

$$\begin{aligned}
 a_i^\dagger a_j \Big|_{j > i} &= \left[\text{---} \boxed{\sigma_i^+} \quad \underset{j}{\bullet} \right] \left[\text{---} \underset{i}{\bullet} \text{---} \boxed{\sigma_j^-} \right] \\
 &= \left[\boxed{\sigma_i^+ \sigma_i^z} \text{---} \boxed{\sigma_j^-} \right] = - \left[\boxed{\sigma_i^+} \text{---} \boxed{\sigma_j^-} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_i^\dagger a_j \Big|_{i > j} &= \left[\text{---} \underset{j}{\bullet} \text{---} \boxed{\sigma_i^+} \right] \left[\text{---} \boxed{\sigma_j^-} \quad \underset{i}{\bullet} \right] \\
 &= \left[\boxed{\sigma_j^z \sigma_j^-} \text{---} \boxed{\sigma_i^+} \right] = - \left[\boxed{\sigma_j^-} \text{---} \boxed{\sigma_i^+} \right]
 \end{aligned}$$