4.7 Interpretando estimativas de parâmetros no modelo final

Consideramos os resultados gerados ajuste do modelo 4.2 usando method = "REML"

4.7.1 Estimativas de parâmetros de efeito fixo

```r
knitr::kable(summary(model4.2.fit)$tTable, align = 'c')
```

	Value	Std.Error	DF	t-value	p-value
(Intercept)	282.790339	10.853234	874	26.0558599	0.0000000
mathkind	-0.469802	0.022266	874	-21.0995240	0.0000000
sexF	-1.251192	1.657730	874	-0.7547619	0.4505952
minorityMnrt=Yes	-8.262132	2.340113	874	-3.5306546	0.0004362
ses	5.346376	1.241094	874	4.3077937	0.0000184

Com base nos resultados do Modelo 4.2, vemos que o ganho na pontuação em matemática na primavera da primeira série (MATHGAIN) está significativamente relacionado à:

- MATHKIND = pontuação do aluno em matemática na primavera do ano do jardim de infância
- MINORITY = variável indicadora (0 = aluno não minoritário, 1 = aluno minoritário)
- SES = Situação socioeconômica do aluno

O efeito fixo estimado de SEXO (mulheres em relação a homens: 0 = menino, 1 = menina) é o único efeito fixo não significativo no Modelo 4.2 (p = 0,45). O efeito fixo estimado da pontuação de matemática do jardim de infância, MATHKIND, na pontuação de desempenho em matemática na primeira série, MATHGAIN, é negativo (-0,47), sugerindo que os alunos com pontuações mais altas em matemática na primavera de seu ano de jardim de infância têm um ganho menor previsto em desempenho em matemática na primavera da primeira série, após o ajuste para os efeitos de outras covariáveis (ou seja, SEX, MINORITY e SES). Ou seja, os alunos que vão bem em matemática no jardim de infância não vão melhorar tanto no próximo ano quanto os alunos que vão mal no jardim de infância. Prevê-se que os alunos MINORITY têm uma pontuação média de MATHGAIN 8,25 unidades menor do que os alunos não minoritários, após o ajuste para os efeitos de outras covariáveis. Além disso, prevê-se que alunos com SES mais alto tenham maior ganho de desempenho em matemática do que alunos com SES mais baixo, controlando os efeitos das outras covariáveis no modelo.

4.7.2 Estimativas de parâmetros de covariância

```r
knitr::kable(VarCorr(model4.2.fit), align = 'c')
```

	Variance	StdDev
schoolid =	pdLogChol(1)	
(Intercept)	75.20343	8.671991
classid =	pdLogChol(1)	
(Intercept)	83.28461	9.126040
Residual	734.56509	27.102861

$$\upsilon_k \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2_{int:school}), \quad \upsilon_{j|k} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2_{int:clasroom}) \;\text{ e }\; \varepsilon_{ij} \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

$$\widehat{\sigma}^2_{int:school} = 75.2, \quad \widehat{\sigma}^2_{int:clasroom} = 83.28 \;\; e \;\; \widehat{\sigma}^2 = 734.56$$

A adição das covariáveis de efeitos fixos ao nível de estudante no Modelo 4.1 (isto é Modelo 4.2) reduziu a variância residual estimada em cerca de 29% (variância residual estimada = 1028.23 no Modelo 4.1, contra 734.56 no Modelo 4.2). As estimativas dos componentes de variância no nível da sala de aula e da escola também foram reduzidas pela adição dos efeitos fixos associados às covariáveis ao nível de aluno, embora não substancialmente (a variância estimada no nível da sala de aula foi reduzida em cerca de 17,4%, e a estimativa da variância no nível escola foi reduzida em cerca de 2,9%). Isso sugere que as quatro covariáveis no nível do aluno estão efetivamente explicando algumas das variações aleatórias nos valores de resposta nos diferentes níveis do conjunto de dados, especialmente no nível do aluno (como esperado). A magnitude dos componentes de variância no Modelo 4.2 (e os testes qui-quadrado significativos relatados para os componentes de variância) sugere que ainda há variação aleatória inexplicada nos valores da resposta em todos os três níveis deste conjunto de dados. Neste ponto, efeitos fixos associados a covariáveis adicionais podem ser adicionados ao modelo, para ver se eles ajudam a explicar a variação aleatória nos diferentes níveis dos dados

4.8 Estimando os Coeficientes de Correlação Intraclasse (ICCs)

No contexto de um modelo hierárquico de três níveis com intercepto aleatório, o coeficiente de correlação intraclasse (ICC) é uma medida que descreve a similaridade (ou homogeneidade) das respostas observadas dentro de um determinado cluster. Para cada nível de agrupamento (por exemplo, sala de aula ou escola), um ICC pode ser definido como uma função dos componentes de variação. Para abreviar nesta seção, representamos a variância dos efeitos aleatórios associados às escolas como σ^2_s (em vez de $\sigma^2_{int:school}$), e a variância dos efeitos aleatórios associados às salas de aula aninhadas nas escolas como σ^2_c (em vez de $\sigma^2_{int:classroom}$). O ICC em nível de escola é definido como a proporção da variação aleatória total nas respostas observadas (o denominador em (2)) devido à variância dos efeitos escolares aleatórios (o numerador em (2)):

$$ICC_{school} = \frac{\sigma^2_s}{\sigma^2_s + \sigma^2_c + \sigma^2}$$

O valor do ICC_{school} é alto se a variação aleatória total for dominada pela variância dos efeitos aleatórios da escola. Em outras palavras, a ICC_{school} é alta se as pontuações MATHGAIN dos alunos na mesma escola são relativamente homogêneas, mas as pontuações MATHGAIN entre as escolas tendem a variar amplamente.

Da mesma forma, o ICC em nível de sala de aula é definido como a proporção da variação aleatória total (o denominador em (3)) devido à variação aleatória entre escolas e entre salas de aula (o numerador em (3)):

$$ICC_{classroom} = \frac{\sigma^2_s + \sigma^2_c}{\sigma^2_s + \sigma^2_c + \sigma^2}$$

Este ICC é alto se houver pouca variação nas respostas dos alunos na mesma sala de aula (σ^2 é baixo) em comparação com a variação aleatória total.

O ICC pode ser calculado a partir de um modelo sem efeitos fixos de outras covariáveis (por exemplo, Modelo 4.1) ou para um modelo incluindo esses efeitos fixos (por exemplo, Modelos 4.2 ou 4.3). Em ambos os casos, podemos obter os ICCs das estimativas dos componentes de variância rotulados ou da matriz de correlação marginal estimada, conforme descrito anteriormente.

```
knitr::kable(VarCorr(model4.1.fit), align = 'c')
```

	Variance	StdDev
schoolid =	pdLogChol(1)	
(Intercept)	77.49202	8.802955
classid =	pdLogChol(1)	
(Intercept)	99.22751	9.961301
Residual	1028.23396	32.066087

$$ICC_{school} = \frac{77.49202}{77.49202 + 99.22751 + 1028.23396} = 0.0643$$
$$ICC_{classroom} = \frac{77.49202 + 99.22751}{77.49202 + 99.22751 + 1028.23396} = 0.1467$$

As observações sobre os alunos na mesma escola são modestamente correlacionadas, enquanto as observações sobre os alunos na mesma sala de aula têm uma correlação um pouco mais alta.

```
knitr::kable(VarCorr(model4.2.fit), align = 'c')
```

	Variance	StdDev
schoolid =	pdLogChol(1)	
(Intercept)	75.20343	8.671991
classid =	pdLogChol(1)	
(Intercept)	83.28461	9.126040
Residual	734.56509	27.102861

$$ICC_{school} = \frac{75.20343}{75.20343 + 83.28461 + 734.56509} = 0.0842$$

$$ICC_{classroom} = \frac{75.20343 + 83.28461}{75.20343 + 83.28461 + 734.56509} = 0.1775$$

As observações sobre os alunos na mesma escola são modestamente correlacionadas, enquanto as observações sobre os alunos na mesma sala de aula têm uma correlação um pouco mais alta.

Para ilustrar ainda mais os cálculos do ICC, consideramos a matriz marginal de variância-covariância V_k implícita no Modelo 4.1 para uma escola hipotética, k, com duas salas de aula, com a primeira sala com dois alunos e a segunda com três alunos. Primeiro, vamos escrever o modelo incondicional, Modelo 4.1, na forma matricial.

$$V_k = Var(MATHGAIN)_k = Z_k D_k ZT_k + R_k$$

$$V_k = \begin{pmatrix} \sigma_s^2 + \sigma_c^2 + \sigma^2 & \sigma_s^2 + \sigma_c^2 & \sigma_s^2 & \sigma_s^2 & \sigma_s^2 \\ \sigma_s^2 + \sigma_c^2 & \sigma_s^2 + \sigma_c^2 + \sigma^2 & \sigma_s^2 & \sigma_s^2 & \sigma_s^2 \\ \sigma_s^2 & \sigma_s^2 & \sigma_s^2 + \sigma_c^2 + \sigma^2 & \sigma_s^2 + \sigma_c^2 & \sigma_s^2 + \sigma_c^2 \\ \sigma_s^2 & \sigma_s^2 & \sigma_s^2 + \sigma_c^2 & \sigma_s^2 + \sigma_c^2 + \sigma^2 & \sigma_s^2 + \sigma_c^2 \\ \sigma_s^2 & \sigma_s^2 & \sigma_s^2 + \sigma_c^2 & \sigma_s^2 + \sigma_c^2 & \sigma_s^2 + \sigma_c^2 + \sigma^2 \end{pmatrix}$$

As primeiras duas linhas e colunas desta matriz correspondem às observações sobre os dois alunos da primeira sala de aula, e as últimas três linhas e colunas correspondem às observações sobre os três alunos da segunda classe.

A matriz de correlação marginal correspondente para essas observações pode ser calculada dividindo todos os elementos na matriz Vk pela variância total de uma dada observação, $[Var(y_{ijk}) = \sigma_s^2 + \sigma_c^2 + \sigma^2]$ conforme mostrado abaixo, os ICCs definidos em (2) e (3) podem ser facilmente identificados nesta matriz de correlação implícita:

$$V_k(corr) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma_s^2+\sigma_c^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} \\ \frac{\sigma_s^2+\sigma_c^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & 1 & \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} \\ \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & 1 & \frac{\sigma_s^2+\sigma_c^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & \frac{\sigma_s^2+\sigma_c^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} \\ \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & \frac{\sigma_s^2+\sigma_c^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & 1 & \frac{\sigma_s^2+\sigma_c^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} \\ \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & \frac{\sigma_s^2+\sigma_c^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & \frac{\sigma_s^2+\sigma_c^2}{\sigma_s^2+\sigma_c^2+\sigma^2} & 1 \end{pmatrix}$$

```r
options(width = 90)
library(mgcv)
```

```
## This is mgcv 1.8-40. For overview type 'help("mgcv-package")'.
```

```r
Vs<- extract.lme.cov2(model4.1.fit,data=class, start.level=1)
knitr::kable(round(Vs$V[[1]],1), align = 'c')
```

1205.0	176.7	176.7	77.5	77.5	77.5	77.5	77.5	77.5	77.5	77.5
176.7	1205.0	176.7	77.5	77.5	77.5	77.5	77.5	77.5	77.5	77.5
176.7	176.7	1205.0	77.5	77.5	77.5	77.5	77.5	77.5	77.5	77.5
77.5	77.5	77.5	1205.0	176.7	176.7	176.7	176.7	176.7	176.7	176.7
77.5	77.5	77.5	176.7	1205.0	176.7	176.7	176.7	176.7	176.7	176.7
77.5	77.5	77.5	176.7	176.7	1205.0	176.7	176.7	176.7	176.7	176.7
77.5	77.5	77.5	176.7	176.7	176.7	1205.0	176.7	176.7	176.7	176.7
77.5	77.5	77.5	176.7	176.7	176.7	176.7	1205.0	176.7	176.7	176.7
77.5	77.5	77.5	176.7	176.7	176.7	176.7	176.7	1205.0	176.7	176.7
77.5	77.5	77.5	176.7	176.7	176.7	176.7	176.7	176.7	1205.0	176.7
77.5	77.5	77.5	176.7	176.7	176.7	176.7	176.7	176.7	176.7	1205.0

As matrizes marginais de variância-covariância para observações sobre alunos em qualquer escola teriam a mesma estrutura, mas seriam de dimensões diferentes, dependendo do número de alunos dentro da escola. As observações sobre os alunos em escolas diferentes terão covariância zero, porque são consideradas independentes umas das outras.

Observe na saída da função cov2cor(), a seguir, que as observações sobre diferentes alunos na mesma sala de aula nesta escola têm uma correlação marginal estimada de 0,1467, e as observações sobre os alunos em diferentes salas de aula nesta escola têm uma correlação estimada de 0,0643. Esses resultados correspondem aos cálculos ICC iniciais com base nos componentes de variância estimados.

```r
knitr::kable(round(cov2cor(Vs$V[[1]]),4), align = 'c')
```

1.0000	0.1467	0.1467	0.0643	0.0643	0.0643	0.0643	0.0643	0.0643	0.0643	0.0643
0.1467	1.0000	0.1467	0.0643	0.0643	0.0643	0.0643	0.0643	0.0643	0.0643	0.0643
0.1467	0.1467	1.0000	0.0643	0.0643	0.0643	0.0643	0.0643	0.0643	0.0643	0.0643
0.0643	0.0643	0.0643	1.0000	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467
0.0643	0.0643	0.0643	0.1467	1.0000	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467
0.0643	0.0643	0.0643	0.1467	0.1467	1.0000	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467
0.0643	0.0643	0.0643	0.1467	0.1467	0.1467	1.0000	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467

0.0643	0.0643	0.0643	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	1.0000	0.1467	0.1467	0.1467
0.0643	0.0643	0.0643	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	1.0000	0.1467	0.1467
0.0643	0.0643	0.0643	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	1.0000	0.1467
0.0643	0.0643	0.0643	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	0.1467	1.0000

As covariáveis não são consideradas nas definições clássicas do ICC, seja com base no modelo de intercepto aleatório ou no modelo marginal; no entanto, as covariáveis podem ser facilmente acomodadas na estrutura do modelo misto em qualquer configuração de modelo. O ICC pode ser calculado a partir de um modelo sem efeitos fixos de outras covariáveis (por exemplo, Modelo 4.1) ou para um modelo incluindo esses efeitos fixos (por exemplo, Modelos 4.2 ou 4.3). Em ambos os casos, podemos obter os ICCs das estimativas dos componentes de variância rotulados ou da matriz de correlação marginal estimada, conforme descrito anteriormente.

4.9 Cálculo de valores preditos

Considerando as estimativas para os efeitos fixos no Modelo 4.2, podemos escrever uma fórmula para os valores predistos condicionais de MATHGAIN para um aluno em uma determinada sala de aula:

```r
knitr::kable(summary(model4.2.fit)$tTable, align = 'c')
```

	Value	Std.Error	DF	t-value	p-value
(Intercept)	282.790339	10.853234	874	26.0558599	0.0000000
mathkind	-0.469802	0.022266	874	-21.0995240	0.0000000
sexF	-1.251192	1.657730	874	-0.7547619	0.4505952
minorityMnrt=Yes	-8.262132	2.340113	874	-3.5306546	0.0004362
ses	5.346376	1.241094	874	4.3077937	0.0000184

Com o modelo ajustado podemos gerar três conjuntos diferentes de valores preditos: valores preditos condicionais, incluindo os EBLUPs dos efeitos aleatórios da escola e da sala de aula, e valores preditos marginais baseados apenas nos efeitos fixos estimados. Por exemplo:

- Incluindo os EBLUPs do efeito aleatório para a escola deste aluno, u_k, e o efeito sala de aula aleatório para este aluno, $u_{j|k}$.

$$\widehat{MATHGAIN}_{ijk} = 282.7903 - 0.4698 \times MATHKIND_{ijk} - 1.2512 \times SEX_{ijk}$$
$$-8.2621 \times MINORITY_{ijk} + 5.3464 \times SES_{ijk} + \widehat{u}_k + \widehat{u}_{j|k}$$

Os resíduos calculados com base nesses valores preditos condicionais devem ser usados para avaliar as suposições de normalidade e variância constante para os resíduos.

- incluindo apenas os EBLUPs do efeito efeito sala de aula aleatório para este aluno, $u_{j|k}$.

$$\widehat{MATHGAIN}_{ijk} = 282.7903 - 0.4698 \times MATHKIND_{ijk} - 1.2512 \times SEX_{ijk}$$
$$-8.2621 \times MINORITY_{ijk} + 5.3464 \times SES_{ijk} + \widehat{u}_k$$

- baseado na distribuição marginal de MATHGAIN, para gerar valores preditos marginais

$$\widehat{MATHGAIN}_{ijk} = 282.7903 - 0.4698 \times MATHKIND_{ijk} - 1.2512 \times SEX_{ijk} - 8.2621 \times MINORITY_{ijk} + 5.3464 \times SES_{ijk}$$

```r
# Efeitos
ef <- ranef(model4.2.fit)
ef1 <- ef[[1]][,1];ef2<-ef[[2]][,1]

options(width=90)
pred <- predict(model4.2.fit,level=0:2)
knitr::kable(head(pred), align = 'c')
```

schoolid	classid	predict.fixed	predict.schoolid	predict.classid
1	1/160	65.26506	65.76320	69.16567
1	1/160	56.97578	57.47392	60.87638
1	1/160	33.04781	33.54596	36.94842
1	1/217	61.55550	62.05364	59.20285
1	1/217	74.70198	75.20012	72.34932
1	1/217	65.92937	66.42751	63.57672

Considerando o primeiro aluno da escola 1 e predizendo utilizando de valores preditos condicionais.

```r
knitr::kable(dadospred[1,-1], align = 'c')
```

mathkind	sex	minority	ses	mathgain	predict.fixed	predict.schoolid	predict.classid
448	F	Mnrt=Yes	0.46	32	65.27	65.76	69.17

$$\widehat{MATHGAIN}_{ijk} = 282.7903 - 0.4698 \times 448 - 1.2512 \times 1 - 8.26211 + 5.3464 \times 0.46 + 0.4981 + 3.4025 = 69.166544$$