第九讲：常微分方程的数值方法

教师: 胡俊

北京大学数学科学学院

April 16, 2020

目录

目录

Euler方法

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y),\ a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

设函数$f(x,y)$关于变量x,y连续，关于变量y满足Lipschitz条件，即存在正常数L，使得对$\forall x \in [a,b]$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$$

则初值问题存在唯一解$y(x) \in C^1[a,b]$.

在区间$[a,b]$上引入有限个离散点

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

Euler方法

通常取$x_0, x_1, \cdots, x_N$是等距的, 即

$$x_n = a + nh, \quad n = 0, 1, \cdots, N$$

其中$h = (b-a)/N$为步长.

利用Taylor展式导出Euler格式. 设$y(x)$是初值问题的唯一解, 且在$[a, b]$ 上有连续二阶导数

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + O(h^2)$$

忽略高阶项, 用y_n逼近$y(x_n)$, 得到**向前Euler格式**, 是显式格式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_0 \text{已知} \end{cases}$$

如果在x_{n+1}展开, 有

$$y(x_n) = y(x_{n+1}) - hy'(x_{n+1}) + O(h^2)$$

可得到**向后Euler格式**

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \\ y_0 \text{已知} \end{cases}$$

因为公式右端f依赖于y_{n+1}, 所以是隐式格式. 隐式格式要比显式格式稳定.

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

$$y = y_0 + \int_a^b f(x, y)\, dx$$

梯形公式(方法)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})], \ k = 0, 1, 2, \cdots \end{cases}$$

$$y_{n+1} - y_{n+1}^{(k+1)} = \frac{h}{2}[f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})]$$

于是有

$$|y_{n+1} - y_{n+1}^{(k+1)}| \leq \frac{hL}{2}|y_{n+1} - y_{n+1}^{(k)}|.$$

如果h充分小, 则有

$$\frac{hL}{2} < 1$$

则当$k \to \infty$时, 有$y_{n+1}^{(k)} \to y_{n+1}$, 这说明迭代过程收敛.

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, y_{n+1}, h). \tag{1}$$

其中多元函数ϕ与$f(x,y)$有关，当ϕ含有y_{n+1}时，方法是隐式的，若不含y_{n+1}则为显式方法，所以显式单步方法为

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h)$$

$\phi(x,y,h)$称为增量函数，例如欧拉法

$$\phi(x,y,h) = f(x,y)$$

Definition 1.1

设$y(x)$是初值问题的准确解, 称

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\phi(x_n, y(x_n), h)$$

为显式单步法的局部截断误差.

T_{n+1}之所以称为局部的, 是假设在x_n前各步没有误差, 当$y_n = y(x_n)$ 时, 计算一步, 则有

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) - y_{n+1} &= y(x_{n+1}) - [y_n + h\phi(x_n, y(x_n), h)] \\ &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\phi(x_n, y(x_n), h) = T_{n+1}. \end{aligned}$$

所以, 局部截断误差可以理解为用(1)计算一步的误差, 也即公式(1)中用准确解$y(x)$代替数值解产生的公式误差.

Definition 1.2

设$y(x)$是初值问题的准确解，若存在最大整数p使显式单步法(1)的局部截断误差满足

$$T_{n+1} = y(x+h) - y(x) - h\phi(x, y(x), h) = O(h^{p+1}) \tag{2}$$

则称方法(1)具有p阶精度，即

$$T_{n+1} = \psi(x_n, y(x_n))h^{p+1} + O(h^{p+2})$$

则$\psi(x_n, y(x_n))h^{p+1}$称为局部截断误差主项.

对向前欧拉法，由Talyor展开有

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_n, y(x_n)) \\ &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hy'(x_n) \\ &= \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3) = O(h^2) \end{aligned}$$

向前欧拉法的局部截断误差与阶

所以向前欧拉法是一种一阶方法, 其局部截断误差主项是$\frac{h^2}{2}y''(x_n)$.

以上定义对隐式单步法也适用, 对向后欧拉法, 由Talyor展开有

$$
\begin{aligned}
T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hf(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \\
&= y(x_{n+1}) - y(x_n) - hy'(x_{n+1}) \\
&= -\frac{h^2}{2}y''(x_{n+1}) + O(h^3) = O(h^2)
\end{aligned}
$$

所以，向后欧拉法是一种一阶方法, 其局部截断误差主项是$-\frac{h^2}{2}y''(x_{n+1})$.

如梯形法

$$
\begin{aligned}
T_{n+1} =& y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{h}{2}[y'(x_n) + y'(x_{n+1})] \\
=& hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) \\
& - \frac{h}{2}[y'(x_n) + y'(x_n) + hy''(x_n) + \frac{h^2}{2}y'''(x_n)] + O(h^4) \\
=& -\frac{h^3}{12}y'''(x_n) + O(h^4)
\end{aligned}
$$

所以，梯形法是二阶的, 其局部误差主项为$-\frac{h^3}{12}y'''(x_n)$.
改进的欧拉公式

$$
\begin{cases}
\text{预测}\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\
\text{校正}y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})]
\end{cases}
$$

目录

改进欧拉公式及推广

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

$$\phi(x_n, y_n, h) = \frac{1}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

直接的推广

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx \approx h \sum_{i=1}^{r} c_i f(x_n + \lambda_i h, y(x_n + \lambda_i h))$$

Runge-Kutta方法

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h)$$

$$\phi(x_n, y_n, h) = \sum_{i=1}^{r} c_i K_i,\ K_1 = f(x_n, y_n)$$

$$K_i = f(x_n + \lambda_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} \mu_{ij} K_j),\ i = 2, \cdots, r.$$

这里c_i, λ_i, μ_{ij}均为常数, 称上式为r级显式Runge-Kutta方法.

当$r=2$时

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h(c_1K_1+c_2K_2) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+\lambda_2 h, y_n+\mu_{21}hK_1) \end{cases}$$

其中$c_1,c_2,\lambda_2,\mu_{21}$为待定常数. 下面2级Runge-Kutta方法的推导中，为方便起见，记$f_n=f(x_n,y(x_n))$，$y(x_n)=y_n$, 则截断误差为

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-h[c_1f_n+c_2f(x_n+\lambda_2 h, y_n+\mu_{21}hf_n)]$$

Taylor展开

$$y(x_{n+1}) = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n + O(h^4)$$

$$y'_n = f(x_n, y_n) = f_n$$

$$y''_n = \frac{d}{dx}f(x_n, y_n) = f'_x(x_n, y_n) + f'_y(x_n, y_n) \cdot f_n$$

$$y'''_n = f''_{xx}(x_n, y_n) + 2f_n f'_{xy}(x_n, y_n) + f_n^2 f''_{yy}(x_n, y_n)$$

$$+ f'_y(x_n, y_n)[f'_x(x_n, y_n) + f_n f'_y(x_n, y_n)]$$

将这些展开式代入截断误差的表达式，得

$$
\begin{aligned}
T_{n+1} =& hf_n + \frac{h^2}{2}[f'_x(x_n, y_n) + f'_y(x_n, y_n)f_n] \\
& - h[c_1 f_n + c_2(f_n + \lambda_2 f'_x(x_n, y_n)h + \mu_{21} f'_y(x_n, y_n)f_n h)] + O(h^3) \\
=& (1 - c_1 - c_2)f_n h + (\frac{1}{2} - c_2\lambda_2)f'_x(x_n, y_n)h^2 \\
& + (\frac{1}{2} - c_2\mu_{21})f'_y(x_n, y_n)f_n h^2 + O(h^3)
\end{aligned}
$$

要使公式具有$p = 2$阶, 必须使

$$1 - c_1 - c_2 = 0,\ \frac{1}{2} - c_2\lambda_2 = 0,\ \frac{1}{2} - c_2\mu_{21} = 0$$

即

$$c_2\lambda_2 = \frac{1}{2},\ c_2\mu_{21} = \frac{1}{2},\ c_1 + c_2 = 1.$$

可令$c_2 = a \neq 0$, 则

$$c_1 = 1 - a,\ \lambda_2 = \mu_{21} = \frac{1}{2a}, \qquad \text{二阶R-K方法}$$

特别, $a = 1/2$, $c_1 = c_2 = 1/2$, $\lambda_2 = \mu_{21} = 1$, 改进欧拉法.

2级Runge-Kutta方法

若$a = 1, c_1 = 0, c_2 = 1, \lambda_2 = \mu_{21} = 1/2$,

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_2 \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1) \end{cases}$$

称为中点公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n))$$

3级3阶Runge-Kutta方法

当$r=3$时

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h(c_1K_1+c_2K_2+c_3K_3) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+\lambda_2 h, y_n+\mu_{21}hK_1) \\ K_3=f(x_n+\lambda_3 h, y_n+\mu_{31}hK_1+\mu_{32}hK_2) \end{cases}$$

例: $c_1=c_3=\frac{1}{6}$, $c_2=\frac{4}{6}$, $\lambda_2=\mu_{21}=\frac{1}{2}$, $\lambda_3=-\mu_{31}=1$, $\mu_{32}=2$.
三阶R-K方法

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=1 \\ \lambda_2=\mu_{21} \\ \lambda_3=\mu_{31}+\mu_{32} \\ c_2\lambda_2+c_3\lambda_3=\frac{1}{2} \\ c_2\lambda_2^2+c_3\lambda_3^2=\frac{1}{3} \\ c_3\lambda_2\mu_{32}=\frac{1}{6} \end{cases}$$

4级4阶Runge-Kutta方法

当$r = 4$时

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 = f(x_n, y_n) \\
K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1) \\
K_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2) \\
K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3)
\end{cases}
$$

目录

单步法

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h)$$

$$\begin{cases} |\phi(x,y,h) - \phi(x,\bar{y},h)| \le L_\phi |y - \bar{y}|. \\ T_{n+1} = O(h^{p+1}) \end{cases}$$

Theorem 3.1

$$y(x_n) - y_n = O(h^p)$$

Proof:

$$\bar{y}_{n+1} = y(x_n) + h\phi(x_n, y(x_n), h)$$

则$y(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1}$为局部截断误差, 有

$$|y(x_{n+1}) - \bar{y}_{n+1}| \le Ch^{p+1}$$

$$\begin{aligned}|\bar{y}_{n+1}-y_{n+1}| &\leq |y(x_n)-y_n| + h|\phi(x_n, y(x_n), h) - \phi(x_n, y_n, h)| \\ &\leq (1+hL_\phi)|y(x_n)-y_n|\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}|y(x_{n+1})-y_{n+1}| &\leq |\bar{y}_{n+1}-y_{n+1}| + |y(x_{n+1})-\bar{y}_{n+1}| \\ &\leq (1+hL_\phi)|y(x_n)-y_n| + Ch^{p+1}\end{aligned}$$

令$e_n = y(x_n) - y_n$, 则

$$|e_{n+1}| \leq (1+hL_\phi)|e_n| + Ch^{p+1}.$$

$$\Longrightarrow \quad |e_n| \leq (1+hL_\phi)^n|e_0| + \frac{Ch^p}{L_\phi}[(1+hL_\phi)^n - 1]$$

当$x_n - x_0 = nh \le T$时,

$$(1 + hL_\phi)^n \le (e^{hL_\phi})^n \le e^{TL\phi} \quad (e^x \ge 1 + x \text{ 当} x \ge 0\text{时})$$

这样最终得到下列估计式

$$|e_n| \le |e_0| e^{TL\phi} + \frac{Ch^p}{L_\phi}(e^{TL_\phi} - 1) \quad (e_0 = 0)$$

证明完毕.

Definition 3.2

若单步法的增量函数ϕ满足

$$\phi(x,y,0)=f(x,y)$$

则称单步法与初值问题相容.

以上讨论表明p阶方法, $p\geq 1$时, 与初值问题相容, 反之相容方法至少是1 阶. 由定理可知方法(2)收敛的充分必要条件是此方法是相容的.

绝对稳定性与绝对稳定域

考虑

$$y' = \lambda y \qquad \lambda\text{为复数, 且}\mathrm{Re}(\lambda) < 0$$

欧拉公式

$$y_{n+1} = (1 + h\lambda)y_n$$

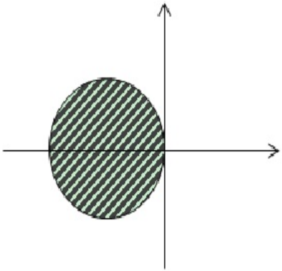
扰动

$$\begin{cases} y_n^* = y_n + \epsilon_n \\ y_{n+1}^* = y_{n+1} + \epsilon_{n+1} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \epsilon_{n+1} = (1 + h\lambda)\epsilon_n$$

$|\epsilon_{n+1}| < |\epsilon_n|$称为绝对稳定。
这样$|1 + \xi| < 1\,(\xi = h\lambda)$绝对稳定域。

绝对稳定性与绝对稳定域



绝对稳定性与绝对稳定域

二阶R-K方法

$$y_{n+1} = [1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}]y_n$$

$$\epsilon_{n+1} = [1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}]\epsilon_n$$

$$|1 + \xi + \frac{\xi^2}{2}| < 1$$

隐式梯形法

$$y_{n+1} = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} y_n$$

$$\left| \frac{1 + \frac{\xi}{2}}{1 - \frac{\xi}{2}} \right| < 1$$

为左半平面, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$

作业

1. 证明对任意参数t, 下列格式是二阶的

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + th, y_n + thK_1) \\ K_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hK_1) \end{cases}$$

2. 利用Euler公式计算

$$\int_0^x e^{t^2} dt$$

在点$x = 0.5, 1, 1.5, 2$的近似值.

3. 二级R-K方法不可能有三阶公式.

谢谢！