

# 迭代法解线性方程组

教师: 胡俊

北京大学数学科学学院

November 11, 2020

- 1 Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代
- 2 单步线性定常迭代法及收敛性条件
- 3 G-S迭代收敛的两个充分条件
- 4 对角占优矩阵迭代法的收敛性
- 5 超松弛迭代
- 6 系数矩阵对称正定时迭代法的收敛性
- 7 几乎奇异系统的迭代法

- 1 Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代
- 2 单步线性定常迭代法及收敛性条件
- 3 G-S迭代收敛的两个充分条件
- 4 对角占优矩阵迭代法的收敛性
- 5 超松弛迭代
- 6 系数矩阵对称正定时迭代法的收敛性
- 7 几乎奇异系统的迭代法

$$Ax = b, \quad A = D - L - U$$

其中

$$D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & -a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

则有

$$x = Bx + g$$

其中  $B = D^{-1}(L + U)$ ,  $g = D^{-1}b$ . 若给定初始向量

$$x_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T.$$

$$x_1 = Bx_0 + g$$

一般地, 若  $x_{k-1}$  已知, 则

$$x_k = Bx_{k-1} + g, \quad k = 1, 2, \dots$$

这就是**Jacobi**迭代格式,  $B$ 称为**Jacobi**迭代的迭代矩阵,  $g$ 称为常数项.

$$x_k = D^{-1}Lx_k + D^{-1}Ux_{k-1} + g \quad (g = D^{-1}b)$$

$$(I - D^{-1}L)x_k = D^{-1}Ux_{k-1} + g \Rightarrow x_k = (D - L)^{-1}Ux_{k-1} + (D - L)^{-1}b.$$

$(D - L)^{-1}U \rightarrow$  **G-S**迭代矩阵

$(D - L)^{-1}b \rightarrow$  **G-S**迭代常数项

- 1 Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代
- 2 单步线性定常迭代法及收敛性条件
- 3 G-S迭代收敛的两个充分条件
- 4 对角占优矩阵迭代法的收敛性
- 5 超松弛迭代
- 6 系数矩阵对称正定时迭代法的收敛性
- 7 几乎奇异系统的迭代法

$$x_{k+1} = Mx_k + g$$

Jacobi迭代:  $M = D^{-1}(L + U)$ ,  $g = D^{-1}b$

G-S迭代:  $M = (D - L)^{-1}U$ ,  $g = (D - L)^{-1}b$

$M$ 是迭代矩阵,  $g$ 是常数项,  $x_0$ 是初始向量.

$Ax = b$ , 若  $G(I - M)X = Gg$ , 即  $A = G(I - M)$ ,  $b = Gg$ , 则称迭代法与线性方程组是相容的. **Jacobi**与**G-S**迭代都是相容的.

如果迭代法收敛, 并记其极限为  $x_*$ , 则有(下面总假定迭代法相容)

$$x_* = Mx_* + g$$

则  $x_*$  是  $Ax = b$  的唯一解(设  $A$  非奇异). 令  $y_k = x_k - x_*$ , 于是有

$$y_{k+1} = My_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \implies y_k = M^k y_0.$$

因此对  $\forall y_0$ , 都有  $y_k \rightarrow 0$  (即  $x_k \rightarrow x_*$ ) 的充分必要条件是  $M^k \rightarrow 0$ .



## Theorem 2.1

单步线性迭代法收敛的充分必要条件是 $\rho(M) < 1$ .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$A_1$ 对Jacobi迭代收敛, 但G-S迭代不收敛.  $A_2$ 对G-S迭代收敛, 但Jacobi迭代不收敛.

设方程组 $Ax = b$ 的右端项为 $b = [-3, -1, 4, 7]^T$ , 系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -4 & -2 \\ -6 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 12 & -2 \\ -2 & -2 & -4 & 15 \end{bmatrix}.$$

证明Gauss-Seidel迭代法是收敛的.

## Theorem 2.2

若 $\|M\| = q < 1$ , 且假定 $\|I\| = 1$ , 则有

$$\|x_k - x_*\| \leq \frac{q^k}{1 - q} \|x_1 - x_0\| \longrightarrow \text{可计算的界}$$

证明:

$$\|y_k\| = \|M^k y_0\| \leq \|M^k\| \|y_0\| = q^k \|y_0\|$$

下面估计 $y_0$

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 - x_* = x_0 - x_1 + x_1 - x_* \\ &= x_0 - x_1 + M(x_0 - x_*) \\ &\implies (I - M)(x_0 - x_*) = x_0 - x_1 \end{aligned}$$

## Theorem 2.2

若 $\|M\| = q < 1$ , 且假定 $\|I\| = 1$ , 则有

$$\|x_k - x_*\| \leq \frac{q^k}{1 - q} \|x_1 - x_0\| \longrightarrow \text{可计算的界}$$

证明:

$$\|y_k\| = \|M^k y_0\| \leq \|M^k\| \|y_0\| = q^k \|y_0\|$$

下面估计 $y_0$

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 - x_* = x_0 - x_1 + x_1 - x_* \\ &= x_0 - x_1 + M(x_0 - x_*) \\ &\implies (I - M)(x_0 - x_*) = x_0 - x_1 \end{aligned}$$

由 $\|M\| < 1$ 可知 $(I - M)^{-1}$ 存在. 这样

$$\begin{aligned}\|x_0 - x_*\| &= \|(I - M)^{-1}(x_0 - x_1)\| \leq \|(I - M)^{-1}\| \|x_0 - x_1\| \\ &\leq \frac{1}{1 - \|M\|} \|x_0 - x_1\| = \frac{1}{1 - q} \|x_0 - x_1\|.\end{aligned}$$

证明结束.

## Theorem 2.3

若 $\|M\| = q < 1$ 且 $\|I\| = 1$ , 则有

$$\|x_k - x_*\| \leq \frac{q}{1-q} \|x_{k-1} - x_k\| \longrightarrow \text{可计算界, 估计两步之间差}$$

证明:

$$\begin{aligned} x_k - x_* &= x_k - x_{k+1} + x_{k+1} - x_* \\ &= x_k - x_{k+1} + Mx_k - Mx_* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I - M)(x_k - x_*) &= x_k - x_{k+1} \implies \|x_k - x_*\| \leq \|(I - M)^{-1}(x_k - x_{k+1})\| \\ &\leq \frac{1}{1-q} \|x_k - x_{k+1}\| \\ &\leq \frac{q}{1-q} \|x_{k-1} - x_k\|. \end{aligned}$$

## Theorem 2.3

若 $\|M\| = q < 1$ 且 $\|I\| = 1$ , 则有

$$\|x_k - x_*\| \leq \frac{q}{1-q} \|x_{k-1} - x_k\| \longrightarrow \text{可计算界, 估计两步之间差}$$

证明:

$$\begin{aligned} x_k - x_* &= x_k - x_{k+1} + x_{k+1} - x_* \\ &= x_k - x_{k+1} + Mx_k - Mx_* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I - M)(x_k - x_*) &= x_k - x_{k+1} \implies \|x_k - x_*\| \leq \|(I - M)^{-1}(x_k - x_{k+1})\| \\ &\leq \frac{1}{1-q} \|x_k - x_{k+1}\| \\ &\leq \frac{q}{1-q} \|x_{k-1} - x_k\|. \end{aligned}$$

- 1 Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代
- 2 单步线性定常迭代法及收敛性条件
- 3 G-S迭代收敛的两个充分条件**
- 4 对角占优矩阵迭代法的收敛性
- 5 超松弛迭代
- 6 系数矩阵对称正定时迭代法的收敛性
- 7 几乎奇异系统的迭代法

# G-S迭代收敛的两个充分条件

## Theorem 3.1

设 $B$ 是***Jacobi***迭代的迭代矩阵. 若 $\|B\|_\infty < 1$ , 则**G-S**迭代收敛, 且

$$\|x_k - x_*\|_\infty \leq \frac{\mu^k}{1 - \mu} \|x_1 - x_0\|_\infty$$

其中

$$\mu = \max_i \left( \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| / (1 - \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|) \right),$$

且有 $\mu \leq \|B\|_\infty < 1$ , 这里 $b_{ij}$ 是矩阵 $B$ 的元素.



证明:

先证 $\mu < 1$ . 令

$$l_i = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|, \quad u_i = \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}|.$$

显然, 对任意 $1 \leq i \leq n$ , 都有

$$l_i + u_i \leq \|B\|_{\infty} < 1.$$

由

$$l_i + u_i - \frac{u_i}{1 - l_i} = \frac{(l_i + u_i)(1 - l_i) - u_i}{1 - l_i} = \frac{l_i(1 - l_i - u_i)}{1 - l_i} \geq 0$$

可推出

$$\frac{u_i}{1 - l_i} \leq l_i + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

两边对 $i$ 取最大值, 得

$$\mu = \max_i \frac{u_i}{1 - l_i} \leq \max_i (l_i + u_i) = \|B\|_{\infty} < 1.$$

证明:

先证 $\mu < 1$ . 令

$$l_i = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|, \quad u_i = \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}|.$$

显然, 对任意 $1 \leq i \leq n$ , 都有

$$l_i + u_i \leq \|B\|_{\infty} < 1.$$

由

$$l_i + u_i - \frac{u_i}{1 - l_i} = \frac{(l_i + u_i)(1 - l_i) - u_i}{1 - l_i} = \frac{l_i(1 - l_i - u_i)}{1 - l_i} \geq 0$$

可推出

$$\frac{u_i}{1 - l_i} \leq l_i + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

两边对 $i$ 取最大值, 得

$$\mu = \max_i \frac{u_i}{1 - l_i} \leq \max_i (l_i + u_i) = \|B\|_{\infty} < 1.$$

证明:

先证 $\mu < 1$ . 令

$$l_i = \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|, \quad u_i = \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}|.$$

显然, 对任意 $1 \leq i \leq n$ , 都有

$$l_i + u_i \leq \|B\|_{\infty} < 1.$$

由

$$l_i + u_i - \frac{u_i}{1 - l_i} = \frac{(l_i + u_i)(1 - l_i) - u_i}{1 - l_i} = \frac{l_i(1 - l_i - u_i)}{1 - l_i} \geq 0$$

可推出

$$\frac{u_i}{1 - l_i} \leq l_i + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

两边对 $i$ 取最大值, 得

$$\mu = \max_i \frac{u_i}{1 - l_i} \leq \max_i (l_i + u_i) = \|B\|_{\infty} < 1.$$

再证G-S迭代收敛. 也就是要证明 $\rho((D-L)^{-1}U) < 1$ .  
设 $\lambda$ 是 $(D-L)^{-1}U$ 的任一特征值,  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ 为相应的特征向量, 并假定 $|\xi_i| = \|x\|_\infty = 1$ , 则

$$(D-L)^{-1}Ux = \lambda x$$

或者

$$\lambda x = \lambda D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$$

注意到 $B = D^{-1}L + D^{-1}U$ , 即 $D^{-1}L$ 为 $B$ 的下三角部分, 而 $D^{-1}U$ 为 $B$ 的上三角部分, 于是上式的第 $i$ 个方程为

$$\lambda \xi_i = \lambda \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \xi_j + \sum_{j=n+1}^n b_{ij} \xi_j$$

取绝对值, 得

$$|\lambda| \leq |\lambda| l_i + u_i \Rightarrow |\lambda| \leq \frac{u_i}{1 - l_i} \leq l_i + u_i < 1.$$

即 $\rho((D-L)^{-1}U) < 1$ . 从而G-S迭代收敛.

再证G-S迭代收敛. 也就是要证明 $\rho((D-L)^{-1}U) < 1$ .  
设 $\lambda$ 是 $(D-L)^{-1}U$ 的任一特征值,  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ 为相应的特征向量, 并假定 $|\xi_i| = \|x\|_\infty = 1$ , 则

$$(D-L)^{-1}Ux = \lambda x$$

或者

$$\lambda x = \lambda D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$$

注意到 $B = D^{-1}L + D^{-1}U$ , 即 $D^{-1}L$ 为 $B$ 的下三角部分, 而 $D^{-1}U$ 为 $B$ 的上三角部分, 于是上式的第 $i$ 个方程为

$$\lambda \xi_i = \lambda \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \xi_j + \sum_{j=n+1}^n b_{ij} \xi_j$$

取绝对值, 得

$$|\lambda| \leq |\lambda| l_i + u_i \Rightarrow |\lambda| \leq \frac{u_i}{1 - l_i} \leq l_i + u_i < 1.$$

即 $\rho((D-L)^{-1}U) < 1$ . 从而G-S迭代收敛.

再证G-S迭代收敛. 也就是要证明 $\rho((D-L)^{-1}U) < 1$ .  
设 $\lambda$ 是 $(D-L)^{-1}U$ 的任一特征值,  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ 为相应的特征向量, 并假定 $|\xi_i| = \|x\|_\infty = 1$ , 则

$$(D-L)^{-1}Ux = \lambda x$$

或者

$$\lambda x = \lambda D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$$

注意到 $B = D^{-1}L + D^{-1}U$ , 即 $D^{-1}L$ 为 $B$ 的下三角部分, 而 $D^{-1}U$ 为 $B$ 的上三角部分, 于是上式的第 $i$ 个方程为

$$\lambda \xi_i = \lambda \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \xi_j + \sum_{j=n+1}^n b_{ij} \xi_j$$

取绝对值, 得

$$|\lambda| \leq |\lambda| l_i + u_i \Rightarrow |\lambda| \leq \frac{u_i}{1 - l_i} \leq l_i + u_i < 1.$$

即 $\rho((D-L)^{-1}U) < 1$ . 从而G-S迭代收敛.

再证G-S迭代收敛. 也就是要证明 $\rho((D-L)^{-1}U) < 1$ .  
设 $\lambda$ 是 $(D-L)^{-1}U$ 的任一特征值,  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ 为相应的特征向量, 并假定 $|\xi_i| = \|x\|_\infty = 1$ , 则

$$(D-L)^{-1}Ux = \lambda x$$

或者

$$\lambda x = \lambda D^{-1}Lx + D^{-1}Ux$$

注意到 $B = D^{-1}L + D^{-1}U$ , 即 $D^{-1}L$ 为 $B$ 的下三角部分, 而 $D^{-1}U$ 为 $B$ 的上三角部分, 于是上式的第 $i$ 个方程为

$$\lambda \xi_i = \lambda \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \xi_j + \sum_{j=n+1}^n b_{ij} \xi_j$$

取绝对值, 得

$$|\lambda| \leq |\lambda| l_i + u_i \Rightarrow |\lambda| \leq \frac{u_i}{1 - l_i} \leq l_i + u_i < 1.$$

即 $\rho((D-L)^{-1}U) < 1$ . 从而G-S迭代收敛.

下面给出估计式. 因为

$$x_k - x_{k-1} = D^{-1}L(x_k - x_{k-1}) + D^{-1}U(x_{k-1} - x_{k-2}).$$

用分量表示即为

$$x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}(x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}) + \sum_{j=i+1}^n (x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}).$$

于是

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq l_i \max_j |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| + u_i \max_j |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}|$$

假定分量中在某个 $i_0$ 达到极大, 即

$$|x_{i_0}^{(k)} - x_{i_0}^{(k-1)}| = \max_i |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|.$$



下面给出估计式. 因为

$$x_k - x_{k-1} = D^{-1}L(x_k - x_{k-1}) + D^{-1}U(x_{k-1} - x_{k-2}).$$

用分量表示即为

$$x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}(x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}) + \sum_{j=i+1}^n (x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}).$$

于是

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq l_i \max_j |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| + u_i \max_j |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}|$$

假定分量中在某个 $i_0$ 达到极大, 即

$$|x_{i_0}^{(k)} - x_{i_0}^{(k-1)}| = \max_i |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|.$$

下面给出估计式. 因为

$$x_k - x_{k-1} = D^{-1}L(x_k - x_{k-1}) + D^{-1}U(x_{k-1} - x_{k-2}).$$

用分量表示即为

$$x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}(x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}) + \sum_{j=i+1}^n (x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}).$$

于是

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq l_i \max_j |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| + u_i \max_j |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}|$$

假定分量中在某个 $i_0$ 达到极大, 即

$$|x_{i_0}^{(k)} - x_{i_0}^{(k-1)}| = \max_i |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|.$$

下面给出估计式. 因为

$$x_k - x_{k-1} = D^{-1}L(x_k - x_{k-1}) + D^{-1}U(x_{k-1} - x_{k-2}).$$

用分量表示即为

$$x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}(x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}) + \sum_{j=i+1}^n (x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}).$$

于是

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq l_i \max_j |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| + u_i \max_j |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}|$$

假定分量中在某个 $i_0$ 达到极大, 即

$$|x_{i_0}^{(k)} - x_{i_0}^{(k-1)}| = \max_i |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|.$$

那么就有

$$\|x_k - x_{k-1}\|_\infty \leq l_{i_0} \|x_k - x_{k-1}\|_\infty + u_{i_0} \|x_{k-1} - x_{k-2}\|_\infty.$$

从而有

$$\begin{aligned}\|x_k - x_{k-1}\|_\infty &\leq \frac{u_{i_0}}{1 - l_{i_0}} \|x_{k-1} - x_{k-2}\|_\infty \leq \mu \|x_{k-1} - x_{k-2}\|_\infty \\ &\dots \\ &\leq \mu^{k-1} \|x_1 - x_0\|_\infty.\end{aligned}$$

由  $x_k - x_* = \sum_{i=k}^{\infty} (x_i - x_{i+1})$  得

$$\begin{aligned}\|x_k - x_*\|_\infty &\leq \sum_{i=k}^{\infty} \|x_i - x_{i+1}\|_\infty \leq \sum_{i=k}^{\infty} \mu^i \|x_1 - x_0\|_\infty \\ &= \frac{\mu^k}{1 - \mu} \|x_1 - x_0\|_\infty\end{aligned}$$

证明结束.

那么就有

$$\|x_k - x_{k-1}\|_\infty \leq l_{i_0} \|x_k - x_{k-1}\|_\infty + u_{i_0} \|x_{k-1} - x_{k-2}\|_\infty.$$

从而有

$$\begin{aligned}\|x_k - x_{k-1}\|_\infty &\leq \frac{u_{i_0}}{1 - l_{i_0}} \|x_{k-1} - x_{k-2}\|_\infty \leq \mu \|x_{k-1} - x_{k-2}\|_\infty \\ &\dots \\ &\leq \mu^{k-1} \|x_1 - x_0\|_\infty.\end{aligned}$$

由  $x_k - x_* = \sum_{i=k}^{\infty} (x_i - x_{i+1})$  得

$$\begin{aligned}\|x_k - x_*\|_\infty &\leq \sum_{i=k}^{\infty} \|x_i - x_{i+1}\|_\infty \leq \sum_{i=k}^{\infty} \mu^i \|x_1 - x_0\|_\infty \\ &= \frac{\mu^k}{1 - \mu} \|x_1 - x_0\|_\infty\end{aligned}$$

证明结束.

那么就有

$$\|x_k - x_{k-1}\|_\infty \leq l_{i_0} \|x_k - x_{k-1}\|_\infty + u_{i_0} \|x_{k-1} - x_{k-2}\|_\infty.$$

从而有

$$\begin{aligned}\|x_k - x_{k-1}\|_\infty &\leq \frac{u_{i_0}}{1 - l_{i_0}} \|x_{k-1} - x_{k-2}\|_\infty \leq \mu \|x_{k-1} - x_{k-2}\|_\infty \\ &\dots \\ &\leq \mu^{k-1} \|x_1 - x_0\|_\infty.\end{aligned}$$

由  $x_k - x_* = \sum_{i=k}^{\infty} (x_i - x_{i+1})$  得

$$\begin{aligned}\|x_k - x_*\|_\infty &\leq \sum_{i=k}^{\infty} \|x_i - x_{i+1}\|_\infty \leq \sum_{i=k}^{\infty} \mu^i \|x_1 - x_0\|_\infty \\ &= \frac{\mu^k}{1 - \mu} \|x_1 - x_0\|_\infty\end{aligned}$$

证明结束.

类似地我们可以给出下面的定理.

### Theorem 3.2

设  $B = [b_{ij}]$  是 *Jacobi* 迭代的迭代矩阵. 若  $\|B\|_1 < 1$ , 则 **G-S** 迭代收敛, 且有估计式

$$\|x_k - x_*\|_1 \leq \frac{\tilde{\mu}^k}{(1 - \tilde{\mu})(1 - s)} \|x_1 - x_0\|_1$$

其中

$$s = \max_j \sum_{i=j+1}^n |b_{ij}|, \quad \tilde{\mu} = \max_j \frac{\sum_{i=1}^{j-1} |b_{ij}|}{1 - \sum_{i=j+1}^n |b_{ij}|} \leq \|B\|_1 < 1.,$$

证明:

令  $v_j = \sum_{i=1}^{j-1} |b_{ij}|$ ,  $s_j = \sum_{i=j+1}^n |b_{ij}|$ , 则有

$$s_j + v_j < 1, \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

比较

$$s_j + v_j - \frac{v_j}{1 - s_j} = \frac{(1 - s_j)(s_j + v_j) - v_j}{1 - s_j} = \frac{s_j(1 - s_j - v_j)}{1 - s_j} \geq 0,$$

故

$$\frac{v_j}{1 - s_j} \leq s_j + v_j.$$

于是

$$\tilde{\mu} = \max_j \frac{v_j}{1 - s_j} \leq \max_j (s_j + v_j) \leq \|B\|_1 < 1.$$



下面证明  $\rho((D - L)^{-1}U) < 1$ . 因为

$$\begin{aligned}(D - L)^{-1}U &= (D(I - D^{-1}L))^{-1}U = (I - D^{-1}L)^{-1}D^{-1}U \\ &= (I - D^{-1}L)^{-1}D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}(I - D^{-1}L),\end{aligned}$$

因此  $(D - L)^{-1}U$  与  $D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}$  相似, 有相同的特征值. 现在假定  $\lambda$  是  $(D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1})^T$  的任一特征值,  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$  为相应的特征向量, 并假定  $|\xi_i| = \|x\|_\infty = 1$ , 则有

$$(D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1})^T x = \lambda x.$$

于是

$$\lambda x = \lambda(D^{-1}L)^T x + (D^{-1}U)^T x.$$

下面证明  $\rho((D - L)^{-1}U) < 1$ . 因为

$$\begin{aligned}(D - L)^{-1}U &= (D(I - D^{-1}L))^{-1}U = (I - D^{-1}L)^{-1}D^{-1}U \\ &= (I - D^{-1}L)^{-1}D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}(I - D^{-1}L),\end{aligned}$$

因此  $(D - L)^{-1}U$  与  $D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}$  相似, 有相同的特征值. 现在假定  $\lambda$  是  $(D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1})^T$  的任一特征值,  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$  为相应的特征向量, 并假定  $|\xi_i| = \|x\|_\infty = 1$ , 则有

$$(D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1})^T x = \lambda x.$$

于是

$$\lambda x = \lambda(D^{-1}L)^T x + (D^{-1}U)^T x.$$

下面证明  $\rho((D - L)^{-1}U) < 1$ . 因为

$$\begin{aligned}(D - L)^{-1}U &= (D(I - D^{-1}L))^{-1}U = (I - D^{-1}L)^{-1}D^{-1}U \\ &= (I - D^{-1}L)^{-1}D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}(I - D^{-1}L),\end{aligned}$$

因此  $(D - L)^{-1}U$  与  $D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}$  相似, 有相同的特征值. 现在假定  $\lambda$  是  $(D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1})^T$  的任一特征值,  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$  为相应的特征向量, 并假定  $|\xi_i| = \|x\|_\infty = 1$ , 则有

$$(D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1})^T x = \lambda x.$$

于是

$$\lambda x = \lambda(D^{-1}L)^T x + (D^{-1}U)^T x.$$

下面证明  $\rho((D - L)^{-1}U) < 1$ . 因为

$$\begin{aligned}(D - L)^{-1}U &= (D(I - D^{-1}L))^{-1}U = (I - D^{-1}L)^{-1}D^{-1}U \\ &= (I - D^{-1}L)^{-1}D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}(I - D^{-1}L),\end{aligned}$$

因此  $(D - L)^{-1}U$  与  $D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}$  相似, 有相同的特征值. 现在假定  $\lambda$  是  $(D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1})^T$  的任一特征值,  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$  为相应的特征向量, 并假定  $|\xi_i| = \|x\|_\infty = 1$ , 则有

$$(D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1})^T x = \lambda x.$$

于是

$$\lambda x = \lambda(D^{-1}L)^T x + (D^{-1}U)^T x.$$

下面证明  $\rho((D - L)^{-1}U) < 1$ . 因为

$$\begin{aligned}(D - L)^{-1}U &= (D(I - D^{-1}L))^{-1}U = (I - D^{-1}L)^{-1}D^{-1}U \\ &= (I - D^{-1}L)^{-1}D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}(I - D^{-1}L),\end{aligned}$$

因此  $(D - L)^{-1}U$  与  $D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1}$  相似, 有相同的特征值. 现在假定  $\lambda$  是  $(D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1})^T$  的任一特征值,  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$  为相应的特征向量, 并假定  $|\xi_i| = \|x\|_\infty = 1$ , 则有

$$(D^{-1}U(I - D^{-1}L)^{-1})^T x = \lambda x.$$

于是

$$\lambda x = \lambda(D^{-1}L)^T x + (D^{-1}U)^T x.$$

比较两边向量的第*i*个分量, 得

$$\lambda \xi_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ji} \xi_j + \lambda \sum_{j=i+1}^n b_{ji} \xi_j,$$

两边取绝对值

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ji}| + \lambda \sum_{j=i+1}^n |b_{ji}|.$$

于是

$$\lambda \leq \frac{\sum_{j=1}^{i-1} |b_{ji}|}{1 - \sum_{j=i+1}^n |b_{ji}|} \leq \tilde{\mu} < 1.$$

故G-S迭代收敛.

比较两边向量的第*i*个分量, 得

$$\lambda \xi_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ji} \xi_j + \lambda \sum_{j=i+1}^n b_{ji} \xi_j,$$

两边取绝对值

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ji}| + \lambda \sum_{j=i+1}^n |b_{ji}|.$$

于是

$$\lambda \leq \frac{\sum_{j=1}^{i-1} |b_{ji}|}{1 - \sum_{j=i+1}^n |b_{ji}|} \leq \tilde{\mu} < 1.$$

故G-S迭代收敛.

比较两边向量的第*i*个分量, 得

$$\lambda \xi_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ji} \xi_j + \lambda \sum_{j=i+1}^n b_{ji} \xi_j,$$

两边取绝对值

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ji}| + \lambda \sum_{j=i+1}^n |b_{ji}|.$$

于是

$$\lambda \leq \frac{\sum_{j=1}^{i-1} |b_{ji}|}{1 - \sum_{j=i+1}^n |b_{ji}|} \leq \tilde{\mu} < 1.$$

故G-S迭代收敛.



$$\sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| + \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}| \right)$$

把不等式右边的两个求和号交换, 并注意到 $B$ 矩阵的特点, 就有

$$\sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=j+1}^n |b_{ij}| |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| + \sum_{i=1}^{j-1} |b_{ij}| |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}| \right).$$

注意到

$$s_j = \sum_{i=j+1}^n |b_{ij}|, \quad v_j = \sum_{i=1}^{j-1} |b_{ij}|,$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| + \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}| \right)$$

把不等式右边的两个求和号交换, 并注意到 $B$ 矩阵的特点, 就有

$$\sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=j+1}^n |b_{ij}| |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| + \sum_{i=1}^{j-1} |b_{ij}| |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}| \right).$$

注意到

$$s_j = \sum_{i=j+1}^n |b_{ij}|, \quad v_j = \sum_{i=1}^{j-1} |b_{ij}|,$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| + \sum_{j=i+1}^n |b_{ij}| |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}| \right)$$

把不等式右边的两个求和号交换, 并注意到 $B$ 矩阵的特点, 就有

$$\sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=j+1}^n |b_{ij}| |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| + \sum_{i=1}^{j-1} |b_{ij}| |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}| \right).$$

注意到

$$s_j = \sum_{i=j+1}^n |b_{ij}|, \quad v_j = \sum_{i=1}^{j-1} |b_{ij}|,$$

则有

$$\sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \sum_{j=1}^n (s_j |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| + v_j |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}|),$$

或者

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (1 - s_j) |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| &\leq \sum_{j=1}^n v_j |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}| \\ &\leq \tilde{\mu} \sum_{j=1}^n (1 - s_j) |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}| \\ &\dots \\ &\leq \tilde{\mu}^{k-1} \sum_{j=1}^n (1 - s_j) |x_j^{(1)} - x_j^{(0)}|. \end{aligned}$$

则有

$$\sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \sum_{j=1}^n (s_j |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| + v_j |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}|),$$

或者

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (1 - s_j) |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| &\leq \sum_{j=1}^n v_j |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}| \\ &\leq \tilde{\mu} \sum_{j=1}^n (1 - s_j) |x_j^{(k-1)} - x_j^{(k-2)}| \\ &\dots \\ &\leq \tilde{\mu}^{k-1} \sum_{j=1}^n (1 - s_j) |x_j^{(1)} - x_j^{(0)}|. \end{aligned}$$

由定义

$$1 - s \leq 1 - s_j < 1.$$

所以

$$(1 - s) \sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| \leq \tilde{\mu}^{k-1} \sum_{j=1}^n (1 - s_j) |x_j^{(1)} - x_j^{(0)}|,$$

即

$$(1 - s) \|x_k - x_{k-1}\|_1 \leq \tilde{\mu}^{k-1} \|x_1 - x_0\|_1.$$

又因为

$$x_k - x_* = \sum_{i=k}^{\infty} (x_i - x_{i+1})$$

由定义

$$1 - s \leq 1 - s_j < 1.$$

所以

$$(1 - s) \sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| \leq \tilde{\mu}^{k-1} \sum_{j=1}^n (1 - s_j) |x_j^{(1)} - x_j^{(0)}|,$$

即

$$(1 - s) \|x_k - x_{k-1}\|_1 \leq \tilde{\mu}^{k-1} \|x_1 - x_0\|_1.$$

又因为

$$x_k - x_* = \sum_{i=k}^{\infty} (x_i - x_{i+1})$$

由定义

$$1 - s \leq 1 - s_j < 1.$$

所以

$$(1 - s) \sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| \leq \tilde{\mu}^{k-1} \sum_{j=1}^n (1 - s_j) |x_j^{(1)} - x_j^{(0)}|,$$

即

$$(1 - s) \|x_k - x_{k-1}\|_1 \leq \tilde{\mu}^{k-1} \|x_1 - x_0\|_1.$$

又因为

$$x_k - x_* = \sum_{i=k}^{\infty} (x_i - x_{i+1})$$



由定义

$$1 - s \leq 1 - s_j < 1.$$

所以

$$(1 - s) \sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}| \leq \tilde{\mu}^{k-1} \sum_{j=1}^n (1 - s_j) |x_j^{(1)} - x_j^{(0)}|,$$

即

$$(1 - s) \|x_k - x_{k-1}\|_1 \leq \tilde{\mu}^{k-1} \|x_1 - x_0\|_1.$$

又因为

$$x_k - x_* = \sum_{i=k}^{\infty} (x_i - x_{i+1})$$

所以

$$\begin{aligned}\|x_k - x_*\|_1 &\leq \sum_{i=k}^{\infty} \|x_i - x_{i+1}\|_1 \\ &\leq \frac{1}{1-s} \sum_{i=k}^{\infty} \tilde{\mu}^i \|x_1 - x_0\|_1 \\ &\leq \frac{\tilde{\mu}^k}{(1-\tilde{\mu})(1-s)} \|x_1 - x_0\|_1.\end{aligned}$$

证明结束.

- 1 Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代
- 2 单步线性定常迭代法及收敛性条件
- 3 G-S迭代收敛的两个充分条件
- 4 对角占优矩阵迭代法的收敛性
- 5 超松弛迭代
- 6 系数矩阵对称正定时迭代法的收敛性
- 7 几乎奇异系统的迭代法

# 对角占优矩阵迭代法的收敛性

## Definition 4.1

设矩阵  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . 若对所有的  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 都有

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|,$$

并且上式中至少对一个  $i$  有严格不等号成立, 则称  $A$  为弱严格对角占优的; 如上式对所有  $i$  都有严格不等式成立, 则称  $A$  为严格对角占优的.

## Definition 4.2

若存在 $n$ 阶排列矩阵 $P$ , 使

$$PAP^T = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

其中 $A_{11}$ 是 $r$ 阶方阵,  $A_{22}$ 是 $n - r$ 阶方阵( $0 < r < n$ ), 则称 $A$ 是可约的(或可分的), 反之, 如果不存在这样的排列矩阵, 则称 $A$ 是不可约的(或不可分的).

### Theorem 4.3

若 $A$ 严格对角占优或不可约对角占优, 则**Jacobi**和**G-S**迭代收敛.

**证明:**

由条件 $|a_{ii}| > 0$ , 因此 $D$ 可逆. 现假设**Jacobi**迭代矩阵 $B$ 的某个特征值 $|\lambda| \geq 1$ . 则 $\lambda D - L - U$ 是严格对角占优或者不可约对角占优, 因此 $\lambda D - L - U$ 非奇异. 即 $\lambda D - L - U$ 不可能有零特征值, 这和 $\lambda$ 为 $D^{-1}(L + U)$ 的特征值矛盾, 故 $\rho(D^{-1}(L + U)) < 1$ , 即**Jacobi**迭代收敛.

关于**G-S**迭代, 只要考虑矩阵 $\lambda D - \lambda L - U$ , 用同样的方法即可. 证毕

- 1 Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代
- 2 单步线性定常迭代法及收敛性条件
- 3 G-S迭代收敛的两个充分条件
- 4 对角占优矩阵迭代法的收敛性
- 5 超松弛迭代**
- 6 系数矩阵对称正定时迭代法的收敛性
- 7 几乎奇异系统的迭代法

G-S迭代格式为

$$x_{k+1} = D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b$$

令 $\Delta x = x_{k+1} - x_k$ , 则有

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x.$$

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + \omega \Delta x \\&= x_k + \omega(x_{k+1} - x_k) = (1 - \omega)x_k + \omega x_{k+1} \\&= (1 - \omega)x_k + \omega(D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b)\end{aligned}$$



G-S迭代格式为

$$x_{k+1} = D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b$$

令 $\Delta x = x_{k+1} - x_k$ , 则有

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x.$$

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + \omega \Delta x \\&= x_k + \omega(x_{k+1} - x_k) = (1 - \omega)x_k + \omega x_{k+1} \\&= (1 - \omega)x_k + \omega(D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b)\end{aligned}$$

G-S迭代格式为

$$x_{k+1} = D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b$$

令 $\Delta x = x_{k+1} - x_k$ , 则有

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x.$$

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k + \omega \Delta x \\&= x_k + \omega(x_{k+1} - x_k) = (1 - \omega)x_k + \omega x_{k+1} \\&= (1 - \omega)x_k + \omega(D^{-1}Lx_{k+1} + D^{-1}Ux_k + D^{-1}b)\end{aligned}$$

分量形式

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \omega \left( \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n b_{ij}x_j^{(k)} + g_i \right)$$

其中 $\omega$ 叫做松弛因子. 当 $\omega > 1$ 时叫超松弛; 当 $\omega < 1$ 时叫低松弛;  $\omega = 1$ 时就是G-S迭代. 将超松弛迭代简称为SOR (Successive Over Relaxation). 因为 $(I - \omega D^{-1}L)^{-1}$ 存在, 故有矩阵形式:

$$x_{k+1} = L_\omega x_k + \omega(D - \omega L)^{-1}b$$

其中

$$L_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$$

## Theorem 5.1

**SOR**收敛的必要条件是 $0 < \omega < 2$ .

**证明:** 因为**SOR**收敛, 得 $\rho(L_\omega) < 1$ , 从而

$$|\det(L_\omega)| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| < 1,$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 $L_\omega$ 的 $n$ 个特征值. 再由

$$L_\omega = (I - \omega D^{-1}L)^{-1}[(1 - \omega)I + \omega D^{-1}U],$$

$$\det[(1 - \omega)I + \omega D^{-1}U] = (1 - \omega)^n,$$

$$\det(I - \omega D^{-1}L)^{-1} = 1,$$

知

$$\begin{aligned} |\det(L_\omega)| &= |\det(I - \omega D^{-1}L)^{-1}| |\det[(1 - \omega)I + \omega D^{-1}U]| \\ &= |(1 - \omega)^n| = |\lambda_1 \cdots \lambda_n| < 1, \end{aligned}$$

从而有  $|1 - \omega| < 1$ , 即  $0 < \omega < 2$ . 证明结束.

## Theorem 5.2

若系数矩阵  $A$  是严格对角占优的或某不可约对角占优的, 且松弛因子  $\omega \in (0, 1)$ , 则 **SOR** 收敛.

设矩阵 $A$ 有如下形式:

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & K_1 & & & \\ H_1 & D_2 & K_2 & & \\ & H_2 & D_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & K_{t-1} \\ & & & & H_{t-1} & D_t \end{bmatrix}$$

其中 $D_i (i = 1, \dots, t)$ 是非奇异的对角阵. 假设Jabobi迭代的矩阵 $B$ 的特征值都是实的, 则最佳松弛因子为

$$\omega = \omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(B)^2}}$$

相应的谱半径为

$$\rho(L_{\omega_{\text{opt}}}) = \frac{1 - \sqrt{1 - \rho(B)^2}}{1 + \sqrt{1 - \rho(B)^2}}$$

# 自适应松弛因子选取方法(姚嘉豪2016)

这是对于 **Jacob** 迭代进行参数化的修正，从而引发出如下的算法。

松弛因子参数为  $\omega > 0$ ,

$$x_{k+1} = x_k - \omega D^{-1}(Ax_k - b)$$

或者

$$x_{k+1} = (I - \omega D^{-1}A)x_k + \omega D^{-1}b$$

分量的形式是

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega)x_i^{(k)} + \omega \frac{(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)})}{a_{ii}}$$

定义残差函数  $r(\omega) = \|b - Ax\|_2^2 = x^T A^T A x - 2b^T A x + b^T b$

$$\frac{dr(\omega)^{(k+1)}}{d\omega} = \frac{\partial r(\omega)^{(k+1)}}{\partial x^{(k+1)}} \frac{dx^{(k+1)}}{dw}$$

其中

$$\frac{\partial r(\omega)^{(k+1)}}{\partial x^{(k+1)}} = 2x^{(k+1)T} A^T A - 2b^T A$$



$$\frac{d^2 r(\omega)^{(k+1)}}{d\omega^2} = 2 \frac{dx^{(k+1)T}}{dw} A^T A \frac{dx^{(k+1)}}{dw} > 0$$

这里的二阶导数为正数，因为  $A^T A$  正定，故  $r(\omega)$  是  $\omega$  的凸函数，通过牛顿法求得极值点一定是该问题的最小值点，其收敛的情况也是如是得证！

牛顿法的更新：

$$\omega^{(k+1)} = \omega^{(k)} - \frac{\frac{dr(\omega)^{(k)}}{d\omega}}{\frac{d^2 r(\omega)^{(k)}}{d\omega^2}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon & -1 & -1 \\ -1 & 2 + \epsilon & -1 \\ -1 & -1 & 1 + \epsilon \end{pmatrix}$$

其中  $\epsilon = 0.01, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 23 \end{pmatrix}$

一个 3 乘 3 线性方程组的简单例子

算法	迭代次数
AdJOR	25
Jacob	234

解偏微分方程	
算法	迭代次数
AdJOR	363
AdSOR	427
Gauss-Seidel	8437
Jacob	14912

Figure:  $N=80$ 即 $h=1/80$ ,  $\|x_{k+1} - x_k\|_2 \leq 10^{-7}$

- 1 Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代
- 2 单步线性定常迭代法及收敛性条件
- 3 G-S迭代收敛的两个充分条件
- 4 对角占优矩阵迭代法的收敛性
- 5 超松弛迭代
- 6 系数矩阵对称正定时迭代法的收敛性
- 7 几乎奇异系统的迭代法

# 系数矩阵对称正定时迭代法的收敛性

**定理：** 已知 $Ax = b$ ,  $A$ 是实对称的正定矩阵,  $B$ 为 $A$ 的近似逆, 则当 $B^{-t} + B^{-1} - A$ 正定时, 迭代法

$$x_k = x_{k-1} + B(b - Ax_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

收敛.

**证明：** 考虑矩阵 $I - \bar{B}A := (I - B^t A)(I - BA)$ , 则它关于能量内积 $(\cdot, \cdot)_A$ 对称:

$$\begin{aligned} & (A(I - B^t A)(I - BA)x, y) \\ &= (x, (I - A^t B^t)(I - A^t B)Ay) \\ &= (x, (I - AB^t)(I - AB)Ay) \\ &= (x, (I - AB^t)A(I - BA)y) \\ &= (x, A(I - B^t A)(I - BA)y) \\ &= (Ax, (I - B^t A)(I - BA)y) \end{aligned}$$

设 $r$ 和 $\mu$ 分别为 $I - \bar{B}A$ 和 $\bar{B}A$ 的特征值, 有 $r = 1 - \mu$ .

$$\begin{aligned} & (A(I - B^t A)(I - BA)x, x) \\ &= ((I - BA)x, (I - AB)Ax) \\ &= ((I - BA)x, A(I - BA)x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

因此 $I - \bar{B}A$ 非负定( $(I - \bar{B}A)x = \lambda x, (A(I - \bar{B}A)x, x) = \lambda(Ax, x)$  这样得 $\lambda \geq 0$ ). 因此, 如 $\mu > 0$ , 则 $r < 1$ .

$$\begin{aligned} & (I - B^t A)(I - BA) \\ &= I - BA - B^t A - B^t ABA \\ &= I - (B + B^t - B^t AB)A \end{aligned}$$

设 $r$ 和 $\mu$ 分别为 $I - \bar{B}A$ 和 $\bar{B}A$ 的特征值, 有 $r = 1 - \mu$ .

$$\begin{aligned} & (A(I - B^t A)(I - BA)x, x) \\ &= ((I - BA)x, (I - AB)Ax) \\ &= ((I - BA)x, A(I - BA)x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

因此 $I - \bar{B}A$ 非负定( $(I - \bar{B}A)x = \lambda x, (A(I - \bar{B}A)x, x) = \lambda(Ax, x)$  这样得 $\lambda \geq 0$ ). 因此, 如 $\mu > 0$ , 则 $r < 1$ .

$$\begin{aligned} & (I - B^t A)(I - BA) \\ &= I - BA - B^t A - B^t ABA \\ &= I - (B + B^t - B^t AB)A \end{aligned}$$

设 $r$ 和 $\mu$ 分别为 $I - \bar{B}A$ 和 $\bar{B}A$ 的特征值, 有 $r = 1 - \mu$ .

$$\begin{aligned} & (A(I - B^t A)(I - BA)x, x) \\ &= ((I - BA)x, (I - AB)Ax) \\ &= ((I - BA)x, A(I - BA)x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

因此 $I - \bar{B}A$ 非负定( $(I - \bar{B}A)x = \lambda x, (A(I - \bar{B}A)x, x) = \lambda(Ax, x)$  这样得 $\lambda \geq 0$ ). 因此, 如 $\mu > 0$ , 则 $r < 1$ .

$$\begin{aligned} & (I - B^t A)(I - BA) \\ &= I - BA - B^t A - B^t ABA \\ &= I - (B + B^t - B^t AB)A \end{aligned}$$



$$\bar{B} = B + B^t - B^t A B = B^t (B^{-t} + B^{-1} - A) B$$

另一方面  $\mu > 0$  等价于  $\bar{B}A$  关于能量内积  $(\cdot, \cdot)_A$  正定  $((\bar{B}Ax, Ax))$ . 这又等价于  $\bar{B}$  正定, 后者又等价于  $B^{-t} + B^{-1} - A$  正定, 因此有  $\rho(I - \bar{B}A) < 1$ . 最后, 有

$$\rho(I - BA) \leq \|I - BA\|_A = \rho(I - \bar{B}A)^{1/2} = \|I - \bar{B}A\|_A^{1/2} < 1$$

因此迭代法收敛. 证明结束.

$$\bar{B} = B + B^t - B^t A B = B^t (B^{-t} + B^{-1} - A) B$$

另一方面  $\mu > 0$  等价于  $\bar{B}A$  关于能量内积  $(\cdot, \cdot)_A$  正定  $((\bar{B}Ax, Ax))$ . 这又等价于  $\bar{B}$  正定, 后者又等价于  $B^{-t} + B^{-1} - A$  正定, 因此有  $\rho(I - \bar{B}A) < 1$ . 最后, 有

$$\rho(I - BA) \leq \|I - BA\|_A = \rho(I - \bar{B}A)^{1/2} = \|I - \bar{B}A\|_A^{1/2} < 1$$

因此迭代法收敛. 证明结束.

$$\bar{B} = B + B^t - B^t A B = B^t (B^{-t} + B^{-1} - A) B$$

另一方面  $\mu > 0$  等价于  $\bar{B}A$  关于能量内积  $(\cdot, \cdot)_A$  正定  $((\bar{B}Ax, Ax))$ . 这又等价于  $\bar{B}$  正定, 后者又等价于  $B^{-t} + B^{-1} - A$  正定, 因此有  $\rho(I - \bar{B}A) < 1$ . 最后, 有

$$\rho(I - BA) \leq \|I - BA\|_A = \rho(I - \bar{B}A)^{1/2} = \|I - \bar{B}A\|_A^{1/2} < 1$$

因此迭代法收敛. 证明结束.

$$\bar{B} = B + B^t - B^t A B = B^t (B^{-t} + B^{-1} - A) B$$

另一方面  $\mu > 0$  等价于  $\bar{B}A$  关于能量内积  $(\cdot, \cdot)_A$  正定  $((\bar{B}Ax, Ax))$ . 这又等价于  $\bar{B}$  正定, 后者又等价于  $B^{-t} + B^{-1} - A$  正定, 因此有  $\rho(I - \bar{B}A) < 1$ . 最后, 有

$$\rho(I - BA) \leq \|I - BA\|_A = \rho(I - \bar{B}A)^{1/2} = \|I - \bar{B}A\|_A^{1/2} < 1$$

因此迭代法收敛. 证明结束.

引理:  $\|I - BA\|_A = \|I - \bar{B}A\|_A^{1/2} = \rho(I - \bar{B}A)^{1/2}$ .

证明:

$$\begin{aligned}(I - B^t A)(I - BA) \\&= A^{-\frac{1}{2}}(I - A^{\frac{1}{2}} B^t A^{\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}}(I - A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}}) A^{\frac{1}{2}} \\&\sim (I - A^{\frac{1}{2}} B^t A^{\frac{1}{2}})(I - A^{\frac{1}{2}} B A^{\frac{1}{2}})\end{aligned}$$

而后者对称, 可以对角化

$$(I - B^t A)(I - BA)x = \lambda x$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$$

设 $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ 为 $\lambda_i$ 对应的特征值, 且 $(x_i, x_j)_A = \delta_{ij}$  于是

$$\begin{aligned} & (A(I - BA)x, (I - BA)x) \\ &= (A(I - B^t A)(I - BA)x, x) \\ &= (A \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^n c_i x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i \quad (\text{因为 } (x_i, x_j)_A = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}) \\ &\leq \lambda_1 \quad (\sum_{i=1}^n c_i^2 = (A \sum_{i=1}^n c_i x_i, \sum_{i=1}^n c_i x_i) = 1) \end{aligned}$$

取 $x = x_1$ , 得 $(A(I - BA)x, (I - BA)x) = \lambda_1$ , 因此

$$\|I - BA\|_A = \sqrt{\lambda_{\max}(I - \bar{B}A)}$$

另一方面

$$\begin{aligned} & (A(I - \bar{B}A)x, (I - \bar{B}A)x) \\ &= (A(I - B^t A)(I - BA)x, (I - B^t A)(I - BA)x) \\ & \quad (x = \sum_{i=1}^n c_i x_i, \text{ 且 } (Ax, x) = \sum_{i=1}^n c_i^2 = 1) \\ &= (A \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i^2 \lambda_i^2 \leq \lambda_1^2 \end{aligned}$$

取 $x = x_1$ , 有 $((Ax_1, x_1) = 1)$

$$(A(I - \bar{B}A)x, (I - \bar{B}A)x) = \lambda_1^2$$

故

$$\|I - \bar{B}A\|_A = \lambda_1.$$

这样就得

$$\|I - BA\|_A = \|I - \bar{B}A\|_A^{1/2}$$

因为 $I - \bar{B}A$ 非负定, 故 $\rho(I - \bar{B}A) < 1$ 当且仅当 $\lambda(\bar{B}A) > 0$ , 即 $\bar{B}$ 正定. 证明结束。



## Jacobi

$$B = D^{-1}$$

$$B^{-t} + B^{-1} - A = D + D - A = 2D - A \text{ 正定}$$

SOR=successive over relaxation

$$B = \omega(D - \omega L)^{-1} \quad B^t = \omega(D - \omega U)^{-1}$$

$$B^{-1} = \frac{D - \omega L}{\omega} \quad B^{-t} = \frac{D - \omega U}{\omega}$$

$$\begin{aligned} B^{-1} + B^{-t} - A &= \frac{2D - \omega(L + U)}{\omega} - D + L + U \\ &= \frac{2D}{\omega} - D = \left(\frac{2}{\omega} - 1\right)D > 0. \end{aligned}$$

- 1 Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代
- 2 单步线性定常迭代法及收敛性条件
- 3 G-S迭代收敛的两个充分条件
- 4 对角占优矩阵迭代法的收敛性
- 5 超松弛迭代
- 6 系数矩阵对称正定时迭代法的收敛性
- 7 几乎奇异系统的迭代法

求解线性方程组：

$$Ax = b$$

其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon & -1 & 0 \\ -1 & 2 + \epsilon & -1 \\ 0 & -1 & 1 + \epsilon \end{pmatrix},$$

$$b = (1 \quad 10 \quad 23)^T.$$

$$D - L = \begin{pmatrix} 1 + \epsilon & 0 & 0 \\ -1 & 2 + \epsilon & 0 \\ 0 & -1 & 1 + \epsilon \end{pmatrix}$$

$$(D - L)^{-1} = \frac{1}{(1 + \epsilon)^2(2 + \epsilon)} \\ \times \begin{pmatrix} (1 + \epsilon)(2 + \epsilon) & 0 & 0 \\ 1 + \epsilon & (1 + \epsilon)^2 & 0 \\ 1 & 1 + \epsilon & (1 + \epsilon)(2 + \epsilon) \end{pmatrix}$$

$$-U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

G-S迭代矩阵

$$\begin{aligned} M &= (D - L)^{-1}U \\ &= \frac{1}{(1 + \epsilon)^2(2 + \epsilon)} \begin{pmatrix} 0 & (1 + \epsilon)(2 + \epsilon) & 0 \\ 0 & 1 + \epsilon & (1 + \epsilon)^2 \\ 0 & 1 & 1 + \epsilon \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$x^{(k)} - x_* = M^{(k-1)}(x^{(0)} - x_*).$$

假设

$$x^{(0)} - x_* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} M(x^{(0)} - x_*) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(1+\epsilon)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+\epsilon)(2+\epsilon)} & \frac{1}{(2+\epsilon)} \\ 0 & \frac{1}{(1+\epsilon)^2(2+\epsilon)} & \frac{1}{(1+\epsilon)(2+\epsilon)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{(1+\epsilon)} \\ \frac{1}{(1+\epsilon)} \\ \frac{1}{(1+\epsilon)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{(1+\epsilon)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{(1+\epsilon)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

谢谢！