第四讲：最佳逼近

教师: 胡俊

北京大学数学科学学院

March 22, 2022

目录

Example 1.1

求p，使得$\max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)-p(x)|$ 尽可能小.

目录

E为一个线性空间，在其上定义范数:

1. $\|x\| \geq 0, \ \|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0,$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

$$\left.\begin{aligned} \|f\| &= \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \ f \in C[a,b] \\ \|f\| &= \left(\int_a^b f^2\, dx\right)^{1/2} \\ \|x\| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \end{aligned}\right\} \text{范数例子}$$

如果对任意$f_1, f_2 \in E$, $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$, 条件3 成等式，既有

$$\|f_1 + f_2\| = \|f_1\| + \|f_2\|$$

时，必隐含着

$$f_1 = \alpha f_2$$

成立，其中α为正常数. 此时，称此范数为严格凸的. 相应地，称E为狭义赋范空间.

对于$\mathbb{R}^n$, 下面的范数不是严格凸的:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

例如

$$x = (0, 1), y = (1, 3),$$

$$\|x\|_\infty = 1, \|y\|_\infty = 3,$$

$$\|x + y\|_\infty = 4 = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty,$$

但是, 对任意$\alpha \in \mathbb{R}^n$,

$$x \neq \alpha y.$$

设G是赋范线性空间E上的一个子空间，对$\forall f \in E$，f到G的距离定义为

$$\operatorname{dist}(f, G) = \inf_{g \in G} \|f - g\|.$$

若存在$g^* \in G$, 使得

$$\|f - g^*\| = \operatorname{dist}(f, G),$$

则称g^*是G中f的在范数$\|\cdot\|$下的**最佳逼近**.

最佳逼近存在性定理

定理： 设G是赋范线性空间E的有限维子空间，则对任意$f \in E$，它在G中至少存在一个最佳逼近$g^* \in G$.

证明： 设φ_i, $i = 1, \cdots, n$为G的一组基, 定义如下从$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$的函数:

$$g(a_1, \cdots, a_n) = \|\Phi\| = \|\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i\|, \Phi \in G,$$

$$h(a_1, \cdots, a_n) = \|f - \Phi\| = \|f - \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i\|, f \in E, \Phi \in G,$$

其中a_i, $i = 1, \cdots, n$, 为实数.

对任意$a=(a_1,\cdots,a_n)^T$和$b=(b_1,\cdots,b_n)^T$, 有

$$
\begin{aligned}
|h(a)-h(b)| &= |h(a_1,\cdots,a_n)-h(b_1,\cdots,b_n)| \\
&= \left|\|f-\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i\| - \|f-\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i\|\right| \\
&\le \|\sum_{i=1}^n (a_i-b_i)\varphi_i\| \\
&\le \sum_{i=1}^n |a_i-b_i|\|\varphi_i\| \\
&\le \max_{1\le i\le n}|a_i-b_i|\sum_{i=1}^n \|\varphi_i\|,
\end{aligned}
$$

因此，h是$\mathbb{R}^n$上的连续函数. 同理g也是$\mathbb{R}^n$上的连续函数.

因为

$$
\begin{aligned}
h(a) = h(a_1, \cdots, a_n) &\geq \|\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i\| - \|f\| \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}} \varphi_i \right\| - \|f\| \\
&\geq \mu \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} - \|f\|,
\end{aligned}
$$

其中μ是$g(a)$在$\mathbb{R}^n$中的单位球面上的最小值, 因此当$\|a\|_2^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \mapsto \infty$时, 有$h(a) \mapsto \infty$.

因而，存在足够大的r, 当$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \geq r$时, 有

$$h(a) > \|f\|.$$

当$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \leq r$时, 由$h(a)$的连续性, 必存在$a^*$使得

$$\min h(a) = h(a^*) \leq h(0, \cdots, 0) = \|f\|.$$

由于在闭球外, h恒大于$\|f\|$, 因此$h(a^*)$是$\mathbb{R}^n$上的全局最小值. 这就证明了定理.

最佳逼近的唯一性

唯一性： 若E是狭义线性赋范空间，则对于给定元素$f \in E$，$f \notin G$，存在唯一的最佳逼近元素.

证明： 若存在f的两个最佳逼近

$$g_1^* = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \varphi_i, g_2^* = \sum_{i=1}^{n} b_i^* \varphi_i,$$

则有

$$\|f - g_1^*\| = \|f - g_2^*\| = \inf_{g \in G} \|f - g\| = \mu > 0.$$

另外，由于

$$\begin{aligned}
\mu &\le \|f - \frac{1}{2}(g_1^* + g_2^*)\| = \|f - \sum_{i=1}^{n} (\frac{a_i^* + b_i^*}{2}) \varphi_i\| \\
&= \|\frac{1}{2}(f - g_1^*) + \frac{1}{2}(f - g_2^*)\| \\
&\le \frac{1}{2}\|f - g_1^*\| + \frac{1}{2}\|f - g_2^*\| = \mu,
\end{aligned}$$

从而有

$$\|f-\frac{1}{2}(g_1^*+g_2^*)\|=\mu,$$

表明$\frac{1}{2}(g_1^*+g_2^*)$也是f的最佳逼近. 于是, 有

$$\|f-\frac{1}{2}(g_1^*+g_2^*)\|=\frac{1}{2}\|(f-g_1^*)\|+\frac{1}{2}\|f-g_2^*\|.$$

因为范数$\|\cdot\|$是严格凸的, 所以存在正常数α使得

$$f-g_1^*=\alpha(f-g_2^*).$$

由于$f\notin G$, 故必有$\alpha=1$. 这样有

$$a_i^*=b_i^*, i=1,\cdots,n,$$

表明g_1^*和g_2^*是同一个元素. 证毕.

目录

在线性空间，定义内积

a $\langle f, h\rangle = \langle h, f\rangle$,

b $\langle f, \alpha h + \beta g\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle f, g\rangle$,

c $\langle f, f\rangle > 0$, 若$f \neq 0$,

d $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$.

Example 3.1

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\text{，}\quad \langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

若$\langle f, g\rangle = 0$，则$f \perp g$. 若$f \perp g$对$\forall g \in G$，则$f \perp G$.

Lemma 3.2

内积的性质

(1) $\langle\sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i, g\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\langle f_i, g\rangle$

(2) $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + 2\langle f, g\rangle + \|g\|^2$

(3) 若$f\perp g$, 则$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$

(4) $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\| \ \rightarrow$ *Schwarz*不等式

(5) $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$.

Proof.

(1)显然成立;

$$
\begin{aligned}
(2)\ \|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle = \langle f,f\rangle + \langle f,g\rangle + \langle g,f\rangle + \langle g,g\rangle \\
&= \|f\|^2 + 2\langle f,g\rangle + \|g\|^2.
\end{aligned}
$$

(3) 可由(2)直接得到(3).

(4) $\|f+tg\|^2 = \|f\|^2 + t^2\|g\|^2 + 2t\langle f,g\rangle \geq 0$对$\forall t \in \mathbb{R}$, 有

$$
4\,|\langle f,g\rangle|^2 - 4\|f\|^2\|g\|^2 \leq 0 \ \Rightarrow\ |\langle f,g\rangle| \leq \|f\|\|g\|.
$$

$\square$

三角不等式

$$\begin{aligned}\|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle = \langle f, f\rangle + 2\langle f, g\rangle + \langle g, g\rangle \\ &\le \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2. \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2.\end{aligned}$$

Theorem 3.3

最佳逼近的性质: 设G是内积空间E的一个子空间. 对任意$f \in E$和$g \in G$. 下面两条是等价的:

1. g是f在G的最佳逼近
2. $f - g \perp G$.

Proof.

设$f-g\perp G$, 则对任意$h\in G$, 有

$$\|f-h\|^2=\|(f-g)+(g-h)\|^2=\|f-g\|^2+\|g-h\|^2\geq\|f-g\|^2.$$

即g是最佳逼近.

反之, 若g是f的最佳逼近, 对$\forall h\in G$, $\lambda>0$, 有

$$\begin{aligned}0&\leq\|f-g+\lambda h\|^2-\|f-g\|^2\\&=\|f-g\|^2+\lambda^2\|h\|^2+2\lambda\langle f-g,h\rangle-\|f-g\|^2\\&=\lambda\left\{2\langle f-g,h\rangle+\lambda\|h\|^2\right\}.\end{aligned}$$

令$\lambda\to 0$, 则$\langle f-g,h\rangle\geq 0$. 同样令$h=-h$, 上式也成立. 这样$\langle f-g,h\rangle=0$. $\Rightarrow$ $f-g\perp G$. $\square$

法方程： 若$g_1, g_2, \cdots, g_n$是G的一组线性无关的基，
设$g = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i$ 是f 在G 中的最佳逼近，则利用定理3.3，有

$$\langle f - g, g_j \rangle = 0, \quad \forall 1 \leq j \leq n,$$

即可得到法方程

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \langle g_i, g_j \rangle = \langle f, g_j \rangle, \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

正交系： 若$g_1, g_2, \cdots$满足

$$\langle g_i, g_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Theorem 3.4

设$\{g_1, g_2 \cdots, g_n\}$是内积空间E中的正交系，则f 的最佳逼近为$\sum_{i=1}^{n} c_i g_i$，其中$c_i = \langle f, g_i \rangle$.

Proof.

$G = \text{span}\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$. 由定理3.3，知$f - \sum_{i=1}^{n} c_i g_i \perp G$. 因此

$$\langle f - \sum_{i=1}^{n} c_i g_i, g_j \rangle = \langle f, g_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} c_i \langle g_i, g_j \rangle = \langle f, g_j \rangle - c_j = 0.$$

$$\Rightarrow \; c_j = \langle f, g_j \rangle.$$

$\square$

勒让德多项式

$$L_0(x) = 1, \quad L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}.$$

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) L_m(x) \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

$$L_n(-x) = (-1)^n L_n(x)$$

$$(n+1) L_{n+1}(x) = (2n+1) x L_n(x) - n L_{n-1}(x)$$

$$(\mathcal{L}_i(x), \mathcal{L}_i(x)) = 1, \quad (\mathcal{L}_i(x), \mathcal{L}_j(x)), i \neq j.$$

对$0 \leq m < n$, 有

$$\begin{aligned}
0 = (\mathcal{L}_m(x), \mathcal{L}_n(x)) &= \int_{-1}^{1} \mathcal{L}_m(x), \mathcal{L}_n(x) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \mathcal{L}_m(x) d\Big(\int_{-1}^{x} \mathcal{L}_n(t) dt \Big) \\
&= \mathcal{L}_m(x) u_1(x) \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \mathcal{L}_m'(x) u_1(x) dx,
\end{aligned}$$

其中

$$u_1(x) = \int_{-1}^{x} \mathcal{L}_n(t) dt, u_1(-1) = 0.$$

令$m = 0$, 由$\mathcal{L}_0(x)$为常数, 得

$$u_1(1) = 0.$$

于是

$$0 = -\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_m'(x)u_1(x)dx = -\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_m'(x)d\Big(\int_{-1}^{x} u_1(t)dt\Big)$$
$$= -\mathcal{L}_m'(x)u_2(x)\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \mathcal{L}_m''(x)u_2(x)dx,$$

其中

$$u_2(x) = \int_{-1}^{x} u_1(t)dt, u_2(-1) = 0, u_2'(x) = u_1(x).$$

令$m = 1$, 由于$\mathcal{L}_1(x)$为一次多项式, 得

$$u_2(1) = 0.$$

这样继续下去, 有

$$u_i(x) = \int_{-1}^{x} u_{i-1} dt, u_i{\prime}(x) = u_{i-1}(x), u_i(\pm 1) = 0.$$

于是

$$u_n^{n-1}(\pm 1) = u_n^{n-2}(\pm 1) = \cdots = u_n(\pm 1) = 0.$$

因为$u_n(x)$为一个$2n$次多项式, 而且± 1为n重根, 因此

$$u_n(x) = K_n (x^2 - 1)^n,$$

其中K_n为常数. 由$u_n(x)$的定义, 有

$$\mathcal{L}_n(x) = K_n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

下面确定常数K_n.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\mathcal{L}_n^2(x)dx &= K_n^2\int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n d(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n) \\
&= -K_n^2\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^n dx \\
&= \cdots\cdots \\
&= (-1)^n K_n^2\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n dx \\
&= K_n^2(2n)!\int_{-1}^{1}(1+x)^n(1-x)^n dx \\
&= K_n^2(2n)!\frac{1}{n+1}\int_{-1}^{1}(1-x)^n d(1+x)^{n+1} \\
&= K_n^2(2n)!\frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \cdots\cdots \\
&= K_n^2 (2n)! \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} \int_{-1}^{1} (1+x)^{2n} dx \\
&= K_n^2 ((n)!)^2 \frac{2^{2n+1}}{2n+1}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
K_n = \frac{1}{n!2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}},
$$

$$
\mathcal{L}_n(x) = \frac{1}{n!2^n}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.
$$

作业：对$n = 1, \cdots,$ 证明如下三项递推关系

$$
\mathcal{L}_{n+1}(x) = \frac{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}{n+1} x\mathcal{L}_n(x) - \frac{n}{n+1}\sqrt{\frac{2n+3}{2n-1}}\mathcal{L}_{n-1}(x).
$$

拉盖尔多项式

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = 1 - x,\ P_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

$$\int_0^\infty e^{-x} P_n(x) P_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ (n!)^2, & m = n. \end{cases}$$

$$P_{n+1}(x) = (1 + 2n - x) P_n(x) - n^2 P_{n-1}(x)$$

Hermite多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n. \end{cases}$$

$$H_0(x) = 1,\ H_1(x) = 2x,$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x),\ n = 1, 2, \cdots.$$

切比雪夫多项式

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0. \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

第二类切比雪夫多项式

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\cos^{-1} x]}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\pi} \sin(n+1)\theta \sin(m+1)\theta\, d\theta \\ &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n. \end{cases}\end{aligned}$$

$\boxed{x = \cos\theta}$

$$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x,$$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

Lemma 3.5

若$\{g_1, \cdots, g_n\}$是正交系，则

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \|g_i\|^2.$$

*Bessel*不等式*:* 若$\{g_1, \cdots, g_n\}$是正交系，则

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle f, g_i \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Proof.

设$g^* = \sum_{i=1}^{n} \langle f, g_i \rangle g_i$是$f$在$G = \mathrm{span}\{g_1, \cdots, g_n\}$ 中的最佳逼近. 则由定理3.3, $f - g^* \perp G$. 于是

$$\|f\|^2 = \|f - g^*\|^2 + \|g^*\|^2 \geq \|g^*\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle f, g_i \rangle|^2.$$

□

Gram-Schimit正交化

设$\{v_1, \cdots, v_n\}$是U的一组基. 定义

$$u_i = \|v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, u_j \rangle u_j\|^{-1} (v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, u_j \rangle u_j), \; i = 1, 2, \cdots, n.$$

则$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$是$U$的一组正交基.

正交投影

$$\mathrm{P}_n f = \sum_{i=1}^{n} \langle f, u_i \rangle u_i$$

其中$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$是正交系.

定理： 勒让德多项式$\frac{n!}{(2n-1)!!}L_n$是所有首项系数为1的n次多项式中**范数最小**的多项式（这儿的范数是指L^2范数，区间是$[-1,1]$）.

证明： 令$f=\frac{n!}{(2n-1)!!}L_n(x)$，求一个次数不超过$n-1$的多项式$g=\sum_{i=0}^{n-1}c_iL_i$使得

$$\frac{n!}{(2n-1)!!}L_n(x)-\sum_{i=0}^{n-1}c_iL_i \;\Rightarrow\; \min\left\|\frac{n!}{(2n-1)!!}L_n(x)-\sum_{i=0}^{n-1}c_iL_i\right\|$$

而

$$\frac{n!}{(2n-1)!!}L_n(x)-\sum_{i=0}^{n-1}c_iL_i\perp\mathrm{span}\{L_0,L_1,\cdots,L_{n-1}\}$$

$$\Rightarrow\; c_i=0,\; i=0,\cdots,n-1.$$

目录

$C[a,b]$ 赋范线性空间

$$\|f\| = \max_{a\le x\le b} |f(x)|, \quad \forall f \in C[a,b].$$

次数不超过n的多项式空间$\mathcal{P}_n = \mathrm{span}\{1, x, \cdots, x^n\}$. 由代数多项式的性质可知, 有

$$\mathcal{P}_n \subset C[a,b]$$

且

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_n \subset \cdots \subset C[a,b]$$

对于空间$C[a,b]$中的任意f, 其在$\mathcal{P}_n$中的最佳一致逼近由下面的量来衡量:

$$\Delta(f;\mathcal{P}_n) = \inf_{P_n\in\mathcal{P}_n} \|f - P_n\|$$

其中

$$\|f - P_n\| = \max_{a\le x\le b} |f(x) - P_n(x)|.$$

于是有

$$\Delta(f;\mathcal{P}_n) = \inf_{P_n\in\mathcal{P}_n} \max_{a\le x\le b} |f(x) - P_n(x)|.$$

Definition 4.1

设$f \in C[a,b]$为给定的函数, $\mathcal{P}_n \subset C[a,b]$, 称

$$\|f - P_n\| = \max_{a\le x\le b} |f(x) - P_n(x)|$$

为$P_n(x) \in \mathcal{P}_n$对$f(x)$的偏差. $\Delta(f;\mathcal{P}_n)$为$\mathcal{P}_n$ 对f的最小偏差, 亦称$\mathcal{P}_n$对f的最佳逼近值，而使达到最小偏差的那个多项式$P_n^*(x) \in \mathcal{P}_n$, 即成立

$$\Delta(f;\mathcal{P}_n) = \max_{a\le x\le b} |f(x) - P_n^*(x)|, \tag{4.1}$$

称为它对$f(x)$的最佳逼近多项式.

Theorem 4.2

(Borel, 1905) 对任意给定的函数$f \in C[a,b]$, $\mathcal{P}_n$中总存在使(4.1)式成立的多项式$P_n^*(x) \in \mathcal{P}_n$.

由$\mathcal{P}_n$的单调性, 有

$$\Delta(f;\mathcal{P}_0) \geq \Delta(f;\mathcal{P}_1) \geq \cdots \geq \Delta(f;\mathcal{P}_n) \geq \cdots$$

而且$\Delta(f;\mathcal{P}_n) \geq 0$. 于是, 作为Weierstrass定理的一个推论, 有

$$\Delta(f;\mathcal{P}_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

下面讨论空间$C[a,b]$中的最佳一致逼近的唯一性.

设$P_n^*(x) \in \mathcal{P}_n$是$f(x) \in C[a,b]$, $f \notin \mathcal{P}_n$ 的最佳一致逼近多项式，定义

$$R^*(x) = |f(x) - P_n^*(x)|$$

则$R^*(x)$是闭区间$C[a,b]$上的连续函数, 所以$R^*(x)$在$[a,b]$上总有最大值存在. 因此, 引进如下定义.

Definition 4.3

在$[a,b]$上所有使$R^*(x)$达到最大值的点, 即有点$x_0 \in [a,b]$使得

$$\Delta(f;\mathcal{P}_n) = R^*(x_0) = \max_{a \le x \le b} R^*(x) = |f(x_0) - P_n^*(x_0)|,$$

则称x_0点为$P_n^*(x)$对f的偏差点, 简称为(e)点. 对此点x_0, 成立

$$\Delta(f;\mathcal{P}_n) = f(x_0) - P_n^*(x_0)$$

则称x_0为正(e)点, 而使

$$\Delta(f;\mathcal{P}_n) = -(f(x_0) - P_n^*(x_0))$$

成立的x_0称为负(e)点.

Theorem 4.4

设$P_n^*(x) \in \mathcal{P}_n$是$f \in C[a,b]$的最佳一致逼近多项式, 则$P_n^*(x)$对于$f$的正,负(e)点都存在.

证明:反证法, 假定$P_n^*(x)$对于f没有负(e)点, 则对一切$x \in [a,b]$, 都有

$$f(x) - P_n^*(x) > -\Delta(f;\mathcal{P}_n).$$

从而连续函数$f(x) - P_n^*(x)$的最小值必大于$-\Delta(f;\mathcal{P}_n)$. 记

$$\min_{a\le x\le b}(f(x) - P_n^*(x)) = -\Delta(f;\mathcal{P}_n) + 2h, \quad h > 0.$$

由此可知, 对$\forall x \in [a,b]$, 有

$$-\Delta(f;\mathcal{P}_n) + 2h \le f(x) - P_n^*(x) \le \Delta(f;\mathcal{P}_n)$$

或者

$$-\Delta(f;\mathcal{P}_n)+h \le f(x)-P_n^*(x)-h \le \Delta(f;\mathcal{P}_n)-h.$$

亦即成立

$$|f(x)-(P_n^*(x)+h)| \le \Delta(f;\mathcal{P}_n)-h.$$

这表示n次多项式$P_n^*(x)+h$对于$f(x)$的偏差小于$\Delta(f;\mathcal{P}_n)$, 这显然与$\Delta(f;\mathcal{P}_n)$的定义矛盾. 同理, 若假定$P_n^*(x)$对于f没有正(e)点, 也会导出同样矛盾.从而证明结束.

下面研究正,负(e)点的分布.

Theorem 4.5

对任意$f(x) \in C[a,b]$, 若$P_n^* \in \mathcal{P}_n$是f的最佳一致逼近多项式,
则$R^*(x) = |f(x) - P_n^*(x)|$在闭区间$[a,b]$上至少存在$n+2$个*(e)*点,
而且正,负*(e)*点依次相间出现.

证明: 由定理4.4, $P_n^*(x)$对$f(x)$的正,负(e)点都有, 今证在$[a,b]$上这样的点至少有$n+2$个, 而且正,负(e)点依次相间出现.

反证法, 设依次相间出现的正,负(e)点至多有m 个, 记为$x_1, x_2, \cdots, x_m$, 其中$1 \le m \le n+1$, 则由(e)点定义, 应有

$$f(x_i) - P_n^*(x_i) = \pm(-1)^i \Delta(f; \mathcal{P}_n),\ a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_m \le b.$$

由连续函数性质知, 至少存在$m-1$个点ξ_i, $2 \le i \le m$, 满足

$$f(\xi_i) - P_n^*(\xi_i) = 0,\ i = 2, 3, \cdots, m$$
$$a \le x_1 < \xi_2 < x_2 < \xi_3 < \cdots < \xi_m < x_m \le b.$$

不仅如此, 由于$x_1, \cdots, x_n$是依次相间的正,负(e)点, 可以认为在m 个区间

$$[a, \xi_2], [\xi_2, \xi_3], \cdots, [\xi_m, b]$$

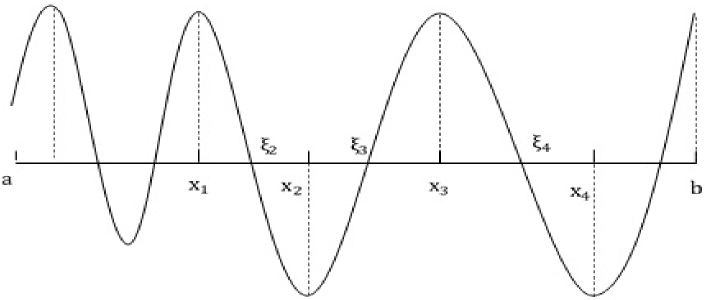
上, 相间地满足下列不等式中的一个:

$$-\Delta(f; \mathcal{P}_n) + \nu \le f(x) - P_n^*(x) \le \Delta(f; \mathcal{P}_n)$$

或者

$$-\Delta(f;\mathcal{P}_n) \le f(x) - P_n^*(x) \le \Delta(f;\mathcal{P}_n) - \nu.$$

其中ν为某正常数.



今构造$m-1$次多项式$(m-1 \le n)$

$$P_{m-1}(x) = \delta \prod_{i=2}^{m} (x - \xi_i)$$

选择δ使满足条件

$$(1) \quad \max_{a \le x \le b} |P_{m-1}(x)| \le \frac{1}{2}\nu \tag{4.2}$$

$$(2) \quad \operatorname{sign}(P_{m-1}(x_1)) = \operatorname{sign}(f(x_1) - P_n^*(x_1)) \tag{4.3}$$

我们不妨认为

$$f(x_1) - P_n^*(x_1) = \Delta(f; \mathcal{P}_n),$$

于是

$$\mathrm{sign}(P_{m-1}(x_1)) = \mathrm{sign}(f(x_1) - P_n^*(x_1)) = 1$$

利用$f(x_i) - P_n^*(x_i) = -(-1)^i \Delta(f; \mathcal{P}_n)$及$P_{m-1}(x)$ 的构造可知, 多项式$P_{m-1}(x)$在区间上取值的符号与函数$f(x) - P_n^*(x)$在相应点x_i上取值的符号相同.

令$Q_n(x) = P_n^*(x) + P_{m-1}(x)$, 它也是一个次数不超过$n$的多项式, 因为

$$f(x_1) - P_n^*(x_1) = \Delta(f;\mathcal{P}_n),\ f(\xi_2) - P_n^*(\xi_2) = 0,$$

且由(4.3)式知, 在$[a,\xi_2]$上$P_{m-1}(x) \geq 0$. 因此, $[a,\xi_2]$上有

$$f(x) - Q_n(x) = f(x) - P_n^*(x) - P_{m-1}(x) < \Delta(f;\mathcal{P}_n).$$

且

$$\begin{aligned} f(x) - Q_n(x) =& f(x) - P_n^*(x) - P_{m-1}(x) \\ &\geq -\Delta(f;\mathcal{P}_n) + \nu - \frac{\nu}{2} = -\Delta(f;\mathcal{P}_n) + \frac{\nu}{2}. \end{aligned}$$

总之, 在$[a,\xi_2]$上有

$$|f(x)-Q_n(x)|<\Delta(f;\mathcal{P}_n).$$

同样利用

$$f(x_2)-P_n^*(x_2)=-\Delta(f;\mathcal{P}_n),\ f(\xi_3)-P_n^*(\xi_3)=0$$

和在$[\xi_2,\xi_3]$上$P_{m-1}(x)\le 0$以及$f(x)-P_n^*(x)\le\Delta(f;\mathcal{P}_n)-\nu$, 在$[\xi_2,\xi_3]$上, 有

$$|f(x)-Q_n(x)|<\Delta(f;\mathcal{P}_n).$$

从而, 可以依次证明, 在$[a,\xi_2],\cdots,[\xi_m,b]$上, 上式都成立. 这样就与$\Delta(f;\mathcal{P}_n)$为最小偏差的假设矛盾. 因此, 至少有$n+2$个正负相间的$(e)$点. 证明结束.

正负相间的(e)点组常称为**切比雪夫交错组**. 上述定理表明, 若$P_n^*(x)$是$f(x)$的最佳一致逼近多项式, 则必存在切比雪夫交错组.

Theorem 4.6

设$f(x) \in C[a,b]$, 若存在多项式$P(x) \in \mathcal{P}_n$使得$\bar{R}(x) = f(x) - P(x)$ 在$[a,b]$上至少有$n+2$ 个点$x_1, x_2, \cdots, x_{n+2}$以正,负相间的符号取值$\bar{R}(x_1), \cdots, \bar{R}(x_{n+2})$, 则必成立

$$\Delta(f; \mathcal{P}_n) \geq \lambda = \min_{1 \leq i \leq n+2} |\bar{R}(x_i)|.$$

证明: 反证法, 设$\Delta(f;\mathcal{P}_n) < \lambda$. 此外, 又设$P_n^*(x) \in \mathcal{P}_n$是$f$的最佳一致逼近多项式, 考虑如下多项式:

$$P_n^*(x) - P(x) = (f(x) - P(x)) - (f(x) - P_n^*(x)).$$

由于$|f(x) - P_n^*(x)| \le \Delta(f;\mathcal{P}_n)$及$\Delta(f;\mathcal{P}_n) < \lambda$可知, 多项式$P_n^*(x) - P(x)$在$x = x_i \, (1 \le i \le n+2)$处取值的符号, 完全由函数值$f(x_i) - P(x_i)$决定.

因此, 根据定理的条件,
$\bar{R}(x) = f(x) - P(x)$在$x = x_i (1 \le i \le n+2)$ 处交错地取正负值. 故$P_n^*(x) - P(x)$在$[a,b]$上至少有$n+1$个零点.

因而, $P_n^*(x) \equiv P(x)$. 于是有

$$\Delta(f;\mathcal{P}_n) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - P(x)| \ge \max_{1 \le i \le n+2} |\bar{R}(x_i)| \ge \lambda.$$

这与$\Delta(f;\mathcal{P}_n) < \lambda$矛盾. 证明结束.

Theorem 4.7

对任意$f(x) \in C[a,b]$, $P(x) \in \mathcal{P}_n$, 若函数

$$R(x) = |f(x) - P(x)|$$

在闭区间$[a,b]$上至少存在$n+2$个点x_i, $i = 1, 2, \cdots, n+2$, 使得

$$f(x_i) - P(x_i) = \pm(-1)^i \max_{a \leq x \leq b} |R(x)|,$$

则$P(x)$必为$f(x)$的最佳一致逼近多项式.

证明: 应用定理4.6, 有

$$\begin{aligned}\Delta(f; \mathcal{P}_n) \geq \lambda = \min_{1 \leq i \leq n+2} R(x_i) &= \min_{1 \leq i \leq n+2} |f(x_i) - P(x_i)| \\ = \max_{a \leq x \leq b} R(x) &= \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)|.\end{aligned}$$

另一方面, 根据最小偏差定义, 有

$$\Delta(f;\mathcal{P}_n) \le \max_{a\le x\le b} |f(x) - P(x)|.$$

因而

$$\max_{a\le x\le b} |f(x) - P(x)| = \Delta(f;\mathcal{P}_n).$$

证明结束.

Theorem 4.8

对任意$f(x) \in C[a,b]$, $P(x) \in \mathcal{P}_n$是其最佳一致逼近多项式当且仅当在$[a,b]$上至少存在$n+2$个点x_i, $i = 1, 2, \cdots, n+2$, 使得

$$f(x_i) - P(x_i) = \pm(-1)^i \max_{a\le x\le b} |f(x) - P(x)|.$$

Theorem 4.9

(唯一性)对任意$f(x)\in C[a,b]$. 在$\mathcal{P}_n$中只有唯一的最佳一致逼近多项式.

证明: 反证法. 设有$Q_n(x)$和$P_n(x)$都为$f(x)$的最佳一致逼近多项式. 则对任意$x\in[a,b]$, 都有

$$-\Delta(f;\mathcal{P}_n)\le f(x)-Q_n(x)\le\Delta(f;\mathcal{P}_n)$$
$$-\Delta(f;\mathcal{P}_n)\le f(x)-P_n(x)\le\Delta(f;\mathcal{P}_n)$$

于是

$$-\Delta(f;\mathcal{P}_n)\le f(x)-\frac{Q_n(x)+P_n(x)}{2}\le\Delta(f;\mathcal{P}_n)$$

这表明$Q(x) = \frac{1}{2}(Q_n(x) + P_n(x))$, 也是$f(x)$的一个最佳一致逼近多项式. 因此, 存在切比雪夫交错组.

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2}.$$

设x_k是$Q(x)$的一个正(e)点, 则有

$$f(x_k) - Q(x_k) = f(x_k) - \frac{1}{2}(Q_n(x_k) + P_n(x_k)) = \Delta(f;\mathcal{P}_n).$$

又由$f(x_k) - P_n(x_k) \le \Delta(f;\mathcal{P}_n)$有

$$\frac{1}{2}[f(x_k) - Q_n(x_k)] \ge \Delta(f;\mathcal{P}_n) - \frac{1}{2}\Delta(f;\mathcal{P}_n) = \frac{1}{2}\Delta(f;\mathcal{P}_n).$$

亦即$f(x_k)-Q_n(x_k)\geq\Delta(f;\mathcal{P}_n)$, 但是总有$f(x)-Q_n(x)\leq\Delta(f;\mathcal{P}_n)$. 这表明$x_k$是$Q_n(x)$的一个正(e) 点.

同理可证x_k也是$P_n(x)$的一个正(e)点. 于是有

$$f(x_k)-Q_n(x_k)=\Delta(f;\mathcal{P}_n)=f(x_k)-P_n(x_k)$$

此等式说明

$$Q_n(x_k)=P_n(x_k),\quad k=1,2,\cdots,n+2.$$

这样$Q_n(x)\equiv P_n(x)$. 证明结束.

目录

Definition 5.1

函数$\varphi_i(x) \in C[a,b]$, $i = 1, 2, \cdots, n$为线性无关, 若子集$H_n \subset C[a,b]$,

$$H_n = \mathrm{span}\{\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)\}, \ \forall x \in [a,b] \tag{5.1}$$

中任一不恒为零的广义多项式$\Phi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x) \in H_n$, 在区间$[a,b]$上至多具有$n-1$个互不相同的零点, 则我们称函数$\varphi_i(x)$, $i = 1, 2 \cdots, n$在区间$[a,b]$上满足Haar 条件, 亦可称子集H满足Haar条件.

$$\Delta(f;H_n)=\inf_{\Phi_n\in H_n}\|f-\Phi_n\|=\inf_{\Phi_n\in H_n}\max_{a\le x\le b}|f(x)-\Phi_n(x)|.$$

Theorem 5.2

设由(5.1)定义的子集H_n满足*Haar*条件，则对任意$f\in C[a,b]$，使广义多项式

$$\Phi_n(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i(x)\in H_n$$

成为$f(x)$在$C[a,b]$上的最佳逼近广义多项式的充分必要条件是在$[a,b]$ 上至少存在$n+1$ 个点x_i，$i=1,\cdots,n+1$，使得

$$f(x_i)-\Phi_n(x_i)=\pm(-1)^i\max_{a\le x\le b}|f(x)-\Phi_n(x)|.$$

Theorem 5.3

设子集$H_n \subset C[a,b]$满足*Haar*条件, $f \in C[a,b]$, 若存在广义多项式

$$\Phi_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x) \in H_n$$

使得函数$R(x) = f(x) - \Phi_n(x)$在$[a,b]$上至少有$n+1$个点$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$以正负相间的的符号取到值$R_1, \cdots, R_{n+1}$, 则必成立

$$\Delta(f; H_n) \geq \lambda = \min_{1 \leq i \leq n+1} |R_i|.$$

Theorem 5.4

对$\forall f \in C[a,b]$, 子集$H_n \subset C[a,b]$中存在f的唯一的最佳逼近广义多项式的充要条件是, 子集$H_n \subset C[a,b]$满足*Haar*条件.

目录

先讨论$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}\subset[a,b]$上的函数$f(x)$的最佳一致逼近问题.

设函数系$\varphi_i(x)$, $i=1,2,\cdots,n$, 关于点集X为线性无关, 即

$$\begin{bmatrix}\varphi_1(x_1)\\ \varphi_1(x_2)\\ \vdots\\ \varphi_1(x_m)\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\varphi_2(x_1)\\ \varphi_2(x_2)\\ \vdots\\ \varphi_2(x_m)\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\varphi_n(x_1)\\ \varphi_n(x_2)\\ \vdots\\ \varphi_n(x_m)\end{bmatrix},\ m\geq n$$

线性无关, 又若函数系$\varphi_i(x)$, $i=1,\cdots,n$的任意线性组合在点集X上至多有$n-1$个互异零点, 则称该函数系$\varphi_i(x)$, $i=1,\cdots,n$在点集X 上满足Haar条件.

显然, 单项系$x^{i-1}, i = 1, \cdots, n$在任意$m \geq n$个点上为线性无关.

Definition 6.1

对任意给定点集X上的函数$f(x)$, 和关于点集X为线性无关的函数系$\varphi_i(x)$, $i = 1, \cdots, n$, 若存在广义多项式

$$\Phi_n^*(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \varphi_i(x)$$

在点集X上成立

$$\begin{aligned}\Delta_n(X) &= \min_{(a_i)} \max_{x \in X} |f(x) - \Phi_n(x)|. \\ &= \max_{x \in X} |f(x) - \Phi_n^*(x)|.\end{aligned}$$

此时, 称$\Phi_n^*(x)$为f在点集X上的最佳一致逼近多项式. 此问题就称为$f(x)$关于点集X的最佳一致逼近问题.

Theorem 6.2

函数系$\varphi_i(x) \in C[a,b]$, $i = 1, 2, \cdots, n$在点集

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}\} \quad (x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1})$$

上满足*Haar*条件, 函数$f(x)$给定在X上, 它在X上的取值不可能与任何一个广义多项式在此点集上的取值都相等. 则
对$\forall j$, $1 \le j \le n+1$, 存在满足条件

$$\Phi_{nj}(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n+1, \, i \neq j$$

的插值多项式$\Phi_{n_j}(x)$, 且有

$$\Phi_{nj}(x_j) - f(x_j) = (-1)^{j+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i f(x_i) D_i / D_j.$$

其中D_i是行列式

$$D_i = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \varphi_1(x_{i-1}) & \varphi_2(x_{i-1}) & \cdots & \varphi_n(x_{i-1}) \\ \varphi_1(x_{i+1}) & \varphi_2(x_{i+1}) & \cdots & \varphi_n(x_{i+1}) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & \cdots & \varphi_n(x_{n+1}) \end{vmatrix}$$

证明: 对任何j, $1 \le j \le n+1$, 设

$$\Phi_{nj}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(j)} \varphi_i(x).$$

则$a_i^{(j)}$满足方程

$$\begin{cases} a_1^{(j)}\varphi_1(x_\nu) + a_2^{(j)}\varphi_2(x_\nu) + \cdots + a_n^{(j)}\varphi_n(x_\nu) = f(x_\nu). \\ \nu = 1, 2, \cdots, n+1, \nu \neq j \end{cases}$$

由于$\varphi_j(x)$, $j = 1, 2, \cdots, n$在X上满足Haar条件, 因此, 行列式$D_j \neq 0$, 由解方程组的行列式法则, 得

$$a_i^{(j)} = \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq j}}^{n+1} f(x_\nu) A_{\nu i}^{(j)} / D_j = \Big(\sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq j}}^{n+1} f(x_\nu)(-1)^{\nu+i} \mathrm{sign}(j-\nu) M_{\nu i}^{(j)} \Big) / D_j,$$

其中$A_{\nu i}^{(j)}$是D_j中元素$\varphi_i(x_\nu)$的代数余子式, 而$M_{\nu i}^{(j)}$是元素$\varphi_i(x_\nu)$在D_j上对应的子式, 显然$M_{\nu i}^{(j)} = M_{ji}^{(\nu)}$. 因而

$$A_{\nu i}^{(j)} = (-1)^{\nu+i} \mathrm{sign}(j-\nu) M_{\nu i}^{(j)} = -(-1)^{\nu+j} A_{ji}^{(\nu)}.$$

于是, 对任何j, $1 \le j \le n+1$, 由上式可得

$$\Phi_{nj}(x_j) - f(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(j)} \varphi_i(x_j) - f(x_j)$$

$$= \frac{1}{D_j}\Big(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_j) \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^{n+1} f(x_\nu)(-1)^{\nu+j+1} A_{ji}^{(\nu)}\Big) - f(x_j)$$

$$= \frac{(-1)^{j+1}}{D_j} \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^{n+1} (-1)^{\nu} f(x_\nu) \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_j) A_{ji}^{(\nu)} - f(x_j)$$

注意到$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_j) A_{ji}^{(\nu)}$是行列$D_\nu$按照$x_j$所在的行展开，所以

$$\Phi_{nj}(x_j) - f(x_j) = \frac{(-1)^{j+1}}{D_j} \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^{n+1} (-1)^{\nu} f(x_\nu) D_\nu - f(x_j)$$

$$= \frac{(-1)^{j+1}}{D_j} \sum_{\nu=1}^{n+1} (-1)^{\nu} f(x_\nu) D_\nu.$$

Theorem 6.3

在定理6.2的条件下，若$\Phi_n^*(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^*\varphi_i(x)$是$f$在点集$X$上的最佳一致逼近多项式, 则有

$$\Phi_n^*(x)=\Delta(X)\cdot\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\Phi_{nj}(x)}{|\Phi_{nj}(x_j)-f(x_j)|}=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{|D_j|}{\sum\limits_{i=1}^{n+1}|D_i|}\Phi_{nj}(x),$$

且

$$\Delta(X)=\left[\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{|\Phi_{nj}(x_j)-f(x_j)|}\right]^{-1}=\frac{\left|\sum\limits_{j=1}^{n+1}(-1)^jD_jf(x_j)\right|}{\sum\limits_{\nu=1}^{n+1}|D_\nu|}.$$

证明: 由最佳一致逼近的特征性质, 知存在Δ及a_i, $1 \le i \le n$, 使得

$$a_1\varphi_1(x_j) + a_2\varphi_2(x_j) + \cdots + a_n\varphi_n(x_j) - f(x_j) = -(-1)^j s_j \Delta \qquad j = 1, 2, \cdots, n+1. \tag{6.1}$$

其中$s_j = \pm 1$用来表示误差的符号.

对于给定的符号, 可以看出, $a_1, \cdots, a_n$ 和Δ存在$n+1$个方程. 原则上, 我们可以有2^{n+1} 个选择. 对$(s_1, \cdots, s_{n+1})$每个选择, 解(6.1), 从而选择最佳解. 下面给出一个最直接的方法. 为此, 定义

$$\sigma_j = (-1)^j D_j$$

可以证明

$$\sum_{j=1}^{n+1} \varphi_i(x_j)\sigma_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.2}$$

实际上$(-1)^i \sum_{j=1}^{n+1} \varphi_i(x_j)\sigma_j$是下面$n+1$阶行列式按照第$i$列展开.

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \cdots & \varphi_i(x_1) & \varphi_i(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(x_{i-1}) & \varphi_2(x_{i-1}) & \cdots & \varphi_i(x_{i-1}) & \varphi_i(x_{i-1}) & \cdots & \varphi_n(x_{i-1}) \\ \varphi_1(x_i) & \varphi_2(x_i) & \cdots & \varphi_i(x_i) & \varphi_i(x_i) & \cdots & \varphi_n(x_i) \\ \varphi_1(x_{i+1}) & \varphi_2(x_{i+1}) & \cdots & \varphi_i(x_{i+1}) & \varphi_i(x_{i+1}) & \cdots & \varphi_n(x_{i+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(x_{n+1}) & \varphi_2(x_{n+1}) & \cdots & \varphi_i(x_{n+1}) & \varphi_i(x_{n+1}) & \cdots & \varphi_n(x_{n+1}) \end{vmatrix}$$

由(6.1),

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i\varphi_i(x_j) - f(x_j) = -(-1)^j s_j \Delta$$

两边同乘以σ_j, 对j求和, 得

$$\sum_{j=1}^{n+1}\sigma_j \sum_{i=1}^{n+1} a_i\varphi_i(x_j) - \sum_{j=1}^{n+1}\sigma_j f(x_j) = -\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j s_j\sigma_j\Delta$$

交换求和顺序

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_j \varphi_i(x_j) - \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_j f(x_j) = -\Delta \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j s_j \sigma_j$$

得

$$\Delta = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} \sigma_j f(x_j)}{\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j s_j \sigma_j}$$

为了使$\Delta > 0$达到最小, 可以选$(-1)s_1, s_2, \cdots, (-1)^{n+1} s_{n+1}$ 分别与$\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1}$全部同号或者异号, 有

$$\Delta(X) = \Delta = \frac{\left|\sum_{j=1}^{n+1} \sigma_j f(x_j)\right|}{\sum_{j=1}^{n+1} |\sigma_j|} = \frac{\left|\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j D_j f(x_j)\right|}{\sum_{j=1}^{n+1} |D_j|}.$$

下面我们不妨假设$\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^j D_j f(x_j) \geq 0$.

下面进一步证明

$$a_i = a_i^* = \Delta \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_i^{(j)}}{|\Phi_{nj}(x_j) - f(x_j)|}, \; i = 1, 2, \cdots, n.$$

是满足(6.1)式的, 即$\Phi_n^*(x)$是最佳一致逼近多项式. 对任意ℓ, $1 \leq \ell \leq n+1$, 有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x_\ell) - f(x_\ell) &= \Delta \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_\ell) \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_i^{(j)}}{|\Phi_{nj}(x_j) - f(x_j)|} - f(x_\ell) \\
&= \Delta \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^{(j)} \varphi_i(x_\ell)}{|\Phi_{nj}(x_j) - f(x_j)|} - f(x_\ell) \Delta \frac{\sum_{j=1}^{n+1} |D_j|}{\sum_{\nu=1}^{n+1} \sigma_\nu f(x_\nu)} \\
&= \Delta \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\Phi_{nj}(x_\ell)}{|\Phi_{nj}(x_j) - f(x_j)|} - f(x_\ell) \Delta \sum_{j=1}^{n+1} \frac{|D_j|}{\sum_{\nu=1}^{n+1} \sigma_\nu f(x_\nu)}
\end{aligned}$$

而

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n+1} \sigma_j f(x_j) / \sum_{j=1}^{n+1} |D_j|, \quad \sigma_j = (-1)^j D_j$$

$$\Phi_{nj}(x_j) - f(x_j) = (-1)^{j+1} \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i f(x_i) D_i / D_j$$

假设$\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^j s_j \sigma_j$正号, 有(负号类似地证明)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x_\ell) - f(x_\ell) \\
=&\Delta \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\Phi_{nj}(x_\ell)}{\operatorname{sign}(D_j)(-1)^{j+1}(\Phi_{nj}(x_j) - f(x_j))} \\
&- \Delta f(x_\ell) \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{(-1)^\nu f(x_\nu) D_\nu}{|D_j|}} \\
=&\Delta \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\Phi_{nj}(x_\ell)}{\operatorname{sign}(D_j)(-1)^{j+1}(\Phi_{nj}(x_j) - f(x_j))} \\
&- \Delta \sum_{j=1}^{n+1} \frac{f(x_\ell)}{\operatorname{sign}(D_j)(-1)^{j+1}(\Phi_{nj}(x_j) - f(x_j))} \\
=&\Delta \sum_{j=1}^{n+1} \operatorname{sign}(D_j)(-1)^{j+1}\delta_{j\ell} = (-1)^{\ell+1}\operatorname{sign}(D_\ell)\Delta
\end{aligned}
$$

这样

$$
\begin{aligned}
\Phi_n^*(x) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}\Delta\frac{a_i^{(j)}\varphi_i(x)}{|\Phi_{nj}(x_j)-f(x_j)|} = \Delta\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\Phi_{nj}(x)}{|\Phi_{nj}(x_j)-f(x_j)|} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i D_i f(x_i)}{\sum_{\nu=1}^{n+1}|D_\nu|}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\Phi_{nj}(x)}{|\Phi_{nj}(x_j)-f(x_j)|} \\
&= \frac{1}{\sum_{\nu=1}^{n+1}|D_\nu|}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\Phi_{nj}(x)}{\frac{|\Phi_{nj}(x_j)-f(x_j)|}{\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i D_i f(x_i)}} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1}\frac{|D_j|}{\sum_{\nu=1}^{n+1}|D_\nu|}\Phi_{nj}(x).
\end{aligned}
$$

证明结束.

1° 在区间$[a,b]$上任选$n+1$个互异的点$x_j, 1 \le j \le n+1$构成点集

$$X^{(0)} = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_{n+1}^{(0)}\},\ a \le x_1^{(0)} < x_2^{(0)} < \cdots < x_{n+1}^{(0)} \le b.$$

求解线性方程组

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(0)} \varphi_i(x_j^{(0)}) - f(x_j^{(0)}) = -(-1)^j \Delta_0,\ 1 \le j \le n+1$$

从中解出未知量$a_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \cdots, n$及Δ_0. 则

$$\Phi_n^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(0)} \varphi_i(x)$$

就是$f(x)$在$X^{(0)}$上的最佳逼近多项式, Δ_0就是最佳逼近值.

2° 设已迭代到k步, 得到点集

$$X^{(k)} = \{x_1^{(k)}, \cdots, x_{n+1}^{(k)}\}$$
$$a \le x_1^{(k)} < x_2^{(k)} \cdots < x_{n+1}^{(k)} \le b, \quad k = 0, 1, \cdots,$$

和广义多项式

$$\Phi_n^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(k)} \varphi_i(x)$$

及Δ_k, 它们满足方程组

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(k)} \varphi_i(x_j^{(k)}) - f(x_j^{(k)}) = -(-1)^j \Delta_k, \ 1 \le j \le n+1$$
$$\Delta_k = \max_{x \in X^{(k)}} |f(x) - \Phi_n^{(k)}(x)| = \min_{(a_i)} \max_{x \in X^{(k)}} |f(x) - \Phi_n(x)|.$$

且总有

$$\Delta_k \le \Delta(f; H_n), \quad k = 0, 1, \cdots.$$

对此, 又有两种情形. 若

$$\Delta_k = \Delta(f; H_n), \quad k = 0, 1, \cdots .$$

成立, 则$\Phi_n^{(k)}(x)$就是要求的区间$[a, b]$上f的最佳一致逼近多项式. 如果有

$$\Delta_k < \Delta(f; H_n)$$

则必存在点$\xi \in [a, b]$(可选最大值点), 使

$$|f(\xi) - \Phi_n^{(k)}(\xi)| > \Delta_k \tag{6.3}$$

此时, 可用$X^{(k)}$及ξ去构造

$$X^{(k+1)} = \{x_1^{(k+1)}, \cdots, x_{n+1}^{(k+1)}\}$$

满足

(1) 必有$\xi \in X^{(k+1)}$, 且$a \le x_1^{(k+1)} < x_2^{(k+1)} < \cdots < x_{n+1}^{(k+1)} \le b$.

(2) $|f(x_j^{(k+1)}) - \Phi_n^{(k+1)}(x_j^{(k+1)})| \ge \Delta_k$, $j = 1, 2, \cdots, n+1$.

(3) $\mathrm{sign}(f(x_j^{(k+1)}) - \Phi_n^{(k+1)}(x_j^{(k+1)})) =$
$\pm\mathrm{sign}(f(x_j^{(k)}) - \Phi_n^{(k)}(x_j^{(k)}))$, $j = 1, 2, \cdots, n+1$.

新点集的形成: 单一交换法(Remez第一算法)

设$\xi \in [a,b]$, $\xi \neq x_j^{(k)}$ $j = 1, 2, \cdots, n+1$

$$
\begin{array}{ll}
a \le \xi < x_1^{(k)} & \mathrm{sign}(\epsilon^{(k)}(\xi)) = \mathrm{sign}(\epsilon^{(k)}(x_1^{(k)})) \\
 & x_1^{(k+1)} = \xi \to x_1^{(k)} \\
a \le \xi < x_1^{(k)} & \mathrm{sign}(\epsilon^{(k)}(\xi)) = -\mathrm{sign}(\epsilon^{(k)}(x_1^{(k)})) \\
 & \text{挤出}x_{n+1}^{(k)} \leftarrow \\
x_{n+1}^{(k)} < \xi \le b & \mathrm{sign}(\epsilon^{(k)}(\xi)) = \mathrm{sign}(\epsilon^{(k)}(x_{n+1}^{(k)})) \\
 & x_{n+1}^{(k+1)} = \xi \to x_{n+1}^{(k)} \\
x_{n+1}^{(k)} < \xi \le b & \mathrm{sign}(\epsilon^{(k)}(\xi)) = -\mathrm{sign}(\epsilon^{(k)}(x_{n+1}^{(k)})) \\
 & \text{挤出}x_1^{(k)}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
x_j^{(k)} < \xi < x_{j+1}^{(k)} \qquad & \mathrm{sign}(\epsilon^{(k)}(\xi)) = \mathrm{sign}(\epsilon^{(k)}(x_j^{(k)})) \\
& x_j^{(k+1)} = \xi \to x_j^{(k)} \\
x_j^{(k)} < \xi < x_{j+1}^{(k)} \qquad & \mathrm{sign}(\epsilon^{(k)}(\xi)) = -\mathrm{sign}(\epsilon^{(k)}(x_j^{(k)})) \\
& x_{j+1}^{(k+1)} = \xi \to x_{j+1}^{(k)}
\end{aligned}
$$

$j = 1, 2, \cdots, n,$

其中$\epsilon^k(x) = f(x) - \Phi_n^{(k)}(x)$, $\Phi_n^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i^{(k)} \varphi_i(x)$.

因为，已知在点集$X^{(k)}$上，成立

$$\Phi_n^{(k)}(x_j^{(k)}) - f(x_j^{(k)}) = -(-1)^j \Delta_k,\ 1 \leq j \leq n+1|.$$

故函数$\epsilon^{(k)}(x) = f(x) - \Phi_n^{(k)}(x)$在区间$[a,b]$上至少有$n$个零点$\xi_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \cdots, n$. 而且满足

$$x_j^{(k)} < \xi_j^{(k)} < x_{j+1}^{(k)}, j = 1, \cdots, n.$$

令$\xi_0^{(k)} = a, \xi_{n+1}^{(k)} = b$, 则得区间$I_j = [\xi_j^{(k)}, \xi_{j+1}^{(k)}], j = 0, 1, \cdots, n$. 我们可以在区间$I_j$上确定点$x_{j+1}^{(k+1)}$使得

$$\epsilon^{(k)}(x_{j+1}^{(k+1)}) \geq \epsilon^{(k)}(x), \forall x \in I_j, \text{若}\epsilon^{(k)}(x_{j+1}^{(k)}) > 0,$$

或者

$$\epsilon^{(k)}(x_{j+1}^{(k+1)}) < \epsilon^{(k)}(x), \forall x \in I_j, \text{若}\epsilon^{(k)}(x_{j+1}^{(k)}) < 0.$$

这个过程对所有的$j = 0, 1, \cdots, n$都实施, 则的新点集

$$X^{(k+1)} = \{x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{n+1}^{(k+1)}\},$$

它是满足性质(1), (2), (3).

初始点的选取 当$C[a,b]=C[-1,1],\varphi_i=x^{i-1}$, $i=1,2,\cdots,n$时，则初始点可取$T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x)$的极值点.

$$x_i=\cos\frac{i-1}{n}\pi,\quad ,i=1,2,\cdots,n+1.$$

收敛性 存在$0<q<1$, 使得

$$0\le\bar{\Delta}_k-\Delta(f;H_n)\le Aq^k.$$

其中

$$\bar{\Delta}_k=\max_{x\in[a,b]}|f(x)-\Phi_n^{(k)}(x)|.$$

Remez 算法的结束准则 如果要求精度为ϵ, 则在计算过程中可以检验是否成立

$$\bar{\Delta}_k - \Delta_k < \epsilon$$

若成立, 则算法停止, 此时, $\Phi_n^{(k)}(x)$就是所求的近似最佳逼近多项式. 否则, 计算过程继续.

Theorem 6.4

对任何函数$f(x) \in C[a,b]$, 其最佳逼近广义多项式都是唯一的，则子集$H_n \subset C[a,b]$必满足*Haar*条件.

证明： 反证法，设子集H_n不满足Haar条件，则存在n个不同的点$x_1, \cdots, x_n$使得

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} = 0.$$

这表明矩阵

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix}$$

是奇异的.

于是存在非零取向量$a \in \mathbb{R}^n$和$b \in \mathbb{R}^n$使得

$$\Phi a = 0 \text{和} b^T \Phi = 0$$

即

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} b_j \varphi_i(x_j) = 0.$$

定义$Q_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x)$, 则$Q_n(x_j) = 0$. 假定$\max_{a \le x \le b} |Q_n(x)| \le 1$, 选择$f \in C[a,b]$使得$\max_{a \le x \le b} |f(x)| = 1$且$f(x_j) = \mathsf{sgn}(b_j)$. 构造函数

$$F(x) = f(x)(1 - |Q_n(x)|),$$

则$F(x_j) = f(x_j) = \mathsf{sgn}(b_j)$. 于是对任何广义多项式$\Phi_n$都有

$$\max_{a \le x \le b} |F(x) - \Phi_n(x)| \ge 1.$$

事实上，如果$\max\limits_{a\le x\le b}|F(x)-\Phi_n(x)|<1$, 则当$F(x_j)\neq 0$时有

$$\mathrm{sgn}(\Phi_n(x_j))=\mathrm{sgn}(f(x_j))=\mathrm{sgn}(b_j).$$

另一方面，设$\Phi_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x)$, 则有

$$\sum_{j=1}^{n}b_j\Phi_n(x_j)=\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x_j)=\sum_{i=1}^{n}c_i\sum_{j=1}^{n}b_j\varphi_i(x_j)=0.$$

这与上式矛盾. 这样对任意$0\le\lambda\le 1$, 都有

$$\begin{aligned}|F(x)-\lambda Q_n(x)|&\le|F(x)|+\lambda|Q_n(x)|\\&\le|f(x)|[1-|Q_n(x)|]+\lambda|Q_n(x)|\\&\le 1-|Q_n(x)|+\lambda|Q_n(x)|\le 1.\end{aligned}$$

这和最佳逼近广义多项式的唯一性矛盾. 证毕.

Theorem 6.5

存在a_i, $1 \le i \le n$, 使得

$$a_1\varphi_1(x_j) + a_2\varphi_2(x_j) + \cdots + a_n\varphi_n(x_j) - f(x_j) = -(-1)^j s_j \Delta \qquad j = 1, 2, \cdots, n+1.$$

其中$s_j = \pm 1$用来表示误差的符号.

证明：假设最多只有$m \le n$个点, 不妨假设$x_1, \cdots, x_m$, 使得

$$\Phi_n^*(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x_j) - f(x_j) = -(-1)^j s_j \Delta$$

$$j = 1, 2, \cdots, m.$$

而对其他点，存在大于零的常数h使得

$$|\Phi_n^*(x_j) - f(x_j)| \le \Delta - h, j = m+1, \cdots, n+1.$$

定义广义多项式

$$\tilde{Q}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)$$

使得

$$\tilde{Q}_n(x_j) = (-1)^j s_j, j = 1, \cdots, m.$$

因为函数系$\varphi_i(x), i = 1, \cdots, n$在点集$X$ 上满足Haar条件，所以矩阵

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \cdots & \varphi_n(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1(x_m) & \cdots & \varphi_n(x_m) \end{bmatrix}$$

的秩为m. 因而，满足上述条件的广义多项式$\tilde{Q}_n(x)$存在. 选择正常数δ使得

$$\max_{1 \le i \le n+1} \delta |\tilde{Q}_n(x_i)| \le \frac{h}{2} \le \Delta.$$

令$Q_n(x) = \delta\tilde{Q}_n(x)$. 这样

$$\Phi_n^*(x_j) + Q_n(x_j) - f(x_j) = -(-1)^j s_j(\Delta - \frac{h}{2}), j = 1, \cdots, m,$$

且

$$|\Phi_n^*(x_j) + Q_n(x_j) - f(x_j)| \le |\Phi_n^*(x_j) - f(x_j)| + |Q_n(x_j)|$$
$$\le \Delta - h + \frac{h}{2} = \Delta - \frac{h}{2}, j = m+1, \cdots, n+1.$$

这和Δ是最佳逼近值矛盾. 证毕.

目录

(1) 设$g_1, \cdots, g_m$线性无关, 证明矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \cdots & \langle g_1, g_m \rangle \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle g_m, g_1 \rangle & \cdots & \langle g_m, g_m \rangle \end{bmatrix}$$

非奇异.

(2) 求$f = \sin x$, $x \in [-1, 1]$在$\mathrm{span}\{x, x^3, x^5\}$中的最佳逼近. 其中

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} [f(x)]^2 \, dx}, \quad \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f g \, dx.$$

(3) 设$\{v_1, \cdots, v_n\}$是U的一组基. Gram-Schimit正交化

$$u_i = \|v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, u_j \rangle u_j\|^{-1} (v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle v_i, u_j \rangle u_j), \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

证明$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$是$U$的一组正交基.

(4) 证明

$$\|\frac{n!}{(2n-1)!!}L_n\| = \min_{\text{首项系数为1的n次多项式}} \|P_n(x)\|.$$

范数

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

(5) 求$f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$, $x \in [0,1]$, 在$\mathcal{P}_1 = \mathrm{span}\{1, x\}$中的最佳一致逼近多项式.

(6) 求$f(x) = x^n$在$\mathcal{P}_{n-1} = \mathrm{span}\{1, x\cdots, x^{n-1}\}$, $x \in [-1,1]$上的最佳一致逼近多项式, 并写出其切比雪夫交错组.

(7) 证明定理6.2中的式(6.2)成立, 即

$$\sum_{j=1}^{n+1} \varphi_i(x_j)\sigma_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

(8) 求$f(x) = |x|^3$的5次最佳一致逼近多项式, $x \in [-1, 1]$, 用上述Remez 算法，算法中停止准则取$\epsilon = 1 \times 10^{-4}$.
注: 写程序, 程序最后结果要包含最佳逼近多项式, 迭代次数和最后的点集X.

(9) 设$\{p_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$构成一组正交系，且$p_i(x)$为$i$次多项式，证明$p_i(x)$有$i$个互不相同的零点.

谢谢！