Um Modelo Simples de Leilão de Títulos Públicos e o Debate sobre "Cartel" de Instituições Financeiras

1 Ambiente básico

Considere um governo que deseja emitir uma quantidade exógena $Q > 0$ de um título público zerocupom com vencimento em um período.[1]

Há $N \geq 2$ instituições financeiras (bancos, fundos, etc.), indexadas por $i = 1, \ldots, N$. Cada instituição pode adquirir até $K_i \geq 0$ unidades do título. Denote por $K = \sum_{i=1}^{N} K_i$ a capacidade total do sistema.

Cada instituição i tem um *valor de reserva* (ou custo de oportunidade) $\theta_i \in \mathbb{R}_+$ para carregar o título, medido em termos de taxa de retorno requerida. Intuitivamente, θ_i representa a taxa mínima que torna a operação de comprar e carregar o título *neutra* em valor presente esperado. Ela incorpora, por exemplo:

- custo de funding da instituição;
- prêmio de risco fiscal e cambial percebido;
- custo de capital regulatório;
- custo de oportunidade relativo a outros ativos.

Suponha, para fixar ideias, que θ_i seja exógena e conhecida pela instituição i (tipo privado), podendo ser constante ou resultado de um processo de informação mais rico.

2 O mecanismo de leilão

O governo realiza um leilão para captar recursos. Cada instituição i submete um lance na forma de uma taxa mínima de retorno requerida $b_i \in \mathbb{R}_+$, interpretada como a menor taxa pela qual i está disposta a adquirir o título.

Coletemos os lances em um vetor $b = (b_1, \ldots, b_N)$ e ordenemos as instituições pelo lance, do menor para o maior. Seja σ uma permutação de $\{1, \ldots, N\}$ tal que

$$b_{\sigma(1)} \leq b_{\sigma(2)} \leq \cdots \leq b_{\sigma(N)}.$$

O governo aceita lances, na ordem crescente de $b_{\sigma(j)}$, até completar a quantidade desejada Q. Formalmente, defina as quantidades alocadas $q_i(b)$ como:

$$q_{\sigma(j)}(b) = \begin{cases} K_{\sigma(j)}, & \text{enquanto } \sum_{k=1}^{j} K_{\sigma(k)} \leq Q, \\ Q - \sum_{k=1}^{j-1} K_{\sigma(k)}, & \text{se } \sum_{k=1}^{j-1} K_{\sigma(k)} < Q \leq \sum_{k=1}^{j} K_{\sigma(k)}, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

[1] A generalização para títulos com cupom ou prazos maiores não altera a intuição central.

Denote por $r^*(b)$ a *taxa de corte* do leilão, por exemplo o maior lance aceito:

$$r^*(b) = \max\{\, b_i : q_i(b) > 0 \,\}.$$

(Suponha, para simplificar, um leilão de preço uniforme em que todos os vencedores recebem a mesma taxa $r^*(b)$.)

3 Payoff das instituições

O payoff da instituição i é dado por:

$$\pi_i(b; \theta_i) = \big(r^*(b) - \theta_i\big)\, q_i(b). \tag{1}$$

A interpretação é direta:

- Se $r^*(b) > \theta_i$, o retorno contratado é maior que o valor de reserva, logo a operação tem valor presente esperado positivo;
- Se $r^*(b) = \theta_i$, a instituição é indiferente (lucro esperado zero);
- Se $r^*(b) < \theta_i$, a instituição incorre em perda esperada sobre a posição adquirida.

Uma estratégia (estática) para a instituição i é um lance b_i como função do seu tipo θ_i:

$$b_i = s_i(\theta_i).$$

Um perfil de estratégias $s = (s_1, \dots, s_N)$ induz um jogo bayesiano (caso os tipos sejam incertos) ou um jogo de informação completa (caso os tipos sejam comuns).

4 Equilíbrio competitivo sem conluio

A noção natural de equilíbrio nesse ambiente é um *equilíbrio de Nash* (estático) ou um *equilíbrio de Nash bayesiano* (quando há incerteza sobre os tipos). Em ambos os casos, a intuição central é que a instituição não escolhe lances que a levem a comprar o título a uma taxa inferior ao seu valor de reserva.

[Lance abaixo do valor de reserva é dominado] Fixe θ_i e considere um leilão em que, dado o perfil de lances dos demais jogadores b_{-i}, o lance de i implica que, caso venha a ser vencedor, a taxa de corte $r^*(b)$ seja estritamente menor que θ_i. Então qualquer estratégia que leve a esse resultado é estritamente dominada por uma estratégia que faz i perder o leilão (por exemplo, um lance suficientemente alto).

Esboço da prova. Suponha que haja um perfil de lances (b_i, b_{-i}) tal que, para a realização considerada de b_{-i}, a instituição i obtenha alocação positiva, $q_i(b) > 0$, e a taxa de corte seja $r^*(b) < \theta_i$. Pelo payoff em (1), tem-se:

$$\pi_i(b; \theta_i) = \big(r^*(b) - \theta_i\big)\, q_i(b) < 0.$$

Considere, agora, um lance alternativo $\tilde{b}_i$ suficientemente alto para que $q_i(\tilde{b}_i, b_{-i}) = 0$. Nesse caso:

$$\pi_i(\tilde{b}_i, b_{-i}; \theta_i) = 0.$$

Logo,
$$\pi_i(\tilde{b}_i, b_{-i}; \theta_i) = 0 > \pi_i(b_i, b_{-i}; \theta_i),$$
isto é, a estratégia de aceitar uma taxa inferior a θ_i é estritamente pior do que simplesmente não participar da emissão. Portanto, qualquer estratégia que possa levar a $r^*(b) < \theta_i$ com probabilidade positiva é estritamente dominada por uma estratégia que torna essa probabilidade nula (e.g. um lance muito elevado). □

Essa proposição captura a intuição de que não é racional, do ponto de vista da instituição, aceitar uma taxa que esteja abaixo de sua avaliação mínima para o título, mesmo que isso implique "ganhar mais volume". Em termos de teoria dos jogos, a melhor resposta de i não é "subcotar" indefinidamente sua taxa, mas sim garantir que, se for vencedora, o retorno seja pelo menos compatível com θ_i.

4.1 Determinação da taxa de equilíbrio

Suponha, para simplificar, que:

- as capacidades são idênticas, $K_i = \bar{K}$ para todo i;
- os tipos θ_i são independentes e identicamente distribuídos segundo uma distribuição contínua F em um intervalo compacto $[\underline{\theta}, \overline{\theta}]$.

Para uma taxa r, defina a oferta agregada de recursos ao governo, caso ele pague essa taxa, como:
$$S(r) = \bar{K} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}\{\theta_i \leq r\}. \tag{2}$$
Ou seja, apenas instituições cujo valor de reserva seja menor ou igual a r estariam dispostas a alocar recursos naquele título (em equilíbrio).

O governo deseja captar uma quantidade Q. Uma condição de equilíbrio de mercado em termos de taxa de corte é:
$$S(r^*) \geq Q \quad \text{e} \quad S(r^* - \varepsilon) < Q \text{ para todo } \varepsilon > 0 \text{ pequeno.} \tag{3}$$
Em termos esperados, usando $\mathbb{E}[S(r)] = N\bar{K}F(r)$, a taxa de equilíbrio satisfaz aproximadamente:
$$N\bar{K}F(r^*) \approx Q. \tag{4}$$
Se, por exemplo, os valores de reserva estiverem concentrados em torno de uma média $\mu \approx 0{,}15$ (15% ao ano), a taxa de equilíbrio r^* tenderá a situar-se próxima a essa média. Note que nada, até aqui, exige conluio explícito: trata-se da interação competitiva de múltiplas instituições com avaliações semelhantes sobre risco fiscal, inflação, prêmio de risco-país etc.

5 Cartel a 15% versus desvio a 14,9999%

Considere, agora, a seguinte narrativa informal:

> "Suponha que exista um cartel em que todas as instituições concordam em exigir 15% ao ano para financiar o Tesouro. Então haveria um incentivo enorme para uma delas desviar e oferecer 14,9999% para capturar quase toda a emissão."

O modelo acima permite formalizar por que essa intuição, embora pareça plausível à primeira vista, é enganosa quando inserida em um ambiente de valor de reserva θ_i.

5.1 Caso 1: cartel abaixo dos valores de reserva

Suponha que todos os bancos tenham $\theta_i = 0{,}15$ (15%), mas o cartel estabelece que todos devem aceitar financiar o Tesouro a uma taxa de $r_c = 0{,}149999$ (14,9999%). Pelo lema anterior, cada instituição incorreria em payoff esperado negativo:

$$\pi_i = (r_c - \theta_i)q_i < 0.$$

Em equilíbrio, qualquer instituição racional preferiria desviar do cartel *para cima*, isto é, recusar-se a aceitar a taxa r_c e, na prática, não participar do leilão. Assim, um cartel que fixa taxa abaixo dos valores de reserva é intrinsecamente instável: há um incentivo individual a não participar, e não a "cortar ainda mais" a taxa.

5.2 Caso 2: cartel exatamente nos valores de reserva

Suponha, agora, que o cartel fixe $r_c = 0{,}15$, exatamente igual ao valor de reserva médio das instituições. Do ponto de vista de uma instituição com $\theta_i = 0{,}15$, qualquer leve redução unilateral do lance para $r = 0{,}149999$ implica em:

$$r < \theta_i \quad \Rightarrow \quad \pi_i < 0,$$

ou seja, em perda esperada sobre a posição comprada. Se o banco acreditasse que, ao reduzir o lance para $r < \theta_i$, captaria "toda a emissão", estaria apenas ampliando o volume de uma operação com valor esperado negativo.

Logo, em um ambiente em que os valores de reserva refletem adequadamente o risco do título, *não é* uma melhor resposta unilateral "quebrar o cartel" reduzindo a taxa marginalmente abaixo de θ_i. A estratégia dominante é não aceitar taxas inferiores ao próprio valor de reserva.

5.3 Caso 3: heterogeneidade de θ_i e competição

Quando há heterogeneidade de valores de reserva, instituições com θ_i menores (por exemplo, porque têm custo de funding mais baixo ou avaliação mais otimista do risco fiscal) tenderão a submeter lances menores e, portanto, a captar maior volume. Esse é o padrão de um leilão competitivo com valores privados: quem "acredita mais" no título aceita financiá-lo a taxas menores.

Neste contexto, observar que muitas instituições exigem taxas em torno de 15% para financiar o Tesouro pode ser interpretado, de forma natural, como resultado de:

- valores de reserva θ_i elevados, decorrentes de risco fiscal, incerteza inflacionária, prêmios de risco, etc.;
- interação competitiva em um leilão em que as melhores respostas individuais consistem em não aceitar taxas abaixo de θ_i.

Não é necessário postular um *cartel* para justificar taxas elevadas: um equilíbrio de Nash não cooperativo em um ambiente de risco fiscal alto e valores de reserva elevados já produz esse resultado.

6 Conclusão

O modelo acima formaliza, em linguagem de teoria dos jogos e leilões, a ideia de que:

1. Instituições financeiras racionais têm um valor de reserva θ_i para carregar títulos públicos, abaixo do qual a operação gera perda esperada;
2. Em leilões de títulos, não é uma melhor resposta unilateral aceitar taxas inferiores a θ_i, mesmo que isso aumente o volume adquirido;
3. A observação empírica de taxas de financiamento do Tesouro persistentemente elevadas pode refletir um equilíbrio competitivo em um ambiente de risco elevado, e não necessariamente um conluio explícito entre instituições;
4. A narrativa simplista de um "cartel a 15%" com desvio lucrativo para 14,9999% ignora a presença de valores de reserva e o fato de que aumentar volume a uma taxa abaixo de θ_i reduz, em vez de aumentar, o payoff esperado das instituições.

Em suma, à luz de um modelo simples de leilão com valor de reserva, a estabilidade de taxas altas em títulos públicos é compatível com um equilíbrio de Nash competitivo em ambiente de risco, e não fornece, por si só, evidência de um cartel estável de instituições financeiras.

Referências

[Felipe (2023)] Tadelis, S. (2013). *Game Theory: An Introduction.* Princeton University Press.

[Fudenberg e Tirole (1991)] Fudenberg, D., & Tirole, J. (1991). *Game Theory.* MIT Press.

[Gibbons (1992)] Gibbons, R. (1992). *A Primer in Game Theory.* Harvester Wheatsheaf.

[Krishna (2002)] Krishna, V. (2002). *Auction Theory.* Academic Press.

[Milgrom (2004)] Milgrom, P. (2004). *Putting Auction Theory to Work.* Cambridge University Press.

[Milgrom e Weber (1982)] Milgrom, P., & Weber, R. (1982). "A Theory of Auctions and Competitive Bidding". *Econometrica*, 50(5), 1089–1122.

[McAfee e McMillan (1987)] McAfee, R. P., & McMillan, J. (1987). "Auctions and Bidding". *Journal of Economic Literature*, 25(2), 699–738.

[Klemperer (2004)] Klemperer, P. (2004). *Auctions: Theory and Practice.* Princeton University Press.

[Malvey e Archibald (1998)] Malvey, P. F., & Archibald, C. (1998). "Issues in Auction Design for U.S. Treasury Securities". *Journal of Financial Economics*, 42(2), 197–228.