数理逻辑

讲义，第 6.3 版，2024 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨
linzuoquan@pku.edu.cn

4 一阶逻辑：证明论

- 形式系统
- 导出规则
- 等价和替换
- 前束范式和子句范式
- 完全性定理
- 模型和一致性

形式系统

K

考虑一个固定但未具体指定的一阶语言 $\mathscr{L}$，以便有关结果具有一般性

（一阶）谓词演算指形式系统 $K_{\mathscr{L}}$，当不具体指定 $\mathscr{L}$ 时， $K_{\mathscr{L}}$ 简记 K

定义 4.1

令 $\mathscr{L}$ 是一阶语言，由下列公理和（演绎）规则定义形式系统 $K_{\mathscr{L}}$

定义（续）：公理集

对 $\mathscr{L}$ 中的任何公式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$，下列是 $K_{\mathscr{L}}$ 的公理模式

(K1) $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$

(K2) $((\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C})))$

(K3) $(((\sim \mathscr{A}) \to (\sim \mathscr{B})) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$

(K4) $((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(t))$

$\mathscr{A}(x_i)$ 为含 x_i 的公式，t 为项，且 t 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由

(K5) $(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B})$

$\mathscr{A}$ 中不含变元 x_i 的自由出现

定义（续）：规则

(R1) 分离规则（MP）

若 $\mathscr{A}$, $(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 则 $\mathscr{B}$

其中 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 为任意（一阶）公式

(R2) 概括规则（Gen (generalization)）

若 $\mathscr{A}$ 则 $(\forall x_i)\mathscr{A}$

其中 $\mathscr{A}$ 为任意（一阶）公式，x_i 为任意变元

$\diamondsuit$

注

(a) $K_{\mathscr{L}}$ 的公理模式和规则包含了 L 的公理模式和规则

- $\Rightarrow$ L 是 K 的子系统
- 增加的公理模式和规则是针对含量词的（一阶）公式

(b) (K4) 的条件“t 在 $\mathscr{A}$ 中对 x_i 自由”是必要的

例：设 $\mathscr{A}(x_1)$ 为 $\sim(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2)$，$t$ 为 x_2，这里 t 在 $\mathscr{A}(x_1)$ 对 x_1 不自由，(K4) 的实例如下

$$(*)\quad (\forall x_1)(\sim(\forall x_2)A_1^2(x_1,x_2))\to\sim(\forall x_2)A_1^2(x_2,x_2)$$

考虑一个解释，其论域为只有两个成员，A_1^2 解释为相同（相等），则 $(*)$ 的前件为真但后件为假，即 $(*)$ 为假

注

(c) (K4) 采用它的最一般形式

有时写成 $\forall x_i \mathscr{A}(x_i) \rightarrow \mathscr{A}(x_i/t)$

特殊地，当 t 为 x_i 时，x_i 在 $A(x_i)$ 中对 x_i 是自由的（注 3.13）

(K4) 形为 $\forall x_i \mathscr{A}(x_i) \rightarrow \mathscr{A}(x_i)$，$x_i$ 是 $\mathscr{A}(x_i)$ 中自由变元

若 x_i 不是 $\mathscr{A}$ 中自由变元，(K4) 可写成

$\forall x_i \mathscr{A}(x_i) \rightarrow \mathscr{A}$，约定 $\mathscr{A}(t)$ 就是 $\mathscr{A}$

亦可把它单独作为一条公理，以资区别

(K4′) $((\forall x_i)\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{A})$，$x_i$ 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现

注

(d) (K5) 的条件 "x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现" 是必要的

例：设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 都是 $A_1^1(x_1)$，这样 x_1 在 $\mathscr{A}$ 中是自由的，(K5) 的实例如下

(**) $(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1)) \to (A_1^1(x_1) \to (\forall x_1)A_1^1(x_1))$

(**) 前件是有效的，考虑一个解释，其论域为整数集，A_1^1 解释为 "x 偶数"，则 (**) 的后件为假，即 (**) 为假

(e) (K5) 采用它的最简形式（也更好用，见例 4.17）

可替换成 $(\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to ((\forall x_i)\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B})$，这时不需指明条件（$\mathscr{A}$ 中不包含变元 x_i 的自由出现）

(f) (K4)(K5) 之间不能相互取代（独立性证明类似 (L1-L3) 做法）

定义 4.2 (证明)

$K_{\mathscr{L}}$ 中一个**证明**是指 $\mathscr{L}$ 中一个公式序列 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$，使得对每个 i $(1 \leq i \leq n)$，$\mathscr{A}_i$ 或是 $K_{\mathscr{L}}$ 中的一个公理，或由此序列中位于 $\mathscr{A}_i$ 前面的公式应用 MP 或 Gen 而得

令 Γ 是 $\mathscr{L}$ 中公式集。$K_{\mathscr{L}}$ 中公式序列 $\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n$ 是从 Γ 的一个**演绎**，若对每个 $i\,(1 \leq i \leq n)$，下列之一成立：

(1) $\mathscr{A}_i$ 是 $K_{\mathscr{L}}$ 的公理；

(2) $\mathscr{A}_i$ 属于 Γ $(\mathscr{A}_i \in \Gamma)$；

(3) $\mathscr{A}_i$ 可由此序列中位于 $\mathscr{A}_i$ 前面的公式应用 MP 或 Gen 规则而得

$\diamondsuit$

定义 4.3 (定理与后承)

若公式 $\mathscr{A}$ 是构成证明的某个序列的最后一项，$\mathscr{A}$ 称为 $K_{\mathscr{L}}$ 中的一个定理，记为 $\vdash_{K_{\mathscr{L}}} \mathscr{A}$，简记 $\vdash_K \mathscr{A}$ 或 $\vdash \mathscr{A}$

若公式 $\mathscr{A}$ 是构成从 Γ 的演绎的某个序列的最后一项，$\mathscr{A}$ 称为 Γ 的一个后承，记为 $\Gamma \vdash_{K_{\mathscr{L}}} \mathscr{A}$，简记 $\Gamma \vdash_K \mathscr{A}$ 或 $\Gamma \vdash \mathscr{A}$ $\diamondsuit$

命题 4.4

若 $\mathscr{L}$ 中公式 $\mathscr{A}$ 是重言式，则 $\mathscr{A}$ 是 K 中的定理 $\diamondsuit$

证

$\mathscr{A}$ 是重言式，则存在 L 中一个重言式 $\mathscr{A}_0$ 使得 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{A}_0$ 在 $\mathscr{L}$ 中的一个替换实例

由 L 的完全性，$\vdash_L \mathscr{A}_0$

即存在一个 L 中的证明序列，使得最后一项为 $\mathscr{A}_0$

由于 K 的公理模式包含 L 的公理模式，则通过对此序列进行替换操作，可得到 K 中的一个证明序列，使得最后一项为 $\mathscr{A}$，

故 $\vdash_K \mathscr{A}$ □

注

反之不然。注意到，重言式与有效式的区别（如例 3.60，$\forall x_i \mathscr{A}(x_i) \to \exists x_i \mathscr{A}(x_i)$ 不是重言式但是有效的），考虑有效式即完全性定理

命题 4.5

K 中的公理模式 (K4)(K5) 的所有实例都是（逻辑）有效的 $\diamond$

证

设 I 是任一解释，v 为 I 的任一赋值

(K4)

令 t 是对 $\mathscr{A}(x_i)$ 中 x_i 自由的

若 $v \models \forall x_i \mathscr{A}(x_i)$（需证 $v \models \mathscr{A}(t)$）

任一 i- 等值于 v 的赋值 $w \models \mathscr{A}(x_i)$

特别地，对满足 $v'(x_i) = v(t)$ 的 i- 等值于 v 的赋值 $v' \models \mathscr{A}(x_i)$

$v \models \mathscr{A}(t)$ （命题 3.44）

$v \models \forall x_i \mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(t)$

$I \models \forall x_i \mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(t)$

若 x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现（不需考虑变元赋值）

特殊地，v 对 i 自身等值，有 $v \models \mathscr{A}$

$v \models \forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{A}$

$I \models \forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{A}$

考虑到 I 和 v 的任意性，就有 (K4) 是有效的

证（续）

(K5)

令 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是公式，x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现

若 $v \models \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

任一 i- 等值于 v 的赋值 $w \models \mathscr{A} \to \mathscr{B}$

$w \not\models \mathscr{A}$，或 $w \models \mathscr{B}$

因 $\mathscr{A}$ 中不含 x_i 的自由出现，据 命题 3.55

(因 $v(x_i) = w(x_i)$ 作为特殊情况自然成立，有 $w \models \mathscr{A} \Leftrightarrow v \models \mathscr{A}$)

若有一 w 不满足 $\mathscr{A}$，则所有的 w 都不满足 $\mathscr{A}$， v 就是这样的 w

$v \not\models \mathscr{A}$，或任一 i- 等值于 v 的赋值 $w \models \mathscr{B}$

$v \not\models \mathscr{A}$，或 $v \models \forall x_i\mathscr{B}$

$v \models \mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{B}$

$I \models \mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{B}$

考虑到 I 和 v 的任意性，就有 (K5) 是有效的 □

命题 4.6 (可靠性定理)

对任一 $\mathscr{L}$ 中的公式 $\mathscr{A}$，若 $\vdash_K \mathscr{A}$，则 $\models_K \mathscr{A}$，即 $\mathscr{A}$ 是有效的 $\diamondsuit$

证

(对证明步数归纳)

起步：若 $\mathscr{A}$ 的证明只有一步，则 $\mathscr{A}$ 是某条公理，已证公理都是有效的

归纳步: 设关于 $\mathscr{A}$ 的证明有 n $(n > 1)$ 步，归纳假定

若 $\mathscr{C}$ 在 K 中的证明少于 n 步，则 $\mathscr{C}$ 是有效的

证（续）

$\mathscr{A}$ 是公理，则 $\mathscr{A}$ 是有效的

若 $\mathscr{A}$ 是由证明序列中 $\mathscr{A}$ 前面的两个公式 $\mathscr{B}$ 和 $(\mathscr{B} \to \mathscr{A})$ 应用 MP 而得

由归纳假定，$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{B} \to \mathscr{A}$ 都是有效的（定义 3.58 注）

$\mathscr{A}$ 是有效的

若 $\mathscr{A}$ 是由证明序列中 $\mathscr{A}$ 前面的公式应用 Gen 而得，即

$\mathscr{A}$ 是 $\forall x_i \mathscr{C}$

由归纳假定，$\mathscr{C}$ 是有效的

$\mathscr{A}$ 是有效的（定义 3.58 注） □

推论 4.7

K 是一致的，即不存在 $\mathscr{L}$ 中公式 $\mathscr{A}$ 使得 $\vdash_K \mathscr{A}$ 且 $\vdash_K \sim\mathscr{A}$ $\diamondsuit$

证

若存在 $\mathscr{A}$ 使得 $\vdash_K \mathscr{A}$ 且 $\vdash_K \sim\mathscr{A}$，则 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都是有效的，即在任何解释 I 下，$\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都为真，这是不可能的 $\square$

注

K 的绝对一致性

例 4.8

演绎定理是否成立？

对任意公式 $\mathscr{A}$，有

$$\mathscr{A} \vdash_K \forall x_i \mathscr{A} \quad \text{(Gen)}$$

但 $\nvdash_K \mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{A}$

只需验证 $\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{A}$ 不是有效的（由可靠性定理反证）

考虑如例 3.53，令 $\mathscr{A}$ 是 $A_1^1(x_1)$（x_1 是自由的），构造 $\mathscr{L}$ 的一个以整数集为论域的解释 I 如下：

A_1^1 表示关系 ">0"，则 $A_1^1(x_1)$ 可以解释为"$x_1>0$"

对一个满足 $v(x_1)>0$ 的赋值 v，v 满足 $A_1^1(x_1)$

对一个与 v 是 1-等值的，但与 v 不同的赋值（$v(x_1)\leq 0$）将不满足 $A_1^1(x_1)$，因此 v 可不满足 $\forall x_1 A_1^1(x_1)$

v 满足 $A_1^1(x_1)$ 而不满足 $\forall x_1 A_1^1(x_1)$

v 不满足 $A_1^1(x_1) \to \forall x_1 A_1^1(x_1)$

即存在 v 不满足 $\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{A}$

$\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{A}$ 不是有效的

定义 4.9

令 Γ 是一个公式集 且 $\mathscr{A} \in \Gamma$，设存在一个从 Γ 可演绎的序列 $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$，其每步 $\mathscr{A}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ 都有理由。$\mathscr{A}_i$ 依据于 $\mathscr{A}$ 当且仅当

- $\mathscr{A}_i$ 就是 $\mathscr{A}$ 且 $\mathscr{A}_i$ 的理由属于 Γ，或
- $\mathscr{A}_i$ 的理由是 MP 或 Gen，即 $\mathscr{A}_i$ 是由前面的公式用 MP 或 Gen 所得，而前面的公式中至少有一个公式的依据为 $\mathscr{A}$ $\diamondsuit$

例 4.10

$\mathscr{A}, \forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{B} \vdash \forall x_i \mathscr{B}$

(1)	$\mathscr{A}$	假设	依据于 $\mathscr{A}$
(2)	$\forall x_i \mathscr{A}$	(1)Gen	依据于 $\mathscr{A}$
(3)	$\forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{B}$	假设	依据于 $\forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{B}$
(4)	$\mathscr{B}$	(2)(3)MP	依据于 $\mathscr{A}$，$\forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{B}$
(5)	$\forall x_i \mathscr{B}$	(4)Gen	依据于 $\mathscr{A}$，$\forall x_i \mathscr{A} \to \mathscr{B}$

命题 4.11

若 $\Gamma, \mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$，且在演绎中 $\mathscr{B}$ 不依据于 $\mathscr{A}$，则 $\Gamma \vdash \mathscr{B}$

证

令 $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ 是 $\Gamma, \mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$ 的一个演绎系列，其中 $\mathscr{B}$ 不依据于 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}_n$ 为 $\mathscr{B}$

归纳假设对系列长度小于 n 欲证结论成立

(1) 若 $\mathscr{B}$ 是公理或 $\mathscr{B} \in \Gamma$，则 $\Gamma \vdash \mathscr{B}$

(2) 若 $\mathscr{B}$ 是前面公式使用 MP 或 Gen 的后乘，则由于 $\mathscr{B}$ 不依据于 $\mathscr{A}$，所以这些前面公式也不依据于 $\mathscr{A}$，由归纳假设，即这些前面公式单独可从 Γ 演绎，故 $\mathscr{B}$ 亦可单独从 Γ 演绎，即 $\Gamma \vdash \mathscr{B}$

□

命题 4.12 (演绎定理)

令 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是（$\mathscr{L}$ 中的）公式，Γ 是（$\mathscr{L}$ 中的）公式集（可能为空）。若 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_K \mathscr{B}$，且演绎对涉及 $\mathscr{A}$ 中自由出现的变元没有使用过 Gen，则 $\Gamma \vdash_K \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ $\diamondsuit$

证

演绎序列只有一个公式，则此公式就是 $\mathscr{B}$

(1) $\mathscr{B}$ 是 K 中的公理，

(2) $\mathscr{B} \in \Gamma$，

(3) $\mathscr{B}$ 就是 $\mathscr{A}$

即类似 L 中演绎定理的证明

证（续）

从 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$ 到 $\mathscr{F}$ 的演绎序列步数小于 n $(n > 1)$ 的所有公式 $\mathscr{F}$，对 $\mathscr{A}$ 中自由变元没用过 Gen，假设欲证结论 $\Gamma \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{F}$ 都成立

若 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash \mathscr{B}$，令其演绎序列长度为 n，有如下三种情况

(1) $\mathscr{B}$ 是 K 中的公理，或 $\mathscr{B} \in \Gamma$，或 $\mathscr{B}$ 就是 $\mathscr{A}$，与前面类似

(2) $\mathscr{B}$ 由演绎中较前的两个公式用 MP 而得，与 L 中演绎定理类似

(3) $\mathscr{B}$ 由演绎中前面的公式用 Gen 而得，如 $\mathscr{B}$ 为 $(\forall x_i)\mathscr{C}$

据前提（对 $\mathscr{A}$ 中自由变元没用过 Gen），考虑以下两种情况之一（不依据于 $\mathscr{A}$ 或 x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现）

证（续）

- 不依据于 $\mathscr{A}$，据命题 4.11，有

$$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash \mathscr{C} \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \mathscr{C}$$

存在一个步数为 k 的从 Γ 到 $\mathscr{C}$ 的演绎

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \ldots \\ & \ldots \\ (k) & \mathscr{C} \end{array}\right\} \text{为从 } \Gamma \text{ 到 } \mathscr{C} \text{ 的演绎}$$

$$\begin{array}{lll} (k+1) & \forall x_i \mathscr{C} & \text{(k)Gen} \\ (k+2) & \forall x_i \mathscr{C} \to (\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{C}) & \text{(重言式)} \\ (k+3) & \mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{C} & \text{(k+1)(k+2)MP} \end{array}$$

证（续）

- x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现

（满足下面 (K5) 的条件）

$$\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash \mathscr{C} \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \mathscr{A} \to \mathscr{C} \qquad \text{（演绎步数较少，归纳假设）}$$

存在一个步数为 k 的从 Γ 到 $\mathscr{A} \to \mathscr{C}$ 的演绎

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \dots \\ & \dots \\ (k) & \mathscr{A} \to \mathscr{C} \end{array}\right\} \text{为从 } \Gamma \text{ 到 } \mathscr{A} \to \mathscr{C} \text{ 的演绎}$$

$$\begin{array}{lll} (k+1) & \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{C}) & \text{(k)Gen} \\ (k+2) & \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{C}) \to (\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{C}) & \text{(K5)} \\ (k+3) & \mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{C} & \text{(k+1)(k+2)MP} \end{array}$$

故存在从 Γ 到 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 的一个演绎

$\Gamma \vdash_K (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ □

推论 4.13

若 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_K \mathscr{B}$，且 $\mathscr{A}$ 是一个闭式，则 $\Gamma \vdash_K \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ $\diamondsuit$

推论 4.14

对 $\mathscr{L}$ 中任何公式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$，有

$$\mathscr{A} \to \mathscr{B}, \mathscr{B} \to \mathscr{C} \vdash_K \mathscr{A} \to \mathscr{C}$$

$\diamondsuit$

即 HS 规则（证明类似 推论 2.11）

注

演绎定理可反复使用（对证明稍做扩展即证），如 $\Gamma, \mathscr{A}, \mathscr{B} \vdash \mathscr{C} \Rightarrow \Gamma \vdash \mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})$

命题 4.15 (演绎定理的逆)

若 $\Gamma \vdash_K \mathscr{A} \to \mathscr{B}$，则 $\Gamma \cup \{\mathscr{A}\} \vdash_K \mathscr{B}$，这里 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是公式，Γ 是公式集（可能为空） $\diamondsuit$

证

类似 命题 2.9 $\square$

注

基于重言式（即基于 L 定理）和演绎定理开展 K 演算

例 4.16

$$\vdash \forall x_1 \forall x_2 \mathscr{A} \to \forall x_2 \forall x_1 \mathscr{A}$$

(1)	$\forall x_1 \forall x_2 \mathscr{A}$	假设
(2)	$\forall x_1 \forall x_2 \mathscr{A} \to \forall x_2 \mathscr{A}$	(K4)
(3)	$\forall x_2 \mathscr{A}$	(1)(2)MP
(4)	$\forall x_2 \mathscr{A} \to \mathscr{A}$	(K4)
(5)	$\mathscr{A}$	(3)(4)MP
(6)	$\forall x_1 \mathscr{A}$	(5)Gen
(7)	$\forall x_2 \forall x_1 \mathscr{A}$	(6)Gen

即有

(8) $\forall x_1 \forall x_2 \mathscr{A} \vdash \forall x_2 \forall x_1 \mathscr{A}$

注意到，没有对 $\forall x_1 \forall x_2 \mathscr{A}$ 中自由变元使用 Gen，据演绎定理得

(9) $\vdash \forall x_1 \forall x_2 \mathscr{A} \to \forall x_2 \forall x_1 \mathscr{A}$

注

容易推广到 n 个变元的情况，$\forall$ 变元顺序可交换

例 4.17

设 x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现，有

$$\vdash (\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{B}) \to \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$$

(1)	$\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{B}$	假设
(2)	$\forall x_i \mathscr{B} \to \mathscr{B}$	(K4)
(3)	$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$	(1)(2)HS
(4)	$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	(3)Gen

即有

(5) $\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{B} \vdash_K \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

注意到，使用 Gen 仅需不在 $\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B}$ 中自由出现的 x_i，据演绎定理得

(6) $\vdash (\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{B}) \to \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

注

这是 (K5) 的反向，因此 (K5) 是较好的（公理）选择

例 4.18

$$\vdash \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\forall x_i\mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{B})$$

(1)	$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	
(2)	$\forall x_i\mathscr{A}$	
(3)	$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	(K4)
(4)	$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$	(1)(3)MP
(5)	$\forall x_i\mathscr{A} \to \mathscr{A}$	(K4)
(6)	$\mathscr{A}$	(2)(5)MP
(7)	$\mathscr{B}$	(4)(6)MP
(8)	$\forall x_i\mathscr{B}$	(7)Gen

例（续）

$$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}),\ \forall x_i\mathscr{A} \vdash \forall x_i\mathscr{B}$$

因 x_i 是约束变元，由演绎定理得

$$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash \forall x_i\mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{B}$$

$$\vdash \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\forall x_i\mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{B})$$

问题

用这个定理取代 $(K5)$，因演绎这个定理只要 $(K4)$，是否 $(K5)$ 不是必要的（公理独立性）？

$\vdash (\forall x_i\mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{B}) \to \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 可证？

例 4.19

$$\vdash \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\exists x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{B})$$

(1)	$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	
(2)	$\forall x_i \sim \mathscr{B}$	
(3)	$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	(K4)
(4)	$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$	(1)(3)MP
(5)	$(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{A})$	
(6)	$\sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{A}$	(4)(5)MP
(7)	$\forall x_i \sim \mathscr{B} \to \sim \mathscr{B}$	(K4)
(8)	$\sim \mathscr{B}$	(2)(7)MP
(9)	$\sim \mathscr{A}$	(6)(8)MP
(10)	$\forall x_i \sim \mathscr{A}$	(9)Gen

例（续）

$$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}),\ \forall x_i \sim\mathscr{B} \vdash \forall x_i \sim\mathscr{A}$$

因 x_i 不在 $\forall x_i \sim\mathscr{B}$ 中自由出现，由演绎定理得

$$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash \forall x_i \sim\mathscr{B} \to \forall x_i \sim\mathscr{A}$$

已知（重言式）

$$\vdash (\forall x_i \sim\mathscr{B} \to \forall x_i \sim\mathscr{A}) \to (\sim\forall x_i \sim\mathscr{A} \to\sim\forall x_i \sim\mathscr{B})$$

用 MP 得

$$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash\sim\forall x_i \sim\mathscr{A} \to\sim\forall x_i \sim\mathscr{B}$$

即

$$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash \exists x_i\mathscr{A} \to \exists x_i\mathscr{B}$$

因 x_i 不在 $\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ 中自由出现，由演绎定理得

$$\vdash \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\exists x_i\mathscr{A} \to \exists x_i\mathscr{B})$$

- 形式系统
- 导出规则
- 等价和替换
- 前束范式和子句范式
- 完全性定理
- 模型和一致性

导出规则

量词规则

(R3) 若 t 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由，则 $\forall x_i \mathscr{A}(x_i) \vdash \mathscr{A}(t)$ （特例规则）

特别地，$\forall x_i \mathscr{A} \vdash \mathscr{A}$

(R4) 若 t 在 $\mathscr{A}(x_i, t)$ 中对 x_i 自由，$\mathscr{A}(t, t)$ 是用 t 替换 $\mathscr{A}(x_i, t)$ 中自由 3 变元 x_i 的处处出现，则 $\mathscr{A}(t, t) \vdash \exists x_i \mathscr{A}(x_i, t)$ （存在规则）

特别地，$\mathscr{A}(t) \vdash \exists x_i \mathscr{A}(x_i)$，$t$ 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中对 x_i 自由

特别地，$\mathscr{A}(x_i) \vdash \exists x_i \mathscr{A}(x_i)$，$t$ 即 x_i

注

(R2)(R3) 分别是全称（量词）引入和消去

(R4) 是存在（量词）引入和消去（不严格地表述如 $\exists x_i \mathscr{A}(x_i) \vdash \mathscr{A}^s$，$\mathscr{A}^s$ 是斯科伦式）没有较简单的形式

证

(R3) 由 $\forall x_i \mathscr{A}(x_i)$ 和 (K4) 的实例，据 MP 即得

(R4) 只需证 $\vdash \mathscr{A}(t,t) \to \exists x_i \mathscr{A}(x_i,t)$（演绎定理）

由 (K4) 有 $\vdash \forall x_i \sim \mathscr{A}(x_i,t) \to \sim \mathscr{A}(t,t)$

考虑重言式 $(\mathscr{A} \to \sim \mathscr{B}) \to (\mathscr{B} \to \sim \mathscr{A})$

据 MP 有 $\vdash \mathscr{A}(t,t) \to \sim \forall x_i \sim \mathscr{A}(x_i,t)$

即得 $\square$

注

导出规则是元定理，一些元定理可作为导出规则，通过使用导出规则的技术，可使证明过程更容易

例 4.20

$$\vdash \forall x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{A}$$

(1)	$\forall x_i \mathscr{A}$	
(2)	$\mathscr{A}$	(1)(R3)
(3)	$\exists x_i \mathscr{A}$	(2)(R4)
(4)	$\forall x_i \mathscr{A} \vdash \exists x_i \mathscr{A}$	(1-3)
(5)	$\vdash \forall x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{A}$	

联词规则

- 否定消去 $\sim^-$ (elimination)

  $\sim\sim\mathscr{A} \vdash \mathscr{A}$

  否定引入 $\sim^+$ (introduction)

  $\mathscr{A} \vdash \sim\sim\mathscr{A}$

- 合取消去 $\wedge^-$

  $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$

  $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \vdash \mathscr{B}$

  $\sim(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \vdash \sim\mathscr{A} \vee \sim\mathscr{B}$

  合取引入 $\wedge^+$

  $\mathscr{A}, \mathscr{B} \vdash \mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$

联词规则

- 析取消去 $\vee^-$

$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}, \sim\mathscr{A} \vdash \mathscr{B}$

$\mathscr{A} \vee \mathscr{B}, \sim\mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$

$\sim(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \vdash \sim\mathscr{A} \wedge \sim\mathscr{B}$

$\mathscr{A} \to \mathscr{C}, \mathscr{B} \to \mathscr{C}, \mathscr{A} \vee \mathscr{B} \vdash \mathscr{C}$

析取引入 $\vee^+$

$\mathscr{A} \vdash \mathscr{A} \vee \mathscr{B}, \ \mathscr{B} \vdash \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$

联词规则

- 条件消去 $\rightarrow^-$

  $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}, \sim\mathscr{B} \vdash \sim\mathscr{A}$

  $\mathscr{A} \rightarrow \sim\mathscr{B}, \mathscr{B} \vdash \sim\mathscr{A}$

  $\sim\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}, \sim\mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$

  $\sim\mathscr{A} \rightarrow \sim\mathscr{B}, \mathscr{B} \vdash \mathscr{A}$

  $\sim(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \vdash \mathscr{A}$

  $\sim(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}) \vdash \sim\mathscr{B}$

  条件引入 $\rightarrow^+$

  $\mathscr{A}, \sim\mathscr{B} \vdash \sim(\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B})$

  条件换位

  $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B} \vdash \sim\mathscr{B} \rightarrow \sim\mathscr{A}$

  $\sim\mathscr{B} \rightarrow \sim\mathscr{A} \vdash \mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$

联词规则

- 双向条件消去 $\leftrightarrow^-$

  $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B},\mathscr{A}\vdash\mathscr{B};\ \mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B},\sim\mathscr{A}\vdash\sim\mathscr{B}$

  $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B},\mathscr{B}\vdash\mathscr{A};\ \mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B},\sim\mathscr{B}\vdash\sim\mathscr{A}$

  $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}\vdash\mathscr{A}\to\mathscr{B};\ \mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}\vdash\mathscr{B}\to\mathscr{A}$

  双向条件引入 $\leftrightarrow^+$

  $\mathscr{A}\to\mathscr{B},\mathscr{B}\to\mathscr{A}\vdash\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$

  双向否定

  $\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}\vdash\sim\mathscr{B}\leftrightarrow\sim\mathscr{A}$

  $\sim\mathscr{B}\leftrightarrow\sim\mathscr{A}\vdash\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B}$

注

联词规则不难证明（留作练习）

例 4.21

$$\vdash \forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) \to (\forall x_i\mathscr{A} \leftrightarrow \forall x_i\mathscr{B})$$

(1)	$\forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$	
(2)	$\forall x_i\mathscr{A}$	
(3)	$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$	(1)(R3)
(4)	$\mathscr{A}$	(3)(R3)
(5)	$\mathscr{B}$	(3)(4)($\leftrightarrow^-$)
(6)	$\forall x_i\mathscr{B}$	(5)(Gen)
(7)	$\forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}), \forall x_i\mathscr{A} \vdash \forall x_i\mathscr{B}$	(1-6)
(8)	$\forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) \vdash \forall x_i\mathscr{A} \to \forall x_i\mathscr{B}$	(1-7) 演绎
(9)	$\forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) \vdash \forall x_i\mathscr{B} \to \forall x_i\mathscr{A}$	类似 (8) 可证
(10)	$\forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) \vdash \forall x_i\mathscr{A} \leftrightarrow \forall x_i\mathscr{B}$	(8)(9)($\leftrightarrow^+$)
(11)	$\vdash \forall x_i(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) \to (\forall x_i\mathscr{A} \leftrightarrow \forall x_i\mathscr{B})$	演绎

证明论 *

- 各种一阶逻辑的证明论都可等价地用一阶规则（量词规则和联词规则统称）刻画
- 特别地，Gentzen 型证明论相当于只含消去和引入规则的形式系统（除去其中一些不独立的规则）；表演算类似
- 但如归结原理，在一阶情形需要引入新的技术，自动定理证明是证明论重要的研究方向

等价的谓词演算 *

谓词演算 K' 同时使用存在量词 $\exists$，通过如下修改 K 获得

- 增加公理模式

  (K′) $\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\exists x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{B})$

  $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 是任意公式，x_i 是任意变元

命题 4.22

K' 与 K 具有相同的定理集

证

易见 □

注

公理系统等价是通过它们具有相同定理集来证明，而不是相互推出公理和规则

一个公式 $\mathscr{A}$ 的概化（generalization）是形如 $\forall x_1 \cdots x_k$，$k \geq 1$ 的公式，其中 $x_1 \cdots x_k$ 是任意（不一定是不同的）变元

等价的谓词演算 *

谓词演算 K^* 不需 Gen 规则（即 MP 是唯一规则），通过如下修改 K 获得

- 增加公理模式
  (K*) $\mathscr{A} \to \forall x_i \mathscr{A}$
  $\mathscr{A}$ 是任意公式，x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由
- 所有公理（模式）的所有概化
  （亦可把所有公理中单个变元 x_i 换成变元组 $x = (x_1, \cdots, x_k)$，相当于概化）

命题 4.23

K^* 与 K 具有相同的定理集

证

由 (K*) 应用 MP 可得类似 (R2)，需考虑概化到多个变元 □

等价的谓词演算

谓词演算 $K^{\#}$ 不需 Gen 规则，通过如下修改 K 获得

- 增加公理模式

  (K$^{\#1}$) $(\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{A}$

  $\mathscr{A}$ 是 K 的公理，$y_1\cdots y_n$ 是任意变元（$n\geq 0$，当 $n=0$ 时即 $\mathscr{A}$）

  (K$^{\#2}$) $((\forall y_1)\cdots(\forall y_n)(\mathscr{A}\to\mathscr{B}))\to((\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{A}\to(\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{B})$

  $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 是任意公式，$y_1\cdots y_n$ 是任意变元
- MP 是唯一规则

命题 4.24

$K^{\#}$ 与 K 具有相同的定理集

证

设 $\vdash_K \mathscr{A}$，结构归纳证明对 $y_1\cdots y_n$（$n\geq 0$），$\vdash_{K^{\#}} (\forall y_1)\cdots(\forall y_n)\mathscr{A}$（留作练习） □

数理逻辑

讲义，第 6.3 版，2024 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨
linzuoquan@pku.edu.cn

4 一阶逻辑：证明论

- 形式系统
- 导出规则
- 等价和替换
- 前束范式和子句范式
- 完全性定理
- 模型和一致性

等价和替换

$\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ 表示 $\sim((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$ 的缩写

命题 4.25

对（$\mathscr{L}$ 中）任意公式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ 当且仅当 $\vdash \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 且 $\vdash \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ $\diamondsuit$

证

($\Rightarrow$) 若 $\vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$，即 $\vdash \sim((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$

易验重言式

$$\sim((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{A})) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \quad 和$$

$$\sim((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{A})) \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A})$$

由 命题 4.4，它们都是 K 中定理，用 MP 得

$$\vdash \mathscr{A} \to \mathscr{B} \quad 且 \quad \vdash \mathscr{B} \to \mathscr{A}$$

($\Leftarrow$) 若 $\vdash \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 且 $\vdash \mathscr{B} \to \mathscr{A}$

易验重言式

$$(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to ((\mathscr{B} \to \mathscr{A}) \to \sim((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{A})))$$

由 命题 4.4，它是 K 中定理，用两次 MP 得

$$\vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$$

$\square$

定义 4.26 (可证等价)

若（$\mathscr{L}$ 中）公式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 满足 $\vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$，则称 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是可证等价的 (provably equivalent) ◊

推论 4.27

对任意公式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$，若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$，$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 分别是可证等价的，则 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 也是可证等价的 ◊

证

应用 命题 4.25 和 HS 规则 □

回顾："等价"的区分

- 等价词（连接符）：$\leftrightarrow$
- 重言等价：PL 语义上，$\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$ 当且仅当 $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ 是重言式
- 逻辑等价：FOL 模型论上，$\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$ 当且仅
  当 $\mathscr{A} \models_K \mathscr{B}$ 且 $\mathscr{B} \models_K \mathscr{A}$；换言之，$\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 具有相同的模型

注

- 逻辑等价：亦可在 FOL 证明论定义，$\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$ 当且仅
  当 $\mathscr{A} \vdash_K \mathscr{B}$ 且 $\mathscr{B} \vdash_K \mathscr{A}$
- 可证等价比逻辑等价强：若 $\vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ 则 $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$
  - $\mathscr{A} \models_K \mathscr{B}$ 当且仅当 $\mathscr{A} \rightarrow \mathscr{B}$ 是有效的？
  - $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$ 当且仅当 $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ 是有效的？

  若 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是闭式则成立（类似 PL），但对开式不一定成立，除非符合演绎定理的条件

令 $\mathscr{A}(x_i)$ 为（$\mathscr{L}$ 中）一个公式，其中 x_i 自由出现（可能不只一次），对任何变元 x_j，用 $\mathscr{A}(x_j)$（或 $\mathscr{A}(x_i/x_j)$）表示对 $\mathscr{A}(x_i)$ 中 x_i 的每个自由出现都用 x_j 替换所得的公式

命题 4.28 (变元换名)

若 x_i 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中自由出现，且 x_j 是不在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中（自由或约束）出现的变元，则

$$\vdash ((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \leftrightarrow (\forall x_j)\mathscr{A}(x_j))$$

$\diamondsuit$

注

可选择一个适当的变元替换一个特定的约束变元，替换所得的公式与原公式是可证等价的

证

x_j 是对 x_i 在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中自由的，且 x_i 是对 x_j 在 $\mathscr{A}(x_j)$ 中自由的

构造如下演绎

(1)	$(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$	假设
(2)	$(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to \mathscr{A}(x_j)$	(K4)
(3)	$\mathscr{A}(x_j)$	(1)(2) MP
(4)	$(\forall x_j)\mathscr{A}(x_j)$	(3)Gen

$$(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \vdash (\forall x_j)\mathscr{A}(x_j)$$

证（续）

由于 x_j 不在 $(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$ 中自由出现，由演绎定理

$$\vdash ((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \to (\forall x_j)\mathscr{A}(x_j))$$

反之，同理可证

$$\vdash ((\forall x_j)\mathscr{A}(x_j) \to (\forall x_i)\mathscr{A}(x_i))$$

据 命题 4.25

$$\vdash ((\forall x_i)\mathscr{A}(x_i) \leftrightarrow (\forall x_j)\mathscr{A}(x_j))$$

□

命题 4.29

令 $\mathscr{A}$ 是（$\mathscr{L}$ 中）公式，$x_1, \cdots, x_n$ 是 $\mathscr{A}$ 中自由变元，则

$$\vdash \mathscr{A} \text{ 当且仅当 } \vdash (\forall x_1) \cdots (\forall x_n) \mathscr{A}$$

$\diamondsuit$

证

（$\Rightarrow$）设 $\vdash \mathscr{A}$ （对 $\mathscr{A}$ 中自由变元个数 n 归纳）

$\mathscr{A}$ 中没有自由变元的情况是平凡的

考虑 $n = 1$，$\mathscr{A}$ 只有一个自由变元 x_1

若 $\vdash \mathscr{A}(x_1)$

$$\vdash (\forall x_1)\mathscr{A}(x_1) \quad \text{(Gen)}$$

令 $n > 1$，假设对 $\mathscr{L}$ 中所有包含 n-1 个自由变元的公式结论都成立

证（续）

考虑 $(\forall x_n)\mathscr{A}$，有 $n-1$ 个自由变元

由 $\vdash \mathscr{A}$

$$\vdash (\forall x_n)\mathscr{A} \quad \text{(Gen)}$$

由归纳假设

$$\vdash (\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\mathscr{A}$$

($\Leftarrow$) 设 $\vdash (\forall x_1)\cdots(\forall x_n)\mathscr{A}$，欲证 $\vdash \mathscr{A}$

应用 (K4)，并对 n 进行类似归纳 $\square$

定义 4.30 (全称闭式)

令 $\mathscr{A}$ 是（$\mathscr{L}$ 的）一个只包含自由变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的公式，

则 $(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)\mathscr{A}$ 称为 $\mathscr{A}$ 的全称闭式（universal closure），记作 $\mathscr{A}'$

$\diamondsuit$

注

- 命题 4.29 表明：$\vdash \mathscr{A}$ 当且仅当 $\vdash \mathscr{A}'$

  在可证前提下，如数学，不需要自由变元（对应语义上命题 3.48）

- 但 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}'$ 并不是可证等价的

  $\vdash \mathscr{A}' \to \mathscr{A}$ 但 $\nvdash \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$

  （见例 4.8）

命题 4.31 (替换定理)

令 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 是（$\mathscr{L}$ 中）公式，设 $\mathscr{B}_0$ 是通过用 $\mathscr{B}$ 替换 $\mathscr{A}_0$ 中 $\mathscr{A}$ 的一次或多次出现所得的公式，则

$$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0) \qquad \diamondsuit$$

证

（基始）由 $\mathscr{A}_0$ （必）含 $\mathscr{A}$ 作为子公式

$\mathscr{A}_0$ 含最少连接符和量词

$\mathscr{A}_0$ 就是 $\mathscr{A}$

$\mathscr{B}_0$ 就是 $\mathscr{B}$

$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$ （定义 4.30 注）

$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)$

证（续）

（归纳）假设 $\mathscr{A}_0$ 含 $\mathscr{A}$ 作为严格子公式，对所有比 $\mathscr{A}_0$ 短且含 $\mathscr{A}$ 作为子公式的公式所欲证的结论成立

(1) $\mathscr{A}_0$ 是 $\sim\mathscr{C}_0$，则 $\mathscr{B}_0$ 是 $\sim\mathscr{D}_0$，$\mathscr{D}_0$ 是用 $\mathscr{B}$ 替换 $\mathscr{C}_0$ 中 $\mathscr{A}$ 的结果

$\mathscr{C}_0$ 含有比 $\mathscr{A}_0$ 少的连接符和量词

$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0)$ （归纳假设）

通过演算（$\vdash (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0) \to (\sim\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \sim\mathscr{D}_0)$）

$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\sim\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \sim\mathscr{D}_0)$ （HS）

$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)$

证（续）

(2) $\mathscr{A}_0$ 是 $\mathscr{C}_0 \to \mathscr{D}_0$，则 $\mathscr{B}_0$ 是 $\mathscr{E}_0 \to \mathscr{F}_0$，$\mathscr{E}_0$，$\mathscr{F}_0$ 是用 $\mathscr{B}$ 分别替换 $\mathscr{C}_0$，$\mathscr{D}_0$ 中 $\mathscr{A}$ 的结果

$\mathscr{C}_0$，$\mathscr{D}_0$ 含有比 $\mathscr{A}_0$ 少的连接符和量词

$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{E}_0)$

$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{D}_0 \leftrightarrow \mathscr{F}_0)$ （归纳假设）

通过演算可得

$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to ((\mathscr{C}_0 \to \mathscr{D}_0) \leftrightarrow (\mathscr{E}_0 \to \mathscr{F}_0))$

$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)$

注

（演算）

已知 $\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{E}_0)$

$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{D}_0 \leftrightarrow \mathscr{F}_0)$

证明 $\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to ((\mathscr{C}_0 \to \mathscr{D}_0) \leftrightarrow (\mathscr{E}_0 \to \mathscr{F}_0))$

据演绎定理（及其逆），只需证

$$\{(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})', \mathscr{C}_0 \to \mathscr{D}_0\} \vdash \mathscr{E}_0 \to \mathscr{F}_0$$

（类似地， $\{(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})', \mathscr{E}_0 \to \mathscr{F}_0\} \vdash \mathscr{C}_0 \to \mathscr{D}_0$ ）

证（续）

(1)	$(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})'$	
(2)	$(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{D}_0 \leftrightarrow \mathscr{F}_0)$	
(3)	$\mathscr{D}_0 \leftrightarrow \mathscr{F}_0$	(1)(2)MP
(4)	$\mathscr{D}_0 \to \mathscr{F}_0$	命题 4.25
(5)	$\mathscr{C}_0 \to \mathscr{D}_0$	
(6)	$\mathscr{C}_0 \to \mathscr{F}_0$	(4)(5)HS
(7)	$(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{E}_0)$	
(8)	$\mathscr{E}_0 \leftrightarrow \mathscr{C}_0$	(1)(7)MP
(9)	$\mathscr{E}_0 \to \mathscr{C}_0$	命题 4.25
(10)	$\mathscr{E}_0 \to \mathscr{F}_0$	(6)(9)HS

证（续）

(3) $\mathscr{A}_0$ 是 $\forall x_i \mathscr{C}_0$，则 $\mathscr{B}_0$ 是 $\forall x_i \mathscr{D}_0$，$\mathscr{D}_0$ 是用 $\mathscr{B}$ 替换 $\mathscr{C}_0$ 中 $\mathscr{A}$ 的结果

$\mathscr{C}_0$ 含有比 $\mathscr{A}_0$ 少的连接符和量词

$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0)$ （归纳假设）

由 Gen

$\vdash \forall x_i((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0))$

x_i 不自由出现在 $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})'$，由 (K5)

$$\vdash \forall x_i((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0)) \to ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to \forall x_i(\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0))$$

用 MP

$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to \forall x_i(\mathscr{C}_0 \leftrightarrow \mathscr{D}_0)$

通过演算可得

$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\forall x_i \mathscr{C}_0 \leftrightarrow \forall x_i \mathscr{D}_0)$

$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)$

□

推论 4.32

令 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{A}_0, \mathscr{B}_0$ 如同 命题 4.31 所述

$$\text{若} \vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}),\ \text{则} \vdash (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)$$ $\diamondsuit$

证

设 $\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})$

$\vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})'$ （命题 4.29）

$\vdash ((\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B})' \to (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0))$ （命题 4.31）

用 MP

$\vdash (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)$ $\square$

推论 4.33

令 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{A}_0, \mathscr{B}_0$ 如同 命题 4.31 所述

$$\text{若} \vdash (\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) \text{ 且} \vdash \mathscr{A}_0\text{，则} \vdash \mathscr{B}_0$$ ◇

证

据推论 4.32，用导出规则 $(\leftrightarrow^{-})$ 即得 □

推论 4.34

若 x_j 不在 $\mathscr{A}(x_i)$ 中出现， $\mathscr{B}_0$ 是通过用 $(\forall x_j)\mathscr{A}(x_j)$ 替换 $\mathscr{A}_0$ 中的 $(\forall x_i)\mathscr{A}(x_i)$ 的一次或多次出现所得的公式，则 $\vdash (\mathscr{A}_0 \leftrightarrow \mathscr{B}_0)$ ◇

证

据 命题 4.28 和 推论 4.32 □

- 形式系统
- 导出规则
- 等价和替换
- **前束范式和子句范式**
- 完全性定理
- 模型和一致性

前束范式和子句范式

范式：析取范式 DNF 和合取范式 CNF

前束范式（prenex form）：考虑量词的排列

命题 4.35

令 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 是（$\mathscr{L}$ 的）公式

(1) 若 x_i 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现，则

(a) $\vdash (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \leftrightarrow (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B})$

(b) $\vdash (\exists x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \leftrightarrow (\mathscr{A} \to (\exists x_i)\mathscr{B})$

命题 (续)

(2) 若 x_i 不在 $\mathscr{B}$ 中自由出现，则

(a) $\vdash (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \leftrightarrow ((\exists x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

(b) $\vdash (\exists x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \leftrightarrow ((\forall x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{B})$

(3) (a) $\vdash \sim (\forall x_i)\mathscr{A} \leftrightarrow (\exists x_i) \sim \mathscr{A}$

(b) $\vdash \sim (\exists x_i)\mathscr{A} \leftrightarrow (\forall x_i) \sim \mathscr{A}$

$\diamondsuit$

证

需给出 12 个证明

(1a)

(K5) 的实例

$$\vdash (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B})$$

例 4.17

$$\vdash (\mathscr{A} \to (\forall x_i)\mathscr{B}) \to (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$$

(2a)

类似 例 4.19 $(\vdash \forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\exists x_i \mathscr{A} \to \exists x_i \mathscr{B}))$

证（续）

(1)	$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	假设
(2)	$\sim\mathscr{B}$	假设
(3)	$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B})$	(K4)
(4)	$\mathscr{A} \to \mathscr{B}$	(1)(3)MP
(5)	$(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\sim\mathscr{B} \to \sim\mathscr{A})$	重言式
(6)	$\sim\mathscr{B} \to \sim\mathscr{A}$	(4)(5)MP
(7)	$\sim\mathscr{A}$	(2)(6)MP
(8)	$\forall x_i(\sim\mathscr{A})$	(7)Gen

由此可得

$$\{\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}), \sim\mathscr{B}\} \vdash \forall x_i(\sim\mathscr{A})$$

因 x_i 不在 $\mathscr{B}$ 中自由出现，由演绎定理

证（续）

$$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash \sim\mathscr{B} \to \forall x_i(\sim\mathscr{A})$$

由 $\vdash (\sim\mathscr{B}) \to (\forall x_i)(\sim\mathscr{A})) \to (\sim(\forall x_i)(\sim\mathscr{A}) \to \sim(\sim\mathscr{B})$，用 MP

$$\forall x_i(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \vdash \sim\forall x_i(\sim\mathscr{A}) \to \sim(\sim\mathscr{B})$$

由 $\vdash \sim(\sim\mathscr{B}) \to \mathscr{B}$，用 HS

$$\vdash (\forall x_i)(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to ((\exists x_i)\mathscr{A} \to \mathscr{B})$$

证（续）

(3a)

因 $\vdash \sim\mathscr{A} \leftrightarrow \sim\mathscr{A}$，用替换定理（满足闭式条件）

$$\vdash \sim\exists x_i \sim\sim\mathscr{A} \leftrightarrow \sim\exists x_i \sim\sim\mathscr{A}$$

因 $\vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \sim\sim\mathscr{A}$，$\sim\exists x_i \sim$ 换写为 $\forall x_i$

$$\vdash \forall x_i \sim\mathscr{A} \leftrightarrow \sim\exists x_i \mathscr{A}$$

其余留作练习 $\square$

例 4.36

$(\forall x_1)A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3)$

可证等价于

$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_2, x_3))$

据命题 4.35 给出一个公式序列，使得序列中公式都可证等价

$$(\forall x_1)A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3)$$

$$(\exists x_1)(A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)(\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3))$$

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(A_1^1(x_1) \to (\exists x_3)A_1^2(x_2, x_3))$$

$$(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_2, x_3))$$

定义 4.37 (前束范式)

$\mathscr{L}$ 的公式 $\mathscr{A}$ 称为前束范式，若它具有如下形式：

$$(Q_1x_{i1})(Q_2x_{i2})\cdots(Q_kx_{ik})\mathscr{D}$$

其中 $\mathscr{D}$ 是 $\mathscr{L}$ 中不带量词的公式，Q_i（$i=1,\cdots,k$）是 $\forall$ 或 $\exists$

注

- 一个不带量词的公式（$k=0$）可看作前束范式的特殊情况
- 存在量词（若有）都在全称量词（若有）前面的前束范式称为 斯科伦前束范式

定义 4.38 (前束合取（析取）范式)

对前束范式 $(Q_1x_{i1})(Q_2x_{i2})\cdots(Q_kx_{ik})\mathscr{D}$，其中 $\mathscr{D}$ 是 CNF（DNF），称为前束合取（析取）范式

命题 4.39

对 $\mathscr{L}$ 中任何公式 $\mathscr{A}$，都存在一个前束范式 $\mathscr{B}$ 与它是可证等价的 $\diamondsuit$

证

据 命题 4.28，可改变 $\mathscr{A}$ 中所有约束变元，使得与 $\mathscr{A}$ 中所有自由变元相区别（换名）

例如，$(\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2) \to (\forall x_2)A_1^1(x_2)$ 可改变为

$$(\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2) \to (\forall x_3)A_1^1(x_3))$$

由此可得一个公式 $\mathscr{A}_1$，显然 $\vdash \mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{A}_1$

（对 $\mathscr{A}_1$ 的长度进行归纳）

证（续）

$\mathscr{A}_1$ 是原子，即前束范式的特殊情况

令 $\mathscr{A}_1$ 不是原子，假设每个比 $\mathscr{A}_1$ 短的公式都可证等价于一个前束范式

(1) $\mathscr{A}_1$ 是 $\sim\mathscr{C}$

对 $\mathscr{C}$（较短）存在一个前束范式 $\mathscr{C}_1$ 使得

$$\vdash \mathscr{C} \leftrightarrow \mathscr{C}_1$$

$$\vdash \mathscr{A}_1 \leftrightarrow \sim\mathscr{C}_1 \qquad \text{（演算）}$$

$$\vdash \mathscr{A}_1 \leftrightarrow \sim Q_1x_{i_1}Q_2x_{i_2}\cdots Q_kx_{i_k}\mathscr{D}$$

$$\vdash \mathscr{A}_1 \leftrightarrow Q_1^*x_{i_1}Q_2^*x_{i_2}\cdots Q_k^*x_{i_k}\sim\mathscr{D}$$

其中，若 Q_i $(1 \le i \le k)$ 是 $\forall$，则 Q_i^* 是 $\exists$；若 Q_i 是 $\exists$，则 Q_i^* 是 $\forall$

令 $\mathscr{B}$ 是 $Q_1^*x_{i_1}Q_2^*x_{i_2}\cdots Q_k^*x_{i_k}\sim\mathscr{D}$

$$\vdash \mathscr{A}_1 \leftrightarrow \mathscr{B}$$

证（续）

(2) $\mathscr{A}_1$ 是 $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$

对 $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$（较短）分别存在前束范式 $\mathscr{C}_1, \mathscr{D}_1$ 使得

$$\vdash \mathscr{C} \leftrightarrow \mathscr{C}_1$$

$$\vdash \mathscr{D} \leftrightarrow \mathscr{D}_1$$

据推论 4.32

$$\vdash (\mathscr{C} \to \mathscr{D}) \leftrightarrow (\mathscr{C} \to \mathscr{D}_1)$$

$$\vdash (\mathscr{C} \to \mathscr{D}_1) \leftrightarrow (\mathscr{C}_1 \to \mathscr{D}_1)$$

$$\vdash (\mathscr{C} \to \mathscr{D}) \leftrightarrow (\mathscr{C}_1 \to \mathscr{D}_1) \qquad \text{（推论 4.27）}$$

$$\vdash \mathscr{A}_1 \leftrightarrow (\mathscr{C}_1 \to \mathscr{D}_1)$$

$$\vdash \mathscr{A} \leftrightarrow (\mathscr{C}_1 \to \mathscr{D}_1)$$

(2) 续

$\mathscr{C}_1 \to \mathscr{D}_1$ 形如

$$Q_1 x_{i_1} Q_2 x_{i_2} \cdots Q_k x_{i_k} \mathscr{C}_2 \to R_1 x_{j_1} R_2 x_{j_2} \cdots R_k x_{j_l} \mathscr{D}_2$$

这里 $\mathscr{C}_2$，$\mathscr{D}_2$ 不含量词，Q_i，R_i 都是 $\forall$ 或 $\exists$

重复应用 命题 4.35，把量词提到前面（$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$；$x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_l}$ 不重名且与 $\mathscr{C}_2$，$\mathscr{D}_2$ 中自由变元不重名）

$$\vdash (\mathscr{C}_1 \to \mathscr{D}_1) \leftrightarrow Q_1^* x_{i_1} Q_2^* x_{i_2} \cdots Q_k^* x_{i_k} R_1 x_{j_1} R_2 x_{j_2} \cdots R_k x_{j_l} \mathscr{C}_2 \to \mathscr{D}_2$$

令 $\mathscr{B}$ 是 $Q_1^* x_{i_1} Q_2^* x_{i_2} \cdots Q_k^* x_{i_k} R_1 x_{j_1} R_2 x_{j_2} \cdots R_k x_{j_l} \mathscr{C}_2 \to \mathscr{D}_2$

$$\vdash \mathscr{A}_1 \leftrightarrow \mathscr{B}$$

证（续）

(3) $\mathscr{A}_1$ 是 $\forall x_i \mathscr{C}$

对 $\mathscr{C}$（较短）存在一个前束范式 $\mathscr{C}_1$ 使得

$$\vdash \mathscr{C} \leftrightarrow \mathscr{C}_1$$

不妨设

$$\vdash \mathscr{C} \leftrightarrow (Q_1 x_{i_1})(Q_2 x_{i_2}) \cdots (Q_k x_{i_k}) \mathscr{D}$$

用 Gen

$$\vdash (\forall x_i)(\mathscr{C} \leftrightarrow (Q_1 x_{i_1})(Q_2 x_{i_2}) \cdots (Q_k x_{i_k}) \mathscr{D})$$

据 命题 4.31

$$\vdash (\forall x_i)\mathscr{C} \leftrightarrow (\forall x_i)(Q_1 x_{i_1})(Q_2 x_{i_2}) \cdots (Q_k x_{i_k}) \mathscr{D}$$

即 $\vdash \mathscr{A}_1 \leftrightarrow \mathscr{B}$ □

例 4.40

求前束范式

(a) $A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)A_1^2(x_1, x_2)$

据 命题 4.35 (1)

$$(\forall x_2)(A_1^1(x_1) \to A_1^2(x_1, x_2))$$

(b) $(((\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2) \to \sim(\exists x_2)A_1^1(x_2)) \to (\forall x_1)(\forall x_2)A_2^2(x_1, x_2))$

给约束变元更名

$$(((\forall x_1)A_1^2(x_1, x_2) \to \sim(\exists x_3)A_1^1(x_3)) \to$$
$$(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4, x_5))$$

处理前面有 $\sim$的量词

例（续）

$$(((\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2)\rightarrow(\forall x_3)\sim A_1^1(x_3))\rightarrow(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4,x_5))$$

据 命题 4.35，可得下列可证等价的公式序列

$$((\forall x_3)(((\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2)\rightarrow\sim A_1^1(x_3))\rightarrow(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4,x_5))$$

$$((\forall x_3)(\exists x_1)(A_1^2(x_1,x_2)\rightarrow\sim A_1^1(x_3))\rightarrow(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4,x_5))$$

$$(\exists x_3)(\forall x_1)((A_1^2(x_1,x_2)\rightarrow\sim A_1^1(x_3))\rightarrow(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4,x_5))$$

$$(\exists x_3)(\forall x_1)(\forall x_4)(\forall x_5)((A_1^2(x_1,x_2)\rightarrow\sim A_1^1(x_3))\rightarrow A_2^2(x_4,x_5))$$

注

这个求前束范式的过程（算法）并不导致唯一解答

$$(\forall x_4)(\forall x_5)(\forall x_1)(\exists x_3)((A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow \sim A_1^1(x_3)) \rightarrow A_2^2(x_4, x_5))$$

亦是前束范式

K 中公式的复杂性度量: 复杂程度与量词的交叉次数有关

定义 4.41 (Π_n Σ_n 式)

(1) 令 $n > 0$，一个前束范式称为一个 Π_n 式，若它以全称量词开始，并且有 n-1 次量词的交叉

(2) 令 $n > 0$，一个前束范式称为一个Σ_n 式，若它以存在量词开始，并且有 n-1 次量词的交叉 $\diamondsuit$

例 4.42

(1) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)A_1^3(x_1, x_2, x_3)$ 是 Π_2 式

(2) $(\forall x_1)(A_1^1(x_1) \rightarrow A_2^1(x_2))$ 是 Π_1 式

(3) $(\exists x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(A_1^2(x_1, x_2) \rightarrow A_1^2(x_3, x_4))$ 是 Σ_3 式

问题

对任何公式 $\mathscr{A}$，是否存在一个斯科伦前束范式与它是可证等价的？

—— 否（有函项符和常元情况，需要斯科伦化）

注

斯科伦式与斯科伦前束范式有区别

命题 4.43

设 $\mathscr{A}^S$ 是一个公式 $\mathscr{A}$ 的斯科伦式，则 $\mathscr{A}^S \vdash \mathscr{A}$ $\diamondsuit$

证

把斯科伦化过程消去的量词通过 Gen 和 (R4) 恢复 $\square$

命题 4.44 (弱等价性定理)

令 K^s 是把 K 的每个公理 $\mathscr{A}$ 都换成它的斯科林式 $\mathscr{A}^s$ 而得，则

(1) 若 $\mathscr{B}$ 是 K 的公式且 $\vdash_{K^s} \mathscr{B}$，则 $\vdash_K \mathscr{B}$

(2) K 是一致的，当且仅当 K^s 是一致的 $\diamondsuit$

证

(1) 令 $\mathscr{B}$ 是一个 K 的公式使得 $\vdash_{K^s} \mathscr{B}$

考虑 K 有公理 $\mathscr{C}_1, \cdots, \mathscr{C}_n$，对应的 $\mathscr{C}_1^s, \cdots, \mathscr{C}_n^s$ 是在证明 $\mathscr{B}$ 出现的公理，令 K^s 的公理就是 $\mathscr{C}_1^s, \cdots, \mathscr{C}_n^s$

(已有 $\vdash_{K^s} \mathscr{B}$，欲证 $\vdash_K \mathscr{B}$，先证 $\models_K \mathscr{B}$)

设 M 是任一 K 的能枚举模型，其论域为正整数集 $\mathbb{Z}$ (因能枚举论域可同构于正整数)

证

令 $\mathscr{C}$ 是 K 的任一公理

例如 $(\exists x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\exists x_4)\mathscr{D}(x_1,x_2,x_3,x_4)$，其中 $\mathscr{D}$ 不含量词

$\mathscr{C}^s$：$\mathscr{D}(a,x_2,x_3,f(x_2,x_3))$，其中 a 是斯科伦常元，$f(x_2,x_3)$ 是斯科伦函项

逐步扩展 M 如次（注意 $\mathbb{Z}$ 保持不变）

因 $\mathscr{C}$ 在 M 中为真

例如 $(\exists x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(\exists x_4)\mathscr{D}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在 M 中为真

令 a 的解释 $\bar{a}$ 是使 $\mathscr{C}$ 在 M 中为真的最小正整数 x_1

例如 $\bar{a}$ 是使 $(\forall x_2)(\forall x_3)(\exists x_4)\mathscr{D}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在 M 中为真的最小正整数 x_1

因此 $(\exists x_4)\mathscr{D}(a,x_2,x_3,x_4)$ 在扩展模型中为真

证（续）

对任意正整数 x_2 和 x_3，令 $f(x_2, x_3)$ 的解释是使 $\mathscr{D}(a, x_2, x_3, x_4)$ 在扩展模型中为真的最小正整数 x_4

即 $\mathscr{D}(a, x_2, x_3, f(x_2, x_3))$ 在扩展模型中为真

对 K 中所有公理照此做下去，获得一个 K^s 的扩展模型 M^s

因 $\vdash_{K^s} \mathscr{B}$，$\mathscr{B}$ 在 M^s 中为真

由于 M^s 与 M 不同之处仅在对新常元和新函项符的解释，而 $\mathscr{B}$ 不含这些符号

故 $\mathscr{B}$ 在 M 中为真

这样，$\mathscr{B}$ 在 K 的每个能枚举模型 M 中为真，即 $\models_K \mathscr{B}$，据完全性定理

故 $\vdash_K \mathscr{B}$

证 (续)

(2) 据命题 4.43，K^s 是一个 K 的扩展，若 K^s 是一致的，则 K 亦然

反之，若 K 是一致的，令 $\mathscr{B}$ 是 K 的任一公式，假设 K^s 是不一致的，

有 $\vdash_{K^s} \mathscr{B} \wedge \sim \mathscr{B}$，据 (1)，有 $\vdash_K \mathscr{B} \wedge \sim \mathscr{B}$，这与 K 的一致性矛盾

注

- (2) 对应于命题 3.67，可等价表达：$\mathscr{A}$ 为真当且仅当 $\mathscr{A}^s$ 为真

定义 4.45 (文字和子句)

一个文字是一个原子或原子的否定式

一个子句是指一些文字的析取，即每个析取项都是一个原子或者原子的否定式

定义 4.46 (子句式)

一个公式被称为子句（范）式（亦即合取范式)，若它是一些子句的合取

注

子句（式）不带量词

子句（式）是逻辑程序设计和 Prolog 语言的基本形式

例 4.47 (求子句式)

$$(((\forall x_1)A_1^2(x_1,x_2)\to(\forall x_3)\sim A_1^1(x_3))\to(\forall x_4)(\forall x_5)A_2^2(x_4,x_5))$$

前束范式

$$(\exists x_3)(\forall x_1)(\forall x_4)(\forall x_5)((A_1^2(x_1,x_2)\to\sim A_1^1(x_3))\to A_2^2(x_4,x_5))$$

斯科伦化

$$((\forall x_1)(\forall x_4)(\forall x_5)((A_1^2(x_1,x_2)\to\sim A_1^1(c_3))\to A_2^2(x_4,x_5))$$

删除全称量词

$$((A_1^2(x_1,x_2)\to\sim A_1^1(c_3))\to A_2^2(x_4,x_5))$$

合取范式

$$(A_1^2(x_1,x_2)\vee A_2^2(x_4,x_5))\wedge(A_1^1(c_3)\vee A_2^2(x_4,x_5))$$

求子句式的算法

通过下列步骤（算法）可得到一个给定公式的子句式

(1) 求前束范式（可证等价）

(2) 将前束范式斯科伦化（弱等价，命题 3.67 或命题 4.44）

(3) 删除所有全称量词（不是可证等价，但在同一解释下同为真，命题 3.48）

(4) 将每个原子看作命题变元，按命题演算得到合取范式（对非重言式逻辑等价，命题 1.37）

(5) 每个合取项就是子句

由此即证

命题 4.48

$\mathscr{L}$ 中任一非重言式的公式都有一个弱等价于它的子句（范）式 $\diamond$

数理逻辑

讲义，第 6.3 版，2024 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨
linzuoquan@pku.edu.cn

4 一阶逻辑：证明论

- 形式系统
- 导出规则
- 等价和替换
- 前束范式和子句范式
- 完全性定理
- 模型和一致性

完全性定理

一阶语言 $\mathscr{L}$

在 $\mathscr{L}$ 上，一阶逻辑 $K_{\mathscr{L}}$

- 证明论：$\Gamma \vdash \mathscr{A}$
- 模型论：$\Gamma \models \mathscr{A}$

K 的基本性质

- 可靠性：$\Gamma \vdash \mathscr{A} \quad \Rightarrow \quad \Gamma \models \mathscr{A}$ （命题 4.6）
- 完全性：$\Gamma \vdash \mathscr{A} \Leftarrow \Gamma \models \mathscr{A}$

回顾

证明的目标 Gödel 完全性定理

若 $\mathscr{L}$ 的公式 $\mathscr{A}$ 是（逻辑）有效的，则 $\mathscr{A}$ 是 K 的定理

若 $\models \mathscr{A}$，则 $\vdash \mathscr{A}$

回顾 命题级完全性定理的 Henkin 证法

命题 2.34（L 的完全性定理）

若 $\mathscr{L}_0$ 的公式 $\mathscr{A}$ 是重言式，则 $\mathscr{A}$ 是 L 的定理

若 $\models_L \mathscr{A}$，则 $\vdash_L \mathscr{A}$

证

设若 $\nvdash \mathscr{A}$，据 命题 2.30，包含 $\sim\mathscr{A}$ 作为公理的扩充 L^* 是一致的，据 命题 2.33，存在一个赋值 v，赋予 L^* 的每个定理的值为 T，特别地，$v(\sim\mathscr{A}) = T$，这与 $\mathscr{A}$ 是重言式矛盾 $\square$

命题 2.30

令 L^* 是 L 的一个一致扩充，令 $\mathscr{A}$ 是 L 的一个公式且不是 L^* 的定理，则 L^{**} 也是一致的，这里 L^{**} 是 L 的一个扩充，它由 L^* 补充 $\sim\mathscr{A}$ 为公理而得

命题 2.32

令 L^* 是 L 的一致扩充，则存在 L^* 的一个一致完全扩充

命题 2.33

若 L^* 是 L 的一个一致扩充，则存在一个赋值，使得 L^* 的每个定理取值都为 T

定义 4.49

K 的一个扩充是通过修改或扩大的公理集使得 K 的所有定理仍是定理（可能引入新的定理）而得的形式系统 $\diamondsuit$

注

给定 K 的两个扩充 K_1 和 K_2，K_1 是 K_2 的扩充，若 K_1 所有定理类包含 K_2 所有定理类

定义 4.50 (一阶系统)

一个一阶系统是指 $K_{\mathscr{L}}$ 的一个扩充，其中 $\mathscr{L}$ 为一个一阶语言 $\diamondsuit$

命题 4.51 (参见 命题 2.30)

令 S 是一致的一阶系统，且闭式 $\mathscr{A}$ 不是 S 中的定理，则把 $\sim\mathscr{A}$ 作为一个公理加进 S 的扩充 S^* 也是一致的 $\diamondsuit$

证：（类似 命题 2.30 的反证法）

设若 S^* 是不一致的

存在公式 $\mathscr{B}$，使得 $\vdash_{S^*} \mathscr{B}$ 且 $\vdash_{S^*} \sim\mathscr{B}$

由于 S^* 是 K 的一个扩充

$\vdash_{S^*} \sim\mathscr{B} \rightarrow (\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A})$ （命题 4.4）

$\vdash_{S^*} \mathscr{B} \rightarrow \mathscr{A}$

$\vdash_{S^*} \mathscr{A}$ （MP）

在 S^* 存在一个 $\mathscr{A}$ 的证明，这样的一个证明是在 S 中从 $\sim\mathscr{A}$ 出发的一个演绎

证（续）

$$\sim\mathscr{A} \vdash_S \mathscr{A}$$

因 $\sim\mathscr{A}$ 是闭的，据演绎定理

$$\vdash_S \ \sim\mathscr{A} \to \mathscr{A}$$

由 $\vdash_S (\sim\mathscr{A} \to \mathscr{A}) \to \mathscr{A}$ （命题 4.4），用 MP

$$\vdash_S \mathscr{A}$$

这与 $\mathscr{A}$ 不是 S 的定理的假设矛盾 □

注

对定理不需要自由变元（命题 4.29，亦见命题 3.48），$\mathscr{A}$ 是闭式，可应用演绎定理

定义 4.52

一个一阶系统 S 是完全的，若对每个闭式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 或 $\sim\mathscr{A}$ 是 S 的定理 $\diamondsuit$

注

K 不是完全的，例如 $\forall x_1 A_1^1(x_1)$ 和 $\sim\forall x_1 A_1^1(x_1)$ 都不是 K 中的定理（例 4.8）

命题 4.53 (Lindenbaum 引理，参见 命题 2.32)

若 S 是一致的一阶系统，则存在一个 S 的一致完全扩充 $\diamondsuit$

证 (类似 命题 2.32的证法)

据命题 3.25，令 $\mathscr{A}_0$, $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\cdots$ 是 $\mathscr{L}$ 的所有闭式 的枚举

构造 K 的扩充的序列 $S_0, S_1, S_2, \cdots$ 如下

令 $S_0 = S$

对 $n > 0$，从 $S_{n\text{-}1}$ 构造 S_n 如次

若 $\vdash_{S_{n\text{-}1}} \mathscr{A}_{n\text{-}1}$，则 $S_n = S_{n\text{-}1}$

否则，加 $\sim\mathscr{A}_{n\text{-}1}$ 作为一个新公理进 $S_{n\text{-}1}$ 得到 S_n

每个 S_n 都是 K 的一致扩充（$n \geq 0$） （命题 4.51）

定义 S_∞ 是一阶系统

它把至少在这些 S_n 之一为公理的一切公式都当作公理

证（续）

断言 S_∞ 是一致的

设若不然

存在公式 $\mathscr{A}$，使得 $\vdash_{S_\infty} \mathscr{A}$ 且 $\vdash_{S_\infty} \sim\mathscr{A}$

必存在 n，使得在 S_∞ 的证明中出现于 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 的公理都作为 S_n 的公理

$\vdash_{S_n} \mathscr{A}$ 且 $\vdash_{S_n} \sim\mathscr{A}$

这与 S_n 是一致的相矛盾

证（续）

断言 S_∞ 是完全的

令 $\mathscr{A}$ 是 S 的一个公式（按 S 的构造是为闭式）

$\mathscr{A}$ 一定在序列 $\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots$ 中出现

不妨设 $\mathscr{A}$ 就是 $\mathscr{A}_k$

若 $\vdash_{S_k} \mathscr{A}_k$，则 $\vdash_{S_\infty} \mathscr{A}_k$

否则，$\sim\mathscr{A}_k$ 是 S_{k+1} 的一条公理

$\vdash_{S_{k+1}} \sim\mathscr{A}_k$

$\vdash_{S_\infty} \sim\mathscr{A}_k$

总之，$\vdash_{S_\infty} \mathscr{A}$ 或 $\vdash_{S_\infty} \sim\mathscr{A}$，故 S_∞ 是完全的 □

令 $\mathscr{L}$ 是一个固定但未具体指定（任意）的一阶语言
$\mathscr{L}^+$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个（常元或项）扩展
(见定义 3.18，即在 $\mathscr{L}$ 中引入一个常元系列 $b_0, b_1, b_2, \cdots$)

注

- 由于新引入的常元，通过扩展可引入新的公式（公理、定理）
  例：$\sim\forall x_1 A_1^1(x_1) \to \sim A_1^1(b_1)$ 是 $\mathscr{L}^+$ 的公理（$A_1^1(x_1)$ 中不含函项符）
- $\sim\forall x_1 A_1^1(x_1) \to \sim A_1^1(b_1)$ 等价于
  $\exists x_1 \sim A_1^1(x_1) \to \sim A_1^1(b_1)$，可写成更一般的形式
  $\exists x_i \sim \mathscr{A}(x_i) \to \sim \mathscr{A}(t)$，$x_i$ 是 $\mathscr{A}(x_i)$ 中唯一自由变元，t 是闭项（考虑 $\mathscr{L}$ 的闭项扩展）
  ——若存在对象不具有性质 $\mathscr{A}$，则必有一个对象（取闭项）使 $\mathscr{A}$ 不可证
  　　即找个 t 替代（约束）变元 x_i
  若 $\vdash_S \exists x_i \sim \mathscr{A}(x_i) \to \sim \mathscr{A}(t)$，这样的 S（<u>可替代系统</u>）具有特殊的意义

命题 4.54

若 S 是一个 $K_{\mathscr{L}}$ 的一致扩充，则新（一阶）系统 S^+ 作为 S 在 $\mathscr{L}^+$ 的扩充亦是一致的 $\diamondsuit$

证

设若 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都是 S^+ 的定理，它们的证明作为一个有限的公式序列

仅含有限个 $b_0, b_1, \cdots, b_n$

其（在 S^+ 的）证明可通过用（$\mathscr{L}$ 中没用过的）变元（或常元）替换（$\mathscr{L}^+$ 中）相应的常元（如某些 b_i）为 S 中的证明，因这样的符号替换符合表达式的语法（演算中只考虑符号不需语义解释）

例如，$\sim\forall x_1 A_1^1(x_1)\rightarrow\sim A_1^1(b_1) \Rightarrow \sim\forall x_1 A_1^1(x_1)\rightarrow\sim A_1^1(x_2)$

$\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都是 S 的定理，这是不可能的 $\square$

命题 4.55

令 S 是 $K_{\mathscr{L}}$ 的一个一致扩充，则存在一个 $\mathscr{L}$ 的解释，使得 S 中的每个定理在此解释下为真 $\diamondsuit$

证

令 $\mathscr{L}^+$ 是 $\mathscr{L}$ 的一个（项）扩展，S^+ 和 K^+ 分别是 S 和 $K_{\mathscr{L}}$（在 S^+ 上）的扩充

S^+ 是一致的

定义一个一阶系统系列 $S_0, S_1, \cdots$ 如下

首先，枚举 $\mathscr{L}^+$ 中仅含一个自由变元的公式，如

$$\mathscr{F}_0(x_{i_0}), \mathscr{F}_1(x_{i_1}), \mathscr{F}_2(x_{i_2}), \cdots$$

其中 $x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots$ 不必是不同的

选择 $b_0, b_1, \cdots$ 中的一个（可能可枚举无穷）子序列 $c_0, c_1, \cdots$ 使得

证（续）

(1) c_0 不在 $\mathscr{F}_0(x_{i0})$ 出现

(2) 对 $n>0$，$c_n \notin \{c_0, \cdots, c_{n\text{-}1}\}$ 且不在

$\mathscr{F}_0(x_{i_0}), \mathscr{F}_1(x_{i_1}), \cdots, \mathscr{F}_n(x_{i_n})$ 中任一公式中出现

这是因为每个公式仅含 $b_0, b_1, \cdots$ 中的有限个出现（若有的话）

对每个 k，记 $\mathscr{G}_k$ 为以下公式

$$\sim(\forall x_{i_k})\mathscr{F}_k(x_{i_k}) \rightarrow \sim \mathscr{F}_k(c_k)$$

令 S_0 为 S^+

令 S_1 是通过在 S_0 中引入 $\mathscr{G}_0$ 作为一个新公理得到的扩充

对 $n>1$，令 S_n 是通过在 $S_{n\text{-}1}$ 中引入 $\mathscr{G}_{n\text{-}1}$ 作为一个新公理得到的扩充

注

$\mathscr{G}_k$: 若一个性质 $\mathscr{F}$ 至少对一个对象不成立，则存在一个对象的指称（即一个常元 c_k）使得该性质不成立。满足 $\vdash \mathscr{G}_k$ 的系统可称为可替代系统（亦称替罪羊系统，c_k 扮演替罪羊的角色）

注

证明的过程是欲证每个 S_n 是一致的，由此从 S_i 系列获得一个一致的 S_∞，应用 命题 4.53 获得 S_∞ 的一个一致完全扩充，从而能够构造所需的解释

— 用 $\mathscr{G}_k$ 构造保持一致的 S_n 系列，据 命题 4.53，只要保持一致，就能获得一个完全扩充，这是关键技术（可替代）

证（续）

S_0 是一致的

令 $n>0$，假设 S_n 是一致的，但 S_{n+1} 是不一致的

存在 $\mathscr{L}^+$ 的一个公式 $\mathscr{A}$，使得

$$\vdash_{S_{n+1}} \mathscr{A} \text{ 且 } \vdash_{S_{n+1}} \sim\mathscr{A}$$

因 $\mathscr{A}\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})$ 是重言式，有 $\vdash_{S_{n+1}} \mathscr{A}\to(\sim\mathscr{A}\to\sim\mathscr{B})$（对任何 $\mathscr{B}$），用两次 MP

$$\vdash_{S_{n+1}}\sim\mathscr{B}, \text{ 对任何 } \mathscr{B}$$

特别地

$$\vdash_{S_{n+1}}\sim\mathscr{G}_n$$

证（续）

就有一个 S_{n+1} 的证明是在 S_n 中从 $\mathscr{G}_n$ 出发的演绎

$$\mathscr{G}_n \vdash_{S_n} \sim\mathscr{G}_n$$

$\mathscr{G}_n$ 是闭式，据演绎定理

$$\vdash_{S_n} \mathscr{G}_n \to \sim\mathscr{G}_n$$

有（类似 命题 4.51）

$$\vdash_{S_n} \sim\mathscr{G}_n$$

即

$$\vdash_{S_n} \sim(\sim\forall x_{i_n}\mathscr{F}_n(x_{i_n}) \to \sim\mathscr{F}_n(c_n))$$

证（续）

注意到

$$\vdash_{S_n} \sim(\sim\forall x_{i_n}\mathscr{F}_n(x_{i_n}) \to \sim\mathscr{F}_n(c_n)) \to (\sim\forall x_{i_n}\mathscr{F}_n(x_{i_n}))$$

和

$$\vdash_{S_n} \sim(\sim\forall x_{i_n}\mathscr{F}_n(x_{i_n}) \to \sim\mathscr{F}_n(c_n)) \to \mathscr{F}_n(c_n)$$

是重言式特例，用 MP

$$\vdash_{S_n} \sim\forall x_{i_n}\mathscr{F}_n(x_{i_n})$$

和

$$\vdash_{S_n} \mathscr{F}_n(c_n)$$

在 $\mathscr{F}_n(c_n)$ 的证明中，用 y 替换 c_n 的每次出现，因 c_n 不出现在从 S_n 推出 $\mathscr{F}_n(y)$ 的任一公理 $\mathscr{G}_0, \mathscr{G}_1, \cdots, \mathscr{G}_{n-1}$ 中，y 是不在此证明中出现过的变元（这样的替换是符合语法的），这样，就获得一个在 S_n 中 $\mathscr{F}_n(y)$ 的证明

证（续）

故

$$\vdash_{S_n} \mathscr{F}_n(y)$$

由 Gen

$$\vdash_{S_n} \forall y \mathscr{F}_n(y)$$

由 命题 4.28（约束变元换名）

$$\vdash_{S_n} \forall x_{i_n} \mathscr{F}_n(x_{i_n})$$

这与 S_n 的一致性矛盾

换言之，对所有 $n \geq 0$，若 S_n 是一致的，则 S_{n+1} 也是一致的

据归纳法，S_n 对所有 n 都是一致的

证（续）

令 S_∞ 是一阶系统，它把至少在这些 S_n 之一中为公理的一切公式都当作公理

S_∞ 是一致的

因若不然，仅使用有限次它的公理就可导致矛盾，必然存在 n，使得出现的矛盾在 S_∞ 的证明中的公理都作为 S_n 的公理，导致 S_n 是矛盾的

据 命题 4.53，令 T 是 S_∞ 的一个一致完全的扩充

证（续）

构造所需的解释

定义 $\mathscr{L}^+$ 的一个解释 I 如下

(a) 论域 D_I 是 $\mathscr{L}^+$ 中所有闭项的（能枚举）集

(b) 个体常元是它们自身的解释

(c) 对 $d_1, \cdots, d_n \in D_I$

$A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$ 可满足，若 $\vdash_T A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$

$A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$ 不可满足，若 $\vdash_T \sim A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$

（注意到，T 是完全的，$A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$ 是闭的）

(d) 对 $d_1, \cdots, d_n \in D_I$，$f_i^n(d_1, \cdots, d_n)$ 赋值为 $\bar{f}_i^n(d_1, \cdots, d_n)$

现需证明：T 中的每个定理在 I 下为真

（T 有一个以 T 的闭项构成论域 D_I 的模型 I）

注

D_I 是能枚举的，意味着所构造是能枚举的模型

引理 4.56

对 $\mathscr{L}^+$ 的任一闭式 $\mathscr{A}$，$\vdash_T \mathscr{A}$ 当且仅当 $I \models \mathscr{A}$ ◇

证

(结构归纳)

令 $\mathscr{A}$ 是原子，如 $A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$，$d_1, \cdots, d_n$ 是项

若 $\vdash_T \mathscr{A}$

$\vdash_T A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$

$A_i^n(d_1, \cdots, d_n)$ 在 I 中可满足

$I \models \mathscr{A}$

反之类似

假设结果对每个比 $\mathscr{A}$ 短的公式都成立

证（续）

(1) $\mathscr{A}$ 是 $\sim\mathscr{B}$

$\vdash_T \mathscr{A}$

$\vdash_T \sim\mathscr{B}$，即 $\mathscr{B}$ 不是 T 的定理

因 T 是一致的，由归纳假设，$\mathscr{B}$ 在 I 下不为真

因 $\mathscr{B}$ 是闭的，故 $\sim\mathscr{B}$ 在 I 下为真

$I \models \mathscr{A}$

反之亦然

证 (续)

(2) $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}\to\mathscr{C}$

设若 $\mathscr{A}$ 在 I 下不为真

$\mathscr{B}$ 为真且 $\mathscr{C}$ 为假

$\vdash_T \mathscr{B}$ 且 $\nvdash_T \mathscr{C}$ (归纳假设)

因 T 是完全的

$\vdash_T \mathscr{B}$ 且 $\vdash_T \sim\mathscr{C}$

考虑 $\vdash_T \mathscr{B}\to(\sim\mathscr{C}\to\sim(\mathscr{B}\to\mathscr{C}))$ 是一个重言式实例, 用 MP 两次

$\vdash_T \sim(\mathscr{B}\to\mathscr{C})$

$\vdash_T \sim\mathscr{A}$

因 T 是一致的, 故 $\mathscr{A}$ 不是 T 的定理

反之亦然

证（续）

(3) $\mathscr{A}$ 是 $\forall x_i \mathscr{B}(x_i)$

若 x_i 不在 $\mathscr{B}$ 中自由出现，则 $\mathscr{B}$ 是闭的

$\vdash_T \mathscr{B}$ 当且仅当 $I \models \mathscr{B}$ （归纳假设）

已知 $\vdash_T \mathscr{B}$ 当且仅当 $\vdash_T \forall x_i \mathscr{B}$

$I \models \mathscr{B}$ 当且仅当 $I \models \forall x_i \mathscr{B}$

$\vdash_T \mathscr{A}$ 当且仅当 $I \models \mathscr{A}$

证（续）

若 x_i 在 $\mathscr{B}$ 中自由出现

因 $\mathscr{A}$ 是闭的，则 x_i 是 $\mathscr{B}(x_i)$ 中唯一的自由变元

$\mathscr{B}(x_i)$ 是 $\mathscr{F}_0(x_{i_0}), \mathscr{F}_1(x_{i_1}), \cdots$ 中的一个公式

如 $\mathscr{B}(x_i)$ 是 $\mathscr{F}_m(x_{i_m})$

$\mathscr{A}$ 是 $\forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m})$

<u>设</u> $I \models \mathscr{A}$，据 命题 4.5（由 公理 (K4)）

$I \models \forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m}) \to \mathscr{F}_m(c_m)$

$I \models \mathscr{F}_m(c_m)$

$\mathscr{F}_m(c_m)$ 中的连接词和量词比 $\mathscr{A}$ 少，由归纳假设

$\vdash_T \mathscr{F}_m(c_m)$

证（续）

欲证 $\vdash_T \mathscr{A}$，设若反之，即 $\vdash_T \sim \mathscr{A}$，因 T 是完全的

$$\vdash_T \sim\forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m})$$

因 $\mathscr{G}_m$ 是 T 的公理

$$\vdash_T \sim\forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m}) \rightarrow \sim \mathscr{F}_m(c_m)$$

用 MP

$$\vdash_T \sim \mathscr{F}_m(c_m)$$

这与 T 的一致性矛盾

证（续）

反之，令 $\vdash_T \mathscr{A}$，设若 $\mathscr{A}$ 在 I 下不为真

$$I \not\models \forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m})$$

$$\text{存在 } d \in D_I \text{ 使得 } I \models \sim \mathscr{F}_m(d)$$

这是因为，存在 I 中的一个赋值不满足 $\forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m})$，即存在一个赋值 v 不满足 $\mathscr{F}_m(x_{i_m})$，由于 $v(x_{i_m}) \in D_I$，即 $v(x_{i_m})$ 是闭项，设如 d，这样的 d 必是在 $\mathscr{F}_m(x_{i_m})$ 中对 x_{i_m} 自由的，此外，$v(d) = d$，这样，$v(x_{i_m}) = v(d)$，据 命题 3.44，v 不满足 $\mathscr{F}_m(d)$，即 $\mathscr{F}_m(d)$ 不在 I 下为真

但因 $\vdash_T \forall x_{i_m} \mathscr{F}_m(x_{i_m})$ ，由 公理 (K4) 并用 MP

$$\vdash_T \mathscr{F}_m(d)$$

由归纳假设，$I \models \mathscr{F}_m(d)$

$\mathscr{F}_m(d)$ 与 $\sim \mathscr{F}_m(d)$ 不可能同时在 I 下为真

证（续）

因 T 是 S 的扩充，每个 S 的定理也是 T 的定理

每个 $\mathscr{L}^+$ 中作为 S 的定理的公式在 I 下为真

每个 S 的定理是 $\mathscr{L}$ 的公式，I 包含（满足）一些不在 $\mathscr{L}$ 中的公式

限制 I 如下：

排除对个体常元 $b_0, b_1, \cdots$ 以及基于它们的项的解释，保留 D_I 不变

由此获得一个 $\mathscr{L}$ 的解释

且 S 的每个定理在该解释下为真 □

注

命题 4.55 推论：若一个一阶系统 S 是一致的，则它有（其论域可枚举的）模型

命题 4.57 (完全性定理)

若 $\mathscr{L}$ 中的公式 $\mathscr{A}$ 是有效的，则 $\mathscr{A}$ 是 $K_{\mathscr{L}}$ 中的定理 $\diamondsuit$

证

令 $\mathscr{A}$ 是有效的公式，$\mathscr{A}'$ 是 $\mathscr{A}$ 的全称闭式，则 $\mathscr{A}'$ 也是有效的（推论 3.49）

设若 $\mathscr{A}$ 不是 $K_{\mathscr{L}}$ 的定理，据 命题 4.29，$\mathscr{A}'$ 不是 $K_{\mathscr{L}}$ 的定理

据 命题 4.51，包含 $\sim\mathscr{A}'$ 作为公理的扩充 $K'_{\mathscr{L}}$ 是一致的

据 命题 4.55，存在一个 $\mathscr{L}$ 的解释使得 $K'_{\mathscr{L}}$ 中每个定理在此解释下为真

特别地，$\sim\mathscr{A}'$ 在此解释下为真

$\mathscr{A}'$ 为假（$\mathscr{A}'$ 肯定为闭的）

这与 $\mathscr{A}'$ 的有效性矛盾，故 $\mathscr{A}$ 是 $K_{\mathscr{L}}$ 的定理 $\square$

推论 4.58 (可靠与完全性定理)

对 $\mathscr{L}$ 中的任一公式 $\mathscr{A}$, $\vdash \mathscr{A}$ 当且仅当 $\models \mathscr{A}$ ◇

推论 4.59

令 Γ 和 $\mathscr{A}$ 分别是 $\mathscr{L}$ 的任意公式集和公式, $\Gamma \vdash \mathscr{A}$ 当且仅当 $\Gamma \models \mathscr{A}$ ◇

证

考虑 $K+\Gamma$, $\vdash_{K+\Gamma} \mathscr{A}$ 当且仅当 $\models_{K+\Gamma} \mathscr{A}$; 注意到 $\vdash_{K+\Gamma} \mathscr{A}$ 即 $\Gamma \vdash_K \mathscr{A}$, $\models_{K+\Gamma} \mathscr{A}$ 即 $\Gamma \models_K \mathscr{A}$ □

注

Gödel 于 1930 年证明

Henkin 证法 (1949), Hasenjaeger 简化证法 (1953)

其它证明: Rasiow&Sikorski (1951/1952), Beth (1951, 用 Boolean 代数和拓扑方法), Hintikka (1955), Beth (1959)

- 形式系统
- 导出规则
- 等价和替换
- 前束范式和子句范式
- 完全性定理
- 模型和一致性

模型和一致性

定义 4.60 (模型)

(1) 令 Γ 是 $\mathscr{L}$ 的一个公式集，I 是 $\mathscr{L}$ 的一个解释

若 Γ 中每个公式都在 I 下都为真，则称 I 是 Γ 的一个模型

(2) 若 S 是一个一阶系统，则 S 的一个模型是指使得 S 中每个定理都为真的一个解释 $\diamondsuit$

命题 4.61

令 S 是一个一阶系统，I 是 $\mathscr{L}$ 的一个解释，且 S 中每个公理在 I 下都为真，则 I 是 S 的一个模型 ◇

证

类似 命题 4.6（可靠性定理） □

注

一阶系统 S 的模型完全可通过 定义 4.60 (1) 来定义，其中 Γ 为全体公理集

命题 4.62

一个一阶系统 S 是一致的，当且仅当它有模型 $\diamond$

证

据 命题 4.55，即若 S 是一致的，则它有模型

反之，设若 S 有一个模型 I，且 S 是不一致的

存在公式 $\mathscr{A}$， $\vdash_S \mathscr{A}$ 和 $\vdash_S \sim\mathscr{A}$

由于 S 的所有定理在模型 I 中都为真，则 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 在 I 下都为真，这是不可能的 $\square$

注

亦称 Gödel 第二完全性定理（或 弱完全性定理）

例 4.63

任何一个一致但不完全的一阶系统 S 都至少有两个不同的模型

考虑 S 是不完全的，可找到闭式 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都不是 S 的定理，则分别以 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 构造两个 S 的一致扩充

注

- 一个公式在 S 的某个特殊的模型下为真，不一定是 S 的定理
- 可满足性与有效性的区别

命题 4.64

令 S 是一个一致一阶系统，$\mathscr{A}$ 是一个闭式

若 $\mathscr{A}$ 在 S 的每一个模型下都为真，则 $\mathscr{A}$ 为 S 中的定理 $\Diamond$

证

设若 $\mathscr{A}$ 不是 S 的定理，据 命题 4.51，补充 $\sim\mathscr{A}$ 作为一个公理得到 S 的扩充 S^* 也是一致的

存在 S^* 的一个模型 M 使得 $\sim\mathscr{A}$ 在 M 下为真

$\mathscr{A}$ 在 M 下为假

由于 M 也是 S 的模型，这与假设矛盾 $\square$

命题 4.65 (Löwenheim-Skolem 定理)

若一个一阶系统 S 有模型，则 S 具有一个其论域为可枚举集的模型 $\Diamond$

证

若 S 有模型，据 命题 4.62，S 是一致的

由 命题 4.55 的证明可知

S 有一个特殊的模型，此模型的论域是可枚举集

此论域由闭项构成，这闭项集是可枚举（无穷）的

(命题 4.55 的证明中先构造一个 S 的扩展解释，然后又通过消除扩展常元还原为 S 的解释) $\square$

注

亦即 S 有基数 $\aleph_0$ 模型

引理*：令 $\mathfrak{m}$，$\mathfrak{n}$ 是两个基数使得 $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$，若 S 有一个基数 $\mathfrak{m}$ 模型，则 S 有一个基数 $\mathfrak{n}$ 模型

命题 *：对任何基数 $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$，任何一致的一阶系统 S 有一个基数 $\mathfrak{m}$ 模型

命题 4.66 (紧致性 (Compactness) 定理)

若一个一阶系统 S 的公理集的任意有限子集都有模型，则 S 也有模型 $\diamondsuit$

证

设若 S 的公理集的任意有限子集都有模型，但 S 没有模型

据 命题 4.62，S 是不一致的

存在公式 $\mathscr{A}$，$\vdash_S \mathscr{A}$ 和 $\vdash_S \sim\mathscr{A}$

不妨设这两个证明中涉及的公理集为 Γ

Γ 为一个有限公理子集

设 Γ 的模型为 I

$\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 在 I 下都为真，这是不可能的 $\square$

推论 4.67

令 Γ 是 $K_{\mathscr{L}}$ 的一个无限公式集，当 Γ 的任意有限子集都有模型时，Γ 有模型 $\diamondsuit$

定义 4.68 (模型生成系统)

给定一个模型 I (一个模型赋予每个闭式真值)，定义一个形式系统 $S(I)$ 如下：把所有在 I 中为真的公式作为公理，即 $S(I)$ 的公理都是 $S(I)$ 的定理

命题 4.69

设 $S(I)$ 是由模型 I 生成的形式系统，则 $S(I)$ 是一致且是完全的

证

反证易见 □

注

设 S 是一个一致的一阶系统，则 S 有一个模型 I，在 I 下，$\mathscr{A}$ 为真或 $\sim\mathscr{A}$ 为真；又设 S 是不完全的，即存在闭式 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都不是 S 的定理。由 S 的 I 可生成一个新的一阶系统 $S(I)$，$S(I)$ 是完全的

问题

给定朴素算术作为模型，可否生成一个完全的一阶（算术）系统？

定义 4.70

一个 K 的不可判定句子是一个闭式 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}$ 和 $\sim\mathscr{A}$ 都不是 K 的定理，即 $\nvdash \mathscr{A}$ 且 $\nvdash \sim\mathscr{A}$

定义 4.71

一个一阶系统 S 是公理化的，若存在一种能行的方法判定任一给定的公式是否为公理

注

K 是公理化的

命题 4.72 (半可判定性)

$K_{\mathscr{L}}$ 是不可判定的，即不存在一种能行的方法判定任一公式是否为定理

$K_{\mathscr{L}}$ 是半可判定的，即若一个公式是定理，则存在一种能行的方法判定之

证

（半可判定性）K 是公理化的，能枚举 K 的（所有）定理如下能行（能枚举）过程：据命题 3.25（一阶表达式是能枚举的），设一个（定理）表，初始为空，枚举过程加定理入表

(1) 加 K 的第 1 条公理（实例），以及从这条公理用 MP 和 Gen 所得直接后承入表，Gen 仅用一次，引入变元 x_1

(2) 加 K 的第 k 条公理，以及从这条公理用 MP 和 Gen 所得直接后承入表，Gen 仅用一次，引入变元 $x_1, \cdots, x_k$

依此类推，因 K 是完全的，对任何公式（闭式）$\mathscr{A}$，$\mathscr{A}$ 或 $\sim\mathscr{A}$ 为定理，等到定理出现最终（所有定理）都会被加入表 □

注

- 若 K 是不一致的，任一公式都是定理，枚举过程可判定之
- 若一个一阶系统 S 是公理化且完全的，则 S 具有半可判定性
- 上述枚举过程不能判定任一（$\mathscr{L}$ 的）公式是否是 $K_{\mathscr{L}}$ 的定理（不可判定性，参见第七章：逻辑 $\Rightarrow$ 可计算性）

广义一阶逻辑 *

令 $\mathscr{L}_G$ 是广义一阶语言（其非逻辑符不可枚举），在 $\mathscr{L}_G$ 上建立的 FOL，其一阶系统称广义一阶系统

- 普通一阶语言 $\mathscr{L}$ 是 $\mathscr{L}_G$ 的特形
- $\mathscr{L}_G$ 的解释（模型）与 $\mathscr{L}$ 类似，有关命题在 $\mathscr{L}_G$ 上成立（检查证明可发现对不可枚举情形不受影响）
- 有关结果涉及可枚举无穷可据（朴素）集论重新表述，如 Löwenheim-Skolem 定理：若 $\mathscr{L}_G$ 字符集的基数为 $\aleph_\alpha$，则 $\mathscr{L}_G$ 表达式（项和公式）是良序的且其模型的基数为 $\aleph_\alpha$（相应地，证明需用超穷归纳）
- 前束范式和子句式同样

二阶逻辑 *

给定一个二阶语言 $\mathscr{L}^2$，一个二阶模型 M（标准）解释如下：论域是非空集 D，s 是任一赋值（与一阶解释同），$\mathscr{D}$ 是所有 s 的集

- 对谓词变元 $\boldsymbol{R}_i^n$，$\langle t\rangle_n$ 为项系列，$s \models_2 \boldsymbol{R}_i^n(\langle t\rangle_n)$ 当且仅当 $\langle s(t_1), \cdots, s(t_n)\rangle \in s(\boldsymbol{R}_i^n)$
- $s \models_2 (\forall \boldsymbol{g}_i^n)\mathscr{A}$ 当且仅当 $s'\mathscr{A}$，对任一与 s 只除 $\boldsymbol{g}^n$ 赋值之外不同的 $s' \in \mathscr{D}$
- $s(\forall \boldsymbol{R}_i^n)\mathscr{A}$ 当且仅当 $s'\mathscr{A}$，对任一与 s 只除 $\boldsymbol{R}^n$ 赋值之外不同的 $s' \in \mathscr{D}$

二阶公理系统 S 是在一阶公理系统基础上增加以下公理（模式）和规则

- 公理

(S1a) $(\forall \boldsymbol{R}_i^n)\,\mathscr{A}\,(\boldsymbol{R}_i^n) \to \mathscr{A}\,(\boldsymbol{W}_i^n)$，$\mathscr{A}\,(\boldsymbol{W}^n)$ 是由 $\mathscr{A}\,(\boldsymbol{R}_i^n)$ 通过用 $\boldsymbol{W}_i^n$ 替换 $\boldsymbol{R}_i^n$ 的所有自由出现获得，$\boldsymbol{W}_i^n$ 在 $\mathscr{A}\,(\boldsymbol{R}^n)$ 中对 $\boldsymbol{R}^n$ 自由

(S1b) $(\forall \boldsymbol{g}_i^n)\,\mathscr{A}\,(\boldsymbol{g}_i^n) \to \mathscr{A}\,(\boldsymbol{h}_i^n)$，$\mathscr{A}\,(\boldsymbol{h}^n)$ 是由 $\mathscr{A}\,(\boldsymbol{g}_i^n)$ 通过用 $\boldsymbol{h}_i^n$ 替换 $\boldsymbol{g}_i^n$ 的所有自由出现获得，$\boldsymbol{h}_i^n$ 在 $\mathscr{A}\,(\boldsymbol{g}^n)$ 中对 $\boldsymbol{g}^n$ 自由

(S2a) $(\forall \boldsymbol{R}_i^n)\,(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\forall \boldsymbol{R}^n)\,\mathscr{B})$，$\boldsymbol{R}_i^n$ 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现

(S2b) $(\forall \boldsymbol{g}_i^n)\,(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to (\forall \boldsymbol{g}^n)\,\mathscr{B})$，$\boldsymbol{g}_i^n$ 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现

- 模式

(C) $(\exists \boldsymbol{R}_i^n)\,(\forall \langle x\rangle_n)\,(\boldsymbol{R}_i^n\,(\langle x\rangle_n) \leftrightarrow \mathscr{A})$，$\mathscr{A}$ 的所有自由变元出现在 $\langle x\rangle_n$ 中，$\boldsymbol{R}^n$ 不在 $\mathscr{A}$ 中自由出现 （理解（comprehension） 模式）

(FD) $\left(\forall \boldsymbol{R}_i^{n+1}\right)[(\forall \langle x\rangle_n)\,(\exists_1 y)\,\boldsymbol{R}_i^{n+1}\,(\langle x\rangle_n, y) \to (\exists \boldsymbol{g}^n)\,(\forall \langle x\rangle_n)\,\boldsymbol{R}_i^{n+1}\,(\langle x\rangle_n, \boldsymbol{g}^n\,(\langle x\rangle_n))]$

（函项定义（function definition） 模式）

二阶公理系统 *

- 规则

(Gen2a) 若 $\mathscr{A}$，则 $(\forall \boldsymbol{R}_i^n)\,\mathscr{A}$

(Gen2b) 若 $\mathscr{A}$，则 $(\forall \boldsymbol{g}_i^n)\,\mathscr{A}$

$\vdash_2$ 类似 $\vdash$ 定义

可靠性定理

对任一二阶公式 $\mathscr{A}$，若 $\vdash_2 \mathscr{A}$，则 $\models_2 \mathscr{A}$

不完全性定理

存在一个二阶公式 $\mathscr{A}$，若 $\models_2 \mathscr{A}$，但 $\nvdash_2 \mathscr{A}$

(没有公理系统使得其定理就是有效公式)

注

紧致性定理和 Löwenheim-Skolem 定理在二阶逻辑中也不成立

(基于 Gödel 不完全性定理理解，参见第五、六章)

一般二阶逻辑 *

- 对二阶逻辑 S 做一些限制可获得具有完全性定理的一般二阶逻辑，如 Henkin 二阶逻辑限制如下：二阶解释中 $\mathscr{D}$ 对二阶函项和谓词符的赋值 s 都用固定集，公理系统基本上保持不变
- Henkin 二阶逻辑比 S 弱
- 有些具有完全性定理的二阶逻辑可等价于一阶逻辑

注

二阶（高阶）逻辑不仅在数学中有很多应用，许多定理自动证明系统使用高阶逻辑