

# 数理逻辑

讲义，第 6.3 版，2024 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨

`linzuoquan@pku.edu.cn`

## 2 命题逻辑：语法

### 2.1 形式系统

### 2.2 完全性定理

- 形式系统

# 形式系统

## 回顾

$\Gamma \models \mathcal{A}$

- 如何从稻草堆中找出针？
- $\models$  保证一致性？

## (逻辑) 演算

**形式** (演绎) 系统 (符号演算, calculus) 指使用符号, 并且有关符号的一切行为和性质完全由给定的规则集来确定, 而不依赖于符号特定的意义和具体的性质

形式系统  $L$  是 **命题 (逻辑) 演算**

PL 在命题语言  $\mathcal{L}_0$  基础上形式化演绎推理 (证明)

## 形式系统

描述一个形式系统，需要

- 形式语言：对命题演算形式即  $\mathcal{L}_0$ 
  - (1) 一个字符 (symbol) 表；
  - (2) 一个由字符组成的有限字符串（称之（合式）公式，well-formed formulas，简写 wf(s) 或 wff(s)）集
- 公理 (axioms)：规定一组合式公式
- 有限个演绎（推理）规则 (rule) 集：这些规则把一个合式公式  $\mathscr{A}$  作为某些合式公式  $\mathscr{A}_1, \dots, \mathscr{A}_n$  的直接后承 (consequence) 而推出

## 定义 2.1 (命题语言 $\mathcal{L}_0$ )

$\mathcal{L}_0$  组成如下

- ◇ 一个 (能枚举无穷的) 字符 (符号) 集  
 $\sim, \rightarrow, (, ), p_1, p_2, p_3, \dots$
- ◇ 一个 **合式公式** (简称**公式**, well-formed formulas (wfs)) 集, 归纳定义如下
  - (1) 对每个  $i \geq 1$ ,  $p_i$  是公式
  - (2) 若  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  都是公式, 则  $(\sim \mathcal{A})$  和  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$  也是公式
  - (3) 所有公式都由 (1) 和 (2) 生成



## 注

- 命题 (如语句中名词) 可分使用 (如 “这是北京”) 和提及 (如 “‘北京’ 是由两个字组成”), 提及用引号, 这样, 定义 2.1 (1) 应表述: 对每个  $i \geq 1$ , ‘ $p_i$ ’ 是公式。为简便计, 省略提及的引号
- $p_1, p_2, p_3, \dots$  称为**命题变元** (简称变元), 可能无穷, 因有限变元不足于组成任意长的公式, 但只需能枚举 (可列、可数)
- 技术性符号: “(”, “,”, “)”, 可引入其它技术性符号, 如 “...”; 技术性符号不是必要的

## 元语言

当一种语言可用来谈论另一种语言时，前者将后者作为**对象语言**，前者是后者的**元语言**

例如，自然语言（汉语）是对象语言  $\mathcal{L}_0$  的元语言  
类似地，可有**元元语言**等

例如，我们用汉语讲一本用英语写的学习拉丁文的书  
两种语言可能互为对象语言和元语言

## 注

- 定义 2.1:  $\mathscr{A}$  等原不是对象语言  $\mathcal{L}_0$  中字符集（变元  $p_i$ ）中符号， $\mathscr{A}$  其实是元语言中记号。公式可加引号如  $\lceil (\sim \mathscr{A}) \rceil$  表示，称**准引用**（Quine 引号），代表语言表达式的缩写（公式最终能枚举还原到  $\mathcal{L}_0$  中字符），为简便计，省略了技术性引号，把  $\mathscr{A}$  等看成类似对象符号使用
- 自然语言表达能力丰富可作为自身的元语言，如自指

## 定义 2.2 (形式系统 $L$ )

**命题演算**形式系统  $L$ : 在  $\mathcal{L}_0$  上, 对任意公式  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ , 规定如下

- ◇ 一组公理: 通过三个**公理模式** (schema) 来刻画, 对任何公式  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ , 下列公式是  $L$  的公理

(L1)  $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$  (后件确定)

(L2)  $((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})))$  (隐含分配)

(L3)  $((\neg \mathcal{A}) \rightarrow (\neg \mathcal{B})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$  (前后换位)

- ◇ 演绎规则: **分离规则** MP

(R) 若  $\mathcal{A}$ ,  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ , 则 (推出)  $\mathcal{B}$

即  $\mathcal{B}$  是  $\mathcal{A}$  和  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$  的直接后承



## 注 (公理模式)

记  $\mathcal{A}_{p_1, p_2, \dots, p_n / \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n}$  表示对公式  $\mathcal{A}$  中变元  $p_i$  分别用公式  $\mathcal{A}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 替换 (任意次出现) 得到的公式

### 替换规则

若  $\mathcal{A}$ , 且  $p_1, p_2, \dots, p_n$  为变元, 则  $\mathcal{A}_{p_1, p_2, \dots, p_n / \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n}$

若增加替换规则, 则不需使用公理模式, 即 (L1-3) 中公式可写成变元

## 注

- 公式对应命题形式
- 连接符  $\{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$  不在  $\mathcal{L}_0$  中, 由于  $\{\sim, \rightarrow\}$  是一个连接符的完备集, 因此  $\{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$  可作为定义缩写引入, 包含  $\{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$  的公式可由  $L$  的等值式表达
- 公理是有效的命题形式, 可有不同的公理系统, 不同的连接符完备集有不同的公理

## 公理化方法

- 形式系统  $L$  是一个公理系统
  - 公理是没有经过证明，但被当作不证自明的命题
  - 其真实性被视为理所当然的，当做演绎起点（证明的因果关系不能无限地追溯而需止于无需证明的公理）
  - 通常很简单，且符合直觉
- 公理系统是一种证明论（proof theory），证明论还有其它系统（等价于公理系统）
- Euclid（平面）几何公理是第一个公理系统，非欧几何是另一个公理系统
- Hilbert 首先给出 Euclid 几何的形式系统（完全的几何公理系统）

## 几何公理系统

### • Euclid 几何公设

- ① 一条直线段可以联接两个点
- ② 一条直线上任何一条直线段可以无限延伸
- ③ 给定一条直线段，可以以一个端点为圆心，以此线段为半径做一个圆
- ④ 一切直角都彼此相等
- ⑤ 如果两条直线与第三条直线相交时，在第三条直线的某一侧三条线所夹的内角之和小于两个直角的和，则那两条直线沿着这一侧延伸足够长之后必然相交

— 给定任一直线和不在直线上的一点，存在有一条，且仅仅存在一条通过那个点，且永不与前一条直线相交的直线，无论两直线延伸多远

## 几何公理系统（续）

- 非 Euclid 几何：第五公设（平行公设）
  - 若断言没有这样的直线存在，则是椭圆几何
  - 若断言至少有两条这种直线存在，则是双曲几何

- 1823 年，Bolyai 和 Lobachevskii 独立发现

论证：若你设定它的反面，然后以这样一条公设作为你的第五公设开始推演几何学，肯定不久之后你会制造出矛盾。因为没有任何数学系统能支持矛盾，你就表明了你自己的那个第五公设是不可靠的，于是表明了 Euclid 的第五公设是可靠的

## 注

- 第五条公设是**不可判定**的
- 绝对几何学的四条公设没有固定住“点”和“线”这些术语的意义，从而为这些概念具有不同外延留下了余地。两千年来，使用先入为主的词“点”和“线”则使人相信那些词必须是单值的，只能有一个意义

## 定义 2.3 (证明)

形式系统  $L$  中的一个 (形式) **证明** (proof) 是指一个公式序列  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ , 使得对每个  $i (1 \leq i \leq n)$ ,  $\mathcal{A}_i$  或是  $L$  中的一个公理, 或可由此序列中位于前面的两个公式  $\mathcal{A}_j$  和  $\mathcal{A}_k$  ( $j < i, k < i$ ), 作为应用分离规则 MP 的直接后承而得, 称为在  $L$  中  $\mathcal{A}_n$  的一个证明,  $\mathcal{A}_n$  称为  $L$  的一条**定理** (theorem), 亦称  $\mathcal{A}_n$  **可证** ◇

## 注

- (1)  $\mathcal{A}_i$  若由  $\mathcal{A}_j$  和  $\mathcal{A}_k$  作为应用 MP 的后承而得, 则  $\mathcal{A}_j$  和  $\mathcal{A}_k$  必是形如  $\mathcal{B}$  和  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}_i$
- (2) 若  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  是  $L$  中的一个证明, 则对  $k < n$ ,  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  也是  $L$  中的一个证明, 因此  $\mathcal{A}_k$  也是  $L$  中的一条定理 (可作为**引理**);
- (3)  $L$  中的公理也是  $L$  中的定理, 它们在  $L$  中的证明是只含有一项的序列
- (4) **不可证性**: 若不存在一个公式序列  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ , 使得  $\mathcal{A}_n$  可证

## 例 2.4

以下公式系列是一个  $L$  中的证明

$$(1) (p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)) \quad (L1)$$

$$(2) ((p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_1))) \quad (L2)$$

$$(3) ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_1)) \quad (1)(2)MP$$

$((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_1))$  是一个  $L$  的定理

## 注

以上证明形式：左边是序号，中间是证明，右边是理由

## 定义 2.5

令  $\Gamma$  是  $L$  中的公式集。 $L$  中的公式序列  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  是从  $\Gamma$  的一个演绎, 若对每个  $i (1 \leq i \leq n)$ , 下列之一成立:

- (1)  $\mathcal{A}_i$  是  $L$  的公理;
- (2)  $\mathcal{A}_i$  属于  $\Gamma$  ( $A_i \in \Gamma$ );
- (3)  $\mathcal{A}_i$  可由此序列中位于前面的两个公式  $\mathcal{A}_j$  和  $\mathcal{A}_k$  ( $j < i, k < i$ ), 作为应用 MP 的直接后承而得

$\mathcal{A}_n$  称为从  $\Gamma$  可演绎的, 或称为  $L$  中  $\Gamma$  的一个后承, 若公式  $\mathcal{A}$  是  $\Gamma$  的某个演绎的最后一项, 亦称  $\Gamma$  产生了 (推出)  $\mathcal{A}$ , 记作  $\Gamma \vdash_L \mathcal{A}$  (简记  $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ )



## 注

证明或演绎的序列中每一步  $\mathcal{A}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) 都有正当理由 (justification, 或称依据), 应加以说明

## 记号

- 由于  $L$  中的一条定理是从空集可演绎的，若  $\mathscr{A}$  是  $L$  中的一条定理，可记作  $\emptyset \vdash_L \mathscr{A}$ ，简记  $\vdash_L \mathscr{A}$  或  $\vdash \mathscr{A}$
- 记  $\Gamma \nvdash \mathscr{A}$  表  $\mathscr{A}$  不可从  $\Gamma$  演绎， $\nvdash \mathscr{A}$  表  $\mathscr{A}$  不是定理（不可证）

## 注（演绎逻辑）

- $L$  中的证明是从公理出发的一个演绎
- 演绎逻辑意味所有（无穷）结论（定理）都蕴藏在前提（公理）中，演绎过程只是把结论找出来，某种意义上，演绎并不发现新（未知）知识  
——如数学，找出定理也是很有意义的

## 元定理

$\vdash$  是元语言记号

**元定理**意指关于（对象语言）形式系统的结果，如“命题”、“ $\vdash_L$ ”等

## 注

**定理**（定义 2.3）与数学语言中定理的区别：数学中定理是有关某种事实的陈述为（语义上）**真理**，数学中对定理（真理）的证明是非形式化的（不严格）；定义 2.3 的证明指形式（化）证明，所得为定理（严格）

## 例 2.6

在  $L$  中构造  $\{\mathcal{A}, (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))\} \vdash_L (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$  的一个演绎, 其中  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  是  $L$  中的任何公式

- |   |          |
|---|----------|
| (1) $\mathcal{A}$   | 假设       |
| (2) $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$   | 假设       |
| (3) $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$   | (L1)     |
| (4) $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$   | (1)(3)MP |
| (5) $((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})))$ | (L2)     |
| (6) $((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))$   | (2)(5)MP |
| (7) $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$   | (4)(6)MP |

## 注

- 一个公式集，写如  $\{A, (B \rightarrow (A \rightarrow C))\}$ ，或  $A, (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
- 在  $L$  中证明一个公式是定理的方法是构造证明的一个公式序列。在一定程度上这种方法比较冗长
- 在证明中允许插入前面已经在  $L$  中证明过的公式（作为引理），可使定理证明较为容易
- 使用某些一般的元定理，其中有些具有推理规则的效果
- 构造  $L$  中定理的证明是基本的命题演算能力，必须写清楚证明步骤的理由

## 斜形证明

(1)  $\mathcal{A}$

(2)  $(\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$

(3)  $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$

(4)  $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$  (1)(3)MP

(5)  $((\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})))$

(6)  $((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))$  (2)(5)MP

(7)  $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$  (4)(6)MP

斜形证明是形式证明的一种较方便（层次）写法

$$(1) \mathcal{A}_1$$

$$(2) \mathcal{A}_2$$

$$(3) \mathcal{A}_3$$

$$(4) \quad \mathcal{B}_1$$

$$(5) \quad \mathcal{B}_2$$

$$(6) \quad \mathcal{C}_1$$

$$(7) \mathcal{D}$$

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \vdash \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2; \quad \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \vdash \mathcal{C}_1$$

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2; \mathcal{C}_1 \vdash \mathcal{D}$$

### 例 2.7

对 ( $L$  中) 任意公式  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ,

(a)  $\vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

(b)  $\vdash \sim \mathcal{B} \rightarrow \cdot \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$

例 2.7 (a)

- (1)  $\mathcal{A} \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A})$   
 $\rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}))$  (L2)
- (2)  $\mathcal{A} \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A})$  (L1)
- (3)  $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$  (1)(2)MP
- (4)  $\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$  (L1)
- (5)  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  (3)(4)MP

## 例 2.7 (b)

$$(1) \quad \sim B \rightarrow \cdot \sim A \rightarrow \sim B$$

$$(2) \quad \sim A \rightarrow \sim B \rightarrow \cdot B \rightarrow A$$

$$(3) \quad (\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A) \rightarrow \cdot \sim B \rightarrow ((\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A))$$

$$(4) \quad \sim B \rightarrow ((\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \quad (2)(3)\text{MP}$$

$$(5) \quad \sim B \rightarrow ((\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow \cdot$$

$$(\sim B \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim B)) \rightarrow (\sim B \rightarrow (B \rightarrow A))$$

$$(6) \quad \sim B \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim B) \rightarrow \cdot \sim B \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (4)(5)\text{MP}$$

$$(7) \quad \sim B \rightarrow \cdot B \rightarrow A \quad (1)(6)\text{MP}$$

## 命题 2.8 (演绎定理)

若  $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L B$ , 则  $\Gamma \vdash_L (A \rightarrow B)$ , 其中  $A$  和  $B$  都是  $L$  中的公式,  $\Gamma$  是  $L$  中的公式集 (可为空) ◇

证

(结构归纳) 对从  $\Gamma \cup \{A\}$  到  $B$  的演绎序列中公式的数目做归纳  
假定这个序列只有一个公式, 则此公式就是  $B$

1.  $B$  是公理, 则

- |     |                                     |          |
|-----|-------------------------------------|----------|
| (1) | $B$                                 | 公理       |
| (2) | $(B \rightarrow (A \rightarrow B))$ | (L1)     |
| (3) | $(A \rightarrow B)$                 | (1)(2)MP |

为从  $\Gamma$  到  $(A \rightarrow B)$  的一个演绎, 即  $\Gamma \vdash_L (A \rightarrow B)$

2.  $B$  属于  $\Gamma$ , 则

- |     |                                     |              |
|-----|-------------------------------------|--------------|
| (1) | $B$                                 | $\Gamma$ 的成员 |
| (2) | $(B \rightarrow (A \rightarrow B))$ | (L1)         |
| (3) | $(A \rightarrow B)$                 | (1)(2)MP     |

## 证 (续)

3.  $\mathcal{B}$  就是  $\mathcal{A}$ , 则

- (1)  $(\mathcal{A} \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}))$   
 $\rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}))$  (L2)
- (2)  $(\mathcal{A} \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}))$  (L1)
- (3)  $((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}))$  (1)(2)MP
- (4)  $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}))$  (L1)
- (5)  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$  (3)(4)MP

为  $L$  中的一个证明, 即  $\vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$ , 亦即由  $\Gamma$  到  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$  的一个演绎,  $\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$

## 证 (续)

设对从  $\Gamma \cup \{A\}$  到  $C$  的演绎序列长度小于  $n$  ( $n > 1$ ) 的所有公式  $C$ , 要证明的结论都成立, 考虑从  $\Gamma \cup \{A\}$  到  $B$  的演绎序列长度为  $n$ , 则

1.  $B$  是公理
2.  $B$  属于  $\Gamma$
3.  $B$  就是  $A$

这三种情况与前面类似

证 (续)

4.  $\mathcal{B}$  由演绎中较前两个公式应用 MP 而得, 则这两个公式必为  $\mathcal{C}$  和  $(\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B})$  的形式, 就有

$$\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})$$

和

$$\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}))$$

证 (续)

不妨设

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots \\ \dots \\ (k) (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \end{array} \right\} \text{为从 } \Gamma \text{ 到 } (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \text{ 的演绎,}$$

$$\left. \begin{array}{l} (k+1) \dots \\ \dots \\ (l) (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B})) \end{array} \right\} \text{为从 } \Gamma \text{ 到 } (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B})) \text{ 的演绎,}$$

证 (续)

$$\begin{aligned} (l+1) \quad & (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B})) \rightarrow \\ & ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})) \quad (\text{L2}) \end{aligned}$$

$$(l+2) \quad (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \quad (l)(l+1)\text{MP}$$

$$(l+3) \quad (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \quad (k)(l+2)\text{MP}$$

从 (1) 到  $(l+3)$  为从  $\Gamma$  到  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$  的一个演绎,

故  $\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$



## 命题 2.9 (演绎定理的逆)

若  $\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ , 则  $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_L \mathcal{B}$ , 其中  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  都是  $L$  中的公式,  $\Gamma$  是  $L$  中的公式集 (可为空) ◇

证

若  $\Gamma \vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ , 则存在从  $\Gamma$  到  $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$  的演绎, 不妨设

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad \dots \\ \dots \\ (k) \quad (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \end{array} \right\} \text{ 为从 } \Gamma \text{ 到 } (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \text{ 的演绎,}$$

$(k+1) \quad \mathcal{A} \qquad \qquad \Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \text{ 的成员}$

$(k+2) \quad \mathcal{B} \qquad \qquad (k)(k+1)\text{MP}$

为从  $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\}$  到  $\mathcal{B}$  的演绎, 故  $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\} \vdash_L \mathcal{B}$

### 推论 2.10 (演绎定理)

$\Gamma \cup \{A\} \vdash_L B$ , 当且仅当  $\Gamma \vdash_L A \rightarrow B$



### 注

演绎 定理是一个关键的元定理, 可在证明中应用, 使得证明变得容易

## 推论 2.11

对任何公式  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ , 有

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$$



证

(1)	$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$	
(2)	$\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$	
(3)		$\mathcal{A}$
(4)		$\mathcal{B}$
(5)	$\mathcal{C}$	
		(1)(3)MP
		(2)(4)MP

则  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{C}$ , 由演绎定理知

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$$



注

$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  即假言三段论 HS, 可作为一条新的推理规则来使用  
亦可得

$$\vdash_L (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$$

## 命题 2.12

对任何公式  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

$$(a) \vdash \sim \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \cdot \mathcal{A}$$

$$(a') \sim \mathcal{A}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$$

$$(b) \vdash \sim \mathcal{A} \rightarrow \cdot \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

$$(b') \vdash \sim \sim \mathcal{A} \rightarrow \cdot \sim \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

$$(b'') \sim \mathcal{A}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$$



## 注

(a) 和 (b) 略有不同，证明过程和作为引理使用亦不同

(a)

$$(1) \sim A \rightarrow A$$

$$(2) \sim A \rightarrow \cdot \sim \sim (\sim A \rightarrow A) \rightarrow \sim A$$

$$(3) \sim \sim (\sim A \rightarrow A) \rightarrow \sim A \rightarrow \cdot A \rightarrow \sim (\sim A \rightarrow A)$$

$$(4) \quad \sim A \rightarrow \cdot A \rightarrow \sim (\sim A \rightarrow A) \quad (2)(3)HS$$

$$(5) \quad \sim A \rightarrow (A \rightarrow \sim (\sim A \rightarrow A)) \rightarrow \cdot$$

$$(\sim A \rightarrow A) \rightarrow (\sim A \rightarrow \sim (\sim A \rightarrow A))$$

$$(6) \quad \sim A \rightarrow A \rightarrow \cdot \sim A \rightarrow \sim (\sim A \rightarrow A) \quad (4)(5)MP$$

$$(7) \quad \sim A \rightarrow \cdot \sim (\sim A \rightarrow A) \quad (1)(6)MP$$

$$(8) \quad \sim A \rightarrow \sim (\sim A \rightarrow A) \rightarrow \cdot$$

$$(\sim A \rightarrow A) \rightarrow A$$

$$(9) \quad \sim A \rightarrow A \rightarrow \cdot A \quad (7)(8)MP$$

$$(10) A \quad (1)(9)MP$$

即  $\sim A \rightarrow A \vdash A$ ，由演绎定理，亦即  $\vdash \sim A \rightarrow A \rightarrow \cdot A$



证 (续)

(b) (例 2.7 (b), 用 HS)

$$(1) \quad \sim A \rightarrow \cdot \sim B \rightarrow \sim A \quad (L1)$$

$$(2) \quad \sim B \rightarrow \sim A \rightarrow \cdot A \rightarrow B \quad (L3)$$

$$(3) \quad \sim A \rightarrow \cdot A \rightarrow B \quad (1)(2)HS$$



## 简略证明

形式证明中，可省略指明替换、分离 (MP) 和演绎定理 (依据)

例 (例 2.7 / 命题 2.12(b), 用 HS)

$$\vdash \sim A \rightarrow \cdot A \rightarrow B$$

证

- |     |   |             |
|-----|---|-------------|
| (1) | $\sim A \vdash \sim B \rightarrow \sim A$             | (L1)        |
| (2) | $\sim A \vdash A \rightarrow B$                       | (1)(L3)(HS) |
|     | $[ \vdash \sim A \rightarrow \cdot A \rightarrow B ]$ | (2)(演绎定理)   |

最后一行可省略



### 例 2.13

对任何公式  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

$$(a) \vdash \sim \sim \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(a') \sim \sim \mathcal{A} \vdash \mathcal{A}$$

$$(b) \vdash \mathcal{A} \rightarrow \sim \sim \mathcal{A}$$

$$(b') \mathcal{A} \vdash \sim \sim \mathcal{A}$$

$$(c) \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \cdot \sim \mathcal{B} \rightarrow \sim \mathcal{A}$$

证

(a)

$$(1) \quad \sim\sim A \vdash \sim\sim\sim A \rightarrow \sim\sim A \quad (L1)$$

$$(2) \quad \sim\sim\sim A \rightarrow \sim\sim A \vdash \sim A \rightarrow \sim\sim\sim A \quad (L3)$$

$$(3) \quad \sim\sim A \vdash \sim A \rightarrow \sim\sim\sim A \quad (1)(2)(HS)$$

$$(4) \quad \sim\sim A \vdash \sim\sim A \rightarrow A \quad (1)(L3)(HS)$$

(b)

$$(1) \quad \sim\sim\sim A \vdash \sim A \quad (a)(L3)$$



证

(c)

$$(1) \quad \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \sim\sim \mathcal{A} \vdash \mathcal{B} \quad (a)$$

$$(2) \quad \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \sim\sim \mathcal{A} \vdash \sim\sim \mathcal{B} \quad (b)(HS)$$

$$(3) \quad \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \vdash \sim\sim \mathcal{A} \rightarrow \sim\sim \mathcal{B} \quad (L3)(HS)$$



## 其它连接符

其它连接符通过定义（作为缩写）引入

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \equiv \sim(\mathcal{A} \rightarrow \sim \mathcal{B})$$

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \sim \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

$$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \equiv (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$$

### 例 2.7 (b)

$$(b) \quad \vdash \sim \mathcal{B} \rightarrow \cdot \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(b') \quad \vdash \sim \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(b'') \quad \vdash \sim(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}$$

### 注

- 把定义的其它连接符还原为只含  $\sim, \rightarrow$  进行演算
- 依次展开含 5 个连接符的演算

## 例 2.14

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$$

$$(1) \quad \mathcal{A} \rightarrow \sim \sim \mathcal{A}$$

例2.13(a)

$$(2) \quad \sim \sim \mathcal{A} \rightarrow (\sim \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$$

命题2.12(b')

$$(3) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\sim \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$$

(1)(2)(HS)

$$(4) \quad \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$$

(3)定义

## 定义 2.15

- 令  $\Gamma$  是公式集, 若存在某个公式  $\mathcal{A}$ , 使得  $\Gamma \vdash \mathcal{A}$  和  $\Gamma \vdash \sim \mathcal{A}$ , 则称  $\Gamma$  是**不一致**的; 否则,  $\Gamma$  是**一致**的
- 令  $\Gamma$  是公式集, 若一个公式  $\mathcal{A}$ , 使得  $\Gamma \nvdash \mathcal{A}$  和  $\Gamma \nvdash \sim \mathcal{A}$ , 称  $\mathcal{A}$  **独立**于  $\Gamma$
- 令  $\Gamma$  是公式集,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  是任何公式, 若  $\{\mathcal{A}, \sim \mathcal{A}\} \subseteq \Gamma$ , 则  $\Gamma \vdash \mathcal{B}$ , 称为**平凡性** (triviality)
- 令  $\Gamma, \Gamma'$  是公式集,  $\Gamma \subseteq \Gamma'$ ,  $\mathcal{A}$  是任一公式, 若  $\Gamma \vdash \mathcal{A}$  则  $\Gamma' \vdash \mathcal{A}$ , 称为**单调性** (monotonicity)



## 命题 2.16

$L$  具有平凡性和单调性



证

显见 (据定义)



## 命题 2.17

令  $\Gamma$  是公式集,  $\Gamma$  是不一致的当且仅当对任何公式  $\mathscr{A}$ ,  $\Gamma \vdash \mathscr{A}$  ◇

证

显见 (命题 2.12 (b)) □

注

- 不一致性会导致平凡性
- 没有真值指派使不一致的公式集成真 (不一致公式集没有模型)
- 空 (公式) 集是一致的
- 一致性:  $L$  是一致的, 即  $\nVdash_L \mathscr{A}$  或  $\nVdash_L \sim \mathscr{A}$ , 但需要证明。如何证?
- 独立性:  $\mathscr{A}$  独立于  $\Gamma \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\mathscr{A}\}$  和  $\Gamma \cup \{\sim \mathscr{A}\}$  都是一致的
- 一致性和独立性可看成某种关于不可证 ( $\nVdash$ ) 的结果

- 不一致的公式集是没意义的，但平凡性对数学是合理的，因数学的基础是保证一致性

- 平凡性对数学之外则不合理

如，一个银行信息系统若基于（命题）逻辑，平凡性意味由于数据库中一个矛盾记录会导致任何人取任意款

- 平凡性是常见的（局部影响全局）

如，一个操作系统可能由于一个程序出错导致整个系统崩溃（即其它无关的程序都不能运行）

- 单调性亦然

如，人在日常生活中的推理是非单调的

## 定义 2.18

一个 ( $\mathcal{L}_0$  的) 公式集  $\Gamma$  称为**极大一致** (maximally consistent, MC), 若

- $\Gamma$  是一致的
- 不存在另一个一致的公式集  $\Gamma'$  使得  $\Gamma \subset \Gamma'$

令  $\Gamma$  是一个公式集, 对每个  $\Gamma' \subseteq \Gamma$ , 若  $\Gamma'$  是一致的且不存在另一个  $\Gamma'' \subset \Gamma$  使得  $\Gamma' \subset \Gamma''$ , 则  $\Gamma'$  称为  $\Gamma$  的极大一致子集 (MCS) ◇

## 命题 2.19

一个公式集  $\Gamma$  是极大一致的, 当且仅当

- (a)  $\Gamma$  是一致的
- (b) 对任一公式  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A} \in \Gamma$  或  $\sim \mathcal{A} \in \Gamma$  ◇

证

( $\Rightarrow$ ) 设  $\Gamma$  是极大一致的, 则由定义, (a) 即成立

假若  $\mathcal{A} \notin \Gamma$  且  $\sim \mathcal{A} \notin \Gamma$ , 则 (由定义)

$\{\Gamma, \mathcal{A}\}$  与  $\{\Gamma, \sim \mathcal{A}\}$  都是不一致的, 可证 (由演算)

$\Gamma \vdash \sim \mathcal{A}$  与  $\Gamma \vdash \mathcal{A}$

这与 (a) 矛盾, 故有 (b)

( $\Leftarrow$ ) 反之亦然



## 定义 2.20

令  $\Gamma$  为公式集,  $\mathcal{A}$  为任意公式。极大一致推理  $\vdash_{MCS}$  定义如下:

$\Gamma \vdash_{MCS} \mathcal{A}$  当且仅当  $MCS(\Gamma) \vdash \mathcal{A}$



## 问题

MCS 具有有趣的性质

考虑: 极大一致子集 (MCS) 推理是否具平凡性和单调性?

## 证明论 \*

- 公理系统 (Hilbert 型系统)
- 序列演算 (Gentzen 型系统, 自然推理系统)
- 表系统 (Tableaux)
- 归结系统 (Resolution)
- 等等

## 其它公理系统 \*

### 等价的公理系统

$$(L1) \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$$

$$(L2) (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$$

$$(L3) (((\sim \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\sim \mathcal{A}) \rightarrow (\sim \mathcal{B}))) \rightarrow \mathcal{A}$$

$$[(L3)] (((\sim \mathcal{A}) \rightarrow (\sim \mathcal{B})) \rightarrow ((\sim \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{A}$$

规则：MP

(以下公理系统的规则都是 MP)

## 基于 $\sim, \vee$ 的公理系统

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} =_{\text{def}} \sim \mathcal{A} \vee \mathcal{B}$$

$$(L1) \quad (\mathcal{A} \vee \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(L2) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$

$$(L3) \quad (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B} \vee \mathcal{A})$$

$$(L4) \quad (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{C}))$$

## 基于 $\sim, \wedge$ 的公理系统

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} =_{\text{def}} \sim(\mathcal{A} \wedge \sim \mathcal{B})$$

$$(L1) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$$

$$(L2) \quad (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$$

$$(L3) \quad ((\sim \mathcal{A}) \rightarrow (\sim \mathcal{B})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$$

$$(L4) \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(L5) \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$$

$$(L6) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$$

## 其它基于 $\sim, \wedge$ 的公理系统

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} =_{\text{def}} \sim(\mathcal{A} \wedge \sim \mathcal{B})$$

$$(L1) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{A})$$

$$(L2) \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(L3) \quad (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\sim(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \rightarrow (\sim(\mathcal{C} \wedge \mathcal{A})))$$

## 基于 $\sim, \rightarrow, \wedge, \vee$ 的公理系统

$$(L1) \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$$

$$(L2) \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$$

$$(L3) ((\sim \mathcal{A}) \rightarrow (\sim \mathcal{B})) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$$

$$(L4) (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(L5) (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$$

$$(L6) (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$$

$$(L7) \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$

$$(L8) \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$

$$(L9) (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}))$$

## 一条公理的公理系统

基于  $\sim, \rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{(L1)} \quad & (((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\sim \mathcal{C} \rightarrow \sim \mathcal{A})) \rightarrow \sim \mathcal{C}) \rightarrow \sim \mathcal{C}) \\ & \rightarrow ((\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})) \end{aligned}$$

基于  $|$

$$\text{(L1)} \quad (\mathcal{A} | (\mathcal{B} | \mathcal{C}) | \{[(\mathcal{D} | (\mathcal{D} | \mathcal{D})) | [(\mathcal{E} | \mathcal{B}) | ((\mathcal{A} | \mathcal{E}) | (\mathcal{A} | \mathcal{E}))]]\})$$

注

公理系统  $L$  和  $L'$  的等价性：由  $L$  推出  $L'$  的所有公理（即它们有相同的定理集），反之亦然；或由它们的完全性定理得知

## 公理的独立性 \*

### 定义 2.21

一个公理系统的某个公理子集  $Y$  (某条公理) 称为**独立** (independence), 若存在  $Y$  的公式 (该条公理) 不能从不属于  $Y$  的其它公理及规则证明出来

### 命题 2.22

公理 (模式)  $(L1)$ ,  $(L2)$ ,  $(L3)$  都是独立的

## (L1) 是独立的

证

考虑如下 (三值) 真值表

$A$	$\sim A$	$A$	$B$	$A \rightarrow B$
0	1	0	0	0
1	1	1	0	2
2	0	2	0	0
		0	1	2
		1	1	2
		2	1	0
		0	2	2
		1	2	0
		2	2	0

若一个公式  $\mathcal{C}$  总是取值为 0, 称之可选 (select) 的。验证: (L2), (L3) 是可选的, MP 保持可选性, 因此任何由 (L2), (L3) 和 MP 推出的公式都是可选的, 但易见 (L1) (的实例) 不是可选的, 即 (L1) 不能从 (L2), (L3) 和 MP 推出

## 注

- (L2), (L3) 的独立性证明类似, 设计相应的真值表
- 公理的独立性定理使得公理系统 (数学) 最为简洁 (优美)
- 三值真值表可定义三值逻辑 (连接符), 可推广到 (有限或无限) 多值逻辑

# 数理逻辑

讲义，第 6.3 版，2024 年

北京大学 信息与计算科学系

林作铨

`linzuoquan@pku.edu.cn`

## 2 命题逻辑：语法

### 2.1 形式系统

### 2.2 完全性定理

- 形式系统
- 完全性定理

# 完全性定理

## 回顾

### 命题语言 $\mathcal{L}_0$

- 语法

- ◇ 一个能枚举无穷的符号集:  $\sim, \rightarrow, (, ), p_1, p_2, p_3, \dots$
- ◇ 一个公式 (wfs) 集

- 语义

- ◇ 真值赋值, 即命题形式的真值函数 (真值表)

### 在 $\mathcal{L}_0$ 上, 命题演算 (形式系统) $L$

- 语法

- ◇ 证明论:  $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ 
  - 一组公理 (模式) 和推理规则

- 语义

- ◇ 模型论:  $\Gamma \models \mathcal{A}$

## $L$ 的基本性质

- 可靠性 (soundness):  $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Rightarrow \Gamma \models \mathcal{A}$
- 完全性 (completeness):  $\Gamma \vdash \mathcal{A} \Leftarrow \Gamma \models \mathcal{A}$

注

语法与语义之间具有同构关系

### 定义 2.23 (赋值)

$L$  的一个 **赋值** (valuation) 是一个函数  $v$ , 其定义域是  $L$  的公式, 值域是  $\{T, F\}$ , 使得对  $L$  的任意公式  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

$$(1) \quad v(\mathcal{A}) \neq v(\sim \mathcal{A})$$

$$(2) \quad v(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = F \text{ 当且仅当 } v(\mathcal{A}) = T \text{ 且 } v(\mathcal{B}) = F$$



注

$L$  的一个赋值亦即对一个 (任一非特定) 命题语言  $\mathcal{L}_0$  的赋值

## 模型

令  $v$  是  $L$  的一个赋值,  $\mathcal{A}$  是一个公式。若  $v(\mathcal{A}) = T$ , 称  $v$  使  $\mathcal{A}$  成真, 亦称  $v$  满足  $\mathcal{A}$ ,  $v$  是  $\mathcal{A}$  的一个模型, 记为  $v \models_L \mathcal{A}$ , 简记  $v \models \mathcal{A}$

## 定义 2.24 (重言式)

$L$  中的一个公式  $\mathcal{A}$  是重言式, 若对每个赋值  $v$ , 都有  $v(\mathcal{A}) = T$ , 记为  $\models_L \mathcal{A}$ , 简记  $\models \mathcal{A}$



## 注

重言式对于命题语言是不变的: 若  $\mathcal{L}_0$  和  $\mathcal{L}'_0$  是两个命题语言使得  $\mathcal{A}$  既是  $\mathcal{L}_0$  的公式又是  $\mathcal{L}'_0$  的公式, 则  $\mathcal{A}$  是  $\mathcal{L}'_0$  的重言式当且仅当  $\mathcal{A}$  是  $\mathcal{L}_0$  的重言式

## 命题 2.25 (可靠性定理)

$L$  的每个定理都是一个重言式



证

(对构成  $\mathcal{A}$  在  $L$  中证明的公式序列中公式的数目进行归纳)

令  $\mathcal{A}$  是一个定理

- (1) 若  $\mathcal{A}$  的证明仅有一步, 则  $\mathcal{A}$  一定是公理, 易证公理都是重言式
- (2) 设  $\mathcal{A}$  的证明有  $n (n > 1)$  步, 假设  $\mathcal{C}$  的证明少于  $n$  步, 则  $\mathcal{C}$  是重言式。若  $\mathcal{A}$  是公理, 则  $\mathcal{A}$  是重言式; 若  $\mathcal{A}$  是由证明序列中  $\mathcal{A}$  前面的两项公式  $\mathcal{B}$  和  $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$  应用 MP 而得, 由归纳假设可知,  $\mathcal{B}$  和  $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$  都是重言式, 进一步, 由命题 1.21 知,  $\mathcal{A}$  是重言式



注

作为推论, 可靠性定理: 若  $\vdash \mathcal{A}$ , 则  $\models \mathcal{A}$

### 定义 2.26 (扩充)

$L$  的一个**扩充** (extension) 是通过修改或扩大的公理组使得  $L$  的所有定理仍是定理 (可能引入新的定理) 而得的一个形式系统  $\diamond$

### 注

$L$  的一个扩充可能和  $L$  没有公共的公理

### 定义 2.27

$L$  的一个扩充是**一致**的, 若不存在  $L$  的公式  $\mathscr{A}$ , 使得  $\mathscr{A}$  和  $\sim\mathscr{A}$  都是这个扩充的定理 ◇

### 命题 2.28 (一致性定理)

$L$  是一致的 ◇

证

设  $L$  是不一致的, 则存在  $L$  的公式  $\mathscr{A}$ , 使得  $\mathscr{A}$  和  $\sim\mathscr{A}$  都是  $L$  的定理。  
由可靠性定理知,  $\mathscr{A}$  和  $\sim\mathscr{A}$  都是重言式, 这是不可能的 □

注

- $L$  的一致性**是绝对一致性** (即在  $L$  内具有一致性)
- 一致性是数学基础的核心问题, 逻辑之外 (上) 的数学是否具有**一致性**? (Hilbert 规划的核心问题)

## 命题 2.29

$L$  的一个扩充  $L^*$  是一致的, 当且仅当存在一个公式, 它不是  $L^*$  的定理  
◇

证

( $\Rightarrow$ )  $L^*$  是一致的, 则对任意公式  $\mathcal{A}$  和  $\sim\mathcal{A}$ , 二者之一必不是  $L^*$  的定理

( $\Leftarrow$ ) 设  $L^*$  是不一致的, 证明不存在不是  $L^*$  的定理的公式

令  $\mathcal{A}$  是  $L^*$  的任一公式,  $L^*$  是不一致的, 则存在公式  $\mathcal{B}$ , 使得  $\vdash_{L^*}\mathcal{B}$  且  $\vdash_{L^*}\sim\mathcal{B}$ , 由命题 2.12,  $\vdash_L\sim\mathcal{B}\rightarrow(\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{A})$ , 由于  $L^*$  是  $L$  的一个扩充, 因此  $\vdash_{L^*}\sim\mathcal{B}\rightarrow(\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{A})$ , 应用 MP, 得  $\vdash_{L^*}\mathcal{A}$ , 这样, 每个公式都是  $L^*$  的定理

□

注

- 在一个  $L$  的不一致扩充中, 任何公式都是定理, 在经典逻辑和数学中没有任何价值;
- $L$  扩充一致性的充分条件相当弱
- ( $\Leftarrow$ ) 证法体现了换位律, 如  $\vdash(\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{B})\rightarrow(\sim\mathcal{B}\rightarrow\sim\mathcal{A})$  (L3)

## 命题 2.30

令  $L^*$  是  $L$  的一个一致扩充,  $\mathcal{A}$  是  $L$  的一个公式且不是  $L^*$  的定理, 则  $L^{**}$  也是一致的, 这里  $L^{**}$  是  $L$  的一个扩充, 它由  $L^*$  补充  $\sim\mathcal{A}$  为公理而得 ◇

## 证

设若  $L^{**}$  不一致, 则存在公式  $\mathcal{B}$ , 使得  $\vdash_{L^{**}}\mathcal{B}$  且  $\vdash_{L^{**}}\sim\mathcal{B}$ , 如命题 2.29 所证, 可得  $\vdash_{L^{**}}\mathcal{A}$

由于  $L^{**}$  是在  $L^*$  中补充  $\sim\mathcal{A}$  作为公理,  $\vdash_{L^{**}}\mathcal{A}$  即是  $\sim\mathcal{A} \vdash_{L^*}\mathcal{A}$ , 由演绎定理,  $\vdash_{L^*}\sim\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

据命题 2.12,  $\vdash_L(\sim\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ , 所以  $\vdash_{L^*}(\sim\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ , 应用 MP, 可得  $\vdash_{L^*}\mathcal{A}$ , 这和  $\mathcal{A}$  不是  $L^*$  的定理相矛盾 □

### 定义 2.31

$L$  的一个扩充是**完全**的, 若对每个公式  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}$  或  $\sim\mathcal{A}$  是该扩充的定理  
◇

### 注

- 这是认识论意义上的**完全**, 区别于针对  $L$  的**完全性** (定理)
- 一个系统若是完全的, 则任何命题  $\mathcal{A}$  都不独立于该系统 (具有独立性意味该系统不完全)
- $L$  不是完全的  
(如对公式  $p_1$ , 没有  $\vdash_L p_1$  或  $\vdash_L \sim p_1$ )
- 任何  $L$  的不一致扩充是完全的  
(因平凡性)
- 若  $L^c$  是  $L$  的一个一致的完全扩充, 则任何一个  $L$  的进一步的扩充, 只要它的定理类对  $L^c$  的定理类有所扩充, 都将是不一致的  
(这样, 一致完全扩充相当于极大一致的扩充)

## 命题 2.32

令  $L^*$  是  $L$  的一致扩充, 则存在  $L^*$  的一个一致完全扩充



证

令  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$  是  $L$  的所有公式的枚举

构造  $L^*$  的扩充序列  $\mathcal{J}_0, \mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots$  如下

令  $\mathcal{J}_0 = L^*$

若  $\vdash_{\mathcal{J}_0} \mathcal{A}_0$ , 则令  $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_0$ ;

否则把  $\sim \mathcal{A}_0$  作为一个新公理加进  $\mathcal{J}_0$  得到  $\mathcal{J}_1$

一般地, 对  $n \geq 1$ , 从  $\mathcal{J}_{n-1}$  构造  $\mathcal{J}_n$  的方法如下

若  $\vdash_{\mathcal{J}_{n-1}} \mathcal{A}_{n-1}$ , 则  $\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_{n-1}$ ;

否则把  $\sim \mathcal{A}_{n-1}$  作为一个新公理加进  $\mathcal{J}_{n-1}$  得到  $\mathcal{J}_n$

据命题 2.30, 每个  $\mathcal{J}_n$  都是一致的 ( $n \geq 0$ )

定义  $\mathcal{J}$  是  $L$  的扩充:

它把至少在这些  $\mathcal{J}_n$  之一中为公理的一切公式都当作公理

## 证 (续)

断言  $\mathcal{J}$  是一致的

设若不然, 则存在公式  $\mathcal{A}$ , 使得  $\vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{A}$  且  $\vdash_{\mathcal{J}} \sim \mathcal{A}$ 。必然存在  $n$ , 使得出现在  $\mathcal{A}$  和  $\sim \mathcal{A}$  于  $\mathcal{J}$  的证明中的公理都作为  $\mathcal{J}_n$  的公理, 就有  $\vdash_{\mathcal{J}_n} \mathcal{A}$  且  $\vdash_{\mathcal{J}_n} \sim \mathcal{A}$ , 这与  $\mathcal{J}_n$  是一致的相矛盾

断言  $\mathcal{J}$  是完全的

令  $\mathcal{A}$  是  $L$  的一个公式, 则  $\mathcal{A}$  一定在序列  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots$  中出现, 不妨设  $\mathcal{A}$  就是  $\mathcal{A}_k$ , 若  $\vdash_{\mathcal{J}_k} \mathcal{A}_k$ , 则  $\vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{A}_k$ ; 否则,  $\sim \mathcal{A}_k$  是  $\mathcal{J}_{k+1}$  的一条公理, 所以  $\vdash_{\mathcal{J}_{k+1}} \sim \mathcal{A}_k$ , 亦有  $\vdash_{\mathcal{J}} \sim \mathcal{A}_k$ 。总之, 有  $\vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{A}$  或  $\vdash_{\mathcal{J}} \sim \mathcal{A}$ , 即  $\mathcal{J}$  是完全的 □

## 命题 2.33

若  $L^*$  是  $L$  的一个一致扩充, 则存在一个赋值, 使得  $L^*$  的每个定理取值都为  $T$



证

定义  $L$  中公式的赋值  $v$  如下:  $\mathcal{J}$  是  $L^*$  的一致完全扩充 (命题 2.32)

$$v(\mathcal{A}) = T, \text{ 若 } \vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{A};$$

$$v(\mathcal{A}) = F, \text{ 若 } \vdash_{\mathcal{J}} \sim \mathcal{A}$$

因  $\mathcal{J}$  是完全的  $\Rightarrow v$  定义在所有公式上

且  $\mathcal{J}$  是一致的  $\Rightarrow v(\mathcal{A}) \neq v(\sim \mathcal{A})$

## 证 (续)

进一步, 需证  $v(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = F$  当且仅当  $v(\mathcal{A}) = T$  且  $v(\mathcal{B}) = F$

假定  $v(\mathcal{A}) = T$ ,  $v(\mathcal{B}) = F$  但  $v(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = T$ , 则有  $\vdash \mathcal{A}$ ,  
 $\vdash \sim \mathcal{B}$  和  $\vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , 应用 MP 可得  $\vdash \mathcal{B}$ , 这和  $\mathcal{J}$  是一致的相矛盾

反之, 假定  $v(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = F$  但  $v(\mathcal{A}) = F$  (分别  $v(\mathcal{B}) = T$ ), 则有  $\vdash \sim(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$  和  $\vdash \sim \mathcal{A}$  (分别  $\vdash \mathcal{B}$ ), 因有

$$\vdash \sim \mathcal{A} \rightarrow (\sim \mathcal{B} \rightarrow \sim \mathcal{A}) \quad (\text{分别 } \vdash \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}))$$

应用 MP, 得到  $\vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , 这与  $\mathcal{J}$  是一致的相矛盾

故  $v(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = F$  蕴涵  $v(\mathcal{A}) = T$ ,  $v(\mathcal{B}) = F$

这样,  $v$  是一个赋值。令  $\vdash_{L^*} \mathcal{A}$ , 则  $\vdash \mathcal{A}$ , 因此  $v(\mathcal{A}) = T$



## 命题 2.34 (完全性定理)

若  $\mathcal{A}$  是一个公式且是重言式, 则  $\vdash_L \mathcal{A}$



证

令  $\mathcal{A}$  是一个公式且是重言式, 设若  $\mathcal{A}$  不是  $L$  的定理, 据 命题 2.30, 包含  $\sim \mathcal{A}$  作为一条公理的扩充  $L^*$  是一致的。这样, 存在一个赋值  $v$ , 赋予  $L^*$  的每个定理的值为  $T$ , 特别地,  $v(\sim \mathcal{A}) = T$ , 这与  $\mathcal{A}$  是重言式相矛盾 □

注

作为推论, 完全性定理: 若  $\models \mathcal{A}$ , 则  $\vdash \mathcal{A}$

可靠与完全性定理:  $\vdash \mathcal{A}$  当且仅当  $\models \mathcal{A}$

注

设计一个完全的公理系统是不简单的, 在完全性证明中所需的演算能力可作为设计的技术途径之一

### 命题 2.35 (可判定性定理)

$L$  是**可判定**的 (decidable), 即存在一种能行的方法去判定  $L$  中给定的公式是否为定理 ◇

证

欲判定一个公式  $\phi$  是否为  $L$  的定理, 只需把它看作一个命题形式而构造它的真值表, 它是定理当且仅当它是重言式 □

## 命题逻辑的作用

- 逻辑演算（一阶逻辑）是数理逻辑基础，命题逻辑（演算）是一阶逻辑基础
- 命题逻辑虽是可判定的，但判定一个命题公式是否可满足（SAT）问题是难解的，当今最难的计算机科学和数学问题之一
- 命题逻辑对应于布尔代数
- 命题逻辑是（数字）逻辑电路（大规模集成电路）和关系数据库（关系代数）的基础（一定意义上等价）
- 人工神经网络（深度学习）感知机（神经元学习）对应于命题逻辑
- 如搜索引擎（高级搜索）尚不能处理命题逻辑所表达的查询

## 线路模型 \*

- **比特** (bit) 作为信息单位是一个二值 (二进制) 变量, 取值为 1 ( $T$ ) 或 0 ( $F$ )
- 一个线路 (电路) 由导线和**门** (gate) 组成, 每条线路携带一个比特的信息, 门对这些比特进行 (逻辑) 操作
- 对应于 (逻辑) 连接符非、与、或, 与非、或非, 异或分别称为非门、与门、或门、与非门、或非门、异或门  $\Leftarrow$  二进制运算

例: 一个小于  $2^n$  的数  $N$  可写成  $N = \sum_{k=0}^{n-1} a_k 2^k$ ,  $a_k \in \{1, 0\}$   
可等价地写成  $N = a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 a_0$

- 一个**数字设备** (如计算机) 的输入和输出都以 1 和 0 的序列形式

## 注

线路模型  $\Rightarrow$  数字逻辑电路 (由逻辑门组成部件, 如寄存器和加法器等)  
 $\Rightarrow$  集成电路 (IC)  $\Rightarrow$  (数字) 计算机

## 线路计算模型 \*

- 定义复制门 (fanout) 如:  $p \mapsto (p, p)$ , 交换门 (crossover) 如:  $(p, q) \mapsto (q, p)$
- 基本逻辑门: 非门、与门、或门和复制门

## 命题

由基本逻辑门可构造任意 Bool 函数  $f$ :

$$f: \{0, 1\}^n \mapsto \{0, 1\}^m$$

即由基本逻辑门构成逻辑门的通用集

## 证

(梗概)  $m$  个比特所表示的函数等价于  $m$  个单比特函数, 进而可表为析取式 (或门, 类似范式的做法), 注意这里需要用到复制门操作 □

- 与非门和复制门是更小的通用集
- 可证: 线路计算模型 = Turing 机 (计算模型)

## 命题 2.36

令  $\mathcal{B}$  是一个公式,  $p_1, \dots, p_k$  是  $\mathcal{B}$  中出现的所有变元。对一个给定的赋值  $v$ , 若  $v(p_i) = T$  令  $p'_i$  为  $p_i$ , 若  $v(p_i) = F$  令  $p'_i$  为  $\sim p_i$ ;  
 若  $v(\mathcal{B}) = T$  令  $\mathcal{B}'$  为  $\mathcal{B}$ , 若  $v(\mathcal{B}) = F$  令  $\mathcal{B}'$  为  $\sim \mathcal{B}$ 。  
 则  $p'_1, \dots, p'_k \vdash \mathcal{B}'$

证

用以下定理可证

$$\mathcal{B} \rightarrow \sim \sim \mathcal{B}$$

$$\sim \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$$

$$\mathcal{B} \rightarrow (\sim \mathcal{C} \rightarrow \sim (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))$$

$$(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\sim \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C})$$



## 完全性定理证明 (Kalmár 1935)

证

令  $\mathcal{B}$  是一个重言式 (即  $\models \mathcal{B}$ ),  $p_1, \dots, p_k$  是  $\mathcal{B}$  中出现的所有变元。

据命题 2.36,  $p'_1, \dots, p'_k \vdash \mathcal{B}$  (因  $v(\mathcal{B}) = T$ )。

当  $v(p_k) = T$  有  $p'_1, \dots, p'_{k-1}, p_k \vdash \mathcal{B}$ ,

当  $v(p_k) = F$  有  $p'_1, \dots, p'_{k-1}, \sim p_k \vdash \mathcal{B}$ , 据演绎定理,

有  $p'_1, \dots, p'_{k-1} \vdash p_k \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $p'_1, \dots, p'_{k-1} \vdash \sim p_k \rightarrow \mathcal{B}$ 。由重言

式  $(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\sim \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C})$  和 MP, 得  $p'_1, \dots, p'_{k-1} \vdash \mathcal{B}$ , 同理可

消去  $p'_{k-1}$ , 重复  $k$  步终得  $\vdash \mathcal{B}$  □

注

Kalmár 证法直接简单, 但只能证明命题逻辑完全性定理

## 附：直觉主义（命题）逻辑<sup>\*</sup>

$$(I1) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$$

$$(I2) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}))$$

$$(I3) \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}$$

$$(I4) \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$$

$$(I5) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}))$$

$$(I6) \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$

$$(I7) \quad \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$

$$(I8) \quad (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}))$$

$$(I9) \quad (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow ((\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{C}))$$

$$(I10) \quad \perp \rightarrow \mathcal{A}$$

规则：MP

- 与基于  $\sim, \rightarrow, \wedge, \vee$  的 (经典) 公理系统比较, 直觉主义 (命题) 逻辑  $\mathcal{J}$  用 (I10) 取代 (L3), 具有对直觉语义的完全性定理
- $\perp$  是一个命题常元解释为假 (类似地, 可用命题常元  $\top$  解释为真), 否定符可引入

$$(I11) (\mathcal{A} \rightarrow \perp) \rightarrow \sim \mathcal{A}$$

$$(I12) \sim \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \perp)$$

- 排中律  $\mathcal{A} \vee \sim \mathcal{A}$  在  $\mathcal{J}$  中不成立, 即  $\not\vdash_{\mathcal{J}} \mathcal{A} \vee \sim \mathcal{A}$
- 真值不是 (客观) 存在性的, 而是直觉 (作为数学家心智活动) 可构造的
- 直觉主义逻辑是可构造性数学的哲学
- (主流) 数学基于形式主义 (结构主义) 的数学哲学, 但代数几何 Topos 论 (对集范畴) 与直觉主义 (类型论) 直接相关