数理逻辑 character 1

命题逻辑：语义

§1.1 命题与连接符

1. 符号语言：$x_0 \in X,\ \forall x \in X,\ x \le x_0$ → { 语法 / 语义 / 语用

   自然语言、数学语言：x_0 是 X 中最大元

P.S. 程序设计语言是一种符号语言

2. 命题语言：

   ① 命题：具有真假意义的判断性或陈述性的语句

   ② 真值：< T 1 / F 0

   ③ 悖论：一种自相矛盾的陈述

   P.S. 悖论通常是自指的，反之则未必

3. 命题符号：原子命题：A, B, C …

   连接符：
   - $\sim A$
   - $A \wedge B$ 合取
   - $A \vee B$ 析取
   - $A \to B$
   - $A \leftrightarrow B$

   e.g. 三段论：
   $A \to B$
   A
   $\therefore B$

   命题变元：表示任意非特指的命题 p, q, r

§1.2 真值函数与真值表

①

p	$\sim p$
T	F
F	T

②

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

③

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

④

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

⑤

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

命题形式：命题 + 连接符构成的表达式

操作顺序：$\leftrightarrow$, $\to$, $\vee$, $\wedge$，同级从右至左

真值指派：对一命题形式分别赋予T/F值 ($n \to 2^n$ 种)

definition: 可满足性：存在一种真值指派 s.t. 结果为T

< 重言式：任意真值指派，结果恒为T
  矛盾式：任意真值指派，结果恒为F

判断方法：构造真值表

definition 逻辑隐含：$A\to B$ 为重言式

重言等价：$A\leftrightarrow B$ 为重言式，记作 $A\equiv B$

$\boxed{\text{如何构建真值表？}}$

step1 赋值

step2 解括号

（依次写在运算符下面）

○2.1 □2.2 □☆result

$(\sim$	$(p$	$\wedge$	$q))$	$\longleftrightarrow$	$((\sim$	$p)$	$\vee$	$(\sim$	$q))$
$\boxed{F}$	T	T	T	$\boxed{T}$	F	T	$\boxed{F}$	F	T
$\boxed{T}$	T	F	F	$\boxed{T}$	F	T	$\boxed{T}$	T	F
$\boxed{T}$	F	F	T	$\boxed{T}$	T	F	$\boxed{T}$	F	T
$\boxed{T}$	F	F	F	$\boxed{T}$☆	T	F	$\boxed{T}$	T	F

§1.3. 操作与替换规则

1. A. $A\to B$ 重言，则 B 重言

Proof. $\boxed{\text{反证}}$ 则存在真值指派 s.t B 真值 F 于是 A 真值 T. $A\to B$ 为 F. 矛盾！

2. 替换：A 含有 $P_1\sim P_n$. $A_1\sim A_n$ 任取. $A_{P_1\cdots P_n/A_1\cdots A_n}$ 为用 A_i 替换 P_i 得到的

① A 重言 $\Rightarrow A_{P_1\cdots P_n/A_1\cdots A_n}$ 重言

② $\begin{cases}\sim(A\wedge B)\equiv(\sim A)\vee(\sim B)\\ \sim(A\vee B)\equiv(\sim A)\wedge(\sim B)\end{cases}$

结合律 $\begin{cases}((A\vee B)\vee C)\equiv(A\vee(B\vee C))\\ ((A\wedge B)\wedge C)\equiv(A\wedge(B\wedge C))\end{cases}$

交换律 $\begin{cases}(A\vee B)\equiv(B\vee A)\\ (A\wedge B)\equiv(B\wedge A)\end{cases}$

③ A_1 含有 A

$B_1\ (A_{1\,A/B})$：用 B 替换 A_1 中 A 一(多)次

若 B 与 A 等值 $\Rightarrow B_1\equiv A_1$

④ 受限命题形式

命题中只含有“$\sim$”“$\vee$”“$\wedge$”

A^*：互换 A 中“$\vee$”与“$\wedge$” 归纳法易证

对 A 中任意 P_i 用 $\sim P$ 替换 $\Rightarrow A^*\equiv\sim A$

3. 定律合集

① Demorgan 律：$\bigvee_{i=1}^{n}(\sim A_i)=\sim(\bigwedge_{i=1}^{n}A_i)$

$\bigwedge_{i=1}^{n}(\sim A_i)=\sim(\bigvee_{i=1}^{n}A_i)$

② 无矛盾律 $\sim(A\wedge\sim A)$

排中律 $A\vee\sim A$

③ $A\equiv\sim\sim A$

$A\equiv A\wedge A\equiv A\vee A$

④ 输出律：$(A\wedge B)\to C\equiv A\to(B\to C)$

⑤ 换位律 $A\to B\equiv(\sim B)\to(\sim A)$

§1.4 范式

1. 基本合取式：e.g. $p_1, p_2, p_3 \Rightarrow F\,T\,F$

   则有 $\sim p_1 \wedge p_2 \wedge \sim p_3$（对应真值指派时为T，其余为F）

2. 文字：$p_i \,/\, \sim p_i$（正/负文字）。

命题：任意一个真值函数 f 都对应一个受限的命题形式A

构造如下：$\left\langle \begin{array}{l} p_{i_1} \sim p_{i_m} \text{ 取T} \\ p_{i_{m+1}} \cdots p_{i_n} \text{ 取F} \end{array}\right.$ 此时A取到了T，则对于所有的基本合取式取析取即可

$\boxed{\text{推论：析取范式DNF}}$ 任一非矛盾的命题形式都与一个形式为 $\bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij}\right)$ 的受限命题形式等价，其中 Q_{ij} 为文字，称其为DNF

同理：非重言式亦可求其合取范式CNF：$\bigwedge_{i=1}^{m}\left(\bigvee_{j=1}^{n} Q_{ij}\right)$

3. 求法过程：

   Step1. 作真值表

   Step2. 划分T/F

(~	p_1	∨	p_2)	→	p_3
F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F
F	T	F	F	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	F
T	F	T	F	F	F

DNF：

$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \sim p_2 \wedge p_3) \vee (\sim p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$

$(\sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \sim p_3)$

CNF：

$(\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \sim p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3)$

§1.5. 连接符的完备集

definition of 完备集：对任意真值函数可用仅含S中连接符的命题形式表示

e.g. $\{\sim, \vee, \wedge\}$（范式）。

（5个基本的）

同理 $\{\sim, \vee\}$，$\{\sim, \wedge\}$，$\{\sim, \rightarrow\}$ 都是连接符的完备集（除这3对，其余均不是）

1. 与非（$|$）　$A|B = \sim(A \wedge B)$

   或非（$\downarrow$）　$A \downarrow B = \sim(A \vee B)$

   $\{|\}$，$\{\downarrow\}$ 完备，"$|$" $\Rightarrow$ $\{\sim, \vee\}$，"$\downarrow$" $\Rightarrow$ $\{\sim, \wedge\}$

① $\sim p \equiv (p|p) \equiv (p \downarrow p)$

$p \wedge q \equiv \sim((\sim p) \vee (\sim q)) \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$

$p \vee q \equiv (p|p)|(q|q)$

② $p \rightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$ 代入①中即可只用 $|$ 表示

2. 异或（$\oplus$）　$A \oplus B = (A \vee B) \wedge ((\sim A) \vee (\sim B))$

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

§1.6 推理及其有效性

前提 → 结论　　演绎推理：从一些基本前提出发 ⟶ 推出结论（不可废除）

1. 推理形式：命题形式的一个有限序列，最后一个命题则是结论（其它命题为前提）

$$\begin{array}{l} p\to q \\ p \\ \therefore q \end{array}$$

有效：前提真值为T时，结论真值亦为T　　✓ 真值表即可

即 $A_1\cdots A_n;A$；当 $A_1\sim A_n$ 为T则A为T，否则称为无效的

2、有效的推理形式

① 分离规则（三段论）MP：$\begin{array}{|l|}\hline A \\ A\to B \\ \therefore B \\ \hline\end{array}$

② 逆分离规则 MT：$\begin{array}{|l|}\hline \sim B \\ A\to B \\ \therefore \sim A \\ \hline\end{array}$

③ 假言三段论 HS：$\begin{array}{|l|}\hline A\to B \\ B\to C \\ \therefore A\to C \\ \hline\end{array}$

④ 析取三段论 DS：$\begin{array}{|l|}\hline \sim A \\ A\vee B \\ \therefore B \\ \hline\end{array}$

⑤ 归谬法：$\begin{array}{|l|}\hline A\to \sim A \\ \therefore \sim A \\ \hline\end{array}$　$\begin{array}{|l|}\hline A\to (B\wedge\sim B) \\ \therefore \sim A \\ \hline\end{array}$

⑥ 引入规则：$\begin{array}{|l|}\hline A,B \\ \therefore A\wedge B \\ \hline\end{array}$　$\begin{array}{|l|}\hline A,B \\ \therefore A\vee B \\ \hline\end{array}$

⑦ 消去规则：$\begin{array}{|l|}\hline A\vee B \\ \therefore A \\ \hline\end{array}$　$\begin{array}{|l|}\hline A\vee B \\ \therefore B \\ \hline\end{array}$

注意：若 $A_1\cdots A_n;\therefore A$ 是有效的，当且仅当：$(A_1\wedge A_2\cdots\wedge A_n)\to A$ 是重言式

3、模型：对 $\forall A$，存在真值指派 v s.t. A取值为T，则称v为A一个模型（v满足A）

记作：$v\models A$　若对于所有 $A_0\in\Gamma$，$v\models A_0$ 则记 $v\models\Gamma$

① 有效：$\forall v$ s.t. $v\models A$　记作 $\models A$　（重言式是有效的）

② Γ可看作一个公式 $\bigwedge_{i=1} A_i$　$(\Gamma=\{A_1\cdots A_n\})$

4. 蕴含关系：　$A\models_L B$ iff 对任意v s.t. 若 $v\models A$ 则 $v\models B$

$\Gamma\models B \Leftrightarrow \forall v$ 有 若 $v\models\Gamma$ 则 $v\models B$ 即Γ蕴含B 则B为Γ的结论☆

① $(A\wedge B)\models B$

② $A,\ A\to B\models B$

注意以下推理形式：$A_1,A_2\cdots A_n;\therefore A$

是有效的 $\Leftrightarrow (A_1\wedge A_2\cdots\wedge A_n)\to A$ 是重言式

$\Leftrightarrow A_1\wedge A_2\cdots\wedge A_n\models A$