数理逻辑

讲义，第 6.3 版，2024 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨

linzuoquan@pku.edu.cn

1 命题逻辑：语义

- 命题和连接符
- 真值函数和真值表
- 操作和替换规则

命题和连接符

符号语言

自然语言的表述带有歧义性等问题，不适合描述数学中精确的演绎（deduction）推理

例如："他笑得像个疯子一样。"

用符号语言（symbolic language，或形式(formal) 语言）是基本的数学推理形式

例：x_0 是集 X 中的最大元（数学语言）

$x_0 \in X$，$\forall x \in X$，$x \leqslant x_0$ （符号语言）

符号语言与数学语言

（符号）语言

- 语法（syntax）
- 语义（semantics）
- 语用（pragmatics）

数学语言 = 自然语言 + 记号：不是符号语言，是自然语言

网络语言 = 自然语言 + 记号

注

程序设计语言是一种符号语言

命题（逻辑）语言

类似于自然语言和日常推理，命题逻辑首先需要一个形式语言，称为命题语言，记为 $\mathscr{L}_0$

命题和命题的真值

定义 1.1 (命题)

具有真假意义的判断性或陈述性的语句称为命题（proposition），或称语句（statement） ♢

定义 1.2 (真值)

命题的真假意义称为命题的真值（truth values）

当一个命题为真时，称它的真值为“真”（true），记为 T（或 1）

当一个命题为假时，称它的真值为“假”（false），记为 F（或 0） ♢

真值作为命题的语义（semantics）

基于命题及其真值建立的逻辑称命题逻辑（Propositional Logic，PL），

PL 是二值逻辑，亦称经典（标准）命题逻辑

注

- 二值（1，0）对应于二进制
- 三值逻辑除真假值外还有第三个值“不确定”(可表示“即真又假”)，属于非经典（标准）逻辑

例 1.3

(1) “Perelman 证明了庞加莱猜想”是命题，其真值为 T

(2) “张益唐证明了孪生素数猜想”是命题，其真值为 F

(3) “燕园的秋天多美啊！”不是命题，其真值不能判断

(4) “这句话是假的”是命题吗？

悖论 1.4 (说谎者悖论)

“这个句子是假的”不是命题，称之悖论 (paradox)：一种导致自相矛盾的陈述

设 P 表示“这个句子是假的”

若 P 为真，即“这个句子是假的”为真 $\Rightarrow$ P 为假

若 P 为假，即“这个句子是假的”为假 $\Rightarrow$ P 为真

悖论说明关于真值的一般信念可推导出矛盾

说谎者悖论扩展版本

(P1) 下个句子为真

(P2) 上个句子为假

多语句版本的说谎者悖论可推广致任何语句循环序列，只要该语句循环序列规定存在奇数语句

悖论难解

悖论是“不真不假”？

设 P：“这个句子不为真。”

若 P 是不真不假的，则 P 一定不为真；

但从 P 对它自身的陈述，则又意味着 P 一定为真

$\Rightarrow$ P 不为真但又为真（悖论）

悖论是“即真又假”吗？

设 Q：“这个句子只为假。”

若 Q 是即真又假，则 Q 只为假；但这不为真

$\Rightarrow$ Q 为真却又不为真（悖论）

注

这个问题是如此简单（有点烧脑）

这个问题又是如此复杂，至今难于解决

注：矛盾与逻辑矛盾

“… 楚人有鬻盾与矛者，誉之曰：‘盾之坚，莫能陷也。’又誉其矛曰：‘吾矛之利，于物无不陷也。’或曰：‘以子之矛陷子之盾，何如？’其人弗能应也。夫不可陷之盾与无不陷之矛，不可同世而立。今尧、舜之不可两誉，矛盾之说也。…” —— 韩非子 · 难一

逻辑矛盾：同时断言一个陈述和它的否定

——悖论是一种逻辑矛盾的形式

悖论 1.5

- “上帝能创造一块他搬不动的石头”（上帝万能论）
- “世界上没有绝对的真理”
- “我只知道一件事，那就是什么都不知道”（苏格拉底）
- “言尽悖”（庄子·齐物论）

注

自指（self-reference）：　“这个句子是用中文写的”

悖论通常是自指语句（反之未必）

问题

“我明天这个时候说的这句话是假的” — 悖论吗？

注

存在不是命题也不是悖论的陈述句

定义 1.6 (命题符号)

命题分为两类

- 简单命题（原子（命题）(atom)）：不能进一步分解的命题

  简单命题用大写字母 A，B，C（可加下标）等来表示

  例：用 A 表示命题 "Perelman 解决了庞加莱猜想问题"

  用 B 来表示 "庞加莱猜想成为数学定理"

- 复合命题：由简单命题复合而成的命题

  对复合命题，需要使用（逻辑）连接符（连接词、联词）(connective) 来构成

◇

定义 1.7 (连接符)

非 A (not A)	$\sim A$
A 且 B (A and B)	$A \wedge B$
A 或 B (A or B)	$A \vee B$
若 A 则 B (if A then B)	$A \to B$
A 当且仅当 B (A if and only if B)	$A \leftrightarrow B$

◇

“若 Perelman 解决了庞加莱猜想问题，则庞加莱猜想成为数学定理”

可表为

$A \to B$

例 1.8 (三段论)

$$\begin{array}{ll} & \text{若苏格拉底是人则苏格拉底是会死的} \\ & \text{苏格拉底是人} \\ \therefore & \text{苏格拉底是会死的} \end{array}$$

把命题符号化，使得在（演绎）推理过程中只关注命题的形式结构，而不是命题本身的具体意义

$$\begin{array}{ll} & A \to B \\ & A \\ \therefore & B \end{array}$$

例续

$$\begin{array}{ll} & \text{若苏格拉底是猪则苏格拉底是会飞的} \\ & \text{苏格拉底是猪} \\ \therefore & \text{苏格拉底是会飞的} \end{array}$$

定义 1.9 (命题变元)

命题变元表示任意非特指的命题

用小写字母 p, q, r （可加下标）等来表示 $\diamondsuit$

注

- 命题变元和命题是不一样的
- 给命题变元一个特定的值，即一个特定的命题，其真值必为 T、F 其一
- 复合命题的真值依赖于其中原子的真值及连接符

- 命题和连接符
- 真值函数和真值表
- 操作和替换规则

真值函数和真值表

否定（非，negation）$\sim$

$\sim p$ 的真值表（truth table）

p	$\sim p$
T	F
F	T

对应的真值函数（Bool 函数）

$$f^{\sim}:\{T,F\} \mapsto \{T,F\} \text{ 使得 } f^{\sim}(T)=F, f^{\sim}(F)=T$$

或 $f^{\sim}:\{1,0\} \mapsto \{1,0\}$ 使得 $f^{\sim}(1)=0, f^{\sim}(0)=1$

注

真值表有 2^1 行，对应的真值函数有 2^{2^1} 个，相当于真值表最后一列要考虑（值域）两种情况

合取（conjunction）$\wedge$

$p \wedge q$ 的真值表

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

对应的真值函数

$$f^{\wedge} : \{T, F\} \times \{T, F\} \quad \mapsto \quad \{T, F\} \text{ 使得}$$

$$f^{\wedge}(T, T) = T, f^{\wedge}(T, F) = F, f^{\wedge}(F, T) = F, f^{\wedge}(F, F) = F$$

析取（disjunction）$\vee$

$p \vee q$ 的真值表

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

对应的真值函数

$$f^{\vee}:\{T,F\}\times\{T,F\} \quad \mapsto \{T,F\} \text{ 使得}$$

$$f^{\vee}(T,T)=T, f^{\vee}(T,F)=T, f^{\vee}(F,T)=T, f^{\vee}(F,F)=F$$

注

"$A \vee B$" 表示 A 或 B 之一或两者（A or B or both）

条件（conditional，或隐含（implication））$\rightarrow$

$p \rightarrow q$ 的真值表

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

注

- 确保"$A \rightarrow B$"在推理中当 A 为真时可推出 B 为真，$A \wedge B \rightarrow B$ 确保为真；而 A 为假时推不出任何有意义的结论
  $\Leftarrow$ 数学中形式推理（亦称实质隐含）
- 隐含"怪论"："若猪长翅膀，则猪能飞"

双条件（biconditional，或等价（equivalence））$\leftrightarrow$

$p \leftrightarrow q$ 的真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

命题形式

定义 1.10 (命题形式)

命题形式是指按下列规则构成的包含（命题）变元和（逻辑）连接符的表达式

(1) 任一变元是一个命题形式

(2) 若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是命题形式，则 $(\sim\mathscr{A})$，$(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})$，$(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$，$(\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B})$，$(\mathscr{A}\leftrightarrow\mathscr{B})$ 都是命题形式

（所有命题形式由 (1)(2) 构成） ◇

用（花体）符号 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$ （可加下标）等表示命题形式

注

- 定义 1.10 是归纳（递归）定义

  $\mathscr{C}$ 是一个命题形式，当且仅当存在一个有限系列 $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \cdots, \mathscr{C}_n$（$n \geq 1$）使得 $\mathscr{C}_n = \mathscr{C}$ 且若 $1 \leq i \leq n$，$\mathscr{C}_i$ 是一个变元或由前面的（一个或两个）命题形式经 $\sim$ 或 $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 所得
- 命题形式可嵌套，可潜在无限长
- 给定 一个命题形式，则为有限长

技术性符号

- 括号 "(" ")" 作为技术性符号使用，理论上，括号不是必要的：把中置式写成前置式，定义如下
  1. $(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) =_{def} \to \mathscr{A}\mathscr{B}$
  2. $(\mathscr{A} \land \mathscr{B}) =_{def} \land \mathscr{A}\mathscr{B} =_{def} (\sim(\mathscr{A} \to \sim \mathscr{B}))$
  3. $(\mathscr{A} \lor \mathscr{B}) =_{def} \lor \mathscr{A}\mathscr{B} =_{def} ((\sim \mathscr{A}) \to \mathscr{B})$
  4. $(\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}) =_{def} \leftrightarrow \mathscr{A}\mathscr{B} =_{def} (\sim((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to \sim(\mathscr{B} \to \mathscr{A})))$
- 用中置式需要用括号，在不引起混淆的情况下尽可省略：规定以下优先序
  1. 连接符优先按 $\leftrightarrow, \to, \lor, \land$ 序操作（类似算术先乘除后加减，标点符号句号比分号、分号比逗号优先），同级连接符按从右向左原则操作
  2. 连续多个连接符 $\sim$，按从右向左原则操作
- 重新添加括号循序逆操作（去括号和加括号都是简单算法）
- 为方便可引入其它技术性符合，如 "..." 等，但都不是必要的，不是命题语言中的符号

例 1.11

$((p \wedge q) \rightarrow (\sim(q \vee r)))$ 是一个命题形式

简略写法

$(p \wedge q) \rightarrow (\sim(q \vee r))$

$p \wedge q \rightarrow \sim(q \vee r)$

$p \wedge q \rightarrow \sim \cdot q \vee r$

注

“·” 作为技术性符号使用（取代括号），表 $q \vee r$ 为 $\sim$ 管辖

命题形式的真值表

基于连接符的真值表，对任意给定的命题形式，可构造相应的真值表

例 1.12

$\sim p \vee q$ 的真值表

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

形式化

把（自然语言）知识表示为命题形式

例如，从书中随便找一个自然语言段落，把它表示为命题形式

例 1.13

把一首古诗表示为命题形式

A: 白日依山尽

B: 黄河入海流

A, B 是复合命题，可进一步细化

令 A_1 表示 “(这是一个) 白天”，A_2 表示 “(今天能见到) 太阳”，A_3 表示 “(西边有一座) 山”，A_4 表示 “太阳 (将) 落山”。注意：把古诗的词翻译成白话句子，单词不是命题。A 可细化为

$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \rightarrow A_4$$

两步

1. 把知识改写限制自然语言形式，即改成表达知识的逐个命题
2. 形式化表示需尽可能细化，即基于原子、用尽连接符

定义 1.14 (真值指派)

对一个命题形式所含变元分别赋予 T 或 F 值称为一组真值指派 (assignment) ♢

注

- 若命题形式含有 n 个不同的变元，其真值指派有 2^n 种可能的组合，每种组合都对应真值表的一行，对应的真值表有 2^n 行
- 对应的真值函数为 n 元函数, 即 $\{1,0\}^n \mapsto \{1,0\}$，每个变元都有两种取值（定义域），共有 2^n 种可能的组合（每种组合对应真值表中的一行），对于每种可能的组合，可为真值函数分配二值之一（值域），共有 2^{2^n} 种不同的真值函数
- n 元真值函数的个数有限（2^{2^n}），而 n 元命题形式是无限的，故肯定有不同的命题形式对应相同的真值函数

定义 1.15 (可满足性)

设 $\mathscr{A}$ 是一个命题形式，若对 $\mathscr{A}$ 中的变元存在（至少）一组真值指派，使得 $\mathscr{A}$ 的真值为 T，则称 $\mathscr{A}$ 是可满足的 ◇

定义 1.16 (SAT 问题)

SAT 问题（SATisfiability，可满足性问题）是判定一个命题形式是否可满足的问题

(寻找一个算法在多项式时间内判定任一命题形式可满足) ◇

注

- $P =^? NP$ 问题是计算机科学和数学的未解难题
- SAT 问题若能解决，就解决了 $P =^? NP$ 问题（Cook 定理）
- 大量应用问题本质上可转化为 SAT 问题，已成专门的研究领域
- 命题逻辑具有独特的价值（不只是作为一阶逻辑的基础）

定义 1.17 (重言式与矛盾式)

设 $\mathscr{A}$ 是一个命题形式

(1) 若对 $\mathscr{A}$ 中变元的任一组真值指派，$\mathscr{A}$ 的真值都为 T，则

称 $\mathscr{A}$ 是 重言式（tautology，或 恒真）

(2) 若对 $\mathscr{A}$ 中变元的任一组真值指派，$\mathscr{A}$ 的真值都为 F，则

称 $\mathscr{A}$ 是 矛盾（式）（contradiction，或 恒假、不一致 (inconsistent)）$\diamondsuit$

注

判定一个命题形式是否为可满足/重言式/矛盾的方法就是构造其真值表

例 1.18

(a) $p \vee q$ 是可满足的

(b) $p \wedge \sim p$ 是矛盾

(c) $p \vee \sim p$ 是重言式

(d) $p \leftrightarrow \sim\sim p$ 是重言式

(e) $(\sim p \to q) \to ((\sim p \to \sim q) \to p)$ 是重言式

定义 1.19 (逻辑隐含与重言等价)

设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 都是命题形式

(1) 若 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是重言式，则称 $\mathscr{A}$ 逻辑隐含 $\mathscr{B}$

(2) 若 $\mathscr{A} \leftrightarrow \mathscr{B}$ 是重言式，则称 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 重言等价，或称 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 等值，记为 $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$ ♢

注

若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是含相同变元的命题形式，则 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 重言等价意味着它们的真值函数相同

例 1.20

(a) $p \wedge q$ 逻辑隐含 p

(b) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

(c) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

(b) 真值表如下

$((\sim$	$(p$	$\wedge$	$q))$	$\leftrightarrow$	$((\sim$	$p)$	$\vee$	$(\sim$	$q)))$
F	T	T	T	T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T	F

构造真值表的方法

对较复杂的命题形式，可用如下方法来构造真值表

(1) 在命题变元的下面列出所有的真值组合

(2) 按照括号从内到外的次序给出每层括号内的连接符对应的真值

例 1.20(b)，第 (1) 步

$((\sim$	$(p$	$\wedge$	$q))$	$\leftrightarrow$	$((\sim$	$p)$	$\vee$	$(\sim$	$q)))$
	T		T			T			T
	T		F			T			F
	F		T			F			T
	F		F			F			F

第 (2) 步

$((\sim$	$(p$	$\wedge$	$q))$	$\leftrightarrow$	$((\sim$	$p)$	$\vee$	$(\sim$	$q)))$
	T	T	T		F	T		F	T
	T	F	F		F	T		T	F
	F	F	T		T	F		F	T
	F	F	F		T	F		T	F

第 (3) 步

$((\sim$	$(p$	$\wedge$	$q))$	$\leftrightarrow$	$((\sim$	$p)$	$\vee$	$(\sim$	$q)))$
F	T	T	T		F	T	F	F	T
T	T	F	F		F	T	T	T	F
T	F	F	T		T	F	T	F	T
T	F	F	F		T	F	T	T	F

第 (4) 步

$((\sim$	$(p$	$\wedge$	$q))$	$\leftrightarrow$	$((\sim$	$p)$	$\vee$	$(\sim$	$q)))$
F	T	T	T	T	F	T	F	F	T
T	T	F	F	T	F	T	T	T	F
T	F	F	T	T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T	F

- 命题和连接符
- 真值函数和真值表
- 操作和替换规则

操作和替换规则

命题 1.21

设 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是命题形式, 若 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 都是重言式, 则 $\mathscr{B}$ 也是重言式 $\diamondsuit$

证

(反证法) 设若 $\mathscr{B}$ 不是重言式

因 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 都是重言式, 则对 $\mathscr{A}$ 或 $\mathscr{B}$ 中出现的变元至少存在一组真值指派, 使得 $\mathscr{B}$ 取值为 F, 由于 $\mathscr{A}$ 是重言式, $\mathscr{A}$ 的真值必为 T

这样, $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 的真值为 F, 这与 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是重言式相矛盾 $\square$

注

反证法是逻辑中基本证法之一, 亦是逻辑演算"之外"所需的证明之一

替换

设 $\mathscr{A}$ 是含有变元 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的命题形式，$\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$，$\cdots$，$\mathscr{A}_n$ 是任意的命题形式，$\mathscr{A}_{p_1,p_2,\cdots,p_n/\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n}$ 是分别用 $\mathscr{A}_i$ 替换 (substitute) p_i $(1 \le i \le n)$ 的所有出现得到的命题形式

命题 1.22

若 $\mathscr{A}$ 是重言式，则 $\mathscr{A}_{p_1,p_2,\cdots,p_n/\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n}$ 亦是重言式 $\diamondsuit$

证

令 $\mathscr{A}$ 是重言式， $p_i (1 \le i \le n)$ 是 $\mathscr{A}$ 中出现的变元

设 $\mathscr{A}_i (1 \le i \le n)$ 是任意的命题形式

对 $\mathscr{A}_i$ 中出现的变元指派任意的真值（任意指派），p_i 的真值对等于 $\mathscr{A}_i$ 的真值，则 $\mathscr{A}_{p_1,p_2,\cdots,p_n/\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n}$ 在此真值指派下的真值对等于 $\mathscr{A}$（为 T）

$\mathscr{A}_{p_1,p_2,\cdots,p_n/\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n}$ 在任意真值指派下的取值都为 T（重言式） □

定义 1.23 (替换实例)

$\mathscr{A}_{p_1,p_2,\cdots,p_n/\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_n}$ 是用 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n$ 分别替换 $\mathscr{A}$ 中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的一个替换实例 ◇

注

重言式的任意替换实例仍是重言式

命题 1.24

对任意命题形式 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$

$$\sim(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \equiv \sim\mathscr{A} \vee \sim\mathscr{B}$$

$$\sim(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \equiv \sim\mathscr{A} \wedge \sim\mathscr{B}$$

$\diamondsuit$

证

由 例 1.20(b) 知

$\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ 是重言式

用 命题 1.10 知

$\sim(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \leftrightarrow \sim\mathscr{A} \wedge \sim\mathscr{B}$ 是重言式

即 $\sim(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ 重言等价于 $\sim\mathscr{A} \wedge \sim\mathscr{B}$

同理可得 $\sim(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ 重言等价于 $\sim\mathscr{A} \vee \sim\mathscr{B}$ $\square$

例 1.25 ($\wedge\vee$ 结合律)

对任意命题形式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$

- $(\mathscr{A} \wedge (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C})) \equiv ((\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \wedge \mathscr{C})$
- $(\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \vee \mathscr{C})) \equiv ((\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \vee \mathscr{C})$

例 1.26 ($\wedge\vee$ 交换律)

对任意命题形式 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$，$\mathscr{C}$

- $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \equiv \mathscr{B} \wedge \mathscr{A}$
- $\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \equiv \mathscr{B} \vee \mathscr{A}$

$(\mathscr{A} \wedge (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}))$ 可简写成 $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \wedge \mathscr{C})$

$(\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}))$ 可简写成 $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \vee \mathscr{C})$

命题 1.27

设 $\mathscr{A}_1$ 是含有命题形式 $\mathscr{A}$ 的命题形式，$\mathscr{B}_1(\mathscr{A}_{1\mathscr{A}/\mathscr{B}})$ 是用命题形式 $\mathscr{B}$ 替换 $\mathscr{A}_1$ 中的 $\mathscr{A}$ 一次或多次所得到的命题形式。若 $\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{A}$ 等值，则 $\mathscr{B}_1$ 重言等价于 $\mathscr{A}_1$ $\diamondsuit$

证

对 $\mathscr{B}_1$ 和 $\mathscr{A}_1$ 中所有变元进行真值指派，则 $\mathscr{B}_1$ 与 $\mathscr{A}_1$ 的区别在于 $\mathscr{B}_1$ 的某些出现 $\mathscr{A}$ 的地方被替换为 $\mathscr{B}$，因 $\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{A}$ 等值，所以 $\mathscr{A}_1 \leftrightarrow \mathscr{B}_1$ 的真值总为 T，即为重言式，故 $\mathscr{B}_1$ 重言等价于 $\mathscr{A}_1$ $\square$

定义 1.28 (受限命题形式)

受限（或 0 阶）命题形式是指仅含有连接符“$\sim$”、“$\vee$”和“$\wedge$”的命题形式 ♢

命题 1.29

设 $\mathscr{A}$ 是受限命题形式，$\mathscr{A}^*$ 是通过如下方式所得的命题形式

(1) 互换 $\mathscr{A}$ 中所有的“$\vee$”和“$\wedge$”

(2) 对 $\mathscr{A}$ 中任意的命题变元，用其否定式替换该命题变元在 $\mathscr{A}$ 中所有的出现

则 $\mathscr{A}^*$ 与 $\sim\mathscr{A}$ 重言等价 ♢

证

（归纳法）　对 $\mathscr{A}$ 中出现的连接符的数目（结构）用数学归纳法证明

基始：若 $\mathscr{A}$ 中出现的连接符数目为 0, 则 $\mathscr{A}$ 只包含一个变元 p,

即 $\mathscr{A}$ 就是 p，显然 $\mathscr{A}^*$ 就是 $\sim p$（即 $\sim\mathscr{A}$），结论成立

假设：假设结论对于至多包含 $n-1$ $(n>0)$ 个连接符的命题形式成立

归纳：当 $\mathscr{A}$ 包含 n 个连接符时，$\mathscr{A}$ 必是下面三种形式之一

(1) $\sim\mathscr{B}$

(2) $\mathscr{B}\vee\mathscr{C}$

(3) $\mathscr{B}\wedge\mathscr{C}$

证（续）

(1) $\mathscr{B}$ 含 $n-1$ 个连接符，（据归纳假设）有 $\mathscr{B}^*$ 与 $\sim\mathscr{B}$ 等价

另，$\mathscr{A}^*$ 是 $(\sim\mathscr{B})^*$ 即 $(\sim\mathscr{B}^*)$（注意到 * 操作 $\sim$ 只针对变元），由替换（命题 1.27），$\mathscr{A}^*$ 等价于是 $(\sim(\sim\mathscr{B}))$ 即 $(\sim\mathscr{A})$

(2) $\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 含的连接符数目都小于 $n-1$，有 $\mathscr{B}^*$ 和 $\mathscr{C}^*$ 分别与 $\sim\mathscr{B}$ 和 $\sim\mathscr{C}$ 等价

现 $\mathscr{A}^*$ 是 $\mathscr{B}^* \wedge \mathscr{C}^*$，由替换

$\mathscr{B}^* \wedge \mathscr{C}^*$ 等价于 $\sim\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}^*$

$\sim\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}^*$ 等价于 $\sim\mathscr{B} \wedge \sim\mathscr{C}$，据 命题 1.24

$\sim\mathscr{B} \wedge \sim\mathscr{C}$ 等价于 $\sim(\mathscr{B} \vee \mathscr{C})$，即 $\sim\mathscr{A}$

(3) 类 (2) 同理 □

注

（数学）归纳法是逻辑中基本证法之二（逻辑演算“之外”所需）

逻辑证法

- 反证法和（数学）归纳法是逻辑中两种基本证法
- 反证和归纳是逻辑“之外”仅需的两种证法，此外，不需也不能再有逻辑外的证明

  — 逻辑是一个精确的体系，可作为数学的基础
- 反证法本身是逻辑体系内的定律，一定意义上归纳法亦然
- 用数学语言陈述的证明过程可被（一阶逻辑）形式化

  — 实质上，数学基础是关于一致性和证明

推论 1.30

令 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 是变元，则

$$\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee \sim p_n$$

等价于

$$\sim(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$$ ◊

证

令 $\mathscr{A}$ 为 $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n)$，用 命题 1.29 即得 □

记 $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} p_i$ 表示 $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$

$\bigvee\limits_{i=1}^{n} p_i$ 表示 $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$

命题 1.31 (DeMorgan 律)

若 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$，…，$\mathscr{A}_n$ 是任意命题形式，则

(1) $\bigvee\limits_{i=1}^{n}(\sim\mathscr{A}_i) \equiv \sim(\bigwedge\limits_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i)$

(2) $\bigwedge\limits_{i=1}^{n}(\sim\mathscr{A}_i) \equiv \sim(\bigvee\limits_{i=1}^{n}\mathscr{A}_i)$ $\diamondsuit$

证

推论 1.30 和 命题 1.22 $\square$

定律

(1) $\sim(\mathscr{A}\wedge\sim\mathscr{A})$ （无矛盾律）

(2) $\mathscr{A}\vee\sim\mathscr{A}$ （排中律）

(3) $\mathscr{A}\equiv\sim\sim\mathscr{A}$ （双重否定律）

(4) $\mathscr{A}\equiv\mathscr{A}\wedge\mathscr{A}$

$\mathscr{A}\equiv\mathscr{A}\vee\mathscr{A}$ （同幂律或重言律）

(5) $(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})\rightarrow\mathscr{C}\equiv\mathscr{A}\rightarrow(\mathscr{B}\rightarrow\mathscr{C})$ （赎出律 (exportation)）

(6) $\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}\equiv\sim\mathscr{B}\rightarrow\sim\mathscr{A}$ （换位律）

(7) $\sim(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B})\equiv\sim\mathscr{A}\vee\sim\mathscr{B}$

$\sim(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\equiv\sim\mathscr{A}\wedge\sim\mathscr{B}$ （DeMorgan 律）

定律（续）

(8) $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \equiv \mathscr{B} \wedge \mathscr{A}$

$\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \equiv \mathscr{B} \vee \mathscr{A}$ （交换律）

(9) $\mathscr{A} \wedge (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}) \equiv (\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \wedge \mathscr{C}$

$\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}) \equiv (\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \vee \mathscr{C}$ （结合律）

(10) $\mathscr{A} \wedge (\mathscr{B} \vee \mathscr{C}) \equiv (\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \vee (\mathscr{A} \wedge \mathscr{C})$

$\mathscr{A} \vee (\mathscr{B} \wedge \mathscr{C}) \equiv (\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \wedge (\mathscr{A} \vee \mathscr{C})$ （分配律）

注

- 可推广到一般情况
- 反映思维的基本形式结构，数学推理（形式推理）的基本定律
- 体现在数学证明中，通常有直接证法、反证法、数学归纳法；如换位律可推导出反证法，换位律亦可作为证法，其它定律都可作为数学（直接）证法

数理逻辑

讲义，第 6.3 版，2024 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨
linzuoquan@pku.edu.cn

1 命题逻辑：语义

- 命题和连接符
- 真值函数和真值表
- 操作和替换规则
- 范式
- 连接符的完备集
- 推理及有效性

范式

回顾：命题形式与真值表

两个不同的命题形式可能是等值的，即一个命题形式可能有许多与之等值的命题形式。

- 对 n 元命题形式，有且仅有 2^{2^n} 个不同的真值函数，互不等值的 n 元命题形式多于 2^{2^n} 个（无穷多个）

任一命题形式都对应于一个真值表

任意给定一个真值表（或真值函数）亦可构造一个命题形式？

例 1.32

构造一个三元命题形式，使其真值表如下

T	T	T	T	$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3)$
T	T	F	T	$(p_1 \wedge p_2 \wedge (\sim p_3))$
T	F	T	F	
T	F	F	F	
F	T	T	F	
F	T	F	F	
F	F	T	F	
F	F	F	T	$((\sim p_1) \wedge (\sim p_2) \wedge (\sim p_3))$

构造的命题形式如下

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2 \wedge \sim p_3) \vee (\sim p_1 \wedge \sim p_2 \wedge \sim p_3)$$

定义 1.33 (基本合取式)

对三元真值函数，若 p_1，p_2，p_3 相应的真值组合为 FTF，则构造的合取命题形式为 $(\sim p_1 \wedge p_2 \wedge \sim p_3)$，其真值为 T，而对其它的真值组合，其真值都为 F

称这样的合取命题形式为 基本合取式 或 短语（子句(clause)）

定义 1.34 (文字)

称一个文字（literal）是一个原子变元 p_i （正文字）或原子变元的否定式 $\sim p_i$ （负文字）

命题 1.35

任一真值函数 f 都对应于一个受限命题形式 $\mathscr{A}$，即可构造一个受限命题形式 $\mathscr{A}$，使其真值函数为 f $\diamondsuit$

证

设 f 是 n 元函数，$f\colon\{T,F\}^n\to\{T,F\}$，$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 n 个变元

若对任意真值组合，f 的值都是 F，则只需构造如下的矛盾式即可

$$(\sim p_1\wedge p_1)\wedge p_2\wedge\cdots\wedge p_n$$

(只需考虑非矛盾命题形式)

证（续）

若至少存在一组对 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的真值指派，使得 f 的值是 T，则按如下的方法构造一个关于 p_i 或 $\sim p_i$ $(1 \le i \le n)$ 的合取命题形式，其中 p_i 和 $\sim p_i$ 出现且仅出现其一

(1) 若对 p_i 的真值指派为 T，则 p_i 在此命题形式中出现

(2) 若对 p_i 的真值指派为 F，则 $\sim p_i$ 在此命题形式中出现

所得基本合取式相对此真值指派其真值为 T；而对其它的真值指派其真值都为 F

令 $\mathscr{A}$ 为所构造的所有基本合取式的析取，则 $\mathscr{A}$ 的真值函数为 f □

推论 1.36

任一非矛盾的命题形式都与一个形（式）为 $\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{j=1}^{n} Q_{ij})$ 的受限命题形式等价，其中 Q_{ij} 为文字，称为析取范式 DNF（Disjunctive Normal Form） $\diamondsuit$

证

据 命题 1.35，对给定的非矛盾的命题形式的真值函数构造析取范式即可 $\square$

推论 1.37

任一非重言式的命题形式都与一个形为 $\bigwedge\limits_{i=1}^{m}(\bigvee\limits_{j=1}^{n} Q_{ij})$ 的受限命题形式等价，其中 Q_{ij} 为文字，称为合取范式 CNF（Conjunctive Normal Form）

$\diamondsuit$

证

设 $\mathscr{A}$ 是一个非重言式的命题形式，据 推论 1.36，对 $\sim\mathscr{A}$ ，有析取范式 $\bigvee\limits_{i=1}^{m}(\bigwedge\limits_{j=1}^{n} Q_{ij})$

进一步， $\bigvee\limits_{i=1}^{m}(\bigwedge\limits_{j=1}^{n} Q_{ij})^*$ 与 $\sim(\sim\mathscr{A})$ 等价，而 $\bigvee\limits_{i=1}^{m}(\bigwedge\limits_{j=1}^{n} Q_{ij})^*$ 就是 $\bigwedge\limits_{i=1}^{m}(\bigvee\limits_{j=1}^{n}(\sim Q_{ij}))$ $\square$

注

证明过程提供了求解一个命题形式的范式的方法

例 1.38

求与 $(\sim p_1 \vee p_2) \to p_3$ 等价的合取范式

$(((\sim$	$p_1)$	$\vee$	$p_2)$	$\to$	$p_3)$
F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	F^*	F
F	T	F	F	T	T
F	T	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	F^*	F
T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	F^*	F

得到的合取范式为

$$((\sim p_1 \vee \sim p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee \sim p_2 \vee p_3) \wedge (p_1 \vee p_2 \vee p_3))$$

连接符的完备集

真值函数和连接符

- 对 n 元真值函数：$\{1,0\}^n \mapsto \{1,0\}$（$2^{2^n}$ 个），原则上，每个真值函数都可定义一个连接符，通常选择常用或最少的连接符

定义 1.39

连接符的完备集 S 是指对任何真值函数都可用仅含 S 中连接符的命题形式来表示 $\diamondsuit$

注

由 命题 1.35 知，$\{\sim, \vee, \wedge\}$ 是一个连接符的完备集

命题 1.40

$\{\sim,\wedge\}$，$\{\sim,\vee\}$ 和 $\{\sim,\rightarrow\}$ 都是连接符的完备集 $\diamondsuit$

证

对任意两个命题形式 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$，$\mathscr{A}\vee\mathscr{B}\equiv\sim(\sim\mathscr{A}\wedge\sim\mathscr{B})$，故 $\{\sim,\wedge\}$ 是连接符的完备集；$\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}\equiv\sim(\sim\mathscr{A}\vee\sim\mathscr{B})$，故 $\{\sim,\vee\}$ 是连接符的完备集；$\mathscr{A}\rightarrow\mathscr{B}\equiv\sim\mathscr{A}\vee\mathscr{B}$，故 $\{\sim,\rightarrow\}$ 是连接符的完备集 $\square$

注

- 这些连接符完备集都含有否定符 $\sim$
- （其它）连接符可相互定义（需 $\sim$）
- 就 5 个连接符而言，除这三对以外，任何其它的一对连接符都不是完备集

定义 1.41 (竖)

定义逻辑连接符 $|$（与非（Nand））和 $\downarrow$（或非（Nor））如下

$$\mathscr{A} \mid \mathscr{B} = (\sim(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})); \quad \mathscr{A} \downarrow \mathscr{B} = (\sim(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}))$$

对应的真值表分别为

p	q	$p \mid q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

p	q	$p \downarrow q$
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

命题 1.42

$\{|\}$，$\{\downarrow\}$ 是连接符的完备集 $\Diamond$

证

只需证 $\{\sim, \wedge\}$ 可被 $\downarrow$ 表示，$\{\sim, \vee\}$ 可被 $|$ 表示

(1) $(\sim p)$ 与 $(\sim(p \vee p))$ 和 $(\sim(p \wedge p))$ 等价，

即 $(\sim p)$ 与 $(p \downarrow p)$ 和 $(p \mid p)$ 等价

(2) $(p \wedge q)$ 与 $(\sim((\sim p) \vee (\sim q)))$ 等价，

即 $(p \wedge q)$ 与 $((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$ 等价

(3) $(p \vee q)$ 与 $(\sim((\sim p) \wedge (\sim q)))$ 等价，

即 $(p \vee q)$ 与 $((p \mid p) \mid (q \mid q))$ 等价 $\square$

例 1.43

求与 $p\to q$ 等价的仅含有 $\downarrow$ 的命题形式

$p\to q$ 与 $\sim(p\wedge \sim q)$ 等价，用替换规则可得

$p\to q$ 与 $\sim(p\wedge(q\downarrow q))$ 等价

$p\to q$ 与 $((p\downarrow p)\downarrow((q\downarrow q)\downarrow(q\downarrow q)))\downarrow((p\downarrow p)\downarrow((q\downarrow q)\downarrow(q\downarrow q)))$ 等价

连接符完备集只含一个连接符，命题形式的表达比较长且复杂（不易读）

注

- 理论上，可定义其它逻辑连接符，每个真值表都可定义一个连接符，但它们可能缺乏直观意义
- 应用上，根据需要定义的各种连接符通常具有某种应用的直观意义

应用中，还可定义任意多个连接符，以及其它连接符的完备集

定义 1.44 (定义连接符)

定义逻辑连接符 $\oplus$ （异或 （XOR，eXclusive OR）） 如下

$$\mathscr{A} \oplus \mathscr{B} = ((\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \wedge ((\sim \mathscr{A}) \vee (\sim \mathscr{B})))$$

对应的真值表为

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

注

若以二进制运算，异或给出的是以两个输入的以 2 为模的和

$p \oplus q = p + q(mod2)$

- 命题和连接符
- 真值函数和真值表
- 操作和替换规则
- 范式
- 连接符的完备集
- 推理及有效性

推理及有效性

推理

推理是从一些判断推出另一个判断的思维过程，推出的判断称为结论（conclusion），用于推出结论的那些判断称为前提（premise）

注

逻辑中，关注推理的形式结构而不是命题的具体意义

演绎推理

演绎推理是从一些基本前提出发（公理）通过一定的推理规则推出结论的过程，所可能推出的结论是不可废除的

注

- 还有其它推理方式，如归纳推理，所可能推出的结论是可废除的
- 数学是演绎的

定义 1.45 (推理形式)

推理形式（亦称形式推理）是命题形式的一个有限序列，最后一个命题形式是结论，其它的命题形式为前提

$$p \to q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

一个有效（valid）的推理形式应确保在前提真值为 T 时，结论的真值也为 T

定义 1.46

推理形式

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n; \quad \therefore \mathscr{A}$$

是无效的，若对上述形式中出现的命题变元，至少存在一组真值指派使得 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n$ 的真值为 T 而 $\mathscr{A}$ 的真值为 F；否则，就是有效的 $\Diamond$

注

- 判断一个推理形式是否有效可采用构造真值表的方法进行验证
- 对真值表较复杂的情形，采用如下方法
  1. 找出使得 $\mathscr{A}$ 的真值为 F 的命题变元的真值指派
  2. 验证在这些真值指派下，$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n$ 的真值是否都为 T，若为 T，则此推理形式无效；否则，此推理形式有效

例 1.47

判断推理形式 $p \to q, \sim q \to r, r; \quad \therefore p$ 是否有效

$(p$	$\to$	$q)$	$((\sim$	q	$\to$	$r)$	r	p
T	T	T	F	T	T	T	T	T^*
T	T	T	F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T	T	F^*
F	T	T	F	T	T	F	F	F
F	T	F	T	F	T	T	T	F^*
F	T	F	T	F	F	F	F	F

考察标有 $*$ 的行，可判断此推理形式无效

例 1.48

判断推理形式

$$\sim p_1 \vee p_2, p_1 \to p_3 \wedge p_4, p_4 \to p_2; \quad \therefore p_2 \vee p_3$$

是否有效

试验证无效性：若 $p_2 \vee p_3$ 真值为 F，则 p_2 和 p_3 的真值指派都为 F，这样，要使 $((\sim p_1) \vee p_2)$、 $(p_4 \to p_2)$ 的真值为 T，需 p_1 和 p_4 的真值指派都为 F，由此， $(p_1 \to (p_3 \wedge p_4))$、$(p_4 \to p_2)$ 的真值都为 T

例 1.49

判断推理形式

$$p_1 \to p_2 \wedge p_3, p_2; \quad \therefore (p_1 \to p_3)$$

是否有效

若 $p_1 \to p_3$ 真值为 F，则对应的 p_1 和 p_3 的真值指派分别为 T 和 F，这样，$p_1 \to (p_2 \wedge p_3)$ 的真值不可能为 T，因此，该推理形式是有效的

有效推理形式

(1) 分离规则或三段论（Modus Ponens, MP）
若 $\mathscr{A}, \mathscr{A} \to \mathscr{B}$，则 $\mathscr{B}$

(2) 逆分离规则（Modus Tollens, MT）
若 $\sim\mathscr{B}, \mathscr{A} \to \mathscr{B}$，则 $\sim\mathscr{A}$

(3) 假言三段论（Hypothetical Syllogism，HS）
若 $\mathscr{A} \to \mathscr{B}, \mathscr{B} \to \mathscr{C}$，则 $\mathscr{A} \to \mathscr{C}$

(4) 析取三段论（Disjunctive Syllogism，DS）
若 $\sim\mathscr{A}, \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$，则 $\mathscr{B}$

(5) 归谬法（Reductio ad Absurdum）
若 $\mathscr{A} \to \sim\mathscr{A}$，则 $\sim\mathscr{A}$
若 $\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \wedge \sim\mathscr{B})$，则 $\sim\mathscr{A}$

(6) 引入规则
若 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$，则 $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$
若 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$，则 $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$

(7) 消去规则
若 $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$，则 $\mathscr{A}$
若 $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$，则 $\mathscr{B}$

命题 1.50 (有效推理与逻辑隐含的关系)

推理形式

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n; \quad \therefore \mathscr{A}$$

是有效的，当且仅当

$$(\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A}$$

是重言式 $\diamondsuit$

证

假定 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n; \therefore \mathscr{A}$ 是有效的，而 $(\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n) \rightarrow \mathscr{A}$ 不是重言式，则对上述形式中出现的变元，存在一组真值指派，使得 $\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n$ 的真值为 T，而 $\mathscr{A}$ 的真值为 F;

$\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n$ 的真值为 T 意味着 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$，$\cdots$，$\mathscr{A}_n$ 的真值都为 T，这与 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n; \therefore \mathscr{A}$ 是有效的相矛盾反之，类似 □

注

反证法（或归谬法，reductio and absurdum）的实质：借助于一个有效的推理形式进行演绎推理，若结论为假，则至少有一个前提也为假

定义 1.51 (模型)

对任何命题形式 $\mathscr{A}$，若存在一个真值指派 v 使 $\mathscr{A}$ 取值 T（即 $\mathscr{A}$ 是可满足的），则 v 称为 $\mathscr{A}$ 的一个模型 (model)，亦称 v 满足 $\mathscr{A}$，记 $v \models \mathscr{A}$
令 Γ 是一个命题形式集， v 为一个真值指派，若对所有 $\mathscr{A} \in \Gamma$，$v \models \mathscr{A}$，，则 v 是 Γ 的一个模型，简记 $v \models \Gamma$ ◇

定义 1.52 (有效)

对任何命题形式 $\mathscr{A}$，若任一真值指派 v 都是 $\mathscr{A}$ 的模型，称 $\mathscr{A}$ 为有效 (valid)，记 $\models \mathscr{A}$ ◇

注

- 在 PL 中，若 $\mathscr{A}$ 是重言式，则对任一真值指派 v 都满足 $\mathscr{A}$，即重言式是 $\mathscr{A}$ 是有效的
- 集不是必要的，$\Gamma = \{\mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n\}$ 亦可写成
$$\Gamma = \mathscr{A}_1, \cdots, \mathscr{A}_n = \{\mathscr{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n\} = \mathscr{A}_1 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n$$
这样，公式集 Γ 亦可看成一个公式，有时用公式集表述为方便起见

定义 1.53 (蕴涵关系)

令 $\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$ 是命题形式，$\mathscr{A}$ 蕴涵（entail）$\mathscr{B}$，记 $\mathscr{A} \models_L \mathscr{B}$（简记 $\mathscr{A} \models \mathscr{B}$），当且仅当对任一真值指派 v，若 $v \models \mathscr{A}$ 则 $v \models \mathscr{B}$，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的（逻辑）结论

亦即，$\mathscr{A} \models \mathscr{B}$ 当且仅当 $\mathscr{A}$ 的模型也是 $\mathscr{B}$ 的模型

令 Γ 是一个命题形式集，$\mathscr{B}$ 是一个命题形式，则 $\Gamma \models \mathscr{B}$，当且仅当对任一真值指派 v，若 $v \models \Gamma$ 则 $v \models \mathscr{B}$，即 Γ 蕴涵 $\mathscr{B}$，$\mathscr{B}$ 是 Γ 的一个结论 ◇

例 1.54

(1) $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \models \mathscr{B}$

(2) $\mathscr{A}, \mathscr{A} \to \mathscr{B} \models \mathscr{B}$

注

- 蕴涵与逻辑隐含概念上略有区别：蕴涵（关系）是基于语义的推理（关系），逻辑隐含是重言式，但两者是等价的（见下页）

命题 1.55

推理形式

$$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n; \quad \therefore \mathscr{A}$$

是有效的，当且仅当

$$(\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n) \to \mathscr{A}$$

是重言式，当且仅当

$$\mathscr{A}_1 \wedge \mathscr{A}_2 \wedge \cdots \wedge \mathscr{A}_n \models \mathscr{A}$$

◇

证

易证（练习） □

命题逻辑的基础作用 *

- PL 是一阶逻辑的基础
- PL 具有独立价值，其 SAT 问题是解决 NP 问题的基础
- PL 应用到代数是 Bool 代数，应用到电路是数字逻辑电路（集成电路）
- PL 对应关系数据库