

# 数理逻辑

讲义，第 6.3 版，2024 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨

[linzuoquan@pku.edu.cn](mailto:linzuoquan@pku.edu.cn)

## 2 命题逻辑：语法

2.1 形式系统

2.2 完全性定理

- 形式系统

# 形式系统

## 回顾

$\Gamma \models \mathcal{A}$

- 如何从稻草堆中找出针？
- $\models$  保证一致性？

## (逻辑) 演算

形式(演绎)系统(符号演算, calculus)指使用符号, 并且有关符号的一切行为和性质完全由给定的规则集来确定, 而不依赖于符号特定的意义和具体的性质

形式系统  $L$  是命题(逻辑)演算

PL 在命题语言  $\mathcal{L}_0$  基础上形式化演绎推理(证明)

## 形式系统

描述一个形式系统，需要

- 形式语言：对命题演算形式即  $\mathcal{L}_0$ 
  - (1) 一个字符 (symbol) 表；
  - (2) 一个由字符组成的有限字符串 (称之为 (合式) 公式, well-formed formulas, 简写  $\text{wf}(s)$  或  $\text{wff}(s)$ ) 集
- 公理 (axioms)：规定一组合式公式
- 有限个演绎 (推理) 规则 (rule) 集：这些规则把一个合式公式  $\mathcal{A}$  作为某些合式公式  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  的直接后承 (consequence) 而推出

## 定义 2.1 (命题语言 $\mathcal{L}_0$ )

$\mathcal{L}_0$  组成如下

- ◊ 一个 (能枚举无穷的) 字符 (符号) 集 $\sim, \rightarrow, (, ), p_1, p_2, p_3, \dots$
- ◊ 一个合式公式 (简称公式, well-formed formulas (wfs)) 集, 归纳定义如下
  - (1) 对每个  $i \geq 1$ ,  $p_i$  是公式
  - (2) 若  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  都是公式, 则  $(\sim \mathcal{A})$  和  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$  也是公式
  - (3) 所有公式都由 (1) 和 (2) 生成

◆

注

- 命题 (如语句中名词) 可分使用 (如“这是北京”) 和提及 (如“‘北京’是由两个字组成”), 提及用引号, 这样, 定义 2.1 (1) 应表述: 对每个  $i \geq 1$ , ‘ $p_i$ ’ 是公式。为简便计, 省略提及的引号
- $p_1, p_2, p_3, \dots$  称为命题变元 (简称变元), 可能无穷, 因有限变元不足以组成任意长的公式, 但只需能枚举 (可列、可数)
- 技术性符号: “(”, “,”, “)”, 可引入其它技术性符号, 如“...”; 技术性符号不是必要的

## 元语言

当一种语言可用来谈论另一种语言时，前者将后者作为**对象语言**，前者是后者的**元语言**

例如，自然语言（汉语）是对象语言  $\mathcal{L}_0$  的元语言

类似地，可有**元元语言**等

例如，我们用汉语讲一本用英语写的学习拉丁文的书  
两种语言可能互为对象语言和元语言

## 注

- 定义 2.1： $\mathcal{A}$  等原不是对象语言  $\mathcal{L}_0$  中字符集（变元  $p_i$ ）中符号， $\mathcal{A}$  其实是元语言中记号。公式可加引号如「 $(\sim \mathcal{A})$ 」表示，称**准引用**（Quine 引号），代表语言表达式的缩写（公式最终能枚举还原到  $\mathcal{L}_0$  中字符），为简便计，省略了技术性引号，把  $\mathcal{A}$  等看成类似对象符号使用用
- 自然语言表达能力丰富可作为自身的元语言，如自指

## 定义 2.2 (形式系统 $L$ )

命题演算形式系统  $L$ : 在  $\mathcal{L}_0$  上, 对任意公式  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ , 规定如下

- ◊ 一组公理: 通过三个公理模式 (schema) 来刻画, 对任何公式  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , 下列公式是  $L$  的公理

$$\begin{array}{ll} (\text{L1}) \quad (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})) & \text{(后件确定)} \\ (\text{L2}) \quad ((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))) & \text{(隐含分配)} \\ (\text{L3}) \quad (((\sim \mathcal{A}) \rightarrow (\sim \mathcal{B})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})) & \text{(前后换位)} \end{array}$$

- ◊ 演绎规则: 分离规则 MP

(R) 若  $\mathcal{A}, (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ , 则 (推出)  $\mathcal{B}$

即  $\mathcal{B}$  是  $\mathcal{A}$  和  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$  的直接后承



## 注 (公理模式)

记  $\mathcal{A}_{p_1, p_2, \dots, p_n}/\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$  表示对公式  $\mathcal{A}$  中变元  $p_i$  分别用公式  $\mathcal{A}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 替换 (任意次出现) 得到的公式

### 替换规则

若  $\mathcal{A}$ , 且  $p_1, p_2, \dots, p_n$  为变元, 则  $\mathcal{A}_{p_1, p_2, \dots, p_n}/\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$

若增加替换规则, 则不需使用公理模式, 即 (L1-3) 中公式可写成变元

## 注

- 公式对应命题形式
- 连接符  $\{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$  不在  $\mathcal{L}_0$  中, 由于  $\{\sim, \rightarrow\}$  是一个连接符的完备集, 因此  $\{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$  可作为定义缩写引入, 包含  $\{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$  的公式可由  $\mathcal{L}$  的等值式表达
- 公理是有效的命题形式, 可有不同的公理系统, 不同的连接符完备集有不同的公理

- 形式系统  $L$  是一个公理系统

- 公理是没有经过证明，但被当作不证自明的命题
- 其真实性被视为理所当然的，当做演绎起点（证明的因果关系不能无限地追溯而需止于无需证明的公理）
- 通常很简单，且符合直觉
- 公理系统是一种证明论（proof theory），证明论还有其它系统（等价于公理系统）
- Euclid（平面）几何公理是第一个公理系统，非欧几何是另一个公理系统
- Hilbert 首先给出 Euclid 几何的形式系统（完全的几何公理系统）

## • Euclid 几何公设

- ① 一条直线段可以联接两个点
- ② 一条直线上任何一条直线段可以无限延伸
- ③ 给定一条直线段，可以以一个端点为圆心，以此线段为半径做一个圆
- ④ 一切直角都彼此相等
- ⑤ 如果两条直线与第三条直线相交时，在第三条直线的某一侧三条线所夹的内角之和小于两个直角的和，则那两条直线沿着这一侧延伸足够长之后必然相交
  - 给定任一直线和不在直线上的一点，存在有一条，且仅仅存在一条通过那个点，且永不与前一条直线相交的直线，无论两直线延伸多远

- 非 Euclid 几何: 第五公设 (平行公设)

- 若断言没有这样的直线存在，则是椭圆几何
- 若断言至少有两条这种直线存在，则是双曲几何

- 1823 年, Bolyai 和 Lobachevskii 独立发现

论证: 若你设定它的反面, 然后以这样一条公设作为你的第五公设开始推演几何学, 肯定不久之后你会制造出矛盾。因为没有任何数学系统能支持矛盾, 你就表明了你自己的那个第五公设是不可靠的, 于是表明了 Euclid 的第五公设是可靠的

### 注

- 第五条公设是不可判定的

- 绝对几何学的四条公设没有固定住“点”和“线”这些术语的意义, 从而为这些概念具有不同外延留下了余地。两千年来, 使用先入为主的词“点”和“线”则使人相信那些词必须是单值的, 只能有一个意义

## 定义 2.3 (证明)

形式系统  $L$  中的一个 (形式) 证明 (proof) 是指一个公式序列  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ , 使得对每个  $i (1 \leq i \leq n)$ ,  $\mathcal{A}_i$  或是  $L$  中的一个公理, 或可由此序列中位于前面的两个公式  $\mathcal{A}_j$  和  $\mathcal{A}_k$  ( $j < i, k < i$ ), 作为应用分离规则 MP 的直接后承而得, 称为在  $L$  中  $\mathcal{A}_n$  的一个证明,  $\mathcal{A}_n$  称为  $L$  的一条定理 (theorem), 亦称  $\mathcal{A}_n$  可证 ◇

### 注

- (1)  $\mathcal{A}_i$  若由  $\mathcal{A}_j$  和  $\mathcal{A}_k$  作为应用 MP 的后承而得, 则  $\mathcal{A}_j$  和  $\mathcal{A}_k$  必是形如  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}_i$
- (2) 若  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  是  $L$  中的一个证明, 则对  $k < n$ ,  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  也是  $L$  中的一个证明, 因此  $\mathcal{A}_k$  也是  $L$  中的一条定理 (可作为引理);
- (3)  $L$  中的公理也是  $L$  中的定理, 它们在  $L$  中的证明是只含有一项的序列
- (4) 不可证性: 若不存在一个公式序列  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ , 使得  $\mathcal{A}_n$  可证

## 例 2.4

以下公式系列是一个  $L$  中的证明

$$(1) (p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)) \quad (\text{L1})$$

$$(2) ((p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_1))) \quad (\text{L2})$$

$$(3) ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_1)) \quad (1)(2)\text{MP}$$

$((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_1))$  是一个  $L$  的定理

## 注

以上证明形式：左边是序号，中间是证明，右边是理由

## 定义 2.5

令  $\Gamma$  是  $L$  中的公式集。 $L$  中的公式序列  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  是从  $\Gamma$  的一个演绎，若对每个  $i (1 \leq i \leq n)$ ，下列之一成立：

- (1)  $\mathcal{A}_i$  是  $L$  的公理；
- (2)  $\mathcal{A}_i$  属于  $\Gamma$  ( $A_i \in \Gamma$ )；
- (3)  $\mathcal{A}_i$  可由此序列中位于前面的两个公式  $\mathcal{A}_j$  和  $\mathcal{A}_k$  ( $j < i, k < i$ )，作为应用 MP 的直接后承而得

$\mathcal{A}_n$  称为从  $\Gamma$  可演绎的，或称为  $L$  中  $\Gamma$  的一个后承，若公式  $\mathcal{A}$  是  $\Gamma$  的某个演绎的最后一项，亦称  $\Gamma$  产生了（推出） $\mathcal{A}$ ，记作  $\Gamma \vdash_L \mathcal{A}$  (简记  $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ ) ◇

## 注

证明或演绎的序列中每一步  $\mathcal{A}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 都有正当理由 (justification, 或称依据)，应加以说明

## 记号

- 由于  $L$  中的一条定理是从空集可演绎的，若  $\mathcal{A}$  是  $L$  中的一条定理，可记作  $\emptyset \vdash_L \mathcal{A}$ ，简记  $\vdash_L \mathcal{A}$  或  $\vdash \mathcal{A}$
- 记「 $\vdash \mathcal{A}$  表  $\mathcal{A}$  不可从「演绎， $\nvdash \mathcal{A}$  表  $\mathcal{A}$  不是定理（不可证）

## 注（演绎逻辑）

- $L$  中的证明是从公理出发的一个演绎
- 演绎逻辑意味所有（无穷）结论（定理）都蕴藏在前提（公理）中，演绎过程只是把结论找出来，某种意义上，演绎并不发现新（未知）知识
  - 如数学，找出定理也是很有意义的

## 元定理

$\vdash$  是元语言记号

元定理意指关于（对象语言）形式系统的结果，如“命题”、“ $\vdash_L$ ”等

## 注

定理（定义 2.3）与数学语言中定理的区别：数学中定理是有关某种事实的陈述为（语义上）真理，数学中对定理（真理）的证明是非形式化的（不严格）；定义 2.3 的证明指形式（化）证明，所得为定理（严格）

## 例 2.6

在  $L$  中构造  $\{\mathcal{A}, (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))\} \vdash_L (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$  的一个演绎，其中  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  是  $L$  中的任何公式

(1)  $\mathcal{A}$  假设

(2)  $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$  假设

(3)  $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$  (L1)

(4)  $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$  (1)(3)MP

(5)  $((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})))$  (L2)

(6)  $((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))$  (2)(5)MP

(7)  $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$  (4)(6)MP

## 注

- 一个公式集，写如  $\{\mathcal{A}, (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))\}$ , 或  $\mathcal{A}, (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$
- 在  $L$  中证明一个公式是定理的方法是构造证明的一个公式序列。在一定程度上这种方法比较冗长
- 在证明中允许插入前面已经在  $L$  中证明过的公式（作为引理），可使定理证明较为容易
- 使用某些一般的元定理，其中有些具有推理规则的效果
- 构造  $L$  中定理的证明是基本的命题演算能力，必须写清楚证明步骤的理由

## 斜形证明

- (1)  $\mathcal{A}$
- (2)  $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$
- (3)  $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$
- (4)  $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$  (1)(3)MP
- (5)  $((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})))$
- (6)  $((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))$  (2)(5)MP
- (7)  $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$  (4)(6)MP

斜形证明是形式证明的一种较方便（层次）写法

(1)  $\mathcal{A}_1$

(2)  $\mathcal{A}_2$

(3)  $\mathcal{A}_3$

(4)  $\mathcal{B}_1$

(5)  $\mathcal{B}_2$

(6)  $\mathcal{C}_1$

(7)  $\mathcal{D}$

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \vdash \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2; \quad \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \vdash \mathcal{C}_1$

$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2; \mathcal{C}_1 \vdash \mathcal{D}$

## 例 2.7

对 ( $L$  中) 任意公式  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ,

(a)  $\vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

(b)  $\vdash \sim \mathcal{B} \rightarrow \cdot \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$

## 例 2.7 (a)

- (1)  $\mathcal{A} \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A})$
- $\rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}))$  (L2)
- (2)  $\mathcal{A} \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A})$  (L1)
- (3)  $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$  (1)(2)MP
- (4)  $\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$  (L1)
- (5)  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  (3)(4)MP

## 例 2.7 (b)

$$(1) \sim \mathcal{B} \rightarrow \cdot \sim \mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B}$$

$$(2) \sim \mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B} \rightarrow \cdot \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(3) (\sim \mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \cdot \sim \mathcal{B} \rightarrow ((\sim \mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$$

$$(4) \sim \mathcal{B} \rightarrow ((\sim \mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})) \quad (2)(3)\text{MP}$$

$$(5) \sim \mathcal{B} \rightarrow ((\sim \mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow \cdot \\ (\sim \mathcal{B} \rightarrow (\sim \mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B})) \rightarrow (\sim \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$$

$$(6) \sim \mathcal{B} \rightarrow (\sim \mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B}) \rightarrow \cdot \sim \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \quad (4)(5)\text{MP}$$

$$(7) \sim \mathcal{B} \rightarrow \cdot \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A} \quad (1)(6)\text{MP}$$

## 命题 2.8 (演绎定理)

若  $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_L \mathcal{B}$ , 则  $\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ , 其中  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  都是  $L$  中的公式,  $\Gamma$  是  $L$  中的公式集 (可为空)  $\diamond$

证

(结构归纳) 对从  $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\}$  到  $\mathcal{B}$  的演绎序列中公式的数目做归纳  
假定这个序列只有一个公式, 则此公式就是  $\mathcal{B}$

1.  $\mathcal{B}$  是公理, 则

- (1)  $\mathcal{B}$  公理
- (2)  $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}))$  (L1)
- (3)  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$  (1)(2)MP

为从  $\Gamma$  到  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$  的一个演绎, 即  $\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$

2.  $\mathcal{B}$  属于  $\Gamma$ , 则

- (1)  $\mathcal{B}$   $\Gamma$  的成员
- (2)  $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}))$  (L1)
- (3)  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$  (1)(2)MP

## 证 (续)

3.  $\mathcal{B}$  就是  $\mathcal{A}$ , 则

- (1)  $(\mathcal{A} \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}))$   
 $\rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}))$  (L2)
- (2)  $(\mathcal{A} \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}))$  (L1)
- (3)  $((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}))$  (1)(2)MP
- (4)  $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}))$  (L1)
- (5)  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$  (3)(4)MP

为  $L$  中的一个证明, 即  $\vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$ , 亦即由  $\Gamma$  到  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$  的一个演绎,  $\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$

## 证 (续)

设对从  $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\}$  到  $\mathcal{C}$  的演绎序列长度小于  $n$  ( $n > 1$ ) 的所有公式  $\mathcal{C}$ ，要证明的结论都成立，考虑从  $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\}$  到  $\mathcal{B}$  的演绎序列长度为  $n$ ，则

1.  $\mathcal{B}$  是公理
2.  $\mathcal{B}$  属于  $\Gamma$
3.  $\mathcal{B}$  就是  $\mathcal{A}$

这三种情况与前面类似

## 证 (续)

4.  $\mathcal{B}$  由演绎中较前两个公式应用 MP 而得, 则这两个公式必为  $\mathcal{C}$  和  $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B})$  的形式, 就有

$$\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})$$

和

$$\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}))$$

## 证 (续)

不妨设

$$\left. \begin{array}{c} (1) \cdots \\ \cdots \\ (k) (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \end{array} \right\} \text{为从 } \Gamma \text{ 到 } (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \text{ 的演绎,}$$

$$\left. \begin{array}{c} (k+1) \cdots \\ \cdots \\ (l) (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B})) \end{array} \right\} \text{为从 } \Gamma \text{ 到 } (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B})) \text{ 的演绎,}$$

## 证 (续)

$$\begin{aligned}(l+1) \ (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B})) \rightarrow \\ ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})) \quad (L2)\end{aligned}$$

$$(l+2) \ (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \quad (l)(l+1)MP$$

$$(l+3) \ (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \quad (k)(l+2)MP$$

从 (1) 到  $(l+3)$  为从  $\Gamma$  到  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$  的一个演绎，

故  $\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$



## 命题 2.9 (演绎定理的逆)

若  $\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ , 则  $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_L \mathcal{B}$ , 其中  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  都是  $L$  中的公式,  $\Gamma$  是  $L$  中的公式集 (可为空)  $\diamond$

证

若  $\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ , 则存在从  $\Gamma$  到  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$  的演绎, 不妨设

$$\left. \begin{array}{ll} (1) & \dots \\ & \dots \\ (k) & (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \end{array} \right\} \text{为从 } \Gamma \text{ 到 } (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \text{ 的演绎,}$$

$$(k+1) \quad \mathcal{A} \qquad \qquad \qquad \Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \text{ 的成员}$$

$$(k+2) \quad \mathcal{B} \qquad \qquad \qquad (k)(k+1)\text{MP}$$

为从  $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\}$  到  $\mathcal{B}$  的演绎, 故  $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_L \mathcal{B}$

推论 2.10 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_L \mathcal{B}$ , 当且仅当  $\Gamma \vdash_L \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$



注

演绎 定理是一个关键的元定理，可在证明中应用，使得证明变得容易

## 推论 2.11

对任何公式  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ , 有

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$$



证

$$\begin{array}{ll}
 (1) & \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \\
 (2) & \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \\
 (3) & \mathcal{A} \\
 (4) & \mathcal{B} \\
 (5) & \mathcal{C}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 (1)(3)MP \\
 (2)(4)MP
 \end{array}$$

则  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{C}$ , 由演绎定理知

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$$



注

$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  即假言三段论 HS，可作为一条新的推理规则来使用

亦可得

$$\vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$$

## 命题 2.12

对任何公式  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

(a)  $\vdash \sim \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \cdot \mathcal{A}$

(a')  $\sim \mathcal{A}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$

(b)  $\vdash \sim \mathcal{A} \rightarrow \cdot \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$

(b')  $\vdash \sim \sim \mathcal{A} \rightarrow \cdot \sim \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$

(b'')  $\sim \mathcal{A}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$



## 注

(a) 和 (b) 略有不同，证明过程和作为引理使用亦不同

(a)

- (1)  $\sim A \rightarrow A$
- (2)  $\sim A \rightarrow \cdot \sim (\sim A \rightarrow A) \rightarrow \sim A$
- (3)  $\sim \sim (\sim A \rightarrow A) \rightarrow \sim A \rightarrow \cdot A \rightarrow \sim (\sim A \rightarrow A)$
- (4)  $\sim A \rightarrow \cdot A \rightarrow \sim (\sim A \rightarrow A)$  (2)(3)HS
- (5)  $\sim A \rightarrow (A \rightarrow \sim (\sim A \rightarrow A)) \rightarrow \cdot$   
 $(\sim A \rightarrow A) \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim (\sim A \rightarrow A))$
- (6)  $\sim A \rightarrow A \rightarrow \cdot \sim A \rightarrow \sim (\sim A \rightarrow A)$  (4)(5)MP
- (7)  $\sim A \rightarrow \cdot \sim (\sim A \rightarrow A)$  (1)(6)MP
- (8)  $\sim A \rightarrow \sim (\sim A \rightarrow A) \rightarrow \cdot$   
 $(\sim A \rightarrow A) \rightarrow A$
- (9)  $\sim A \rightarrow A \rightarrow \cdot A$  (7)(8)MP
- (10)  $A$  (1)(9)MP

即  $\sim A \rightarrow A \vdash A$ , 由演绎定理, 亦即  $\vdash \sim A \rightarrow A \rightarrow \cdot A$



## 证 (续)

(b) (例 2.7 (b), 用 HS)

$$(1) \quad \sim\mathcal{A} \rightarrow \cdot \sim\mathcal{B} \rightarrow \sim\mathcal{A} \quad (\text{L1})$$

$$(2) \quad \sim\mathcal{B} \rightarrow \sim\mathcal{A} \rightarrow \cdot\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \quad (\text{L3})$$

$$(3) \quad \sim\mathcal{A} \rightarrow \cdot\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \quad (1)(2)\text{HS}$$



## 简略证明

形式证明中，可省略指明替换、分离（MP）和演绎定理（依据）

例（例 2.7 / 命题 2.12(b)，用 HS）

$$\vdash \neg A \rightarrow \cdot A \rightarrow B$$

证

$$(1) \quad \neg A \vdash \neg B \rightarrow \neg A \tag{L1}$$

$$(2) \quad \neg A \vdash A \rightarrow B \tag{1)(L3)(HS)}$$

$$[ \vdash \neg A \rightarrow \cdot A \rightarrow B \tag{2)(演绎定理)} ]$$

最后一行可省略



### 例 2.13

对任何公式  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

(a)  $\vdash \sim \sim \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

(a')  $\sim \sim \mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$

(b)  $\vdash \mathcal{A} \rightarrow \sim \sim \mathcal{A}$

(b')  $\mathcal{A} \vdash \sim \sim \mathcal{A}$

(c)  $\vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \cdot \sim \mathcal{B} \rightarrow \sim \mathcal{A}$

# 证

(a)

$$(1) \quad \sim\sim A \vdash \sim\sim\sim A \rightarrow \sim\sim A \quad (\text{L1})$$

$$(2) \quad \sim\sim\sim A \rightarrow \sim A \vdash \sim A \rightarrow \sim\sim A \quad (\text{L3})$$

$$(3) \quad \sim\sim A \vdash \sim A \rightarrow \sim\sim A \quad (1)(2)(\text{HS})$$

$$(4) \quad \sim\sim A \vdash \sim A \rightarrow A \quad (1)(\text{L3})(\text{HS})$$

(b)

$$(1) \quad \sim\sim A \vdash \sim A \quad (\text{a})(\text{L3})$$



证

(c)

- (1)  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \sim \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$  (a)
- (2)  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \sim \mathcal{A} \vdash \sim \mathcal{B}$  (b)(HS)
- (3)  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \vdash \sim \mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B}$  (L3)(HS)



## 其它连接符

其它连接符通过定义（作为缩写）引入

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \equiv \sim(\mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B})$$

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \sim \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \equiv (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$$

例 2.7 (b)

$$(b) \vdash \sim \mathcal{B} \rightarrow \cdot \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(b') \vdash \sim \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(b'') \vdash \sim(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}$$

注

- 把定义的其它连接符还原为只含  $\sim, \rightarrow$  进行演算
- 依次展开含 5 个连接符的演算

### 例 2.14

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$$

(1)  $\mathcal{A} \rightarrow \sim \sim \mathcal{A}$

例2.13(a)

(2)  $\sim \sim \mathcal{A} \rightarrow (\sim \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$

命题2.12(b')

(3)  $\mathcal{A} \rightarrow (\sim \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$

(1)(2)(HS)

(4)  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$

(3)定义

## 定义 2.15

- 令  $\Gamma$  是公式集，若存在某个公式  $A$ ，使得  $\Gamma \vdash A$  和  $\Gamma \vdash \sim A$ ，则称  $\Gamma$  是不一致的；否则， $\Gamma$  是一致的
- 令  $\Gamma$  是公式集，若一个公式  $A$ ，使得  $\Gamma \not\vdash A$  和  $\Gamma \not\vdash \sim A$ ，称  $A$  独立于  $\Gamma$
- 令  $\Gamma$  是公式集， $A, B$  是任何公式，若  $\{A, \sim A\} \subseteq \Gamma$ ，则  $\Gamma \vdash B$ ，称为平凡性 (triviality)
- 令  $\Gamma, \Gamma'$  是公式集， $\Gamma \subseteq \Gamma'$ ， $A$  是任一公式，若  $\Gamma \vdash A$  则  $\Gamma' \vdash A$ ，称为单调性 (monotonicity)



## 命题 2.16

$L$  具有平凡性和单调性



## 证

显见 (据定义)



## 命题 2.17

令  $\Gamma$  是公式集， $\Gamma$  是不一致的当且仅当对任何公式  $\mathcal{A}$ ， $\Gamma \vdash \mathcal{A}$



### 证

显见 (命题 2.12 (b))



### 注

- 不一致性会导致平凡性
- 没有真值指派使不一致的公式集成真（不一致公式集没有模型）
- 空（公式）集是一致的
- 一致性： $L$  是一致的，即  $\Vdash_L \mathcal{A}$  或  $\Vdash_L \sim \mathcal{A}$ ，但需要证明。如何证？
- 独立性： $\mathcal{A}$  独立于  $\Gamma \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\mathcal{A}\}$  和  $\Gamma \cup \{\sim \mathcal{A}\}$  都是一致的
- 一致性和独立性可看成某种关于不可证 ( $\nVdash$ ) 的结果

- 不一致的公式集是没意义的，但平凡性对数学是合理的，因数学的基础是保证一致性
- 平凡性对数学之外则不合理

如，一个银行信息系统若基于（命题）逻辑，平凡性意味由于数据库中一个矛盾记录会导致任何人取任意款

- 平凡性是常见的（局部影响全局）

如，一个操作系统可能由于一个程序出错导致整个系统崩溃  
(即其它无关的程序都不能运行)

- 单调性亦然

如，人在日常生活中的推理是非单调的

### 定义 2.18

一个 ( $\mathcal{L}_0$  的) 公式集  $\Gamma$  称为极大一致 (maximally consistent, MC)，若

- $\Gamma$  是一致的
- 不存在另一个一致的公式集  $\Gamma'$  使得  $\Gamma \subset \Gamma'$

令  $\Gamma$  是一个公式集，对每个  $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ，若  $\Gamma'$  是一致的且不存在另一个  $\Gamma'' \subset \Gamma$  使得  $\Gamma' \subset \Gamma''$ ，则  $\Gamma'$  称为  $\Gamma$  的极大一致子集 (MCS) ◇

### 命题 2.19

一个公式集  $\Gamma$  是极大一致的，当且仅当

- (a)  $\Gamma$  是一致的
- (b) 对任一公式  $A$ ,  $A \in \Gamma$  或  $\sim A \in \Gamma$

证

( $\Rightarrow$ ) 设  $\Gamma$  是极大一致的，则由定义，(a) 即成立

假若  $\mathcal{A} \notin \Gamma$  且  $\sim \mathcal{A} \notin \Gamma$ ，则 (由定义)

$\{\Gamma, \mathcal{A}\}$  与  $\{\Gamma, \sim \mathcal{A}\}$  都是不一致的，可证 (由演算)

$\Gamma \vdash \sim \mathcal{A}$  与  $\Gamma \vdash \mathcal{A}$

这与 (a) 矛盾，故有 (b)

( $\Leftarrow$ ) 反之亦然

□

## 定义 2.20

令  $\Gamma$  为公式集,  $\mathcal{A}$  为任意公式。极大一致推理  $\vdash_{MCS}$  定义如下:

$\Gamma \vdash_{MCS} \mathcal{A}$  当且仅当  $MCS(\Gamma) \vdash \mathcal{A}$



## 问题

MCS 具有有趣的性质

考虑: 极大一致子集 (MCS) 推理是否具平凡性和单调性?

## 证明论 \*

- 公理系统 (Hilbert 型系统)
- 序列演算 (Gentzen 型系统, 自然推理系统)
- 表系统 (Tableaux)
- 归结系统 (Resolution)
- 等等

### 等价的公理系统

$$(L1) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$$

$$(L2) \quad (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$$

$$(L3) \quad (((\sim \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\sim \mathcal{A}) \rightarrow (\sim \mathcal{B}))) \rightarrow \mathcal{A}$$

$$[(L3)] \quad (((\sim \mathcal{A}) \rightarrow (\sim \mathcal{B})) \rightarrow ((\sim \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{A}$$

规则： MP

(以下公理系统的规则都是 MP)

## 基于 $\sim, \vee$ 的公理系统

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} =_{\text{def}} \sim \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$$

$$(\text{L1}) \quad (\mathcal{A} \vee \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(\text{L2}) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$

$$(\text{L3}) \quad (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B} \vee \mathcal{A})$$

$$(\text{L4}) \quad (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}))$$

## 基于 $\sim, \wedge$ 的公理系统

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} =_{\text{def}} \sim(\mathcal{A} \wedge \sim \mathcal{B})$$

$$(\text{L1}) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$$

$$(\text{L2}) \quad (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$$

$$(\text{L3}) \quad ((\sim \mathcal{A}) \rightarrow (\sim \mathcal{B})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$$

$$(\text{L4}) \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(\text{L5}) \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$$

$$(\text{L6}) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$$

## 其它基于 $\sim, \wedge$ 的公理系统

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} =_{\text{def}} \sim(\mathcal{A} \wedge \sim \mathcal{B})$$

$$(\text{L1}) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{A})$$

$$(\text{L2}) \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(\text{L3}) \quad (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\sim(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \rightarrow (\sim(\mathcal{C} \wedge \mathcal{A})))$$

## 基于 $\sim, \rightarrow, \wedge, \vee$ 的公理系统

$$(L1) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$$

$$(L2) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$$

$$(L3) \quad ((\sim \mathcal{A}) \rightarrow (\sim \mathcal{B})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$$

$$(L4) \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(L5) \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$$

$$(L6) \quad (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$$

$$(L7) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$

$$(L8) \quad \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$

$$(L9) \quad (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}))$$

## 一条公理的公理系统

基于  $\sim, \rightarrow$

$$\begin{aligned} (\text{L1}) \quad & (((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\sim \mathcal{C} \rightarrow \sim \mathcal{A})) \rightarrow \sim \mathcal{C}) \rightarrow \sim \mathcal{C} \\ & \rightarrow ((\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})) \end{aligned}$$

基于 |

$$(\text{L1}) \quad (\mathcal{A} \mid (\mathcal{B} \mid \mathcal{C}) \mid \{[(\mathcal{D} \mid (\mathcal{D} \mid \mathcal{D})) \mid [(\mathcal{E} \mid \mathcal{B}) \mid ((\mathcal{A} \mid \mathcal{E}) \mid (\mathcal{A} \mid \mathcal{E}))]\})$$

## 注

公理系统  $L$  和  $L'$  的等价性：由  $L$  推出  $L'$  的所有公理（即它们有相同的定理集），反之亦然；或由它们的完全性定理得知

## 公理的独立性 \*

### 定义 2.21

一个公理系统的某个公理子集  $Y$  (某条公理) 称为**独立** (independence)，若存在  $Y$  的公式 (该条公理) 不能从不属于  $Y$  的其它公理及规则证明出来

### 命题 2.22

公理 (模式) (L1), (L2), (L3) 都是独立的

证

考虑如下 (三值) 真值表

$A$	$\sim A$	$A$	$B$	$A \rightarrow B$
0	1	0	0	0
1	1	1	0	2
2	0	2	0	0
		0	1	2
		1	1	2
		2	1	0
		0	2	2
		1	2	0
		2	2	0

若一个公式  $\mathcal{C}$  总是取值为 0，称之为可选 (select) 的。验证：(L2)，(L3) 是可选的，MP 保持可选性，因此任何由 (L2)，(L3) 和 MP 推出的公式都是可选的，但易见 (L1) (的实例) 不是可选的，即 (L1) 不能从 (L2)，(L3) 和 MP 推出

## 注

- (L2), (L3) 的独立性证明类似，设计相应的真值表
- 公理的独立性定理使得公理系统（数学）最为简洁（优美）
- 三值真值表可定义三值逻辑（连接符），可推广到（有限或无限）多值逻辑

# 数理逻辑

讲义，第 6.3 版，2024 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨

[linzuoquan@pku.edu.cn](mailto:linzuoquan@pku.edu.cn)

## 2 命题逻辑：语法

2.1 形式系统

2.2 完全性定理

- 形式系统
- 完全性定理

# 完全性定理

## 回顾

命题语言  $\mathcal{L}_0$

- 语法

- 一个能枚举无穷的符号集:  $\sim, \rightarrow, (, ), p_1, p_2, p_3, \dots$
- 一个公式 (wfs) 集

- 语义

- 真值赋值, 即命题形式的真值函数 (真值表)

在  $\mathcal{L}_0$  上, 命题演算 (形式系统)  $L$

- 语法

- 证明论:  $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ 
  - 一组公理 (模式) 和推理规则

- 语义

- 模型论:  $\Gamma \models \mathcal{A}$

$L$  的基本性质

- 可靠性 (soundness):  $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \Gamma \models \mathcal{A}$
- 完全性 (completeness):  $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Leftarrow \Gamma \models \mathcal{A}$

## 注

语法与语义之间具有同构关系

### 定义 2.23 (赋值)

$L$  的一个赋值 (valuation) 是一个函数  $v$ , 其定义域是  $L$  的公式, 值域是  $\{T, F\}$ , 使得对  $L$  的任意公式  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

$$(1) \quad v(\mathcal{A}) \neq v(\sim \mathcal{A})$$

$$(2) \quad v(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = F \text{ 当且仅当 } v(\mathcal{A}) = T \text{ 且 } v(\mathcal{B}) = F$$

◇

## 注

$L$  的一个赋值亦即对一个 (任一非特定) 命题语言  $\mathcal{L}_0$  的赋值

## 模型

令  $v$  是  $L$  的一个赋值,  $\mathcal{A}$  是一个公式。若  $v(\mathcal{A}) = T$ , 称  $v$  使  $\mathcal{A}$  成真, 亦称  $v$  满足  $\mathcal{A}$ ,  $v$  是  $\mathcal{A}$  的一个模型, 记为  $v \models_L \mathcal{A}$ , 简记  $v \models \mathcal{A}$

## 定义 2.24 (重言式)

$L$  中的一个公式  $\mathcal{A}$  是重言式, 若对每个赋值  $v$ , 都有  $v(\mathcal{A}) = T$ , 记为  $\models_L \mathcal{A}$ , 简记  $\models \mathcal{A}$

## 注

重言式对于命题语言是不变的: 若  $\mathcal{L}_0$  和  $\mathcal{L}'_0$  是两个命题语言使得  $\mathcal{A}$  既是  $\mathcal{L}_0$  的公式又是  $\mathcal{L}'_0$  的公式, 则  $\mathcal{A}$  是  $\mathcal{L}'_0$  的重言式当且仅当  $\mathcal{A}$  是  $\mathcal{L}_0$  的重言式

## 命题 2.25 (可靠性定理)

$L$  的每个定理都是一个重言式 ◇

证

(对构成  $\mathcal{A}$  在  $L$  中证明的公式序列中公式的数目进行归纳)

令  $\mathcal{A}$  是一个定理

- (1) 若  $\mathcal{A}$  的证明仅有一步，则  $\mathcal{A}$  一定是公理，易证公理都是重言式
- (2) 设  $\mathcal{A}$  的证明有  $n (n > 1)$  步，假设  $\mathcal{C}$  的证明少于  $n$  步，则  $\mathcal{C}$  是重言式。若  $\mathcal{A}$  是公理，则  $\mathcal{A}$  是重言式；若  $\mathcal{A}$  是由证明序列中  $\mathcal{A}$  前面的两项公式  $\mathcal{B}$  和  $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$  应用 MP 而得，由归纳假设可知， $\mathcal{B}$  和  $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$  都是重言式，进一步，由命题 1.21 知， $\mathcal{A}$  是重言式

注

作为推论，可靠性定理：若  $\vdash \mathcal{A}$ ，则  $\models \mathcal{A}$

### 定义 2.26 (扩充)

$L$  的一个扩充 (extension) 是通过修改或扩大的公理组使得  $L$  的所有定理仍是定理 (可能引入新的定理) 而得的一个形式系统 ◇

### 注

$L$  的一个扩充可能和  $L$  没有公共的公理

## 定义 2.27

$L$  的一个扩充是一致的，若不存在  $L$  的公式  $\mathcal{A}$ ，使得  $\mathcal{A}$  和  $\sim\mathcal{A}$  都是这个扩充的定理 ◇

## 命题 2.28 (一致性定理)

$L$  是一致的 ◇

### 证

设  $L$  是不一致的，则存在  $L$  的公式  $\mathcal{A}$ ，使得  $\mathcal{A}$  和  $\sim\mathcal{A}$  都是  $L$  的定理。由可靠性定理知， $\mathcal{A}$  和  $\sim\mathcal{A}$  都是重言式，这是不可能的 □

### 注

- $L$  的一致性是绝对一致性（即在  $L$  内具有一致性）
- 一致性是数学基础的核心问题，逻辑之外（上）的数学是否具有一致性？(Hilbert 规划的核心问题)

## 命题 2.29

$L$  的一个扩充  $L^*$  是一致的，当且仅当存在一个公式，它不是  $L^*$  的定理

◇

证

( $\Rightarrow$ )  $L^*$  是一致的，则对任意公式  $\mathcal{A}$  和  $\sim\mathcal{A}$ ，二者之一必不是  $L^*$  的定理

( $\Leftarrow$ ) 设  $L^*$  是不一致的，证明不存在不是  $L^*$  的定理的公式

令  $\mathcal{A}$  是  $L^*$  的任一公式， $L^*$  是不一致的，则存在公式  $\mathcal{B}$ ，使得  $\vdash_{L^*} \mathcal{B}$  且  $\vdash_{L^*} \sim\mathcal{B}$ ，由 命题 2.12， $\vdash_L \sim\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$ ，由于  $L^*$  是  $L$  的一个扩充，因此  $\vdash_{L^*} \sim\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$ ，应用 MP，得  $\vdash_{L^*} \mathcal{A}$ ，这样，每个公式都是  $L^*$  的定理

□

注

- 在一个  $L$  的不一致扩充中，任何公式都是定理，在经典逻辑和数学中没有任何价值；
- $L$  扩充一致性的充分条件相当弱
- ( $\Leftarrow$ ) 证法体现了换位律，如  $\vdash (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\sim\mathcal{B} \rightarrow \sim\mathcal{A})$  (L3)

## 命题 2.30

令  $L^*$  是  $L$  的一个一致扩充， $\mathcal{A}$  是  $L$  的一个公式且不是  $L^*$  的定理，则  $L^{**}$  也是一致的，这里  $L^{**}$  是  $L$  的一个扩充，它由  $L^*$  补充  $\sim\mathcal{A}$  为公理而得 ◇

### 证

设若  $L^{**}$  不一致，则存在公式  $\mathcal{B}$ ，使得  $\vdash_{L^{**}} \mathcal{B}$  且  $\vdash_{L^{**}} \sim\mathcal{B}$ ，如命题 2.29 所证，可得  $\vdash_{L^{**}} \mathcal{A}$

由于  $L^{**}$  是在  $L^*$  中补充  $\sim\mathcal{A}$  作为公理， $\vdash_{L^{**}} \mathcal{A}$  即是  $\sim\mathcal{A} \vdash_{L^*} \mathcal{A}$ ，由演绎定理， $\vdash_{L^*} \sim\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

据 命题 2.12， $\vdash_L (\sim\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ ，所以  $\vdash_{L^*} (\sim\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ ，应用 MP，可得  $\vdash_{L^*} \mathcal{A}$ ，这和  $\mathcal{A}$  不是  $L^*$  的定理相矛盾 ◻

## 定义 2.31

$L$  的一个扩充是完全的，若对每个公式  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}$  或  $\sim\mathcal{A}$  是该扩充的定理



## 注

- 这是认识论意义上的完全，区别于针对  $L$  的完全性（定理）
- 一个系统若是完全的，则任何命题  $\mathcal{A}$  都不独立于该系统  
(具有独立性意味该系统不完全)
- $L$  不是完全的  
(如对公式  $p_1$ , 没有  $\vdash_L p_1$  或  $\vdash_L \sim p_1$ )
- 任何  $L$  的不一致扩充是完全的  
(因平凡性)
- 若  $L^c$  是  $L$  的一个一致的完全扩充，则任何一个  $L$  的进一步的扩充，只要它的定理类对  $L^c$  的定理类有所扩充，都将是不一致的  
(这样，一致完全扩充相当于极大一致的扩充)

## 命题 2.32

令  $L^*$  是  $L$  的一致扩充，则存在  $L^*$  的一个一致完全扩充 ◇

证

令  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$  是  $L$  的所有公式的枚举

构造  $L^*$  的扩充序列  $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots$  如下

令  $\mathcal{J}_0 = L^*$

若  $\vdash_{\mathcal{J}_0} \mathcal{A}_0$ ，则令  $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_0$ ；

否则把  $\sim \mathcal{A}_0$  作为一个新公理加进  $\mathcal{J}_0$  得到  $\mathcal{J}_1$

一般地，对  $n \geq 1$ ，从  $\mathcal{J}_{n-1}$  构造  $\mathcal{J}_n$  的方法如下

若  $\vdash_{\mathcal{J}_{n-1}} \mathcal{A}_{n-1}$ ，则  $\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_{n-1}$ ；

否则把  $\sim \mathcal{A}_{n-1}$  作为一个新公理加进  $\mathcal{J}_{n-1}$  得到  $\mathcal{J}_n$

据命题 2.30，每个  $\mathcal{J}_n$  都是一致的 ( $n \geq 0$ )

定义  $\mathcal{J}$  是  $L$  的扩充：

它把至少在这些  $\mathcal{J}_n$  之一中为公理的一切公式都当作公理

## 证 (续)

断言  $\mathcal{J}$  是一致的

设若不然，则存在公式  $\mathcal{A}$ ，使得  $\vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{A}$  且  $\vdash_{\mathcal{J}} \sim \mathcal{A}$ 。必然存在  $n$ ，使得出现在  $\mathcal{A}$  和  $\sim \mathcal{A}$  于  $\mathcal{J}$  的证明中的公理都作为  $\mathcal{J}_n$  的公理，就有  $\vdash_{\mathcal{J}_n} \mathcal{A}$  且  $\vdash_{\mathcal{J}_n} \sim \mathcal{A}$ ，这与  $\mathcal{J}_n$  是一致的相矛盾

断言  $\mathcal{J}$  是完全的

令  $\mathcal{A}$  是  $L$  的一个公式，则  $\mathcal{A}$  一定在序列  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$  中出现，不妨设  $\mathcal{A}$  就是  $\mathcal{A}_k$ ，若  $\vdash_{\mathcal{J}_k} \mathcal{A}_k$ ，则  $\vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{A}_k$ ；否则， $\sim \mathcal{A}_k$  是  $\mathcal{J}_{k+1}$  的一条公理，所以  $\vdash_{\mathcal{J}_{k+1}} \sim \mathcal{A}_k$ ，亦有  $\vdash_{\mathcal{J}} \sim \mathcal{A}_k$ 。总之，有  $\vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{A}$  或  $\vdash_{\mathcal{J}} \sim \mathcal{A}$ ，即  $\mathcal{J}$  是完全的



### 命题 2.33

若  $L^*$  是  $L$  的一个一致扩充，则存在一个赋值，使得  $L^*$  的每个定理取值都为  $T$



证

定义  $L$  中公式的赋值  $v$  如下： $\mathcal{J}$  是  $L^*$  的一致完全扩充（命题 2.32）

$$v(\mathcal{A}) = T, \text{ 若 } \vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{A};$$

$$v(\mathcal{A}) = F, \text{ 若 } \vdash_{\mathcal{J}^{\sim}} \mathcal{A}$$

因  $\mathcal{J}$  是完全的  $\Rightarrow v$  定义在所有公式上

且  $\mathcal{J}$  是一致的  $\Rightarrow v(\mathcal{A}) \neq v(\sim \mathcal{A})$

## 证 (续)

进一步，需证  $v(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = F$  当且仅当  $v(\mathcal{A}) = T$  且  $v(\mathcal{B}) = F$

假定  $v(\mathcal{A}) = T, v(\mathcal{B}) = F$  但  $v(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = T$ ，则有  $\vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{A}$ ，  
 $\vdash_{\mathcal{J}} \sim \mathcal{B}$  和  $\vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ，应用 MP 可得  $\vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{B}$ ，这和  $\mathcal{J}$  是一致的相矛盾

反之，假定  $v(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = F$  但  $v(\mathcal{A}) = F$  (分别  $v(\mathcal{B}) = T$ )，则  
有  $\vdash_{\mathcal{J}} \sim (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$  和  $\vdash_{\mathcal{J}} \sim \mathcal{A}$  (分别  $\vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{B}$ )，因有

$$\vdash_{\mathcal{J}} \sim \mathcal{A} \rightarrow (\sim \mathcal{B} \rightarrow \sim \mathcal{A}) \quad (\text{分别 } \vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}))$$

应用 MP，得到  $\vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ，这与  $\mathcal{J}$  是一致的相矛盾

故  $v(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = F$  蕴涵  $v(\mathcal{A}) = T, v(\mathcal{B}) = F$

这样， $v$  是一个赋值。令  $\vdash_{L^*} \mathcal{A}$ ，则  $\vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{A}$ ，因此  $v(\mathcal{A}) = T$

□

## 命题 2.34 (完全性定理)

若  $\mathcal{A}$  是一个公式且是重言式，则  $\vdash_L \mathcal{A}$



证

令  $\mathcal{A}$  是一个公式且是重言式，设若  $\mathcal{A}$  不是  $L$  的定理，据 命题 2.30，  
包含  $\sim \mathcal{A}$  作为一条公理的扩充  $L^*$  是一致的。这样，存在一个赋值  $v$ ，  
赋予  $L^*$  的每个定理的值为  $T$ ，特别地， $v(\sim \mathcal{A}) = T$ ，这与  $\mathcal{A}$  是重言式  
相矛盾



注

作为推论，完全性定理：若  $\vdash \mathcal{A}$ ，则  $\vdash \mathcal{A}$

可靠与完全性定理： $\vdash \mathcal{A}$  当且仅当  $\models \mathcal{A}$

注

设计一个完全的公理系统是不简单的，在完全性证明中所需的演算能力  
可作为设计的技术途径之一

### 命题 2.35 (可判定性定理)

$L$  是可判定的 (decidable)，即存在一种能行的方法去判定  $L$  中给定的公式是否为定理 ◇

### 证

欲判定一个公式  $\mathcal{A}$  是否为  $L$  的定理，只需把它看作一个命题形式而构造它的真值表，它是定理当且仅当它是重言式 □

## 命题逻辑的作用

- 逻辑演算（一阶逻辑）是数理逻辑基础，命题逻辑（演算）是一阶逻辑基础
- 命题逻辑虽是可判定的，但判定一个命题公式是否可满足（SAT）问题是难解的，当今最难的计算机科学和数学问题之一
- 命题逻辑对应于布尔代数
- 命题逻辑是（数字）逻辑电路（大规模集成电路）和关系数据库（关系代数）的基础（一定意义上等价）
- 人工神经网络（深度学习）感知机（神经元学习）对应于命题逻辑
- 如搜索引擎（高级搜索）尚不能处理命题逻辑所表达的查询

## 线路模型 \*

- 比特 (bit) 作为信息单位是一个二值 (二进制) 变量, 取值为 1 ( $T$ ) 或 0 ( $F$ )
- 一个线路 (电路) 由导线和门 (gate) 组成, 每条线路携带一个比特的信息, 门对这些比特进行 (逻辑) 操作
- 对应于 (逻辑) 连接符非、与、或，与非、或非，异或分别称为非门、与门、或门、与非门、或非门、异或门  $\Leftarrow$  二进制运算  
例: 一个小于  $2^n$  的数  $N$  可写成  $N = \sum_{k=0}^{n-1} a_k 2^k$ ,  $a_k \in \{1, 0\}$   
可等价地写成  $N = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$
- 一个数字设备 (如计算机) 的输入和输出都以 1 和 0 的序列形式

### 注

线路模型  $\Rightarrow$  数字逻辑电路 (由逻辑门组成部件, 如寄存器和加法器等)  
 $\Rightarrow$  集成电路 (IC)  $\Rightarrow$  (数字) 计算机

## 线路计算模型 \*

- 定义复制门 (fanout) 如:  $p \mapsto (p, p)$ , 交换门 (crossover) 如:  $(p, q) \mapsto (q, p)$
- 基本逻辑门: 非门、与门、或门和复制门

### 命题

由基本逻辑门可构造任意 Bool 函数  $f$ :

$$f: \{0, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}^m$$

即由基本逻辑门构成逻辑门的通用集

### 证

(梗概)  $m$  个比特所表示的函数等价于  $m$  个单比特函数, 进而可表为析取式 (或门, 类似范式的做法), 注意这里需要用到复制门操作 □

- 与非门和复制门是更小的通用集
- 可证: 线路计算模型 = Turing 机 (计算模型)

## 命题 2.36

令  $\mathcal{B}$  是一个公式， $p_1, \dots, p_k$  是  $\mathcal{B}$  中出现的所有变元。对一个给定的赋值  $v$ ，若  $v(p_i) = T$  令  $p'_i$  为  $p_i$ ，若  $v(p_i) = F$  令  $p'_i$  为  $\sim p_i$ ；若  $v(\mathcal{B}) = T$  令  $\mathcal{B}'$  为  $\mathcal{B}$ ，若  $v(\mathcal{B}) = F$  令  $\mathcal{B}'$  为  $\sim \mathcal{B}$ 。则  $p'_1, \dots, p'_k \vdash \mathcal{B}'$

## 证

用以下定理可证

$$\mathcal{B} \rightarrow \sim \sim \mathcal{B}$$

$$\sim \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$$

$$\mathcal{B} \rightarrow (\sim \mathcal{C} \rightarrow \sim (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))$$

$$(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\sim \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C})$$



## 完全性定理证明 (Kalmár 1935)

证

令  $\mathcal{B}$  是一个重言式 (即  $\models \mathcal{B}$ )， $p_1, \dots, p_k$  是  $\mathcal{B}$  中出现的所有变元。

据命题 2.36， $p'_1, \dots, p'_k \vdash \mathcal{B}$  (因  $v(\mathcal{B}) = T$ )。

当  $v(p_k) = T$  有  $p'_1, \dots, p'_{k-1}, p_k \vdash \mathcal{B}$ ,

当  $v(p_k) = F$  有  $p'_1, \dots, p'_{k-1}, \sim p_k \vdash \mathcal{B}$ ，据演绎定理，

有  $p'_1, \dots, p'_{k-1} \vdash p_k \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $p'_1, \dots, p'_{k-1} \vdash \sim p_k \rightarrow \mathcal{B}$ 。由重言

式  $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\sim \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C})$  和 MP，得  $p'_1, \dots, p'_{k-1} \vdash \mathcal{B}$ ，同理可

消去  $p'_{k-1}$ ，重复  $k$  步终得  $\models \mathcal{B}$

□

注

Kalmár 证法直接简单，但只能证明命题逻辑完全性定理

## 附：直觉主义（命题）逻辑 \*

- (I1)  $\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$
- (I2)  $\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$
- (I3)  $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}$
- (I4)  $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$
- (I5)  $\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$
- (I6)  $\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$
- (I7)  $\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$
- (I8)  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}))$
- (I9)  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}))$
- (I10)  $\perp \rightarrow \mathcal{A}$

规则： MP

- 与基于  $\sim, \rightarrow, \wedge, \vee$  的（经典）公理系统比较，直觉主义（命题）逻辑  $\mathcal{I}$  用 (I10) 取代 (L3)，具有对直觉语义的完全性定理
- $\perp$  是一个命题常元解释为假（类似地，可用命题常元  $\top$  解释为真），否定符可引入

$$(I11) (\mathcal{A} \rightarrow \perp) \rightarrow \sim \mathcal{A}$$

$$(I12) \sim \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \perp)$$

- 排中律  $\mathcal{A} \vee \sim \mathcal{A}$  在  $\mathcal{I}$  中不成立，即  $\vdash_{\mathcal{I}} \mathcal{A} \vee \sim \mathcal{A}$
- 真值不是（客观）存在性的，而是直觉（作为数学家心智活动）可构造的
- 直觉主义逻辑是可构造性数学的哲学
- (主流) 数学基于形式主义（结构主义）的数学哲学，但代数几何 Topos 论（对集范畴）与直觉主义（类型论）直接相关