(f, x) - 1) - 2n.$$

Wenn wir die Urbilder einer Triangulierung von  $\mathbb{P}_1$  betrachten und jeden Verzweigungspunkt als Eckpunkt wählen, so erhalten wir auch eine Triangulierung von  $X$ . Dann ist

$$\chi(X) = n\chi(\mathbb{P}_1) - \sum_{x \in X} (v(f, x)),$$

da die Urbilder jeweils  $n$  Punkte enthalten und wir noch die Vielfachheiten abziehen müssen, denn an den Verzweigungspunkten erbibt sich jeweils nur ein Dreieck. Da auch das topologische Geschlecht von  $\mathbb{P}_1$  gleich 0 ist, folgt mit Riemann-Hurwitz

$$\chi(X) = 2n - \sum_{x \in X} v(f, x) = 2 - 2g.$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

## Notationsverzeichnis

### Garben und Funktionenräume

$\mathcal{O}$	Garbe der holomorphen Funktionen 2
$\mathcal{M}$	Garbe der meromorphen Funktionen 2
$\mathcal{E}$	Garbe der differenzierbaren Funktionen 2
$\mathcal{E}^{(1)}, \mathcal{E}^{1,0}, \mathcal{E}^{0,1}$	Räume der 1-Differentialformen
$\mathcal{L}^2(D, \mathcal{O})$	Raum der quadratisch integrierbaren holomorphen Funktionen 5

### Kohomologie

$C^q(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$	$q$ -te Kokettengruppe bezüglich der Garbe $\mathcal{F}$ und Überdeckung $\mathfrak{U}$ 2
$Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$	Kozykelgruppe bezüglich der Garbe $\mathcal{F}$ und Überdeckung $\mathfrak{U}$ 3
$B^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$	Korandgruppe bezüglich der Garbe $\mathcal{F}$ und Überdeckung $\mathfrak{U}$ 3
$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$	1. Kohomologiegruppe bezüglich der Garbe $\mathcal{F}$ und Überdeckung $\mathfrak{U}$ 3
$H^1(X, \mathcal{F})$	1. Kohomologiegruppe der Riemannschen Fläche $X$ bezüglich der Garbe $\mathcal{F}$ 4

### Sonstiges

$A \Subset B$	$A$ liegt relativ kompakt in $B$
$\mathfrak{V} \ll \mathfrak{W}$	$\mathfrak{V}$ ist Schrumpfung von $\mathfrak{U}$ 7



# Literatur

- [1] Forster, O. *Riemannsche Flächen*. Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [2] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.