数理逻辑

讲义，第 6.3 版，2024 年

北京大学　信息与计算科学系

林作铨
linzuoquan@pku.edu.cn

3 一阶逻辑：模型论

- 谓词和量词
- 一阶语言

命题逻辑的局限

考察下面直观上认为有效的推理

$$\begin{array}{rl} & \text{所有人都是会死的} \\ & \text{苏格拉底是人} \\ \therefore & \text{苏格拉底是会死的} \end{array}$$

在 PL 中，这个推理被形式化为

$$\begin{array}{rl} & p \\ & q \\ \therefore & r \end{array}$$

但这个推理形式是无效的

注

三段论：大前提“所有人都是会死的”比“若苏格拉底是人则苏格拉底是会死的”强，其形式结构不同

命题逻辑的表达能力

- ◇ 三段论逻辑就是含有量词的命题的推理形式，但太狭窄
- ◇ 命题逻辑 L 具有基本的逻辑演算能力
  - L 是描述的，即语法成份对应事实
  - L 是可复合的，即如 $A \wedge B$ 的意义可从 A 和 B 获得
  - L 是与内容无关的，即尽管形式语言的符号可按不同的方式加以解释，但这些解释并不是形式演算系统的一个部分，不象自然语言是与内容有关的
  - L 具有逻辑连接词，能够表达析取和否定信息

但 L 表达能力不够，如难于表达“所有人都是会死的”

这种推理形式的有效性依赖于命题所包含的各个组成部分之间的关系和命题本身的形式

更为清晰而恰当的推理形式应是

$$\begin{aligned} &\text{所有 } A \text{ 都是 } B \\ &C \text{ 是一个 } A \\ \therefore\quad &C \text{ 是 } B \end{aligned}$$

进一步描述

- 前提"所有 A 都是 B"的一般属性（描述事物量的变化）
- 用符号来表示一个简单命题的各个部分（内部结构）

需引进量词（quantifier）和谓词（predicate）

主谓结构

一个简单命题细化为主谓结构

对简单命题，用大写字母 A，B，C（可加下标）等表示**谓词**，用小写字母 a，b，c（可加下标）等表示**主词**（体）

对复合命题，只要对其中每个简单命题细化

例 3.1

“Perelman 是一个数学家”可表成 $M(a)$

“Perelman 是一个数学家，他是天才”可表成 $M(a) \wedge G(a)$

定义 3.2 (全称量词和存在量词)

“对所有 x (for all x)” 称为全称量词，用符号 $(\forall x)$（简记 $\forall x$）表示

“存在（至少一个） x (there exists at least one object x such that)” 称为存在量词，用符号 $(\exists x)$（简记 $\exists x$）表示

这里 x 是任意对象，称为（对象）变元，代表未确定的主体

用 x, y, z（可加下标）等表示变元

注

记号（Gentzen）：$\forall$ 记 All，$\exists$ 记 Exist（倒写）

定义 3.3 (约束变元和自由变元)

当变元在以量词开始的命题中被使用时，称为约束变元（bound variable）；否则，称为自由变元（free variable）

例 3.4

“x 加 1 等于 2” 可表成 $E(f(x, 1), 2)$，x 是自由变元

注

由于 x 是未指定的，不能为这个陈述指派一个真值

类似一个含有代词的脱离了上下文的语句，如“他很聪明”，它既不真也不假，除非它放进一个上下文中。一个带自由变元的表达式就像一个用“某某”来当作其主语的谓词

量词的意义

$\forall x A(x)$："每个对象都具有 A 决定的属性"

$\exists x A(x)$："有某些对象具有 A 决定的属性"

$\forall x(A(x) \to B(x))$：对（宇宙中）每个对象 x，若 x 具有属性 A 则 x 具有属性 B

—对任意对象 x，若 x 是人则 x 是会死的

——不论 x 是什么对象（即使不是人），$A(x) \to B(x)$ 的真值由 $\to$ 的真值表决定，但 $A(x)$，$B(x)$ 的真值呢？

$\exists x(A(x) \to B(x))$：存在（宇宙中）某些对象 x，若 x 具有属性 A 则 x 具有属性 B

注

量词的本质是引入变元，这意味着在命题逻辑中基于真值表判定推理形式是否有效的方法不可能得到推广（从有限到无限）

例 3.5

“所有的数学家都是天才”

$$(\forall x)(M(x) \rightarrow G(x))$$

$$\forall x.\ M(x) \rightarrow G(x)$$

“有的哲学家是疯子”

$$(\exists x)(P(x) \wedge C(x))$$

“不是所有的鸟都会飞”

$$\sim\forall x(B(x) \rightarrow F(x))$$

“每个中国人都有（一个）梦想”

$$\forall x.\ C(x) \rightarrow \exists y D(y)$$

(梦想是有的，但每人的梦想不一样)

例（续）

“存在一个比任何其它整数都大的整数”

$$\exists x(I(x) \wedge \forall y(I(y) \rightarrow x \geq y))$$

“对任一整数都存在一个比它大的整数”

$$\forall x. I(x) \rightarrow \exists y. I(y) \wedge y \geq x$$

$\geq$ 是谓词，如 $\geq(x, y)$

例 3.6（函数）

$(\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists \delta)(\delta > 0 \wedge (\forall x)(|x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon))$

谓词 $<$ 包含函数 $|x - c|$，函数 $|f(x) - f(c)|$ 包含函数 f（嵌套）

量词的用法

一个不是普遍但常见的表示模式

- 全称量词后面常跟一个隐含词
- 存在量词后面常跟一个合取词

$\exists x(I(x) \wedge \forall y(I(y) \rightarrow x \geq y))$

$\forall x(I(x) \rightarrow \exists y(I(y) \wedge y \geq x))$

例 3.7

$\forall x(A(x,b) \rightarrow S(x))$

“每个在（A(t)）北大（b(eida)）的人都是聪明的（S(mart)）”

$\forall x(A(x,b) \wedge S(x))$

“每个人都在北大并且每个人都是聪明的”

$\exists x(A(x,q) \wedge S(x))$

“有些在清华（q(inghua)）的人是聪明的”

$\exists x(A(x,q) \rightarrow S(x))$

为真，只要“存在不在清华的人”

量词的对偶

下面两个句子有同样的含义

(1) 并非所有 x 都不具有属性 P: $((\sim\forall x)\sim P(x))$

(2) 存在某个 x 具有属性 P: $((\exists x)P(x))$

例 3.8

形式化下列句子，第一次不用全称量词，第二次不用存在量词

(a) 所有的鸟（Birds）都会飞（Fly）

$\sim(\exists x)(B(x)\wedge\sim F(x))$

$(\forall x)(B(x)\rightarrow F(x))$

(b) 一些数不是有理数

$(\exists x)(N(x)\wedge\sim R(x))$

$\sim(\forall x)(N(x)\rightarrow R(x))$

形式化

用谓词和量词细化描述自然语言陈述（知识）

例：从书中随便找一个自然语言段落，把它表示为具有谓词和量词的形式

例 3.9 (例1.13（续）)

A: 白日依山尽

A： $\forall x(D(x) \to \exists yz(S(y) \wedge M(z) \wedge B(y, z))$

符号约定

为知识表示方便，可用一个字符串代表一个（命题、谓词）符号，如：

$\forall x(Day(x) \to \exists yz(Sun(y) \wedge Mountain(z) \wedge Behind(y, z))$

- 谓词和量词
- 一阶语言

一阶语言

一阶逻辑

一阶（谓词）逻辑（演算）(first-order (predicate) logic，简写 FOL)

— 一个在 L 基础上扩展的更复杂的形式系统，具有足够的表达能力

一阶语言

一阶逻辑的形式语言，即称一阶语言（first-order language)，记为 $\mathscr{L}$，

给出字符表和构造合式公式的规则和意义

字符表

$x_1, x_2, \cdots$	变元
$a_1, a_2, \cdots$	（个体）常元
$A_1^1, A_2^1, \cdots; A_1^2, A_2^2, \cdots; A_1^3, A_2^3, \cdots; \cdots$	谓词符
$f_1^1, f_2^1, \cdots; f_1^2, f_2^2, \cdots; f_1^3, f_2^3, \cdots; \cdots$	函项（函数，function）符
(,), ,	括逗号（技术性符号）
$\sim, \rightarrow$	连接符
$\forall$	量词

注

技术性符号不是必要的，为易读而已

注

- 变元、连接符、量词和技术性符号称为逻辑符号，常元、函项符和谓词符称为非逻辑符号
- 引入个体常元，可使某些公式被解释为关于某个特殊事物的命题例：“苏格拉底是一个人”看作 $A_1^1(a_1)$ 的一个解释（a_1 特指苏格拉底）
- 函项符系列 f_i^n 和谓词符序列 A_j^n，其中 n 表示 n 元谓词关系（简称关系）和 n 元函项关系
- 谓词和函项是两种关系；若仅表示关系，谓词符可以胜任，但引入函项符有助于描述，如数学中普遍使用函数
- 只需全称量词，因存在量词可通过全称量词来定义，作为缩写引入
- 为使形式语言尽可能的广泛，需要潜在的（能枚举）无限多的符号，否则任意有限符号都可能不够用；但在应用中，仅对其中的某些符号规定解释就够了

符号约定

为易读起见，有时用字符串（如单词）表示非逻辑符，这时整个符号串当成一个字符，如约定

以小写字母开头的词表示函项符，例如：myBook

（常元、变元亦可照此）

以大写字母开头的词表示谓词符，例如：BetterThan

定义 3.10 (一个一阶语言 $\mathscr{L}$ 的字符表)

变元	$x_i, \cdots$
某些（可能没有或能枚举无穷）常元	$a_i, \cdots$
某些（有穷或能枚举无穷）谓词符	$A_i^n, \cdots$
某些（可能没有或能枚举无穷）函项符	$f_i^n, \cdots$
技术性符号	(,), ,
连接词	$\sim, \rightarrow$
量词	$\forall$

注

- 谓词符不能为空，否则将没有公式
- 广义（generalized）一阶语言：常元、谓词符和函项符是无穷系列，但一阶语言只需考虑能枚举系列，而有限系列是不够的

注

- A_i^n, f_i^n 中 $n \in \mathbb{N}$（自然数集），即 n 元，约定 0 元函项符作为常元（但为方便计保留 a_i），0 元谓词符作为命题符
- 上下文易辨时符号上下标可省略，如 x, a, A, f 等
- 有时为方便起见可引入其它技术性符号，如：$\cdots$，.，/
- 给定一个一阶语言 $\mathscr{L}$ 就是给定其字符表（变元、括号，连接词和量词之外，如非逻辑符号），有时指任一 $\mathscr{L}$（通用），有时指特定一个 $\mathscr{L}$（专用）

定义 3.11 (一阶语言的变化)

给定一个一阶语言 $\mathscr{L}$，一个 $\mathscr{L}$ 的扩展（expansion）$\mathscr{L}^+$ 有如下变化(或变化之一)

- 从 $\mathscr{L}$ 的一个变元系列变成两个（或多个）变元系列，如增加 $x_{i_k}, \ldots$，i_k 系列是 i 系列的子系列
- 从 $\mathscr{L}$ 的一个常元系列变成两个（或多个）常元系列，如增加 $a_{i_k}, \ldots$，i_k 系列是 i 系列的子系列
- 从 $\mathscr{L}$ 的一个函项符系列变成两个（或多个）函项符系列，如 $f^n_{i_k}, \ldots$，i_k 系列是 i 系列的子系列
- 从 $\mathscr{L}$ 的一个谓词符系列变成两个（或多个）谓词符系列，如增加 $A^n_{i_k}, \ldots$，i_k 系列是 i 系列的子系列

其它符号不变。亦称 $\mathscr{L}^+$ 为两类（多类）一阶语言

注

一个能枚举系列可划分为两个或多个能枚举系统，如自然数系列

定义 3.12 ($\mathscr{L}$-字符串)

一个 $\mathscr{L}$-字符的有限（可为空）序列称为 $\mathscr{L}$-（字符）串

——串的长度即字符总数（字符可重复出现），空串的长度为 0

- 若 s, t 都是串，st 作为 s, t 连接而成的串
- 若 $r = st$，r, s, t 都是串，则 s 是一个 r 的初始段；如果 t 是非空的，则 s 是一个 r 的（真）子段
- 类似地，若 $r = st$，r, s, t 都是串，则 t 是一个 r 的结束段；如果 s 是非空的，则 t 是一个 r 的子段

$\mathscr{L}$-表达式

$\mathscr{L}$-中两种串：项，公式

例 3.13

用一阶语言表达关于算术的命题

采用具有如下（变元、括号，连接词和量词之外）符号的一阶语言 $\mathscr{L}$

- a_1，代表 0
- A_1^2，代表 $=$
- f_1^1，代表后继函数
- f_1^2，代表 $+$
- f_2^2，代表 $\times$

如 $A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), f_2^2(x_1, x_2))$ 可被解释成 “$x_1 + x_2 = x_1x_2$”

例（续）

用一阶语言表达关于群的命题

采用具有如下（变元、括号，连接词和量词之外）符号的一阶语言 $\mathscr{L}$

- a_1，代表单位元
- A_1^2，代表 $=$
- f_1^1，代表求每个元素的逆元的函数
- f_1^2，代表群的二元运算

如 $A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^1(x_1)), a_1)$ 可被解释成 “$x_1 x_1^{-1} =$ 单位元”

定义 3.14 (项)

(令 $\mathscr{L}$ 是一个一阶语言,) 项 (term) 是如下定义的 $\mathscr{L}$-串

(1) 变元和常元都是项

(2) 若 f_i^n 是 $\mathscr{L}$ 中的函项符, 且 $t_1, \cdots, t_n$ 是 $\mathscr{L}$ 中的项, 则 $f_i^n(t_1, \cdots, t_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中的项

(3) 所有项组成的集由 (1) 和 (2) 生成 ◇

注

- $f_i^n(t_1, \cdots, t_n)$: $t_1, \cdots, t_n$ 作为 f_i^n 的论据 (arguments)
- 项解释成对象: 函项作用于其上的事物, 具有某种属性的事物, 对之作出某些判定的事物
- $\mathscr{L}$ 中只要含有一个函项符, 项集必是 (能枚举) 无穷的

定义 3.15 (常项)

常元亦称**常项**，是函项的特殊情况，即 0 元函项 ◇

定义 3.16 (闭项)

闭项（closed term）指不含变元的项，即由所有常元及其通过函项符生成的；含变元的项可称为**开项** ◇

定义 3.17 ($deg(t)$)

项 t 的（复杂）**度**（记 $deg(t)$）指的 t 中出现的函项符个数 ◇

注

deg 可在结构归纳时使用

定义 3.18 ($\mathscr{L}$ 的闭项扩展)

给定一个一阶语言 $\mathscr{L}$，一个 $\mathscr{L}$ 的闭项扩展 $\mathscr{L}^+$ 是通过在 $\mathscr{L}$ 中引入一个（可能可枚举无穷）闭项系列 $t_0, t_1, t_2, \cdots$ 定义的

特殊地，一个 $\mathscr{L}$ 的常元扩展 $\mathscr{L}^+$ 是通过在 $\mathscr{L}$ 中引入一个（可能可枚举无穷）常元系列 $b_0, b_1, b_2, \cdots$ 定义的 ◇

注

常元是特殊的闭项，用常元扩展更简单明了

定义 3.19 (原子)

原子（公式）是如下定义的 $\mathscr{L}$-串：若 A_j^n 是 $\mathscr{L}$ 中的一个谓词符，且 $t_1, \cdots, t_n$ 是 $\mathscr{L}$ 中的项，则 $A_j^n(t_1, \cdots, t_n)$ 是 $\mathscr{L}$ 中的一个原子

$t_1, \cdots, t_n$ 是 A_j^n 的论据 $\diamondsuit$

定义 3.20 (公式)

（合式）公式是如下定义的 $\mathscr{L}$-串

(1) 每个原子是公式

(2) 若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是公式，则 $(\sim\mathscr{A}), (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 和 $(\forall x_i)\mathscr{A}$ 也是公式，其中 x_i 是任意变元

(3) 所有公式的集由 (1) 和 (2) 生成 $\diamondsuit$

注

- 命题语言 $\mathscr{L}_0$ 是一阶语言 $\mathscr{L}$ 的子语言

  $\mathscr{L}$ 中不含量词、项，只含 0 元谓词符即为 $\mathscr{L}_0$

  $\mathscr{L}_0$ 公式简称**命题公式**，$\mathscr{L}$ 公式简称**一阶公式**

定义 3.21

$\mathscr{B}$ 称为一个公式 $\mathscr{A}$ 的**子公式**，若 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 或出现在 $\mathscr{A}$ 中的一个公式，若子公式 $\mathscr{B}$ 不是 $\mathscr{A}$ 则为严格子公式

定义 3.22 ($deg(\mathscr{A})$)

公式 $\mathscr{A}$ 的（复杂）度（记 $deg(\mathscr{A})$）是对 $\mathscr{A}$ 中出现的 $\rightarrow$ 加 2、$\sim$ $\forall$ 分别加 1 的和 $\diamondsuit$

注

- 量词和它所作用的公式不一定有联系

  例： $(\forall x_1)A_1^1(x_2)$

- 记 $\mathscr{A}(x_i)$ 强调 $\mathscr{A}$ 中包含 x_i，但不排除 $\mathscr{A}$ 中可能还包含其它变元

- 为方便起见，作为被定义的符号引进 $\exists$，$\wedge$，$\vee$ 和 $\leftrightarrow$

  $((\exists x_i)\mathscr{A})$ 是 $((\sim(\forall x_i))(\sim\mathscr{A}))$ 的缩写

  $(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$ 是 $(\sim(\mathscr{A}\rightarrow(\sim\mathscr{B})))$ 的缩写

  $(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$ 是 $((\sim\mathscr{A})\rightarrow\mathscr{B})$ 的缩写

  $(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$ 是 $\sim((\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})\rightarrow\sim(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{A}))$ 的缩写

注

不引起混淆的情况下有些括号可省略

- 省略括号时连接符优先序跟命题逻辑相同
- 量词 $(\forall x)(\exists x)$ 的括号亦可省略，如 $\forall x \exists x$，且规定量词比连接符优先序高；可使用 “.” 指明量词辖域，
  如 $\forall x.\mathscr{A}(x) \to \mathscr{B}(x)$ 即 $\forall x(\mathscr{A}(x) \to \mathscr{B}(x))$
- $\forall x_1 \cdots \forall x_n$ 可简写成 $\forall x_1 \cdots x_n$
- 对连续多个否定符或量词按从右向左（由里向外）顺序处理
- $(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)\mathscr{A}$ 可简写成 $\forall x_1 \cdots x_n\mathscr{A}$

$f_i^n(t_1, \cdots, t_n) =_{def} f_i^n t_1 \cdots t_n$

$A_j^n(t_1, \cdots, t_n) =_{def} A_j^n t_1 \cdots t_n$

技术性符号（括号、逗号）是不必要的

赋予一个（$\mathscr{L}$-）串的权重为对其出现的变元加 -1、n-元函项符和谓词符分别加 n - 1、$\sim$ 加 0、$\rightarrow$ 加 1、$\forall$ 加 1 的总和

注

- 常元看成 0 函项符
- 度和权重略有区别

引理 3.23

每个项 t 具有权重 -1，t 的任意初始子段的权重都是非负的，

$f_i^n t_1 \cdots t_n$ 是唯一确定的 ◇

证

对 $deg(t)$ 施归纳证明：若 t 仅是单一变元，显然成立（其初始子段为空权重为 0）

若 t 是 $f_i^n t_1 \cdots t_n$，则 $deg(t_1), \cdots, deg(t_n) < \deg(t)$，由归纳假设，$t$ 的权重为 $(n\text{-}1) + n \times (\text{-}1) = \text{-}1$

由此可见，串 $t_1 \cdots t_n$ 中 t_1 作为最短的初始段是唯一确定的（权重 -1）；类似地，$t_2, \cdots, t_n$ 都是唯一确定的

亦即，项 $f_i^n t_1 \cdots t_n$ 其论据都是唯一确定的 □

引理 3.24

每个公式 $\mathscr{A}$ 具有权重 -1，$\mathscr{A}$ 的任意初始子段的权重都是非负的，$A_j^n t_1 \cdots t_n$ 是唯一确定的 $\diamondsuit$

证

同上可证（对 $deg(\mathscr{A})$ 施归纳） $\square$

注

论据 $t_1 \cdots t_n$ 中 t_1 顺序无关

命题 3.25

一阶语言 $\mathscr{L}$ 的表达式集是能枚举的；项集和公式集都是能枚举的 $\Diamond$

证

首先，对每个符号 w 赋予一个正整数 $g(w)$ 进行编码，如下

- $g(()=3, g())=5, g(,)=7, g(\sim)=9, g(\to)=11, g(\forall)=13, g(x_k)=13+8k, g(a_k)=7+8k, g(f_k^n)=1+8\left(2^n3^k\right), g(A_k^n)=3+8\left(2^n3^k\right)$

然后，对每个表达式 $w_0w_1\cdots w_n$，赋予一个数 $2^{g(w_0)}3^{g(w_1)}\ldots p_i^{g(w_i)}$，这里 p_i 是第 i 个素数（$p_0=2$），例如，$A_1^1(x_2)$ 得数 $2^{5}3^{13}5^{29}7^5$

这样，能用所编码的自然数顺序枚举全部表达式 $\square$

注

- 能枚举是一个直观概念，即设计一个机械能行的过程把所有表达式枚举出来，这里就是用自然数可列
- 编码方法称 Gödel 编码，给定一个正整数能判定是否为表达式并唯一确定该表达式（参见第 6 章）

定义 3.26 (辖域)

在公式 $(\forall x_i)\mathscr{A}$ 中，称 $\mathscr{A}$ 是量词 $\forall$ 的辖域 (scope)

当 $(\forall x_i)\mathscr{A}$ 在公式 $\mathscr{B}$ 中作为子公式出现时，该量词在 $\mathscr{B}$ 中的辖域是 $\mathscr{A}$

变元 x_i 在一个公式中的出现称为约束的，若它出现在 $(\forall x_i)$ 的辖域之中，或它就在 $(\forall x_i)$ 中；否则，称为自由的 $\diamondsuit$

例 3.27

$(\forall x_1)(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_2)A_1^1(x_2))$ 中

x_1 有两次约束出现

x_2 有一次自由出现，两次约束出现

$(\forall x_1)$ 的辖域是 $(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow (\forall x_2)A_1^1(x_2))$，$\forall x_2$ 的辖域是 $A_1^1(x_2)$

注

一个变元可在同一公式中同时自由出现和约束出现

定义 3.28 (项替换)

令 s, t 是（$\mathscr{L}$ 的）项。用 t 替换 s 中变元 x_i 的处处出现所得的项 $s(x_i/t)$，归纳定义如下：

- 若 s 为 x_i，则 $s(x_i/t)$ 为 t
- 若 s 为 x_j （$j \neq i$），则 $s(x_i/t)$ 为 x_j
- 若 s 为 $f_i^n(s_1, s_2, \ldots, s_n)$，$s_1, s_2, \ldots, s_n$ 是项，则 $s(x_i/t)$ 为 $f_i^n(s_1(x_i/t), s_2(x_i/t), \ldots, s_n(x_i/t))$ $\diamondsuit$

定义 3.29

令 $\mathscr{A}$ 是（$\mathscr{L}$ 的）一个公式，t 是一个项，x_j 是出现在 t 中的任何变元。t 对 $\mathscr{A}$ 中的 x_i 是自由的，若 x_i 不自由出现在 $\mathscr{A}$ 中的任一 $(\forall x_j)$ 的辖域中 $\diamondsuit$

意即可用 t 替换 $\mathscr{A}$ 中 x_i 的自由出现不会引起 t 中变元与 $\mathscr{A}$ 中量词的交叉导致混淆（见下例）

——没有开项 t 中出现的（自由）变元变成 $\mathscr{A}(t)$ 中约束变元（导致不同的解释）

注

记 $\mathscr{A}(x_i/t)$ 表示在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中用项 t 替换 x_i 的结果，记 $s(x_i/t)$ 表示用项 t 替换项 s 中变元 x_i 的结果。技术性符号“/”不是必需的，可记为替换结果 $\mathscr{A}(t)$，$s(t)$

例 3.30

对 $(\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2)\rightarrow(\forall x_3)A_2^2(x_3,x_1)$

$f_1^2(x_1,x_4)$ 对 x_2 是不自由的

$f_2^2(x_2,x_3)$ 对 x_2 是自由的

$f_3^2(x_1,x_3)$ 对 x_1 是不自由的

x_2 对 x_1 是自由的 (没有 $\forall x_2$)

错误的替换：$(\forall x_1)A_1^2(x_1,f_1^2(x_1,x_4))\rightarrow(\forall x_3)A_2^2(x_3,x_1)$

— 项 $f_1^2(x_1,x_4)$ 替换 x_2，x_2 自由出现在 $(\forall x_1)$ 的辖域中，这里 x_1 是出现在 $f_1^2(x_1,x_4)$ 中的变元（x_1 在项中是“自由”出现，替换后在公式中变成约束出现，这种交叉会导致不同的意义）

注

- 不含变元的项对任一公式中的任一变元是自由的
- 若 t 中没有变元在 $\mathscr{A}$ 中是约束的，则 t 对 $\mathscr{A}$ 中任一变元都是自由的
- 对任何公式 $\mathscr{A}$ 和任何变元 x_i （不管它在 $\mathscr{A}$ 中是否自由出现），x_i 对 $\mathscr{A}$ 中 x_i 是自由的（x_i 不自由出现在 $(\forall x_i)$ 的辖域中）
- 若 $\mathscr{A}$ 不含 x_i 的自由出现，则任何项对 $\mathscr{A}$ 中 x_i 都是自由的

定义 3.31 (公式中项替换)

(1) 若 $\mathscr{A}$ 是原子 $A_j^n(s_1,\ldots,s_n)$，则 t 对 x_i 自由，$\mathscr{A}(x_i/t)$ 定义为 $A_j^n(s_1(x_i/t),\ldots,s_n(x_i/t))$

(2) 若 $\mathscr{A}$ 是 $\sim\mathscr{B}$，则 t 对 $\mathscr{A}$ 中 x_i 自由，当且仅当 t 对 $\mathscr{B}$ 中 x_i 自由，$\mathscr{A}(x_i/t)$ 定义为 $\sim\mathscr{B}(x_i/t)$

(3) 若 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}\to\mathscr{C}$，则 t 对 $\mathscr{A}$ 中 x_i 自由，当且仅当 t 对 $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 中 x_i 都自由，$\mathscr{A}(x_i/t)$ 定义为 $\mathscr{B}(x_i/t)\to\mathscr{C}(x_i/t)$

(4) 若 $\mathscr{A}$ 是 $\forall x_j\mathscr{B}$，则 t 对 $\mathscr{A}$ 中 x_i 自由，当且仅当以下两条件之一成立
- x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现，这时 $\mathscr{A}(x_i/t)$ 定义为 $\mathscr{A}$
- x_i 在 $\mathscr{A}$ 中自由出现，且 t 对 $\mathscr{B}$ 中 x_i 自由，x_j 不出现在 t 中，这时 $\mathscr{A}(x_i/t)$ 定义为 $\forall x_j(\mathscr{B}(x_i/t))$ ◇

注

$\mathscr{A}(x_i/t_1,\ldots,x_n/t_n)$ 表示同时用项 $t_1,\ldots,t_n$ 分别替换变元 $x_1,\ldots,x_n$，但必须满足每次替换不会引起已替换的结果不合替换条件（试定义之：归纳定义）

注

定义 3.29 和 3.31 其实是一样的：t 在 $\mathscr{A}$ 中对 x_i 自由就是在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中可用 t 替换 x_i，即 $\mathscr{A}(x_i/t)$

注

类比：一个量词的变元类似一个积分的变元

$\int_0^1 xy^2dy$ 的值是基于 x 的值不基于 y 的值

若欲用一个含 y 的函数 $f(y)$ 替换 x，显然，$\int_0^1 xy^2dy \neq \int_0^1 f(y)y^2dy$

必须先改变积分的变元，如 $\int_0^1 xz^2dz$，z 是不出现在 f 中的变元，然后就可安全地替换

$$\int_0^1 xy^2dy = \int_0^1 f(y)z^2dz$$

定义 3.31 条件保证了不需对量词辖域中变元换名也能安全地替换

定义 3.32 (换名替换)

若 x_j 是一个不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现但（在 $\mathscr{A}$ 中）对 x_i 自由的变元，则 $\forall x_j \mathscr{A}(x_i/x_j)$ 可由 $\forall x_i \mathscr{A}$ 通过改变字符（变元换名）而得 $\diamondsuit$

注

- 量词的变元换名类似积分的变元换名
- 若 x_j 不在 $\mathscr{A}$ 中出现，自然满足变元换名的条件
- 换名是可逆的，即若 x_i 可换为 x_j 则 x_j 可换为 x_i（试论证之：x_i 在 $\mathscr{A}(x_i/x_j)$ 中对 x_j 自由）
- 即使 t 对 $\mathscr{A}$ 中的 x_i 是不自由的，通过细心地进行变元换名（使得换名变化后的公式中 t 对 x_i 自由）亦可安全地进行替换

定义 3.33 (相似公式)

令 x_i 和 x_j 是不同变元，$\mathscr{A}(x_i)$ 和 $\mathscr{A}(x_j)$ 称为相似当且仅当

若 x_j 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由且 $\mathscr{A}(x_i)$ 中没有 x_j 的自由出现 $\diamondsuit$

注

$\mathscr{A}(x_j)$ 是由 $\mathscr{A}(x_i)$ 用 x_j 替换 x_i 的所有自由出现获得

- 换名是可逆的：若 $\mathscr{A}(x_i)$ 和 $\mathscr{A}(x_j)$ 是相似的，则 x_i 在 $\mathscr{A}(x_j)$ 中对 x_j 自由且 $\mathscr{A}(x_j)$ 中没有 x_j 的自由出现
- 若 $\mathscr{A}(x_i)$ 和 $\mathscr{A}(x_j)$ 是相似的，则 $\mathscr{A}(x_j)$ 和 $\mathscr{A}(x_i)$ 也是相似的
- 直观上，$\mathscr{A}(x_i)$ 和 $\mathscr{A}(x_j)$ 是相似的，当且仅当 $\mathscr{A}(x_i)$ 和 $\mathscr{A}(x_j)$ 是一样的，除了 $\mathscr{A}(x_i)$ 中 x_i 的自由出现正好是 $\mathscr{A}(x_j)$ 中 x_j 的自由出现

例 3.34

$(\forall x_3)\left(A_1^2(x_1, x_3) \vee A_1^1(x_1)\right)$ 和 $(\forall x_3\left[\left[A_1^2(x_2, x_3) \vee A_1^1(x_2)\right)\right.$ 相似

例 3.35

用一阶语言表达关于信念的命题

给定一个一阶语言 $\mathscr{L}$，规定

$Believe(x, t)$，表示变元 x（代表主体）相信项 t（代表对象），或简单地 $Believe(t)$（某主体）相信项 t

$Know(t)$，表示知道项 t

如 $Believe(I, you)$ 可被解释成 “我相信你”

I 为常元，you 为常项（元）

$\forall x. Believe(x, god) \to Exists(god)$

$Believe(t) \wedge Exists(t) \to Know(t)$

但 $\forall x. Believe(x, \mathscr{A}) \wedge True(\mathscr{A}) \to Know(x, \mathscr{A})$ 是错的，因 $\mathscr{A}$ 是公式（如谓词符即命题），不是一阶的

二阶语言 *

在一阶语言 $\mathscr{L}$ 的基础上

记 C 代表（$\mathscr{L}$ 的）非逻辑常元（个体常元、函项符和谓词符）

$\langle u\rangle_n$ 表示个体变元系列 $u_1,\cdots,u_n$

$\langle t\rangle_n$ 表示项系列 $t_1,\cdots,t_n$

$\forall\langle u\rangle_n$ 表示 $(\forall u_1)\cdots(\forall u_n)$

二阶语言 $\mathscr{L}^2_C$（简记 $\mathscr{L}^2$）增加如下定义

- 符号：函项变元 $\boldsymbol{g}_i^n$，谓词变元 $\boldsymbol{R}_i^n$
- 项：$\boldsymbol{g}_i^n(\langle t\rangle_n)$
- 公式：$A_i^n(\langle t\rangle_n)$（原子，$A_i^n\in C$），$\boldsymbol{R}_i^n(\langle t\rangle_n)$，这里 $\langle t\rangle_n$ 是二阶项
- 量词公式：$(\forall \boldsymbol{g}_i^n)\mathscr{A}$，$(\forall \boldsymbol{R}_i^n)\mathscr{A}$，这里 $\mathscr{A}$ 是二阶公式

纯二阶语言 *

在 $\mathscr{L}^2$ 中，$=$ 不需作为原始符号（不需建立带等词的系统），$t = u$ 可定义为 $\left(\forall \boldsymbol{R}_1^1\right)\left(\boldsymbol{R}_1^1 t \leftrightarrow \boldsymbol{R}_1^1 u\right)$

纯二阶语言 $\mathscr{L}_\emptyset^2$：令 $C = \emptyset$，可有公式如

$$(\exists \boldsymbol{g})(\exists x)(\forall \boldsymbol{R})[(\boldsymbol{R}(x) \wedge (\forall y)(\boldsymbol{R}(y) \to \boldsymbol{R}(\boldsymbol{g}(y)))) \to (\forall x)\boldsymbol{R}(x)]$$

可见二阶语言表达能力比一阶语言强

高阶语言 *

三阶语言 $\mathscr{L}^3$ 增加

- 函项符、谓词符、变元可以个体变元、函项符、谓词符为论据
- 二阶函项变元，二阶谓词变元
- 量词可管辖二阶变元

n-阶语言 $\mathscr{L}^n$ （$n \geq 1$）以此类推

数理逻辑

讲义，第 6.3 版，2024 年

北京大学　信息与计算科学系

林作铨
linzuoquan@pku.edu.cn

3 一阶逻辑：模型论

- 谓词和量词
- 一阶语言
- 解释
- 满足
- 真值
- 斯科伦化

解释

语义

$\mathscr{L}$ 的语义确定 $\mathscr{L}$ 的表达式（公式）的解释，但不能一次性地规定所有公式的具体含义，因非逻辑符号（函项、谓词）依赖于具体的应用背景，可以有不同的意思

例：常元 lin 可为此 lin 亦可为彼 lin

$\mathit{Happy}(\mathit{lin})$ 代表谁 Happy，即使 Happy 的意思明确

原子 $\mathit{Happy}(\mathit{lin})$

$\Rightarrow$ 某个个体 lin （不管是谁）具有一种性质 Happy

注

谓词作为简单命题同样具有真值

语义抽象

- 世界中有一些对象
- 对 1 元谓词符 A^1，有某些对象满足 A^1 而某些对象不满足 A^1，对 A^1 的解释就是确定对每个对象是否满足它

  对 n 元谓词符类似

  对 n 元函项符类似，解释为是否有 n 个对象映射到另一个对象
- 别无其它

FOL 假设：这就是所有关于非逻辑符的解释，由此确定公式的真值

注

Tarski 语义（1934）

概念化：对象，对象之间的关系（谓词、函项）

定义 3.36 (解释)

$\mathscr{L}$ 的一个解释（interpretation）I 如下组成

(1) 一个非空集 D_I（I 的论域（domain））

(2) 一个不同元素（个体）集 $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots\}$

(3) 一个在 D_I 上的函项集 $\{\bar{f}_i^n | i > 0, n > 0\}$

$$\bar{f}_i^n : D_I^n \to D_I$$

(4) 一个在 D_I 上的关系集 $\{\bar{A}_i^n | i > 0, n > 0\}$

$$\bar{A}_i^n \subseteq D_I^n$$

$\mathscr{L}$ 中变元 在 I 下解释作为论域 D_I 中的任意对象 ◇

注

- D_I 是集（朴素集论），即使有 Russel 悖论，FOL 不能解决数学基础问题
- D_I 是 $\mathscr{L}$ 中变元的定义域
    - 在一个解释中，对变元的量词所指称的对象 在论域中，因此 $\mathscr{L}$ 称为一阶语言
    - D_I 非空是必要的，否则将出现不可解释情况（空论域或是无用的，或作为特殊情况需建立专门的逻辑理论来处理）
    - 给定一个解释，需指定一个论域，不同论域的解释不能比较
- 个体集由 $\mathscr{L}$ 中（个体）常元所代表的具体对象组成，即一个常元指定一个固定个体（不同常元对应不同个体）
- 关系和函项是对 $\mathscr{L}$ 中谓词符和函项符的具体解释

  ——一元谓词符的解释即为 D_I 的子集，n 元谓词符解释为 D_I^n 中 n 元组的子集
- 仅当给出 $\mathscr{L}$ 中符号的解释后，才能对有关公式的意义做出判断

注

- 有时为简便计，D_I 中元素（对象）就用个体常元（或闭项）表示

  如 $D_I = \{d_1, d_2, \cdots\}$

  为方便，$d_1, d_2, \cdots$ 表示常元 $a_1, a_2, \cdots$ 或常项（因项解释为论域中对象）

  但不要与对象语言 $\mathscr{L}$ 混淆

  - 对集 D_I 可用任何符号表其元素，直接用 $\mathscr{L}$ 中符号亦可
  - $\mathscr{L}$ 中个体和项解释为 D_I 元素，直接用 $\mathscr{L}$ 中个体和项来表 D_I 元素亦方便
  - 这样，$A_1^1(d)$ 可表示用常元（项）d 替换 $A_1^1(x_1)$ 中变元 x_1 的结果，$d \in D_I$，如果 d 不作为 $\mathscr{L}$ 的符号（如常元），那么 $A_1^1(d)$ 就不合式
- 技术上，对 $\mathscr{L}$ 作常元扩展 $\mathscr{L}^+$ 使得对 D_I 中每个元素 d 引入一个常元 a_d，扩展 I 作为 $\mathscr{L}^+$ 的解释取 d 作为 a_d 的解释

二阶语言

二阶语言：量词可解释为在论域中一些对象（对象集）的关系（谓词和函项）；变元分别有对象变元和谓词（关系）变元

例：二阶公式 $(\forall A_i)\mathscr{A}(A_i)$

对谓词变元的量词解释为论域中子集的集

n 阶语言以此类推

例：每个非空的自然数集都有一个最小元

数学归纳法

对任一包含 0 的自然数集 N，若当 $n \in N$ 时就有 $n+1 \in N$，则 N 包含每个自然数

$$\forall A(A(0) \wedge \forall x(A(x) \to A(x+1)) \to \forall x A(x))$$

例 3.37 (例 3.13 续)

给定 $\mathscr{L}$：变元、括号、连接词和量词之外

a_1, A_1^2, f_1^1, f_1^2

提供如下解释 I_1

(1) D_{I_1} 为整数集

(2) 0 为特异元，作为 a_1 的解释

(3) 关系 “$=$” 作为谓词符 A_1^2 的解释

(4) 求反数作为函项符 f_1^1 的解释

(5) 整数加法作为函项符 f_1^2 的解释

例（续）

则对（该 $\mathscr{L}$ 的）任一公式，可解释成关于群的一个命题

$\forall x_1 A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^1(x_1)), a_1)$ 被解释成

对所有 $x_1 \in D_I$，“$x_1 + (\text{-}x_1) = 0$”

在此解释下，该公式的意义为真（T）

把 (5) 替换为

(5′) 整数减法作为函项的 f_1^2 解释

$\forall x_1 A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^1(x_1)), a_1)$ 被解释成

对所有 $x_1 \in D_I$，“$x_1 \text{ - } (\text{-}x_1) = 0$”

在此解释下，该公式的意义为假（F）

例 3.38

$\forall x_1 \forall x_2 \sim \forall x_3 \sim A_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2)$

可被解释成（为真）

对所有 $x, y \in D_N$，不是对每个 $z \in D_N$，$x + z \neq y$

（对所有 $x, y \in D_N$，存在 $z \in D_N$，使得 $x + z = y$）

提供如下解释 N（算术解释）

(1) D_N 为自然数集

(2) 0 为特异元，作为 a_1 的解释

(3) 关系“=”作为谓词符 A_1^2 的解释

(4) 加法作为函项符 f_1^2 的解释

(5) 乘法作为函项符 f_2^2 的解释

例（续）

$\forall x_1 \forall x_2 \sim \forall x_3 \sim A_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2)$

亦可被解释成（为真）

对所有 $x, y \in D_R$，存在 $z \in D_R$，使得 $xz = y$

提供如下解释 R

(1) D_R 为正有理数集

(2) 1 为特异元，作为 a_1 的解释

(3) 关系 “=” 作为谓词符 A_1^2 的解释

(4) 加法和乘法分别作为函项符 f_1^2, f_2^2 的解释

- 谓词和量词
- 一阶语言
- 解释
- 满足
- 真值
- 斯科伦化

满足

令 I 是（一阶语言）$\mathscr{L}$ 的一个以 D_I 为论域的解释

$\bar{a}_i$，$\bar{f}_i^n$ 和 $\bar{A}_i^n$ 分别指 a_i，f_i^n 和 A_i^n 在 I 中的解释

定义 3.39 (变元赋值)

变元赋值 $\tilde{v}$：$\{x_1, x_2, \ldots,\} \to D_I$，即对 $\mathscr{L}$ 中每个变元 x_i 指派 D_I 的（任意）一个元素作为它的解释 $\diamondsuit$

注

给定一个解释 I 和一个变元赋值 $\tilde{v}$，才能对 $\mathscr{L}$ 中符号完全解释

定义 3.40 (赋值)

I 上的一个**赋值**是一个从 $\mathscr{L}$ 的项集到 D_I 的映射 v，满足

(1) 对 $\mathscr{L}$ 的每个常元 a_i, 有

$$v(a_i) = \bar{a}_i$$

(2) 对 $\mathscr{L}$ 的任一函项符 f_i^n 和项 $t_1, \cdots, t_n$，有

$$v(f_i^n(t_1, \cdots, t_n)) = \overline{f}_i^n(v(t_1), \cdots, v(t_n))$$ ◇

注

为简略计（不够严格），可用 I 中赋值 v 来表达变元赋值（即含有 $\tilde{v}$），通过枚举 $v(x_1), v(x_2), \cdots (v(x_i) \in D_I, i = 1, 2, \ldots)$ 系列而完全描述，因为赋值中对函项符的解释（归纳定义） $v(t_i)$ 需包含变元赋值

注

- 对每个变元 x_i 的赋值要考虑指定论域中的每个对象（实例）
- 任一赋值 v 对 $\mathscr{L}$ 中的每个项指派了 D_I 中的一个对象作为它的解释
- 赋值定义条件 (2) 保证了赋值规则的一致性
- 给定一个解释，一般有多种（可能无穷）不同的赋值 v

定义 3.41 (i-等值)

两个赋值 v 和 v' 是 i-等值的，若对每个 $j \neq i$，$v(x_j) = v'(x_j)$ ◇

对 i-等值的两个赋值，它们在除 x_i 外的（任意）变元有相同的取值（除 i 外“几乎”一样，但其实不一样）

注

- 一般地，对 x_i 在其中出现的任何项 t，两个赋值是不同的
- 特殊地，一个赋值 v 自身对任何变元 x_i 是 i-等值的（对每个 $j \neq i$，$v(x_j) = v(x_j)$）

定义 3.42 (可满足性)

令 $\mathscr{A}$ 是（$\mathscr{L}$ 的）一个公式，I 是（$\mathscr{L}$ 的）一个解释，$\tilde{v}$ 是（$\mathscr{L}$ 的）一个变元赋值

I 中一个赋值 v 满足 $\mathscr{A}$，记 $I, \tilde{v} \models \mathscr{A}$ 或 $I, v \models \mathscr{A}[\tilde{v}]$，简记 $I, v \models \mathscr{A}$ 或 $I \models \mathscr{A}$ 或 $v \models \mathscr{A}$，归纳定义如下

(1) v 满足原子 $A_j^n(t_1, \cdots, t_n)$，若 $\bar{A}_j^n(v(t_1), \cdots, v(t_n))$ 在 D_I 中为真（即语句形式 "D_I 中元素 $v(t_1), \cdots, v(t_n)$ 具有关系 $\bar{A}_j^n$" 为真）

(2) v 满足 $(\sim\mathscr{B})$, 若 v 不满足 $\mathscr{B}$

(3) v 满足 $(\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{C})$，若 v 满足 $(\sim\mathscr{B})$，或满足 $\mathscr{C}$

(4) v 满足 $(\forall x_i)\mathscr{B}$，若对每一 i- 等值于 v 的赋值 v' 都满足 $\mathscr{B}$ ◇

注

(a) 定义 3.42 (1):

$v(A_j^n(t_1,\cdots,t_n)) = T$，若 $< v(t_1),\cdots,v(t_n) > \in \bar{A}_j^n$；否则，

$v(A_j^n(t_1,\cdots,t_n)) = F$

把命题作为 0 元谓词符，即没有论据，就是规定了二值，可见可满足性定义包含了命题逻辑语义

(b) 定义 3.42 (4):

- v 对于出现在 $\mathscr{B}$ 中的变元提供了解释（变元赋值）
  v 满足 $(\forall x_i)\mathscr{B}$ 是合理的：若 v 满足 $\mathscr{B}$ 且由 v 通过改变 $v(x_i)$（变元赋值）而得的任何赋值也满足 $\mathscr{B}$
- $(\forall x_i)\mathscr{B}(x_i)$ 亦可解释为：对每个 $d \in D_I$，v 都满足 $\mathscr{B}(d)$，这里 d 被看成 x_i 的解释（定义 3.36 注）

(c) 作为定义，四个条件都是充要条件

(d) v 不满足 $\mathscr{A}$，简记 $I \not\models \mathscr{A}$

例 3.43 (例 3.13 续)

给定 $\mathscr{L}$ 如下符号（变元、括号、连接词和量词之外）

a_1, A_1^2, f_1^1, f_1^2

提供如下解释 I_2

D_{I_2} 为整数集

0 为特异元，作为 a_1 的解释

关系 “=” 作为谓词符 A_1^2 的解释

反数作为函项符 f_1^1 的解释

整数加法作为函项符 f_1^2 解释

例（续）

考虑 $(\forall x_1)(A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^1(x_1)), a_1))$

令 v 是 I_2 上的一个赋值，则 $v(x_1)$ 一定是个整数，且 $v(a_1) = 0$，则该公式解释为

对于所有的 $x_1 \in D_I$，“$x_1 + (\text{-}x_1) = 0$”

v 满足 $(A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^1(x_1)), a_1))$

若改变 $v(x_1)$ 的值，得到新的 1-等值 赋值仍满足这个公式，即 v 满足

$(\forall x_1)(A_1^2(f_1^2(x_1, f_1^1(x_1)), a_1))$

注

可记 $v' = v(x_i/t)$ 表示 v' 是通过用 t 替换 v 中 x_i 的所有出现而得的项；记 $v(x_i/t)$ 表示把 $v(x_i)$ 替换为 $v(t)$

命题 3.44 (替换)

令 $\mathscr{A}(x_i)$ 是（$\mathscr{L}$ 的）一个公式，且 x_i 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中自由出现，t 是对 $\mathscr{A}(x_i)$ 中 x_i 自由的项。设 v 是一赋值，v' 是 i-等值于 v 的另一赋值且 $v'(x_i) = v(t)$，则 v 满足 $\mathscr{A}(t)$ 当且仅当 v' 满足 $\mathscr{A}(x_i)$ ◇

证

分别对项（符号数）和公式（联词和量词数）的结构用归纳法

引理 3.45

对任一 x_i 在其中出现的项 s，s' 是通过用 t 替换 s 中 x_i 的所有出现而得的项，则 $v(s') = v'(s)$ ◇

证（续）

$v(s') = v'(s)$

(1) s 是 x_i，s' 即是 t，则

$$v'(s) = v'(x_i) = v(t) \quad (v' \text{ 的定义})$$
$$= v(s')$$

(2) s 是 $f_i^n(s_1, \cdots, s_n)$，其中 $s_1, \cdots, s_n$ 为较短长度的项

令 $s_1', \cdots, s_n'$ 是用 t 替换所有 x_i 而得，则 $s' = f_i^n(s_1', \cdots, s_n')$

$$v(s') = \bar{f}_i^n(v(s_1'), \cdots, v(s_n'))$$
$$= \bar{f}_i^n(v'(s_1), \cdots, v'(s_n)) \qquad (\text{归纳假设})$$
$$= v'(s)$$

证（续）

$v \models \mathscr{A}(t) \quad \text{iff} \quad v' \models \mathscr{A}(x_i)$

- $\mathscr{A}(x_i)$ 是原子，如 $A_j^n(s_1, \cdots, s_n)$，其中 $s_1, \cdots, s_n$ 为项

  ($\Leftarrow$) 设 $v' \models \mathscr{A}(x_i)$，则

  $\bar{A}_j^n(v'(s_1), \cdots, v'(s_n))$ 可满足

  $\bar{A}_j^n(v(s'_1), \cdots, v(s'_n))$ 可满足

  其中 $s'_1, \cdots, s'_n$ 为用 t 替换所有 x_i 的项，如上已证

  这样，$v \models A_j^n(s'_1, \cdots, s'_n)$，即 $v \models \mathscr{A}(t)$

  ($\Rightarrow$) 反之亦然

- (1) (a) $\mathscr{A}(x_i)$ 是 $\sim\mathscr{B}(x_i)$

  (b) $\mathscr{A}(x_i)$ 是 $\mathscr{B}(x_i) \to \mathscr{C}(x_i)$

  易证

证（续）

(2) $\mathscr{A}(x_i)$ 是 $(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i) \qquad (j \neq i)$

（$\Leftarrow$）设若 $v \not\models \mathscr{A}(t)$（欲反证 $v' \not\models \mathscr{A}(x_i)$）

则存在一个 j-等值于 v 的赋值 w，$w \not\models \mathscr{B}(t)$

令 w' 是一个 i-等值于 w 的赋值，（按已知条件）有 $w'(x_i) = w(t)$

按归纳假设（对较短的 $\mathscr{B}(x_i)$），由 $w \not\models \mathscr{B}(t)$，有 $w' \not\models \mathscr{B}(x_i)$

t 对 $(\forall x_j)\mathscr{B}(x_i)$ 中 x_i 是自由的，因此 x_j 不出现在 t 中

这样，对 $k \neq j$，$v(t)$ 仅依赖于 $v(x_k)$，亦即

对 $k \neq j$，$v(x_k) = w(x_k)$，因此 $v(t) = w(t)$

因 w 是 j-等值于 v 的，所以 w' 是 j-等值于 v' （据引理 3.45）

由 $w' \not\models \mathscr{B}(x_i)$，有 $v' \not\models (\forall x_j)\mathscr{B}(x_i)$，即 $v' \not\models \mathscr{A}(x_i)$

（$\Rightarrow$）同理可证 $\square$

量词的构造 *

令 M 是一个集，$\mathcal{R}_M(n)$ 是 M 上所有 n-元关系（谓词）的集，

$R \in \mathcal{R}_M(n)$ 看作含 n 个自由变元 $x_0, \cdots, x_{n-1}$ 的性质；对任一 $R \in \mathcal{R}_M(n)$，令 $j(R) \in \mathcal{R}_M(n+1)$ 是同样的关系，只增加一个名义(dummy）变元 x_n

对任一 $R \in \mathcal{R}_M(n+1)$，可有 $\mathcal{R}_M(n)$ 中的关系 $\exists x_n R$，$\forall x_n R$

这样，对任一 $R \in \mathcal{R}_M(n)$ 和 $Q \in \mathcal{R}_M(n+1)$，以下性质满足：$\models$ 是定义 3.42 中除全称量词（定义 3.42 (4)）外的可满足性

$$Q \models j(R) \Longleftrightarrow \exists x_n Q \models R$$

$$j(R) \models Q \Longleftrightarrow R \models \forall x_n Q$$

这些性质实际上确定了关系 $\exists x_n Q$ 和 $\forall x_n Q$，因此可用作量词的语义定义

数理逻辑

讲义，第 6.3 版，2024 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨

linzuoquan@pku.edu.cn

3 一阶逻辑：模型论

- 谓词和量词
- 一阶语言
- 解释
- 满足
- 真值
- 斯科伦化

真值

定义 3.46 (模型)

一个公式 $\mathscr{A}$ 是在解释 I 中为真的，若 I 中每个赋值 v 都满足 $\mathscr{A}$；$\mathscr{A}$ 是在 I 中为假的，若 I 中不存在满足 $\mathscr{A}$ 的赋值

一个解释 I 称为公式 $\mathscr{A}$ 的模型，若 I 中每个赋值 v 都满足 $\mathscr{A}$，

即 I 使 $\mathscr{A}$ 为真；$\mathscr{A}$ 在 I 中为假，即 I 不是 $\mathscr{A}$ 的模型

记 $I \models \mathscr{A}$ 表示 $\mathscr{A}$ 在 I 中为真，即 I 是 $\mathscr{A}$ 的模型

令 Γ 是一个公式集，一个解释 I 是 Γ 的模型，当且仅当 $\forall \mathscr{A} \in \Gamma$，$I \models \mathscr{A}$ $\diamondsuit$

注

- $\forall \mathscr{A}$ 是元语言记号，表示所有（Γ 中）$\mathscr{A}$，不是一阶语言符号
- 真值概念对应于命题真值，比赋值（可满足）更直观

注

(a) 存在公式在 I 中既不真又不假（考虑自由变元，赋值有些可满足有些不可满足）

(b) 一个公式不可能在给定的解释中既真又假（排中、二值）

(c) 在一个给定的解释中，公式 $\mathscr{A}$ 是假的，当且仅当 $\sim\mathscr{A}$ 是真的

(d) 在一个给定的解释中，公式 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 是假的，当且仅当 $\mathscr{A}$ 是真的且 $\mathscr{B}$ 是假的

命题 3.47

在一个给定的解释 I 中，若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 都为真，则 $\mathscr{B}$ 也为真 $\diamondsuit$

证

令 v 是 I 的任一赋值，由 $I \models \mathscr{A} \to \mathscr{B} \quad \Rightarrow$

v 满足 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$，即 v 要么满足 $\sim\mathscr{A}$，要么满足 $\mathscr{B}$

又由 $I \models \mathscr{A} \quad \Rightarrow$

v 满足 $\mathscr{A}$，不可能满足 $\sim\mathscr{A}$

故 v 满足 $\mathscr{B}$，即 $I \models \mathscr{B}$ $\square$

命题 3.48

令 $\mathscr{A}$ 是一个公式，I 是一个解释，则 $I \models \mathscr{A}$ 当且仅当 $I \models (\forall x_i)\mathscr{A}$，其中 x_i 为任意变元 ◇

证

设 $I \models \mathscr{A}$，令 v 是 I 的任一赋值，则 v 满足 $\mathscr{A}$

由于 I 中的每个赋值都满足 $\mathscr{A}$，则每个 i-等值于 v 的赋值 v' 也满足 $\mathscr{A}$，因而 v 满足 $(\forall x_i)\mathscr{A}$，即 $I \models (\forall x_i)\mathscr{A}$

反之，设 $I \models (\forall x_i)\mathscr{A}$，令 v 是 I 的任一赋值，则 v 满足 $(\forall x_i)\mathscr{A}$

即任一 i-等值于 v 的赋值 v' 都满足 $\mathscr{A}$，特别地，v 也满足 $\mathscr{A}$（定义 3.41 注：v 对任何变元 x_i 自身是 i-等值的）

即（I 的）任一赋值满足 $\mathscr{A}$，因此 $I \models \mathscr{A}$ □

推论 3.49

令 $\mathscr{A}$ 是一个公式，I 是一个解释，则 $I \models \mathscr{A}$ 当且仅当 $I \models (\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{A}$，其中 $y_1, \cdots, y_n$ 为任意变元 ◇

证

重复应用 命题 3.48 即得 □

注

- 若 x_i 在 $\mathscr{A}$ 中不自由出现，则添加量词得到 $(\forall x_i)\mathscr{A}$，并不改变 $\mathscr{A}$ 的解释
- 对 $\mathscr{A}$ 中自由变元 x_i，则添加量词得到 $(\forall x_i)\mathscr{A}$，本有不同的效果，但 命题 3.48 揭示 $\mathscr{A}(x_i)$ 为真 当且仅当 $(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$ 为真

  这样，通常以 $\mathscr{A}(x_i)$ 表 $(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$，作为全称量化公式

命题 3.50

在一个解释 I 中，赋值 v 满足 $(\exists x_i)\mathscr{A}$，当且仅当至少存在一个 i-等值于 v 的赋值 v'，v' 满足 $\mathscr{A}$ $\diamondsuit$

证

因 $(\exists x_i)\mathscr{A}$ 等价于 $\sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$，则赋值 v 满足 $\sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$，即 v 不满足 $(\forall x_i)(\sim\mathscr{A})$，则至少存在一个 i-等值于 v 的赋值 v'，使得 v' 不满足 $(\sim\mathscr{A})$，即 v' 满足 $\mathscr{A}$

反之亦然 $\square$

注

v 满足 $(\exists x_i)\mathscr{B}$，若至少存在一个 i-等值于 v 的赋值 v' 满足 $\mathscr{B}$

若至少存在一个 $d \in D_I$，v 都满足 $\mathscr{B}(d)$

定义（替换实例）

设 $\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{L}_0$ 中的一个公式，对 $\mathscr{A}_0$ 中的任一命题（谓词）符，用 $\mathscr{L}$ 中的一个公式去替换它在 $\mathscr{A}_0$ 中的处处出现，这样得到对应的一个 $\mathscr{L}$ 中的公式 $\mathscr{A}$，称之为 $\mathscr{A}_0$ 在 $\mathscr{L}$ 中的一个 替换实例 $\diamondsuit$

注

作为特殊情况，$\mathscr{L}_0$ 是 $\mathscr{L}$ 的子语言，$\mathscr{A}_0$ 若是 $\mathscr{L}_0$ 中的公式，
$\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{L}_0$ 中 $\mathscr{A}_0$ 在 $\mathscr{L}$ 中的一个替换实例

例：$\sim\forall x_1 A_1^1(x_1) \to (\forall x_2 A_2^2(x_1, x_2) \to (A_1^1(x_2) \to \forall x_1 A_3^1(x_1)))$
即可看成 $\sim p_1 \to p_2$ 的替换实例，亦可看成
$\sim q_1 \to (q_2 \to q_3)$ 的替换实例

定义 3.51 ($\mathscr{L}$ 重言式)

$\mathscr{L}$ 中的一个公式 $\mathscr{A}$ 是重言式，若 $\mathscr{A}$ 是 L 中的一个重言式在 $\mathscr{L}$ 中的一个替换实例 $\diamondsuit$

亦即， $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{L}_0$ 中的一个重言式在 $\mathscr{L}$ 中的一个替换实例

注

重言式是命题逻辑的概念，只能通过替换实例引入一阶逻辑

例： $\forall x_1 A_1^1(x_1) \rightarrow \forall x_1 A_1^1(x_1)$

是重言式 $p_1 \rightarrow p_1$ 的替换实例

命题 3.52

$\mathscr{L}$ 中的重言式在 $\mathscr{L}$ 的任何解释中都为真 ◇

证

设 $\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{L}_0$ 中一个公式，且 $p_1, \cdots, p_n$ 是 $\mathscr{A}_0$ 中出现的所有命题（谓词）符，$\mathscr{A}$ 是通过用 $\mathscr{L}$ 中的公式 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$ 分别替换 $p_1, \cdots, p_n$ 在 $\mathscr{A}_0$ 中的处处出现而得到的公式

令 I 是 $\mathscr{L}$ 的任一解释，v 是 I 中的任一赋值，构造一个 $\mathscr{L}$ 的赋值 v' 满足

$$v'(p_i) = T, \text{若 } v \text{ 满足 } \mathscr{A}_i;\ \text{否则 } v'(p_i) = F, 1 \leq i \leq n$$

归纳可证：赋值 v 满足 $\mathscr{A}$ 当且仅当 $v'(\mathscr{A}_0) = T$

证 (续)

若 $\mathscr{A}_0$ 就是一个谓词符，如 p_n，则结论显然成立

(1) $\mathscr{A}_0$ 是 $\sim\mathscr{B}_0$，则 $\mathscr{A}$ 就是 $\sim\mathscr{B}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{B}_0$ 的一个替换实例

v 满足 $\mathscr{A}$ $\iff$

v 不满足 $\mathscr{B}$，由归纳假设 $\iff$

$v'(\mathscr{B}_0) = F$，即 $v'(\mathscr{A}_0) = T$

证（续）

(2) $\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{B}_0 \to \mathscr{C}_0$, 则 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B} \to \mathscr{C}$, $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 分别是 $\mathscr{B}_0$ 和 $\mathscr{C}_0$ 的替换实例

下列陈述等价

(a) v 满足 $\mathscr{A}$

(b) v 满足 $\sim\mathscr{B}$, 或 v 满足 $\mathscr{C}$

(c) v 不满足 $\mathscr{B}$, 或 v 满足 $\mathscr{C}$

(d) $v'(\mathscr{B}_0) = F$, 或 $v'(\mathscr{E}_0) = T$

(e) $v'(\mathscr{B}_0 \to \mathscr{C}_0) = T$

(f) $v'(\mathscr{A}_0) = T$

进一步，$\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{L}$ 中的重言式，则对任意赋值 v' 都有 $v'(\mathscr{A}_0) = T$, 就有赋值 v 满足 $\mathscr{A}$

考虑到 I 和 v 的任意性，命题成立 $\square$

给定一个解释，一个公式不必非真既假，可不真不假

例 3.53

- $A_1^1(x_1)$ 不真不假 $\Leftarrow$ 自由变元

  考虑一个解释 I 其论域为整数，A_1^1 表示谓词 ">0"，则

  $A_1^1(x_1)$ 被任何赋值 $v(x_1)>0$ 所满足（但不是所有赋值）

  $A_1^1(x_1)$ 不被任何赋值 $w(x_1)\leq 0$ 所满足

- $A_1^2(x_1, x_2)$

  考虑一个解释 I 其论域为正整数，A_1^2 表示谓词 "$x_1 \leq x_2$"，则

  $A_1^2(x_1, x_2)$ 被所有使得 $a \leq b$ 之正整数的有序对 (a, b) 所满足

定义 3.54

令 $\mathscr{A}$ 是一个公式，$\mathscr{A}$ 称为闭（公）式（亦称句子 (sentence)），若 $\mathscr{A}$ 中没有自由出现的变元；称为开（公）式，若 $\mathscr{A}$ 中包含（至少一个）自由变元 ◇

注

(1) 闭项（不含变元）与闭式（不含自由变元）的含义不同

(2) 一个公式不是闭式就是开式（把不含变元的公式作为闭式的特殊情况），不含量词的开式可称为纯开式

命题 3.55

令 I 是一个解释，$\mathscr{A}$ 是一个公式。v 和 w 是 I 中的赋值，且对 $\mathscr{A}$ 中每个自由变元 x_i 都有 $v(x_i) = w(x_i)$，则 v 满足 $\mathscr{A}$ 当且仅当 w 满足 $\mathscr{A}$ ◇

证

若 $\mathscr{A}$ 是原子，如 $A_i^n(t_1,\cdots,t_n)$，只需考虑 $\mathscr{A}$ 中出现的自由变元和常元（函项符由此解释）

对出现在 $t_1,\cdots,t_n$ 中的自由变元和个体常元，v 和 w 赋值相同

$v(t_i)=w(t_i)$，$1\leq i\leq n$

结论显然成立

(1) $\mathscr{A}$ 是 $\sim\mathscr{B}$

(2) $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{C}$

易证

证（续）

(3) $\mathscr{A}$ 是 $\forall x_i \mathscr{B}$

($\Rightarrow$) 若 $v \models \mathscr{A}$，即 $v \models \forall x_i \mathscr{B}$

考虑 w' 是任一 i- 等值于 w 的赋值

因 x_i 不自由出现在 $\forall x_i \mathscr{B}$，有

$v(y) = w'(y)$，y 是 $\mathscr{A}$ 中自由变元

任一 i- 等值于 v 的赋值 $v' \models \mathscr{B}$

特别，令

$v'(x_i) = w'(x_i)$

$v'(x_j) = v(x_j)$，$j \neq i$

则 $w'(y) = v'(y)$，y 是 $\mathscr{B}$ 中自由变元

据归纳假设（注意到 w' 与 v' 是 i-等值的）

$v' \models \mathscr{B} \quad \Rightarrow \quad w' \models \mathscr{B}$

$w \models \forall x_i \mathscr{B}$，即 $w \models \mathscr{A}$

($\Leftarrow$) 同理可证 □

推论 3.56

令 I 是一个解释，$\mathscr{A}$ 是一个闭式，则 $I \models \mathscr{A}$ 或 $I \models \sim\mathscr{A}$ $\diamondsuit$

证

设 v 和 w 是 I 中任意两个赋值，则对 $\mathscr{A}$ 的任意自由变元 y （其实 $\mathscr{A}$ 中无自由变元出现）都有 $v(y) = w(y)$，则 v 满足 $\mathscr{A}$ 当且仅当 w 满足 $\mathscr{A}$，这意味着要么所有的赋值都满足 $\mathscr{A}$，要么没有赋值满足 $\mathscr{A}$，即 $\mathscr{A}$ 为真或 $\mathscr{A}$ 为假，亦即 $I \models \mathscr{A}$ 或 $I \models \sim\mathscr{A}$ $\square$

例 3.57

(1) $\forall x_1 A_1^1(x_1)$ 非真即假 $\Leftarrow$ 闭式

考虑一个解释 I 其论域为整数，A_1^1 表示谓词 “> 0”，则

$$I \models \forall x_1 A_1^1(x_1) \text{ 或 } I \models \sim\forall x_1 A_1^1(x_1)$$

即 $\forall x_1(x_1 > 0)$ 为真或 $\sim\forall x_1(x_1 > 0)$ 为真

(2) $\forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$

考虑一个解释 I 其论域为正整数，A_1^2 表示谓词 “$x_1 \le x_2$”，则

“对所有正整数 x_2，$x_1 \le x_2$” 仅被正整数 1 满足（自由变元仅可解释为 1）

(3) $\exists x_1 \forall x_2 A_1^2(x_1, x_2)$

考虑一个解释 I 其论域为<u>正整数</u>，A_1^2 表示谓词 “$x_1 \le x_2$” $\Rightarrow$ 真（存在一个最小正整数）

考虑一个解释 I 其论域为<u>整数</u>，A_1^2 表示谓词 “$x_1 \le x_2$” $\Rightarrow$ 假

注

- 闭式是二值的（开式不一定，如例 3.53）
- 闭式即（复合）命题（句子）
- 对闭式，检测其真假值只需检查是否有某个赋值满足它与否
- 数学中通常只用闭式（因此经常省略 $\forall$ 作为全称闭式）

定义 3.58

令 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式，$\mathscr{A}$ 是（逻辑）有效的（有效式），若 $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{L}$ 的每个解释下都为真，即对任一模型 I，$I \models \mathscr{A}$，记 $\models \mathscr{A}$

$\mathscr{A}$ 是矛盾的（不一致），若 $\mathscr{A}$ 在 $\mathscr{L}$ 的每个解释下都为假，即对任一模型 I，$I \not\models \mathscr{A}$，亦即 $\sim\mathscr{A}$ 是有效的 ◇

推论 3.59

- 若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 都是有效的，则 $\mathscr{B}$ 也是有效的
- 若 $\mathscr{A}$ 是有效的，当且仅当 $(\forall x_i)\mathscr{A}$ 是有效的，其中 x_i 为任意变元

证

据命题 3.47 和命题 3.48 □

注

$\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 不可能同时有效（在一个解释下，若 $\mathscr{A}$ 为真则 $\sim\mathscr{A}$ 为假）；

$\mathscr{A}$ 是矛盾的当且仅当 $\sim\mathscr{A}$ 是有效的

注

为证明一个公式是有效的，需证任一解释之任一赋值都满足这个公式；反之，为证明一个公式不是有效的，只要构造一个解释，使得某个赋值不满足这个公式（反例）

例 3.60

(a) 所有重言式都是有效的（命题 3.52），反之不然，如 $\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{A})$ 是有效的，但不是重言式

(b) $A_1^1(x_1)$ 不是有效的（不真不假）

(c) $(\forall x_1)(\exists x_2)A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_2)(\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2)$ 不是有效的
可构造一解释其论域为整数集，$\bar{A}_1^2(y, z)$ 解释为 $y < z$

(d) $(\forall x_i \mathscr{A}(x_i) \to \forall x_i \mathscr{B}(x_i)) \to \forall x_i(\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{B}(x_i))$ 无效吗？

(e) 令 $\mathscr{A}$ 是一个公式，则 $\forall x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{A}$ 是有效的

例（续）(e)

$\forall x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{A}$

令 I 是任意解释，其论域为 D_I，v 为 I 中任意赋值

若 $v \not\models \forall x_i \mathscr{A}$，则 $v \models \forall x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{A}$

若 $v \models \forall x_i \mathscr{A}$，则

每个 i-等价于 v 的赋值 $v' \models \mathscr{A}$

$v \models \exists x_i \mathscr{A}$ （命题 3.50）

$v \models \forall x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{A}$ 有效

注

- 重言式是 PL 的概念，通过重言式替换实例可在 FOL 延用，有效式（对应于重言式）是 FOL 的概念，但有效式比重言式强

  重言式必是有效式，但有效式不一定是重言式

  如 (e) 是一个有效（闭）式但不是重言式的例子

- 有效的纯开式必是重言式（替换实例）

  (试证之：任一开式都可能没有真值)

定义 3.61 (蕴涵关系)

令 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是 ($\mathscr{L}$ 的) 公式，称 $\mathscr{A}$ 蕴涵 $\mathscr{B}$，记 $\mathscr{A} \models_K \mathscr{B}$ (简记 $\mathscr{A} \models \mathscr{B}$)，若满足 $\mathscr{A}$ 的所有解释也满足 $\mathscr{B}$

即，$\mathscr{A}$ 的所有模型也是 $\mathscr{B}$ 的模型

亦即，令 I 是任一解释，$\mathscr{A} \models \mathscr{B}$，若 $I \models \mathscr{A}$ 则 $I \models \mathscr{B}$

令 Γ 是一个公式集，$\mathscr{B}$ 是 一个公式，$\Gamma \models \mathscr{B}$，若 $I \models \Gamma$ 则 $I \models \mathscr{B}$

称 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 逻辑等价 (简称等价)，记 $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$，若 $\mathscr{A} \models \mathscr{B}$ 且 $\mathscr{B} \models \mathscr{A}$

$\diamondsuit$

命题 3.62

若 $\mathscr{A} \models_L \mathscr{B}$，则 $\mathscr{A} \models_K \mathscr{B}$；特殊地，若 $\models_L \mathscr{B}$，则 $\models_K \mathscr{B}$；

若 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 是重言等价，则它们也是逻辑等价

证

若 $\mathscr{A} \models_L \mathscr{B}$，$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{L}_0$ 的公式，它们也是 $\mathscr{L}$ 的公式

据 L 的完全性定理和演绎定理，有

$\models_L \mathscr{A} \to \mathscr{B}$，即 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是重言式

据命题 3.52，有

$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是 K 的有效式，即 $\models_K \mathscr{A} \to \mathscr{B}$

据定义 3.42，对任一解释 I，若 $I \models_K \mathscr{A}$ 则 $I \models_K \mathscr{B}$，即 $\mathscr{A} \models_K \mathscr{B}$ □

例 3.63

$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \equiv \forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{A})$，但不是重言等价

(PL 的等价与 FOL 的等价并不相同)

- 谓词和量词
- 一阶语言
- 解释
- 满足
- 真值
- 斯科伦化

斯科伦化

定义 3.64 (斯科伦式)

- 若公式 $(\exists x_i)\mathscr{B}$ 出现在公式 $\mathscr{A}$ 中，且属于 $(\forall x_{i1}),\cdots,(\forall x_{ir})$ 的辖域，不妨设为 $B(x_{i1},\cdots,x_{ir},x_i)$，则可删除 $(\exists x_i)$，且以函项符 $h_i^r(x_{i1},\cdots,x_{ir})$ 替换 x_i，$h_i^r(x_{i1},\cdots,x_{ir})$ 称为斯科伦函项
- 若 $(\exists x_i)$ 不出现在任何全称量词的辖域中，直接删除 $(\exists x_i)$，且以个体常元符 c_i 替换 x_i，c_i 称为斯科伦常元

这种做法称为公式的斯科伦化（Skolemisation），这样得到的公式称为 $\mathscr{A}$ 的斯科伦式

例 3.65

$(\forall x_1)(\exists x_2)(A_1^2(x_1,x_2) \to (\exists x_3)A_2^3(x_1,x_2,x_3))$ 的斯科伦式为

$(\forall x_1)(A_1^2(x_1,h_1^1(x_1)) \to A_1^3(x_1,h_1^1(x_1),h_2^1(x_1)))$

例 3.66

$\forall x.Person(x) \to \exists y.Heart(y) \land Has(x,y)$

不正确：$\forall x.Person(x) \to Heart(h) \land Has(x,h)$

正确：$\forall x.Person(x) \to Heart(h(x)) \land Has(x,h(x))$

注

斯科伦函项是存在性论断，若要找到具体的特列需要根据公式去发现

注

- 为清楚起见，可在 $\mathscr{L}$ 中规定一类斯科伦函项符和一类斯科伦常元

  给定一个一阶语言 $\mathscr{L}$，可扩展 $\mathscr{L}$ 成另一个一阶语言 $\mathscr{L}^s$：对 $\mathscr{L}$ 中常元系列和函项符系列分出子系列作为斯科伦常元和斯科伦函项符

  $$a_i, \ldots$$
  $$a_i^s, \ldots$$
  $$f_i^n(t_1, \ldots, t_n), \ldots$$
  $$f_i^n(t_1, \ldots, t_n)^s, \ldots$$

  (一个能枚举集可划分为两个能枚举集)

- 斯科伦化的目的是消去存在量词，与消去存在量词的顺序无关，斯科伦式是相同的

- 一个公式 $\mathscr{A}$ 与其斯科伦式 $\mathscr{A}^s$ 不一定等价：“$\mathscr{A}$ 有效当且仅当 $\mathscr{A}^s$ 有效”不成立

命题 3.67

令 $\mathscr{A}$ 是一个公式，$\mathscr{A}$ 是矛盾的，当且仅当 $\mathscr{A}$ 的斯科伦式是矛盾的 $\diamondsuit$

即 $\mathscr{A}$ 和它的斯科伦式是弱等价的，或反证等价

证

等价于证明（注意：考虑 $\mathscr{A}$ 不矛盾，即不是所有解释使 $\mathscr{A}$ 成假，意味存在至少一个解释使 $\mathscr{A}$ 成真，因 $\mathscr{A}$ 可能是开式，亦可不真不假，但只要考虑都是成真的情况）

$\mathscr{A}$ 为真 $\Longleftrightarrow$ $\mathscr{A}$ 的斯科伦式为真

（简化证明，只考虑闭式，完整证明参见命题 4.44）

考虑公式 $\mathscr{A}$： $\forall x_1 \exists x_2 \mathscr{B}(x_1, x_2)$

其斯科伦式 $\mathscr{A}^s$： $\forall x_1 \mathscr{B}(x_1, h_1^1(x_1))$

证（续）

（$\Rightarrow$）设存在一个解释 $I \models \mathscr{A}$

$I \models \exists x_2 \mathscr{B}(x_1, x_2)$　（命题 3.48，对 $\forall$）

$v \models \exists x_2 \mathscr{B}(x_1, x_2)$，$v$ 是 I 的任一赋值

令 $x \in D_I$，$v(x_1) = x$

$v' \models \mathscr{B}(x_1, x_2)$，存在 v' 是 2-等值于 v　（命题 3.50，对 $\exists$）

令 $\overline{h}_1^1(x) = v'(x_2)$，$\forall x \in D_I$

即 $\overline{h}_1^1(x)$ 是良定义的（在 D_I 中处处定义）

扩展 I 到 I^s，其（一阶）语言包含斯科伦函项 h_1^1，且把 h_1^1 解释为 $\overline{h}_1^1$，则对 I^s 的任一赋值 u（注意到 I^s 与 I 不同只在斯科伦函项，u 是 v 相应的扩展）

$u \models \mathscr{B}(x_1, h_1^1(x_1))$

$I^s \models \forall x_1 \mathscr{B}(x_1, h_1^1(x_1))$　（命题 3.48）

（$\Leftarrow$）同理可证　$\square$

定义 3.68 (解释同构)

令 $\mathscr{L}$ 是一个一阶语言，I 和 I' 是两个 $\mathscr{L}$ 的解释，其论域分别为 D_I 和 $D_{I'}$。I 与 I' 同构（记 $I \approx I'$）当且仅当存在一个一一对应映射 g 使得：v, v' 分别是 I, I' 的任一赋值

(1) 对任一常元 a_i，$g(v(a_i) = v'(a_i)$

(2) 对任一函项符 $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$，
$g(v(f_i^n(t_1, \ldots, t_n))) = v'(f_i^n(g(t_1), \ldots, g(t_n)))$

(3) 对任一谓词符 $A_i^n(t_1, \ldots, t_n)$，$v \models A_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ 当且仅当 $v' \models A_i^n(g(t_1), \ldots, g(t_n))$ ◇

注

解释（模型）必须在同一论域或同构论域才能比较，同构解释具有相同的结构

命题 3.69

若 $I \approx I'$，则对任何公式 $\mathscr{A}$，$I \models \mathscr{A}$ 当且仅当 $I' \models \mathscr{A}$ $\diamondsuit$

证

据 g 归纳可证 $\square$

定义 3.70

令 I_1, I_2 是（$\mathscr{L}$ 的）两个解释，I_1 与 I_2（基本）等价（记 $I_1 \equiv I_2$），若对任一公式 $\mathscr{A}$，$I_1 \models \mathscr{A}$ 当且仅当 $I_1 \models \mathscr{A}$

注

若 $I_1 \approx I_2$，则 $I_1 \equiv I_2$；反之不然

定义 3.71

令 Γ 是一个（$\mathscr{L}$ 的）公式集，M_1 和 M_2 是两个 Γ 的模型，

M_2 是 M_1 的扩展，记 $M_1 \sqsubseteq M_2$，若：v_1, v_2 分别是 M_1, M_2 的任一赋值

- $D_{M_1} \subseteq D_{M_2}$
- 对任一常元 a_i，$v_1(a_i) = v_2(a_i)$
- 对任一函项符 $f_i^n(t_1, \ldots, t_n)$，$v_1(f_i^n(t_1, \ldots, t_n)) = v_2(f_i^n(t_1, \ldots, t_n))$
- 对任一谓词符 A_i^n，D_{M_1} 中任意 $b_1, \ldots, b_n$，$M_1 \models A_i^n(b_1, \ldots, b_n)$ 当且仅当 $M_2 \models A_i^n(b_1, \ldots, b_n)$ $\diamondsuit$

亦称 M_1 是 M_2 的子模型（子结构）

注

极小模型？基于极小模型的推理??

从模型论引出非标准分析（无穷小 = 模型 = 实数域）