

10. Copulas

10.1. Mehrdimensionale Verteilungsfunktionen

Für einen Vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ bezeichnet

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = \mathbb{P}[X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d]$$

die gemeinsame Verteilungsfunktion, und $F_k(x_k) = F(\infty, \dots, x_k, \dots, \infty)$ die k -te Randverteilung. Wir haben dann $F(-\infty, \dots, -\infty) = 0$ und $F(\infty, \dots, \infty) = 1$. Setzen wir $u_{j,1} = a_j$ und $u_{j,2} = b_j$ für $-\infty \leq a_j < b_j \leq \infty$, so folgt aus der **Teleskopformel**, dass

$$\mathbb{P}[X_1 \in (a_1, b_1], \dots, X_d \in (a_d, b_d]] = \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 \dots \sum_{j_d=1}^2 (-1)^{j_1+\dots+j_d} F(u_{1,j_1}, \dots, u_{d,j_d}) .$$

Umgekehrt, haben wir eine Funktion $\mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$, mit $F(-\infty, \dots, -\infty) = 0$ und $F(\infty, \dots, \infty) = 1$ und

$$\sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 \dots \sum_{j_d=1}^2 (-1)^{j_1+\dots+j_d} F(u_{1,j_1}, \dots, u_{d,j_d}) \geq 0$$

für alle $-\infty \leq a_k < b_k \leq \infty$, so ist F eine Verteilungsfunktion einer mehrdimensionalen Verteilung auf $[-\infty, \infty]^d$. Dies folgt leicht aus Satz 1.10, indem wir die Mengenfunktion

$$\mu((a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_n, b_n]) = \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 \dots \sum_{j_d=1}^2 (-1)^{j_1+\dots+j_d} F(u_{1,j_1}, \dots, u_{d,j_d})$$

definieren. Uns interessieren Verteilungsfunktionen, deren Randverteilungen kein Mass in $\pm\infty$ haben.

Wir definieren nun die verallgemeinerte Inverse. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann setzen wir

$$f^{-1}(t) = \inf\{x : f(x) \geq t\} .$$

Es folgt aus der Definition, dass $f^{-1}(x)$ eine wachsende Funktion ist.

Ist F eine eindimensionale Verteilungsfunktion, so erhalten wir

$$F(F^{-1}(t)) \geq t \quad \text{und} \quad F^{-1}(F(x)) \leq x .$$

Ist F stetig, so gilt $F(F^{-1}(t)) = t$. In der Tat, da F wachsend ist, muss $F(F^{-1}(t) + \varepsilon) \geq t$ für alle $\varepsilon > 0$ gelten. Da aber F rechtsstetig ist, können wir ε gegen Null gehen lassen, und erhalten $F(F^{-1}(t)) \geq t$. Ist F stetig, so muss es ein x geben, so dass $F(x) = t$. Somit ist $F^{-1}(t) \leq x$, und damit $F(F^{-1}(t)) \leq F(x) = t$, was die Gleichheit beweist. Wir haben trivialerweise $F(x) \geq F(x)$, und damit auch $F^{-1}(F(x)) \leq x$. Nehmen wir als Beispiel die Bernoulli-Verteilung $F(x) = (1-p)\mathbb{1}_{x \geq 0} + p\mathbb{1}_{x \geq 1}$. Dann haben wir $F^{-1}(1-p/2) = 1$ und $F(F^{-1}(1-p/2)) = F(1) = 1 > 1-p/2$, und $F^{-1}(F(\frac{1}{2})) = F^{-1}(1-p) = 0 < \frac{1}{2}$. Wir sehen also, dass wirklich die Ungleichungen gelten müssen.

Es gilt folgendes Resultat.

Hilfssatz 10.1. *Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F und U eine auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Dann hat $F^{-1}(U)$ die Verteilungsfunktion F . Weiter gilt $\mathbb{P}[F(X) \leq u] \leq u$ und $\mathbb{P}[F(X) \geq u] \geq 1 - u$ für $u \in [0, 1]$. Ist F stetig in $F^{-1}(u)$, so haben wir $\mathbb{P}[F(X) \leq u] = u$ und $\mathbb{P}[F(X) \geq u] = 1 - u$.*

Beweis. Wir erhalten aus der Definition von F^{-1} und der Monotonie von F , dass $\mathbb{P}[F^{-1}(U) > x] = \mathbb{P}[U > F(x)] = 1 - F(x)$, und damit $\mathbb{P}[F^{-1}(U) \leq x] = F(x)$.

Für $u = 1$ ist die Aussage trivial. Somit können wir $u < 1$ annehmen. Sei $z = \sup\{x : F(x) \leq u\}$. Dann gilt $F(z-) \leq u$. Ist $F(z) = u$, so haben wir $\mathbb{P}[F(X) \leq u] = \mathbb{P}[X \leq z] = F(z) = u$. Ist $F(z) > u$, so erhalten wir $\mathbb{P}[F(X) \leq u] = \mathbb{P}[X < z] = F(z-) \leq u$. Damit Ungleichheit gilt, muss $F(z-) < u$ gelten. In diesem Fall ist also $z = F^{-1}(u)$, und damit $\mathbb{P}[F(X) \leq u] = \mathbb{P}[X < z] = F(z-) < u$. Ist F stetig in $F^{-1}(u)$, so ist $u \leq F(F^{-1}(u)) = F(F^{-1}(u)-) \leq u$, und somit muss Gleichheit gelten. Weiter gilt, $\mathbb{P}[F(X) \geq u] = \mathbb{P}[X \geq F^{-1}(u)] = 1 - F(F^{-1}(u)-) \geq 1 - u$. Ist F stetig in $F^{-1}(u)$, so haben wir Gleichheit. \square

10.2. Copulas

Definition 10.2. *Eine Verteilungsfunktion $C(x_1, x_2, \dots, x_d)$, so dass die Randverteilungen jeweils die Gleichverteilung auf $(0, 1)$ sind, heisst **Copula**.*

Hilfssatz 10.3. *Sei $C(x_1, x_2, \dots, x_d)$ eine Copula, und F_1, F_2, \dots, F_d eindimensionale Verteilungsfunktionen. Dann ist*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)) \quad (10.1)$$

eine Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1, F_2, \dots, F_d .

Beweis. Wir erhalten $F(-\infty, \dots, -\infty) = C(0, \dots, 0) \leq C(0, 1, \dots, 1) = 0$ und $F(\infty, \dots, \infty) = C(1, \dots, 1) = 1$, da die Verteilung C auf $(0, 1)^d$ konzentriert ist. Wählen wir $-\infty \leq a_k < b_k \leq \infty$ und setzen wir $\tilde{a}_k = F_k(a_k)$, $\tilde{b}_k = F_k(b_k)$ und $\tilde{u}_{k,j_k} = F_k(u_{k,j_k})$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 \cdots \sum_{j_d=1}^2 (-1)^{j_1+\dots+j_d} F(u_{1,j_1}, \dots, u_{d,j_d}) \\ &= \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 \cdots \sum_{j_d=1}^2 (-1)^{j_1+\dots+j_d} C(\tilde{u}_{1,j_1}, \dots, \tilde{u}_{d,j_d}) \geq 0. \end{aligned}$$

Also ist F eine Verteilungsfunktion. Für die k -te Randverteilung erhalten wir

$$F(\infty, \dots, x_k, \dots, \infty) = C(1, \dots, F_k(x_k), \dots, 1) = F_k(x_k),$$

was die Aussage beweist. \square

Satz 10.4. (Sklar) *Sei F eine d -dimensionale Verteilungsfunktion mit den Randverteilungen F_1, \dots, F_d . Dann existiert eine Copula C , so dass (10.1) gilt. Sind alle Randverteilungen stetig, so ist C eindeutig.*

Beweis. Sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$ die Variable mit Verteilungsfunktion F . Dann hat X_k die Verteilung F_k . Wir bilden die Variablen $\tilde{U}_k = F_k(X_k)$. Sei \tilde{C} die Verteilungsfunktion von $(\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_d)$. Dann gilt für die Verteilungsfunktion \tilde{F}_k von \tilde{U}_k , dass $\mathbb{P}[\tilde{U}_k \leq u] \leq u$ und $\mathbb{P}[\tilde{U}_k \geq u] \geq 1 - u$. Ist F stetig, so gilt Gleichheit. Ist F_k nicht stetig, so nummerieren wir die Sprungstellen $\{y_n^k\}$ von F_k . Dann ist $\tilde{F}_k(F_k(y_n^k)) = \mathbb{P}[F(X_k) \leq F_k(y_n^k)] = \mathbb{P}[X_k \leq y_n^k] = F_k(y_n^k)$ und analog $\tilde{F}_k(F_k(y_n^k)-) = F_k(y_n^k-)$. Seien V_n^k unabhängige auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Wir setzen nun $U_k = \tilde{U}_k$, falls F_k an der Stelle X_k stetig ist, und $U_k = (1 - V_n^k)F_k(y_n^k-) + V_n^k F_k(y_n^k)$, falls $X_k = y_n^k$. Wir wollen nun zeigen, dass U_k auf $(0, 1)$ gleichverteilt ist. Sei u ein Punkt, so dass F_k stetig ist in $F_k^{-1}(u)$. Dann ist $F_k(F_k^{-1}(u)) = u$ und

$$\mathbb{P}[U_k \leq u] = \mathbb{P}[F_k(X_k) \leq F_k(F_k^{-1}(u))] = \mathbb{P}[X_k \leq F_k^{-1}(u)] = F_k(F_k^{-1}(u)) = u.$$

Sei u ein Punkt, so dass F_k einen Sprung in $F_k^{-1}(u)$ hat. Also gibt es n , so dass $y_n^k = F_k^{-1}(u)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[U_k \leq u] &= \mathbb{P}[U_k \leq F_k(y_n^k-)] + \mathbb{P}[F_k(y_n^k-) < U_k \leq u] \\ &= \mathbb{P}[F(X_k) \leq F_k(y_n^k-)] + \mathbb{P}\left[\tilde{U}_k = F_k(y_n^k), V_n^k \leq \frac{u - F_k(y_n^k-)}{F_k(y_n^k) - F_k(y_n^k-)}\right] \\ &= F_k(y_n^k-) + (F_k(y_n^k) - F_k(y_n^k-)) \frac{u - F_k(y_n^k-)}{F_k(y_n^k) - F_k(y_n^k-)} = u. \end{aligned}$$

Somit ist U_k gleichverteilt auf $(0, 1)$. Sei nun C die gemeinsame Verteilung von (U_1, \dots, U_d) . Da wir gleichverteilte Randverteilungen haben, ist C eine Copula. Wir haben nun

$$\begin{aligned} C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) &= \mathbb{P}[U_1 \leq F_1(x_1), \dots, U_d \leq F_d(x_d)] \\ &= \mathbb{P}[\tilde{U}_1 \leq F_1(x_1), \dots, \tilde{U}_d \leq F_d(x_d)] = \mathbb{P}[F_1(X_1) \leq F_1(x_1), \dots, F_d(X_d) \leq F_d(x_d)] \\ &= \mathbb{P}[X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d] = F(x_1, \dots, x_d) . \end{aligned}$$

Sind die Randverteilungen stetig, so ist $F_k(F_k^{-1}(u)) = u$ für alle u . Somit erhalten wir

$$C(u_1, \dots, u_d) = C(F_1(F_1^{-1}(u_1)), \dots, F_d(F_d^{-1}(u_d))) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) ,$$

was die Eindeutigkeit beweist. \square

Copulas beschreiben die Abhängigkeit von Zufallsvariablen, und sind invariant unter streng monotonen Transformationen.

Hilfssatz 10.5. *Seien X_1, \dots, X_d Zufallsvariablen, die durch eine Copula C und Randverteilungen F_1, \dots, F_d gegeben sind. Seien D_k Intervalle, so dass $\mathbb{P}[X_k \in D_k] = 1$ und seien $T_k : D_k \rightarrow \mathbb{R}$ streng wachsende Funktionen. Sind $\tilde{X}_k = T_k(X_k)$ Variablen mit Randverteilungen \tilde{F}_k , so ist die gemeinsame Verteilung von $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_d$ gegeben durch $C(\tilde{F}_1(x_1), \dots, \tilde{F}_d(x_d))$.*

Beweis. Da die Funktionen streng wachsend sind, haben wir $X_k = T_k^{-1}(\tilde{X}_k)$. Dies ergibt

$$\tilde{F}_k(x) = \mathbb{P}[T_k(X_k) \leq x] = \mathbb{P}[X_k \leq T_k^{-1}(x)] = F_k(T_k^{-1}(x)) .$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} C(\tilde{F}_1(x_1), \dots, \tilde{F}_d(x_d)) &= C(F_1(T_1^{-1}(x_1)), \dots, F_d(T_d^{-1}(x_d))) \\ &= F(T_1^{-1}(x_1), \dots, T_d^{-1}(x_d)) = \mathbb{P}[X_1 \leq T_1^{-1}(x_1), \dots, X_d \leq T_d^{-1}(x_d)] \\ &= \mathbb{P}[T_1(X_1) \leq x_1, \dots, T_d(X_d) \leq x_d] = \mathbb{P}[\tilde{X}_1 \leq x_1, \dots, \tilde{X}_d \leq x_d] . \end{aligned}$$

\square

Als nächstes geben wir Schranken für Copulas.

Proposition 10.6. *Für jede Copula gilt für $0 \leq u_k \leq 1$*

$$\max\{u_1 + \dots + u_d + 1 - d, 0\} \leq C(u_1, \dots, u_d) \leq \min\{u_1, \dots, u_d\} .$$

Dabei ist die obere Schranke eine Copula. Die untere Schranke ist genau dann eine Copula, falls $d = 2$.

Beweis. Wir haben

$$\mathbb{P}[U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d] \leq \mathbb{P}[U_k \leq u_k] = u_k .$$

Dies beweist die obere Schranke. Die untere Schranke gilt im Falle $d = 1$. Nehmen wir an, die Schranke sei für d bewiesen. Dann haben wir

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d, U_{d+1} \leq u_{d+1}] \\ &= \mathbb{P}[U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d] + \mathbb{P}[U_{d+1} \leq u_{d+1}] \\ &\quad - \mathbb{P}[\{U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d\} \cup \{U_{d+1} \leq u_{d+1}\}] \\ &\geq \max\{u_1 + \dots + u_d + 1 - d, 0\} + u_{d+1} - 1 \\ &= \max\{u_1 + \dots + u_d + u_{d+1} + 1 - (d + 1), u_{d+1} - 1\} . \end{aligned}$$

Da eine Wahrscheinlichkeit positiv ist, dürfen wir $u_{d+1} - 1$ durch Null ersetzen.

Sei U gleichverteilt auf $(0, 1)$. Setzen wir $U_1 = \dots = U_d = U$, erhalten wir

$$\mathbb{P}[U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d] = \mathbb{P}[U \leq u_1, \dots, U \leq u_d] = \min\{u_1, \dots, u_d\} ,$$

also die Copula der oberen Schranke. Für $d = 2$ setzen wir $U_1 = U$ und $U_2 = 1 - U$. Dann erhalten wir

$$\mathbb{P}[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2] = \mathbb{P}[1 - u_2 \leq U \leq u_1] = \begin{cases} u_1 - (1 - u_2) & \text{falls } 1 - u_2 \leq u_1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

also die untere Schranke. Setzen wir $u_4 = \dots = u_d = 1$, so genügt es zu zeigen, dass für $d = 3$ die untere Schranke keine Copula ist. Wir haben wegen der Symmetrie

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tfrac{1}{2} < U_k \leq 1] &= C(1, 1, 1) - 3C(1, 1, \tfrac{1}{2}) + 3C(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) - C(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) \\ &= 1 - 3 \cdot \tfrac{1}{2} + 3 \cdot 0 - 0 = -\tfrac{1}{2} . \end{aligned}$$

Somit kann es sich nicht um eine Copula handeln □

Eine weitere wichtige Copula ist die Unabhängigkeitscopula $C(u_1, \dots, u_d) = \prod_{k=1}^d u_k$.

Definition 10.7. Wir nennen X und Y **komonoton**, falls $Y = F_Y^{-1}(F_X(X))$, und **kontramomonoton**, falls $Y = F_Y^{-1}(1 - F_X(X))$.

Komonotone Variablen sind durch die Copula $C(u, v) = \min\{u, v\}$ charakterisiert, kontramomonotone Variablen durch die Copula $C(u, v) = \max\{u + v - 1, 0\}$. Eine Gruppe von d Variablen kann immer paarweise komonoton sein. Eine Gruppe von d Variablen kann aber nur im Falle $d = 2$ paarweise kontramomonoton sein. Daher ist im Falle $d \geq 3$ die untere Grenze keine Copula.

10.3. Paar-Abhängigkeitsmasse

10.3.1. Lineare Korrelation

Seien X, Y zwei Zufallsvariablen, so dass $\mathbb{E}[X^2 + Y^2] < \infty$. Die Kovarianz ist $\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$, die Varianz $\text{Var}[X] = \text{Cov}[X, X]$. Die Korrelation ist definiert als

$$\text{Cor}[X, Y] = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]}}.$$

Dies ist ein klassisches Mass für die Abhängigkeit zwischen zwei Variablen, und es gilt $\text{Cor}[X, Y] \in [-1, 1]$.

Hilfssatz 10.8. Seien X, Y positive Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilung $F(x, y)$. Dann ist

$$\mathbb{E}[XY] = \int_0^\infty \int_0^\infty 1 - F_X(x) - F_Y(y) + F(x, y) \, dx \, dy.$$

Damit wird die Korrelation maximal für komonotone Variablen und minimal für kontramomonotone Variablen.

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= \int_0^\infty \int_0^\infty xy F(dx, dy) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^x dv \int_0^y dw F(dx, dy) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty 1 - F_X(v) - F_Y(w) + F(v, w) \, dv \, dw. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Formel für $\mathbb{E}[XY]$. Halten wir F_X und F_Y fest, so wird der Ausdruck extremal für die extremalen Copulas. \square

Die (lineare) Korrelation bildet kein gutes Abhängigkeitsmass.

Beispiel 10.9. Sei X exponentialverteilt mit Parameter 1. Wir setzen $X_1 = X$ und $X_2 = X^2$. Dann hat X_1 die Varianz 1, X_2 die Varianz 20. Die Kovarianz ist 4. Somit ist die Korrelation $4/\sqrt{20} \approx 0.8944$. Obwohl die Variablen perfekt abhängig sind, ist die Korrelation nicht 1, wie die Korrelation zwischen X und X . Betrachten wir $X_3 = X^4$, so erhält man das Paar (X_2, X_3) durch Quadrieren aus (X_1, X_2) . Die Varianz von X_3 ist 39744, die Kovarianz von X_2 und X_3 ist 672. Dies ergibt die Korrelation $672/\sqrt{794880} \approx 0.7537$. Obwohl die Abhängigkeit die gleiche ist, sind die Korrelationen unterschiedlich.

Betrachten wir die Variable $Z = -\log(1 - e^{-X})$. Dann hat Z die Verteilung

$$\mathbb{P}[Z \leq z] = \mathbb{P}[1 - e^{-X} \geq e^{-z}] = \mathbb{P}[X \geq -\log(1 - e^{-z})] = e^{\log(1 - e^{-z})} = 1 - e^{-z}.$$

Somit ist auch Z exponentialverteilt. Für die Kovarianz erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XZ] &= - \int_0^\infty x \log(1 - e^{-x}) e^{-x} dx = \int_0^1 \log z \log(1 - z) dz \\ &= - \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} \int_0^1 z^k \log z dz = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)} \int_0^1 z^{k+1} \frac{1}{z} dz = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} = 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = 0.3551. \end{aligned}$$

Somit haben wir die Kovarianz und Korrelation -0.6449 . Obwohl wir hier perfekte negative Abhängigkeit haben, wird die Korrelation nicht -1 . ■

Hilfssatz 10.10. *Haben X und Y Korrelation 1 oder -1 , so gilt*

$$Y = \mathbb{E}[Y] + \frac{\sqrt{\text{Var}[Y]}}{\sqrt{\text{Var}[X]}} \text{Cor}[X, Y](X - \mathbb{E}[X]).$$

Beweis. Wir können annehmen, dass $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left(Y - \frac{\sqrt{\text{Var}[Y]}}{\sqrt{\text{Var}[X]}} \text{Cor}[X, Y]X\right)^2\right] \\ &= \text{Var}[Y] - 2 \frac{\sqrt{\text{Var}[Y]}}{\sqrt{\text{Var}[X]}} \text{Cor}[X, Y] \text{Cov}[X, Y] + \frac{\text{Var}[Y]}{\text{Var}[X]} \text{Var}[X] \\ &= \text{Var}[Y] - 2 \frac{\sqrt{\text{Var}[Y]}}{\sqrt{\text{Var}[X]}} \text{Cor}[X, Y]^2 \sqrt{\text{Var}[X] \text{Var}[Y]} + \text{Var}[Y] = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

10.3.2. Kendalls Tau

Definition 10.11. Sei (\tilde{X}, \tilde{Y}) eine unabhängige Kopie von (X, Y) . Kendalls Tau ist definiert als

$$\rho_\tau(X, Y) = \mathbb{P}[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0] - \mathbb{P}[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0] .$$

Da $F_X(X)$ und $F_Y(Y)$ streng steigende Transformationen der Zufallsvariablen sind, haben wir

$$\begin{aligned} \rho_\tau(X, Y) &= \mathbb{P}[(F_X(X) - F_X(\tilde{X}))(F_Y(Y) - F_Y(\tilde{Y})) > 0] \\ &\quad - \mathbb{P}[(F_X(X) - F_X(\tilde{X}))(F_Y(Y) - F_Y(\tilde{Y})) < 0] . \end{aligned}$$

Kendalls Tau ist somit invariant unter streng steigenden Transformationen. Insbesondere, wenn die Randverteilungen stetig sind, hängt die Grösse nur von der Copula ab. Wir haben für Kendalls Tau die folgende Formel.

Hilfssatz 10.12. Haben X und Y stetige Randverteilungen und die Copula $C(x, y)$, so gilt die Formel

$$\rho_\tau(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(x, y) C(dx, dy) - 1 .$$

Insbesondere ist $\rho_\tau(X, Y) \in [-1, 1]$, und $\rho_\tau(X, Y) = 1$, genau dann, wenn X und Y komonoton sind, und $\rho_\tau(X, Y) = -1$, genau dann, wenn X und Y kontramonoton sind.

Beweis. Durch die Transformation mit F_X beziehungsweise F_Y können wir annehmen, dass X und Y auf $(0, 1)$ gleichverteilte Randverteilungen haben. Wir bemerken, dass $\mathbb{P}[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0] = 1 - \mathbb{P}[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0]$, also

$$\rho_\tau(X, Y) = 2\mathbb{P}[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0] - 1 .$$

Weiter haben wir $\mathbb{P}[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0] = \mathbb{P}[X > \tilde{X}, Y > \tilde{Y}] + \mathbb{P}[X < \tilde{X}, Y < \tilde{Y}]$ und $\mathbb{P}[X > \tilde{X}, Y > \tilde{Y}] = \mathbb{P}[X < \tilde{X}, Y < \tilde{Y}]$. Also benötigen wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X > \tilde{X}, Y > \tilde{Y}] &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{P}[\tilde{X} < x, \tilde{Y} < y] C(dx, dy) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 C(x, y) C(dx, dy) , \end{aligned}$$

woraus die Formel folgt.

Aus der Definition folgt wegen $\mathbb{P}[A] \in [0, 1]$, dass $\rho_\tau(X, Y) \in [-1, 1]$. Wir erhalten die Grenze

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 C(x, y) C(dx, dy) &\leq \int_0^1 \int_0^1 \min\{x, y\} C(dx, dy) = \mathbb{E}[\min\{X, Y\}] \\ &\leq \mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Um den Wert $\rho_\tau(X, Y) = 1$ zu erhalten, muss Gleichheit gelten, insbesondere $C(x, y) = \min(x, y)$, also Komonotonie. Für $X = Y$ gilt in der Tat auch das zweite Gleichheitszeichen. Verwenden wir die untere Grenze,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 C(x, y) C(dx, dy) &\geq \int_0^1 \int_0^1 \max\{x + y - 1, 0\} C(dx, dy) \\ &= \mathbb{E}[\max\{X + Y - 1, 0\}] \geq \mathbb{E}[X + Y - 1] = 0. \end{aligned}$$

Somit kann $\rho_\tau(X, Y) = -1$ nur gelten, falls Gleichheit gilt, also $C(x, y) = \max\{x + y - 1, 0\}$, das heisst, Kontramonotonie. Für $Y = 1 - X$ gilt in der Tat auch das zweite Gleichheitszeichen. \square

10.3.3. Spearmans Rho

Definition 10.13. Die Korrelation $\rho_\rho(X, Y) = \text{Cor}[F_X(X), F_Y(Y)]$ heisst *Spearmans Rho*.

Nach der Definition ist auch Spearmans Rho invariant unter streng wachsenden Transformationen. Es gilt

Hilfssatz 10.14. Haben X und Y stetige Randverteilungen und die Copula $C(x, y)$, so gilt

$$\rho_\rho(X, Y) = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(x, y) dy dx - 3.$$

Wir haben $\rho_\rho(X, Y) \in [-1, 1]$, und $\rho_\rho(X, Y) = 1$, genau dann, wenn X und Y komonoton sind, und $\rho_\rho(X, Y) = -1$ genau dann, wenn X und Y kontramonoton sind.

Beweis. Wir haben, dass $F_X(X)$ und $F_Y(Y)$ auf $(0, 1)$ gleichverteilt sind. Somit haben beide Variablen die Varianz $1/12$ und den Mittelwert $\frac{1}{2}$. Nach Hilfssatz 10.8 haben wir

$$\mathbb{E}[F_X(X)F_Y(Y)] = \int_0^1 \int_0^1 (1 - u - v + C(u, v)) dv du = \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dv du.$$

Dies beweist die Formel. Da die Korrelation in $[-1, 1]$ liegt, muss auch $\rho_\rho(X, Y)$ in diesem Bereich liegen. Die Extremwerte haben wir nach Hilfssatz 10.10 genau dann, wenn $F_Y(Y) = \frac{1}{2} + \rho_\rho(X, y)(F_X(X) - \frac{1}{2})$. Beim Wert 1, also $F_Y(Y) = F_X(X)$, beim Wert -1 also $F_Y(Y) = 1 - F_X(X)$. Dies ist Komonotonie beziehungsweise Kontramonotonie. \square

10.3.4. Flankenabhängigkeiten

In der Finanz- oder Versicherungsmathematik hat man mit der Abhängigkeit oft folgendes Problem. Wenn ein Portfolio ein Extremereignis aufweist, so hat man oft mit einer hohen Wahrscheinlichkeit ein Extremereignis auch in anderen Portfolios. Daher betrachtet man die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[F_Y(Y) > u \mid F_X(X) > u]$ und $\mathbb{P}[F_Y(Y) \leq u \mid F_X(X) \leq u]$. Hier transformiert man die Variablen, um gleich extreme Ereignisse betrachten zu können. Die Grösse

$$t_o = \lim_{u \rightarrow 1} \mathbb{P}[F_Y(Y) > u \mid F_X(X) > u] = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}$$

heisst **oberer Flankenabhängigkeitsindex**, falls der Grenzwert existiert. Die Variablen X und Y heissen **unabhängig in der oberen Flanke**, falls $t_o = 0$. Analog heisst

$$t_u = \lim_{u \rightarrow 0} \mathbb{P}[F_Y(Y) \leq u \mid F_X(X) \leq u] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}$$

unterer Flankenabhängigkeitsindex, falls der Grenzwert existiert. Die Variablen X und Y heissen **unabhängig in der unteren Flanke**, falls $t_u = 0$.

Beispiel 10.15. Betrachten wir eine bivariate Normalverteilung. Da monotone Abbildungen die Copula nicht verändern, können wir annehmen, dass die Randverteilungen standard normalverteilt sind. Wir können $Y = \rho X + \sqrt{1 - \rho^2}Z$ setzen, wobei X, Z unabhängige standard normalverteilte Variablen sind und ρ den Korrelationskoeffizienten bezeichnet. Wir betrachten nur den Fall $|\rho| < 1$. Wir suchen dann

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{P}[\rho X + \sqrt{1 - \rho^2}Z > u, X > u]}{\mathbb{P}[X > u]} = \frac{\int_u^\infty \Phi(-(u - \rho x)/\sqrt{1 - \rho^2})\phi(x) dx}{1 - \Phi(u)}.$$

Ist $\rho \leq 0$, so können wir die rechte Seite durch $\Phi(-(1 - \rho)u/\sqrt{1 - \rho^2})$ abschätzen.

Somit ist $t_o = 0$. Sei $\rho > 0$ und $u' = \frac{1+\rho}{2\rho}u > u$. Wir erhalten dann die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \int_u^\infty \Phi\left(-\frac{u-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \phi(x) \, dx \\ &= \int_u^{u'} \Phi\left(-\frac{u-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \phi(x) \, dx + \int_{u'}^\infty \Phi\left(-\frac{u-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \phi(x) \, dx \\ &\leq \Phi\left(-\frac{u-\rho u'}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) (\Phi(u') - \Phi(u)) + \Phi(-u') . \end{aligned}$$

Da $u - \rho u' = \frac{1-\rho}{2}u$, konvergiert

$$\frac{\Phi\left(-\frac{u-\rho u'}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) (\Phi(u') - \Phi(u))}{1 - \Phi(u)} \leq \Phi\left(-\frac{1-\rho}{2\sqrt{1-\rho^2}}u\right)$$

nach 0. Weiter konvergiert nach der Regel von Bernoulli-Hôpital

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1 - \Phi\left(\frac{1+\rho}{2\rho}u\right)}{1 - \Phi(u)} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(1+\rho)\phi\left(\frac{1+\rho}{2\rho}u\right)}{2\rho\phi(u)} \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1+\rho}{2\rho} \exp\left\{-\left(\frac{(1+\rho)^2}{4\rho^2} - 1\right)\frac{u^2}{2}\right\} = 0 . \end{aligned}$$

Somit ist $t_o = 0$. Wegen der Symmetrie folgt auch $t_u = 0$. Also hat die Normalverteilung keine Abhängigkeit in den Flanken. ■

Beispiel 10.16. Seien Z_1, Z_2, \dots, Z_d iid, $X = \max\{Z_1, \dots, Z_d\}$ das Maximum, und Y sei die zweitgrösste Variable. Wir nehmen an, dass die Verteilung von Z_k stetig sei. Da wir uns nur für die Copula interessieren, können wir annehmen, dass Z_k gleichverteilt auf $(0, 1)$ ist. Die Verteilung von X ist dann x^d , die Verteilung von Y ist $v^d + dv^{d-1}(1-v)$. Kennen wir X , so sind die restlichen Variablen auf $(0, X)$ gleichverteilt. Das heisst, die Verteilung von Y bedingt auf X ist $(x/X)^{d-1}$ für $x \in (0, X)$. Sei $v_u \in (0, u)$ die Lösung von $v^d + dv^{d-1}(1-v) = u^d$. Damit ist $v_u < u$ und

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[Y > v_u \mid X > u] &= \frac{1}{1-u^d} \int_u^1 [1 - (v_u/x)^{d-1}] dx^{d-1} \, dx = 1 - \frac{dv_u^{d-1}(1-u)}{1-u^d} \\ &= 1 - \frac{d}{1+u+\dots+u^{d-1}} v_u^{d-1} . \end{aligned}$$

Da v_u für $u \rightarrow 1$ gegen 1 konvergiert, erhalten wir den oberen Flankenindex 0. Das bedeutet, dass der grösste und zweitgrösste Wert in der oberen Flanke nicht abhängig sind.

Für die untere Flanke erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[Y \leq v_u \mid X \leq u] &= u^{-d} \left[v_u^d + \int_{v_u}^u \left(\frac{v_u}{x} \right)^{d-1} dx^{d-1} dx \right] = \frac{v_u^d + dv_u^{d-1}(u - v_u)}{u^d} \\ &= 1 - d(1 - u) \frac{v_u^{d-1}}{u^d} = 1 - d(1 - u) \frac{v_u^{d-1}}{v_u^d + dv_u^{d-1}(1 - v_u)} \\ &= 1 - (1 - u) \frac{d}{v_u + d(1 - v_u)} ,\end{aligned}$$

wobei wir zweimal die Definition von v_u verwendet haben. Lassen wir $u \rightarrow 0$, geht auch $v_u \rightarrow 0$, und wir erhalten ebenfalls, dass die beiden grössten Werte auch in der unteren Flanke unabhängig sind. ■

10.4. Elliptische Verteilungen

Definition 10.17. Eine Verteilungsfunktion F einer Variable $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ heisst **sphärisch**, falls für jede orthogonale Matrix $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ der Vektor \mathbf{UX} auch die Verteilung F hat.

Wir haben die folgenden äquivalenten Definitionen.

Hilfssatz 10.18. Sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ eine d -dimensionale Zufallsvariable mit charakteristischer Funktion $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) = \mathbb{E}[e^{i\mathbf{r}^\top \mathbf{X}}]$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) \mathbf{X} hat eine sphärische Verteilung.
- ii) Es existiert eine Funktion $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) = \psi(\|\mathbf{r}\|_2^2)$.
- iii) Für alle $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ gilt $\mathbf{a}^\top \mathbf{X} \stackrel{d}{=} \|\mathbf{a}\|_2 X_1$.

Beweis. “i) \Rightarrow ii)” Sei \mathbf{U} orthonormal. Dann gilt

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) = \varphi_{\mathbf{UX}}(\mathbf{r}) = \mathbb{E}[e^{i\mathbf{r}^\top \mathbf{UX}}] = \mathbb{E}[e^{i(\mathbf{U}^\top \mathbf{r})^\top \mathbf{X}}] = \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{U}^\top \mathbf{r}) .$$

Dies bedeutet, dass $\varphi_{\mathbf{X}}$ nur von der Länge von \mathbf{r} abhängen kann, und damit eine Funktion von $\|\mathbf{r}\|$ ist.

“ii) \Rightarrow iii)” Für einen Vektor \mathbf{a} erhalten wir

$$\varphi_{\mathbf{a}^\top \mathbf{X}}(r) = \mathbb{E}[e^{i r \mathbf{a}^\top \mathbf{X}}] = \varphi_{\mathbf{X}}(r \mathbf{a}) = \psi(r^2 \|\mathbf{a}\|_2^2) .$$

Wählen wir $\mathbf{a} = (\|a\|_2, 0, \dots, 0)^\top$, so erhalten wir den gleichen Ausdruck. Dies beweist, dass $\mathbf{a}^\top \mathbf{X}$ und $\|a\|_2 X_1$ die gleiche Verteilung haben.

“iii) \Rightarrow i)” Sei \mathbf{U} orthogonal. Dann haben wir

$$\varphi_{\mathbf{U}\mathbf{X}}(\mathbf{r}) = \mathbb{E}[e^{i\mathbf{r}^\top \mathbf{U}\mathbf{X}}] = \mathbb{E}[e^{i(\mathbf{U}^\top \mathbf{r})^\top \mathbf{X}}] = \varphi_{X_1}(\|\mathbf{U}^\top \mathbf{r}\|_2) = \varphi_{X_1}(\|\mathbf{r}\|_2) = \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}).$$

Somit haben $\mathbf{U}\mathbf{X}$ und \mathbf{X} die selbe Verteilung. \square

Wir nennen die Funktion ψ den **charakteristischen Generator** der sphärischen Verteilung und schreiben $\mathbf{X} \sim S_d(\psi)$.

Beispiel 10.19. Betrachten wir die Normalverteilung, und nehmen wir an, die Verteilung sei sphärisch. Da $\mathbf{a}^\top \mathbf{X} \stackrel{d}{=} \|a\|_2 X_1$ für alle \mathbf{a} , muss $-X_k$ und X_k die gleiche Verteilung wie X_1 haben. Das ist nur möglich, falls alle X_k Mittelwert 0 und die selbe Varianz σ^2 haben. Wählen wir α, β , so dass $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Dann ist auch $\alpha X_k + \beta X_\ell \stackrel{d}{=} X_1$. Insbesondere erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{Var}[X_1] = \text{Var}[\alpha X_k + \beta X_\ell] = \alpha^2 \sigma^2 + \beta^2 \sigma^2 + 2\alpha\beta \text{Cov}[X_k, X_\ell] \\ &= \sigma^2 + 2\alpha\beta \text{Cov}[X_k, X_\ell]. \end{aligned}$$

Somit muss also $\text{Cov}[X_k, X_\ell] = 0$ gelten, und die Koordinaten sind unabhängig. Die charakteristische Funktion wird $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) = \exp\{-\frac{1}{2}\sigma^2\|\mathbf{r}\|_2^2\}$. Dies hängt nur von $\|\mathbf{r}\|_2$ ab, und die Verteilung ist sphärisch. \blacksquare

Da die Verteilung unter orthogonalen Abbildungen invariant ist, müssen alle Richtungen gleich wahrscheinlich sein. Dies wollen wir nun beweisen.

Proposition 10.20. *Eine Verteilung ist genau dann sphärisch, wenn sich $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} R\mathbf{S}$, wobei $R \geq 0$ und \mathbf{S} auf der Einheitssphäre gleichverteilt und unabhängig von R ist.*

Beweis. Ist \mathbf{U} orthogonal, so ist auch $\mathbf{U}\mathbf{S}$ auf der Sphäre gleichverteilt, und damit $\mathbf{U}R\mathbf{S} = R\mathbf{U}\mathbf{S} \stackrel{d}{=} R\mathbf{U}$. Damit hat $R\mathbf{U}$ eine sphärische Verteilung.

Habe nun \mathbf{X} eine sphärische Verteilung, Wir setzen $R = \|\mathbf{X}\|_2$ und \mathbf{S} ein von \mathbf{X} unabhängiger auf der Einheitssphäre \mathcal{S} gleichverteilter Vektor. Da die Verteilung von \mathbf{S} sphärisch ist, ist $\mathbb{E}[e^{i\mathbf{r}^\top \mathbf{S}}] = \psi_d(\|\mathbf{r}\|_2^2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) &= \psi(\|\mathbf{r}\|_2^2) = \int_{\mathcal{S}} \psi(\|\mathbf{r}\|_2^2) dF_{\mathbf{S}}(\mathbf{s}) = \int_{\mathcal{S}} \psi(\|\mathbf{r}\|_2^2 \|\mathbf{s}\|_2^2) dF_{\mathbf{S}}(\mathbf{s}) \\ &= \int_{\mathcal{S}} \mathbb{E}[e^{i\|\mathbf{r}\|_2 \mathbf{s}^\top \mathbf{X}}] dF_{\mathbf{S}}(\mathbf{s}) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{i\|\mathbf{r}\|_2 \mathbf{s}^\top \mathbf{X}} \mid \mathbf{S}]] = \mathbb{E}[e^{i\|\mathbf{r}\|_2 \mathbf{S}^\top \mathbf{X}}] \\ &= \mathbb{E}[e^{i\|\mathbf{r}\|_2 \mathbf{X}^\top \mathbf{S}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{i\|\mathbf{r}\|_2 \mathbf{X}^\top \mathbf{S}} \mid \mathbf{X}]] = \mathbb{E}[\psi_d(\|\mathbf{r}\|_2^2 \|\mathbf{X}\|_2^2)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\psi_d(\|\mathbf{r}\|_2^2 R^2) \mid R]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{i\mathbf{r}^\top R\mathbf{S}} \mid R]] = \mathbb{E}[e^{i\mathbf{r}^\top R\mathbf{S}}]. \end{aligned}$$

Somit haben \mathbf{X} und $R\mathbf{S}$ die gleiche Verteilung. \square

Wir verallgemeinern nun die Verteilung.

Definition 10.21. Eine Verteilung eines Vektors \mathbf{X} heisst **elliptisch**, falls es einen sphärisch verteilten Vektor $\mathbf{Y} \sim S_d(\psi)$, eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und einen Vektor $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$ gibt, so dass $\mathbf{X} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\mathbf{Y}$. Wir schreiben $\mathbf{X} \sim E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \psi)$, wobei $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}\mathbf{A}^\top$.

Die Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ heisst **Dispersionsmatrix**.

Berechnen wir die charakteristische Funktion von \mathbf{X} , so erhalten wir

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{r}) = \mathbb{E}[e^{i\mathbf{r}^\top(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}\mathbf{Y})}] = e^{i\mathbf{r}^\top\boldsymbol{\mu}} \mathbb{E}[e^{i(\mathbf{A}^\top\mathbf{r})^\top\mathbf{Y}}] = e^{i\mathbf{r}^\top\boldsymbol{\mu}} \psi(\mathbf{r}^\top \mathbf{A}\mathbf{A}^\top \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{r}^\top\boldsymbol{\mu}} \psi(\mathbf{r}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{r}).$$

Wir bemerken, dass die Parameter nicht eindeutig sind. So hat $E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \psi(\cdot))$ auch die Darstellung $E(\boldsymbol{\mu}, \frac{1}{c}\boldsymbol{\Sigma}, \psi(c \cdot))$ für jede Konstante $c > 0$.

Hilfssatz 10.22. Existieren die zweiten Momente, so können wir eine Darstellung wählen, bei der $\boldsymbol{\Sigma}$ die Kovarianzmatrix ist.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ annehmen. Leiten wir die charakteristische Funktion zweimal ab, so erhalten wir wegen der Symmetrie von $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\frac{d^2}{d\mathbf{r}^2} \psi(\mathbf{r}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{r}) = \frac{d}{d\mathbf{r}} 2\mathbf{r}^\top \boldsymbol{\Sigma} \psi'(\mathbf{r}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\Sigma} \psi'(\mathbf{r}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{r}) + 4\mathbf{r}\mathbf{r}^\top \boldsymbol{\Sigma} \psi''(\mathbf{r}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{r}).$$

Setzen wir $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, erhalten wir $2\boldsymbol{\Sigma}\psi'(\mathbf{0})$. Normen wir ψ , so dass $\psi'(\mathbf{0}) = -\frac{1}{2}$, so ist $\boldsymbol{\Sigma}$ die Kovarianzmatrix. \square

Die folgende Aussage folgt sofort aus der Darstellung $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{A}R\mathbf{S}$.

Hilfssatz 10.23. Sei $\mathbf{X} \sim E(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \psi)$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Dann ist $\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{X} \sim E(\mathbf{B}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{B}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{B}^\top, \psi)$. \square

Die Summe zweier elliptisch verteilter Variablen mit der gleichen Dispersionsmatrix ist wieder elliptisch.

Hilfssatz 10.24. Seien $\mathbf{X} \sim (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}, \psi_1)$ und $\mathbf{Y} \sim (\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}, \psi_2)$ unabhängig und seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist $a\mathbf{X} + b\mathbf{Y} \sim E(a\boldsymbol{\mu}_1 + b\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}, \bar{\psi})$ mit $\bar{\psi}(x) = \psi_1(a^2x)\psi_2(b^2x)$.

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass die Dislokationsparameter $\boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2 = \mathbf{0}$ verschwinden. Da die charakteristische Funktion nur von $\boldsymbol{\Sigma}$ abhängt, können wir annehmen, dass \mathbf{Y} mit der gleichen Matrix \mathbf{A} erzeugt wurde. Damit ist mit der sphärischen Darstellung

$$a\mathbf{X} + b\mathbf{Y} = \mathbf{A}(aR_1\mathbf{S}_1 + bR_2\mathbf{S}_2) .$$

Wir zeigen zuerst, dass $aR_1\mathbf{S}_1 + bR_2\mathbf{S}_2$ sphärisch ist. Sei \mathbf{U} eine orthogonale Matrix. Dann ist

$$\mathbf{U}(aR_1\mathbf{S}_1 + bR_2\mathbf{S}_2) = aR_1\mathbf{U}\mathbf{S}_1 + bR_2\mathbf{U}\mathbf{S}_2 \stackrel{d}{=} aR_1\mathbf{S}_1 + bR_2\mathbf{S}_2 ,$$

und damit sphärisch. Der Generator wird

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\|\mathbf{r}\|_2^2) &= \mathbb{E}[e^{i\mathbf{r}^\top(aR_1\mathbf{S}_1 + bR_2\mathbf{S}_2)}] = \mathbb{E}[e^{i(ar)^\top R_1\mathbf{S}_1}] \mathbb{E}[e^{i(br)^\top R_2\mathbf{S}_2}] \\ &= \psi_1(a^2\|\mathbf{r}\|_2^2) \psi_2(b^2\|\mathbf{r}\|_2^2) , \end{aligned}$$

was die Aussage beweist. □

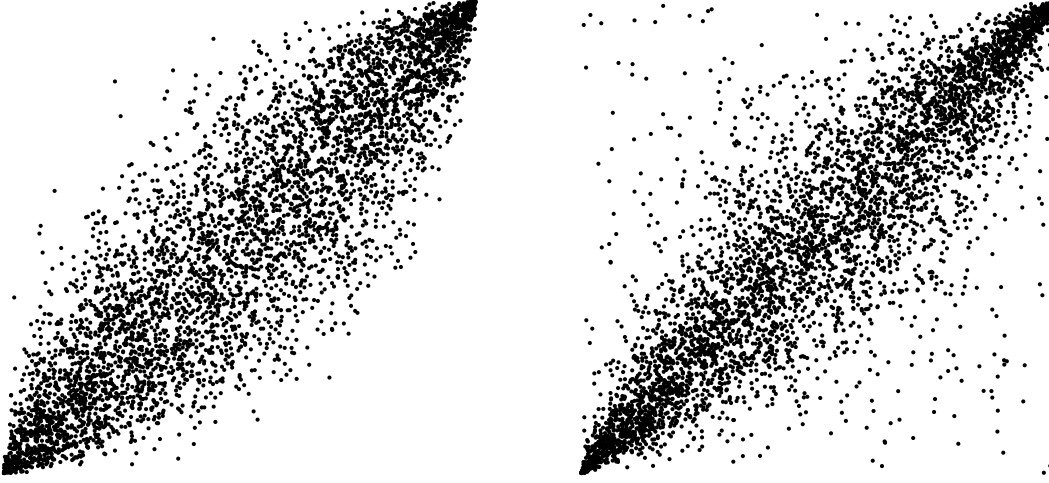
Definition 10.25. Die Copula, die von einer elliptischen Verteilung erzeugt wird, heisst **elliptische Copula**.

Abbildung 10.1 zeigt je 5000 Punkte der Copula zweier elliptischer Verteilungen. Für die linke Grafik wurde die Copula erzeugt von einer bivariaten Gauss-Verteilung verwendet, für die rechte Grafik die Copula erzeugt durch eine bivariate t -Verteilung. Bei der Gauss-Verteilung sehen wir, dass es weniger Punkte in den Ecken bei $(1, 0)$ und $(0, 1)$ gibt als bei der t -Verteilung. Die Spitzen in den Ecken bei $(0, 0)$ und $(1, 1)$ sind bei der t -Verteilung spitzer. Das deutet darauf hin, dass bei der t -Verteilung öfters Extrema gleichzeitig in beide Variablen auftreten.

Hilfssatz 10.26. Sei $\mathbf{X} \sim E_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}, \psi)$ und $\mathbb{P}[X_1 X_2 = 0] = 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}[X_1 > 0, X_2 > 0] = \frac{1}{4} + \frac{\arcsin \rho}{2\pi} ,$$

wobei $\rho = \sigma_{12}/\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}$.

Abbildung 10.1: Gauss- und t -Copula

Beweis. Da σ_{ii} die Länge des i -ten Zeilenvektors von \mathbf{A} ist, muss $\sigma_{ii} > 0$ sein, da sonst $X_i = 0$ folgen würde. Sei $\mathbf{B} = \text{diag}((\sqrt{\sigma_{11}})^{-1}, (\sqrt{\sigma_{22}})^{-1})$ und $\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{X}$. Dann ist $\mathbb{P}[Y_1 > 0, Y_2 > 0] = \mathbb{P}[X_1 > 0, X_2 > 0]$, und $\mathbf{Y} \sim E_2(\mathbf{0}, \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}, \psi)$. Wir haben

$$\mathbf{P} = \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir dürfen daher annehmen, dass $\Sigma = \mathbf{P}$. Wir dürfen weiter annehmen, dass

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix},$$

da $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \mathbf{P}$. Wir haben nun die Darstellung $\mathbf{X} = \mathbf{A}R(\cos \theta, \sin \theta)^\top$, wobei θ auf $(-\pi, \pi)$ gleichverteilt ist. Setzen wir $\phi = \arcsin \rho \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, so haben wir,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 > 0, X_2 > 0] &= \mathbb{P}[\cos \theta > 0, \rho \cos \theta + \sqrt{1 - \rho^2} \sin \theta > 0] \\ &= \mathbb{P}[|\theta| < \tfrac{1}{2}\pi, \sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta > 0] = \mathbb{P}[|\theta| < \tfrac{1}{2}\pi, \sin[\phi + \theta] > 0] \\ &= \mathbb{P}[|\theta| < \tfrac{1}{2}\pi, 0 < \phi + \theta < \pi] = \mathbb{P}[-\phi < \theta < \tfrac{1}{2}\pi] = \tfrac{1}{4} + \frac{\rho}{2\pi}. \end{aligned}$$

□

Wir können nun Kendalls Tau für elliptische Verteilungen berechnen.

Proposition 10.27. Sei $\mathbf{X} \sim E_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \psi)$ und sei $\mathbb{P}[X_1 X_2 = 0] = 0$. Dann ist Kendalls Tau

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho,$$

wobei $\rho = \sigma_{12} / \sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}$.

Beweis. Setzen wir $\mathbf{Y} = \mathbf{X} - \tilde{\mathbf{X}}$ für eine unabhängige Kopie $\tilde{\mathbf{X}}$ von \mathbf{X} , so ist $\mathbf{Y} \sim E_2(\mathbf{0}, \Sigma, \psi^2)$ verteilt. Wie in Hilfsatz 10.26 dürfen wir $\Sigma = \mathbf{P}$ oder

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sqrt{1+\rho} + \sqrt{1-\rho}) & \frac{1}{2}(\sqrt{1+\rho} - \sqrt{1-\rho}) \\ \frac{1}{2}(\sqrt{1+\rho} - \sqrt{1-\rho}) & \frac{1}{2}(\sqrt{1+\rho} + \sqrt{1-\rho}) \end{pmatrix}$$

wählen. Wegen der Symmetrie ist $\mathbb{P}[Y_1 Y_2 > 0] = \mathbb{P}[Y_1 > 0, Y_2 > 0] + \mathbb{P}[Y_1 < 0, Y_2 < 0] = 2\mathbb{P}[Y_1 > 0, Y_2 > 0]$, und damit $\rho_\tau = 4\mathbb{P}[Y_1 > 0, Y_2 > 0] - 1$. Somit folgt die Formel aus Hilfssatz 10.26. \square

Um den Index der Flankenabhängigkeit zu berechnen, benötigen wir für $u > 0$

$$\mathbb{P}[X > u, Y > u] = \mathbb{P}[R \cos \theta > u, \rho R \cos \theta + \sqrt{1-\rho^2} R \sin \theta > u] .$$

Der Fall $\rho = 1$ ergibt den Flankenindex $t_o = t_u = 1$, der Fall $\rho = -1$ den Flankenindex $t_o = t_u = 0$. Wir nehmen nun $|\rho| < 1$ an. Wir setzen $\phi = \arcsin \rho \in (-\pi/2, \pi/2)$, so dass

$$\mathbb{P}[X > u, Y > u] = \mathbb{P}[R \cos \theta > u, R \sin(\theta + \phi) > u] .$$

Ist $u > 0$, so muss $\theta \in (-\pi/2, \pi/2) \cap (-\phi, \pi - \phi)$ liegen, also $\theta \in (-\phi, \pi/2)$. Es ist $\sin(\theta + \phi) < \cos \theta$ für $\theta \in (-\phi, \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2})$ und $\sin(\theta + \phi) > \cos \theta$ für $\theta \in (\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Also erhalten wir aus Symmetriegründen

$$\mathbb{P}[X > u, Y > u] = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/4-\phi/2}^{\pi/2} \mathbb{P}[R \cos \vartheta > u] d\vartheta .$$

Für den Flankenindex erhalten wir dann

$$t_o = t_u = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_{\pi/4-\phi/2}^{\pi/2} (1 - F_R(u/\cos \vartheta)) d\vartheta}{\int_0^{\pi/2} (1 - F_R(u/\cos \vartheta)) d\vartheta} ,$$

wobei $F_R(r)$ die Verteilungsfunktion des Radiusses der zugrundeliegenden sphärischen Verteilung bezeichnet.

Beispiel 10.28. Bei der bivariaten t -Verteilung hat R die Dichte

$$f_R(r) = \frac{r}{(1 + r^2/\nu)^{1+\nu/2}} .$$

Damit ist $F_R(r) = 1 - (1 + r^2/\nu)^{-\nu/2}$ regulär variierend mit Index $-\nu$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} t_o = t_u &= \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_{\pi/4-\phi/2}^{\pi/2} (1 - F_R(u/\cos \vartheta)) d\vartheta}{\int_0^{\pi/2} (1 - F_R(u/\cos \vartheta)) d\vartheta} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\int_{\pi/4-\phi/2}^{\pi/2} \frac{1 - F_R(u/\cos \vartheta)}{1 - F_R(u)} d\vartheta}{\int_0^{\pi/2} \frac{1 - F_R(u/\cos \vartheta)}{1 - F_R(u)} d\vartheta} \\ &= \frac{\int_{\pi/4-\phi/2}^{\pi/2} (\cos \vartheta)^\nu d\vartheta}{\int_0^{\pi/2} (\cos \vartheta)^\nu d\vartheta} = \frac{2\Gamma(1 + \nu/2) \int_{\pi/4-\phi/2}^{\pi/2} (\cos \vartheta)^\nu d\vartheta}{\sqrt{\pi} \Gamma((1 + \nu)/2)} . \end{aligned}$$



10.5. Archimedische Copulas

Sei $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ eine stetige streng fallende Funktion mit $\phi(1) = 0$. Wir erweitern die Inverse, indem wir $\phi^{-1}(t) = 0$ setzen, falls $t > \phi(0)$. Die Inverse ist dann stetig und fallend auf $[0, \infty)$, und $\phi^{-1}(\phi(u)) = u$. Ist $t < \phi(0)$, so ist auch $\phi(\phi^{-1}(t)) = t$. Wir definieren nun eine Funktion

$$C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1], \quad \mathbf{u} \mapsto \phi^{-1}\left(\sum_{k=1}^d \phi(u_k)\right). \quad (10.2)$$

Setzen wir $u_k = 0$, dann ist $\sum_{k=1}^d \phi(u_k) \geq \phi(0)$, und daher $C(\mathbf{u}) = 0$. Setzen wir $u_\ell = 1$ für $\ell \neq k$, so ist $\sum_{\ell=1}^d \phi(u_\ell) = \phi(u_k)$, und damit $C(\mathbf{u}) = u_k$. Wenn es sich bei der Funktion C und eine Verteilungsfunktion handelt, dann ist C eine Copula.

Definition 10.29. Eine Verteilungsfunktion C von der Form (10.2) heisst **archimedische Copula**, und ϕ heisst **Generator** der Copula. Ist $\phi(0) = \infty$, so heisst ϕ **striker Generator** und C heisst **strikte Copula**.

Betrachten wir zuerst den Fall $d = 2$.

Hilfssatz 10.30. Für $d = 2$ ist (10.2) genau dann eine Copula, falls ϕ konvex ist.

Beweis. C ist genau dann eine Copula, wenn

$$C(b_1, b_2) - C(b_1, a_2) - C(a_1, b_2) + C(a_1, a_2) \geq 0,$$

also

$$\phi^{-1}(\phi(a_1) + \phi(a_2)) - \phi^{-1}(\phi(b_1) + \phi(a_2)) \geq \phi^{-1}(\phi(a_1) + \phi(b_2)) - \phi^{-1}(\phi(b_1) + \phi(b_2)).$$

Wir bemerken, dass $\phi(a_1) \geq \phi(b_1)$ und $\phi(a_2) \geq \phi(b_2)$. Somit ist C eine Copula, genau dann, wenn

$$\phi^{-1}(x) - \phi^{-1}(x + z) \geq \phi^{-1}(y) - \phi^{-1}(y + z)$$

für alle $0 \leq x \leq y \leq y + z$. Letzere Bedingung gilt für eine fallende Funktion ϕ^{-1} genau dann, wenn ϕ^{-1} konvex ist. Die Funktion ϕ^{-1} ist genau dann konvex, wenn ϕ konvex ist. \square

Ist $d > 2$, so brauchen wir stärkere Bedingungen.

Satz 10.31. *Nehmen wir an, ϕ sei d Mal differenzierbar. Dann ist C genau dann eine Copula, falls $(-1)^k(\phi^{-1})^{(k)}(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, 1]$ und $k \leq d$.*

Beweis. Ist ϕ d Mal differenzierbar, so ist auch ϕ^{-1} d Mal differenzierbar. Dann hat C (formal) eine Dichte,

$$\left(\phi^{-1}\left(\sum_{k=1}^d \phi(u_k)\right)\right)^{(d)} \prod_{k=1}^d \phi'(u_k) \geq 0.$$

Die k -dimensionale Randverteilung ist

$$\phi^{-1}\left(\sum_{\ell=1}^k \phi(u_\ell)\right),$$

und hat die (formale) Dichte

$$\left(\phi^{-1}\left(\sum_{\ell=1}^k \phi(u_\ell)\right)\right)^{(k)} \prod_{\ell=1}^k \phi'(u_\ell) \geq 0.$$

Da ϕ fallend ist, ist $\phi'(u_\ell) \leq 0$. Ist $(-1)^k(\phi^{-1})^{(k)}(x) \geq 0$, so sind die Dichten positiv für alle Randverteilungen. Insbesondere ist C eine Verteilung und alle Randverteilungen sind uniform. Ist C eine Verteilung, dann müssen die Randverteilungen positive Dichten haben, und es folgt, dass $(-1)^k(\phi^{-1})^{(k)}(x) \geq 0$. \square

Eine besondere Klasse von Copulas sind Archimedische Copulas erzeugt durch eine unendlich oft differenzierbare Funktion ϕ mit $(-1)^k(\phi^{-1})^{(k)}(x) \geq 0$ für alle $k \geq 0$. Damit lassen sich archimedische Copulas in allen Dimensionen erzeugen.

Korollar 10.32. *Sei Y eine echt positive Zufallsvariable. Sei $\ell(s) = \mathbb{E}[e^{-sY}]$ die Laplace–Stieltjes-Transformierte von Y . Dann ist $\phi(x) = \ell^{-1}(x)$ der strikte Generator einer Copula für alle $d \geq 2$.*

Beweis. Da $\ell(s)$ strikt fallend ist, $\ell(0) = 1$, $\ell(s) > 0$ und $\lim_{s \rightarrow \infty} \ell(s) = 0$, ist ϕ ein strikter Generator. Weiter ist $(-1)^k \ell^{(k)}(s) = \mathbb{E}[Y^k e^{-sY}] > 0$ für $s > 0$. Somit ist ϕ ein Generator einer Copula. \square

Abbildung 10.2: *Gumbel-, Clayton- und Frank-Copula***Beispiel 10.33.**

- **Gumbel-Copula** Setzen wir $\phi(t) = (-\log t)^\theta$ für $\theta \in [1, \infty)$, so ist $\phi^{-1}(x) = \exp\{-x^{1/\theta}\}$. Dies ist die Laplace-Transformierte einer stabilen Verteilung (siehe Satz 9.35), und damit ist C eine strikte Copula. Die Copula wird dann

$$\exp\{-[(-\log x_1)^\theta + (-\log x_2)^\theta + \cdots + (-\log x_d)^\theta]^{1/\theta}\}.$$

Der Spezialfall $\theta = 1$ führt zur Unabhängigkeitscopula. Lassen wir $\theta \rightarrow \infty$, so erhalten wir die Komonotonie-Copula $\min\{x_1, x_2, \dots, x_d\}$.

- **Clayton-Copula** Sei $\phi(t) = \theta^{-1}(t^{-\theta} - 1)$ für $\theta \in (0, \infty)$ und $\phi(t) = -\log t$ für $\theta = 0$. Dann ist $\phi^{-1}(x) = (1 + \theta x)^{-1/\theta}$ für $\theta \neq 0$ und $\phi^{-1}(x) = e^{-x}$ für $\theta = 0$. Für $\theta > 0$ ist ϕ^{-1} die Laplace-Transformierte der $\Gamma(\theta^{-1}, \theta^{-1})$ Verteilung. Damit handelt es sich um eine Copula. Die Copula ist

$$[x_1^{-\theta} + x_2^{-\theta} + \cdots + x_d^{-\theta} - (d-1)]^{-(1/\theta)}.$$

Auch hier ist $\theta = 0$ die Unabhängigkeitscopula und die Copula konvergiert gegen die Komonotonie-Copula für $\theta \rightarrow \infty$.

- **Frank-Copula** Setzen wir $\phi(t) = -\log(\frac{1-e^{-\theta t}}{1-e^{-\theta}})$ für $\theta > 0$ und $\phi(t) = -\log t$ für $\theta = 0$. Dann ist $\phi^{-1}(x) = -\theta^{-1} \log[1 - (1 - e^{-\theta})e^{-x}]$ für $\theta > 0$ und $\phi^{-1}(x) = e^{-x}$ für $\theta = 0$. Hier ist ϕ^{-1} die Laplacetransformierte der logarithmischen Verteilung $\mathbb{P}[Y = n] = \theta^{-1}(1 - e^{-\theta})^n/n$ für $n \geq 1$. Somit handelt es sich um eine strikte Copula. Die Copula wird

$$-\theta^{-1} \log\left[1 - (1 - e^{-\theta})^{-(d-1)} \prod_{k=1}^d (1 - e^{-\theta x_k})\right].$$

Auch hier ist $\theta = 0$ die Unabhängigkeitscopula.



Wir berechnen nun die Abhängigkeitsmasse.

Proposition 10.34. *Sei $C(u, v)$ eine archimedische Copula mit Generator $\phi(t)$. Dann erhalten wir für Kendalls Tau*

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt .$$

Beweis. Wir haben (Hilfssatz 10.12)

$$\begin{aligned} \rho_\tau(X_1, X_2) &= 4\mathbb{E}[C(X_1, X_2)] - 1 = 4 \int_0^1 \mathbb{P}[C(X_1, X_2) > t] dt - 1 \\ &= 3 - 4 \int_0^1 \mathbb{P}[C(X_1, X_2) \leq t] dt . \end{aligned}$$

Wir haben $\{C(X_1, X_2) \leq t\} = \{\phi(X_1) + \phi(X_2) \geq \phi(t)\}$. Die gemeinsame Verteilung des Vektors $(\phi(X_1), \phi(X_2))$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\phi(X_1) \geq a, \phi(X_2) \geq b] &= \mathbb{P}[X_1 \leq \phi^{-1}(a), X_2 \leq \phi^{-1}(b)] \\ &= \phi^{-1}(\phi(\phi^{-1}(a)) + \phi(\phi^{-1}(b))) = \phi^{-1}(a + b) . \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathbb{P}[\phi(X_2) > b \mid \phi(X_1) = a] = \frac{(\phi^{-1})'(a + b)}{(\phi^{-1})'(a)} ,$$

da als konvexe Funktion ϕ^{-1} fast überall differenzierbar ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[C(X_1, X_2) \leq t] &= \mathbb{P}[\phi(X_1) > \phi(t)] - \int_0^{\phi(t)} \frac{(\phi^{-1})'(a + \phi(t) - a)}{(\phi^{-1})'(a)} (\phi^{-1})'(a) da \\ &= \phi^{-1}(\phi(t)) - \phi(t)(\phi^{-1})'(\phi(t)) = t - \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} . \end{aligned}$$

Einsetzen gibt

$$\rho_\tau(X_1, X_2) = 3 - 4 \int_0^1 \left(t - \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} \right) dt = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt .$$

□

Beispiel 10.33 (Fortsetzung).

- **Gumbel-Copula** Wir erhalten

$$\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt = \int_0^1 \theta^{-1} t \log t dt = -\theta^{-1} \int_0^\infty z e^{-2z} dz = -\frac{1}{4\theta}.$$

Die gibt $\rho_\tau = 1 - \theta^{-1}$. Somit wächst die Abhängigkeit mit θ .

- **Clayton-Copula** Wir berechnen

$$\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt = -\theta^{-1} \int_0^1 (t - t^{\theta+1}) dt = \frac{1}{\theta(\theta+2)} - \frac{1}{2\theta}.$$

Kendalls Tau ist also $1 + \frac{4}{\theta(\theta+2)} - \frac{2}{\theta} = 1 - \frac{2}{\theta+2}$. Auch hier wächst die Abhängigkeit mit θ .

■

Proposition 10.35. Sei $C(u, v)$ eine archimedische Copula mit Generator $\phi(t)$. Dann erhalten wir für Spearmans Rho

$$\rho_\rho(X, Y) = 12 \int_0^{\phi(0)} \int_0^{\phi(0)} \frac{\phi^{-1}(a+b)}{\phi'(\phi^{-1}(a))\phi'(\phi^{-1}(b))} db da - 3.$$

Beweis. Es folgt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dv du &= \int_0^1 \int_0^1 \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)) dv du \\ &= \int_0^{\phi(0)} \int_0^{\phi(0)} \phi^{-1}(a+b) \frac{db}{\phi'(\phi^{-1}(b))} \frac{da}{\phi'(\phi^{-1}(a))} \end{aligned}$$

durch Substitution. □

Betrachten wir nun die Flankenabhängigkeit.

Proposition 10.36. Die Flankenindices können als

$$t_o = 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \phi^{-1}(2x)}{1 - \phi^{-1}(x)}$$

und falls $\phi(0) = \infty$

$$t_u = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi^{-1}(2x)}{\phi^{-1}(x)}$$

berechnet werden. Ist $\phi(0) < \infty$, so ist $t_u = 0$.

Beweis. Wir haben $\mathbb{P}[X > u, Y > u] = 1 - 2u + \phi^{-1}(2\phi(u))$. Wir benötigen also den Grenzwert

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + \phi^{-1}(2\phi(u))}{1 - u} = 2 - \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - \phi^{-1}(2\phi(u))}{1 - \phi^{-1}(\phi(u))} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \phi^{-1}(2x)}{1 - \phi^{-1}(x)} .$$

Für den unteren Flankenindex bemerken wir zuerst, dass $\phi^{-1}(2\phi(u)) = 0$ für $\phi(u) > \phi(0)/2$. Ist $\phi(0) < \infty$, so ist also $t_u = 0$. Wir nehmen daher $\phi(0) = \infty$ an. Es gilt dann

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\phi^{-1}(2\phi(u))}{u} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi^{-1}(2x)}{\phi^{-1}(x)} .$$

□

Beispiel 10.33 (Fortsetzung).

- **Gumbel-Copula** Für die Gumbel-Copula erhalten wir

$$t_o = 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \exp\{-(2x)^{1/\theta}\}}{1 - \exp\{-x^{1/\theta}\}} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{1/\theta} x^{1/\theta-1} \exp\{-(2x)^{1/\theta}\}}{x^{1/\theta-1} \exp\{-x^{1/\theta}\}} = 2 - 2^{1/\theta} .$$

Die obere Flankenabhängigkeit wächst also zum Wert 1 für $\theta \rightarrow \infty$.

Der untere Flankenabhängigkeitsindex ist

$$t_u = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\{-(2x)^{1/\theta} + x^{1/\theta}\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\{-x^{1/\theta}(2^{1/\theta} - 1)\} = 0 .$$

Die Variablen sind also in der unteren Flanke nicht abhängig.

- **Clayton-Copula** Wir erhalten

$$t_o = 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + 2\theta x)^{-1/\theta}}{1 - (1 + \theta x)^{-1/\theta}} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 + 2\theta x)^{-1/\theta-1}}{(1 + \theta x)^{-1/\theta-1}} = 0 .$$

Somit sind die Variablen in der oberen Flanke nicht abhängig. Man bemerke, dass man hier die Grenzwerte für x und θ nicht vertauschen darf.

Für die untere Flanke erhalten wir

$$t_u = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \theta x}{1 + 2\theta x} \right)^{1/\theta} = 2^{-1/\theta} .$$

Die Variablen sind also in der unteren Flanke abhängig. Der Index konvergiert nach 1 für $\theta \rightarrow \infty$, was der Komonotonie-Copula entspricht.

- **Frank-Copula** Hier erhalten wir

$$t_o = 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\theta + \log[1 - (1 - e^{-\theta})e^{-2x}]}{\theta + \log[1 - (1 - e^{-\theta})e^{-x}]} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2[1 - (1 - e^{-\theta})e^{-x}]e^{-2x}}{[1 - (1 - e^{-\theta})e^{-2x}]e^{-x}} = 0 .$$

Auch die Frank-Copula hat keine Abhängigkeit in den oberen Flanken.

Es gilt

$$t_u = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log[1 - (1 - e^{-\theta})e^{-2x}]}{\log[1 - (1 - e^{-\theta})e^{-x}]} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2[1 - (1 - e^{-\theta})e^{-x}]e^{-2x}}{[1 - (1 - e^{-\theta})e^{-2x}]e^{-x}} = 0 .$$

Die Frank-Copula hat somit keine Abhängigkeit in den Flanken.

