命题逻辑：语法

§2.1 形式系统

1. definition：形式系统：使用符号，有关符号的一切行为和性质完全由给定的规则集来确定，而不依赖于符号特定的意义和具体性质

形式系统L是逻辑演算

L → 描述 { 形式语言：< 字符表 ⟶ 枚举元字：~，→，(，)，p_i…
(合式)公式 ⟶ p_i是公式；A.B是 ⇒ ~A. A→B是；所有公式由有限次生成（递归定义）

⇒ 命题语言 L_0

公理
有限个演绎推理规则 }

(1) 元语言：用一种语言来谈论另一种语言时

(2) 命题演算形式系统L，对∀公式A.B.C，有公理

(L1) $(A\to(B\to A))$ 后件确定

(L2) $((A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C)))$ 蕴含分配

(L3) $(((\sim A)\to(\sim B))\to(B\to A))$ 前后换位

演绎规则：分离规则MP (R) 若 A. A→B. 则B

(3) 替换规则：若A，且 $p_1\sim p_n$ 为变元，则 $A\,p_1\cdots p_n/A_1\cdots A_n$（即用 $p_1\sim p_n$ 替换A中的 $A_1\sim A_n$）

(4) 证明：L中一个证明：公式序列 $A_1\cdots A_n$ s.t. for any i，A_i是L中公理或可由 $A_j.A_k$ +MP得到 $(j.k<i)$

则称 A_n 为L中一个定理（或被称为可证的）

(5) Γ是L中一个公式集，称L中 $A_1\sim A_n$ 是从Γ的一个演绎，若 for any i 下列之一成立：

a) A_i是L公理

b) $A_i\in\Gamma$

c) A_i由 $A_k.A_j$ +MP得到 $(k.j<i)$

A_n称从Γ可演绎的（L中Γ的一个后承）

若A是最后一项，Γ产生（推出）了A，记作 $\Gamma\vdash_L A$

e.g. L中定理可从空集中演绎，记作 $\varnothing\vdash_L A$. $\vdash_L A$ ($\vdash A$) ⟵ 元语言记号

(6) 演绎定理：$\Gamma\cup\{A\}\vdash_L B \Rightarrow \Gamma\vdash_L(A\to B)$ （注意⇐亦成立）

Proof 见 ml 2-1 假言三段论 HS：$A\to B.\ B\to C\vdash_L(A\to C)$

扫描全能王 创建

2. $\{\sim, \to\}$ 完备集的构成: $A\wedge B \equiv \sim(A\to B)$

$A\vee B \equiv \sim A \to B$

$A\leftrightarrow B \equiv (A\to B)\to(B\to A)$

3. Γ 公式集. 若存在某个 A s.t. $\Gamma\vdash A$. $\Gamma\vdash\sim A$ 则称 Γ 不一致(否则一致)　　Γ 不一致 $\Leftrightarrow \forall A.\ \Gamma\vdash A$

$\forall A.B.\ \begin{cases} \Gamma\nvdash A.\ \Gamma\nvdash\sim A.\ 则称.\ A 独立于 \Gamma \\ \{A,\sim A\}\subseteq\Gamma \Rightarrow \Gamma\vdash B\ \ 平凡性 \\ \Gamma\subseteq\Gamma'.\ \forall A.\ \Gamma\vdash A\Rightarrow\Gamma'\vdash A\ \ 单调性 \end{cases}$ $\Leftarrow$ L 具备且 L 一致

4. 极大一致: (MC)

极大一致子集(MCS) $\begin{cases} \Gamma 一致 \\ 不存在 \Gamma' 一致\ s.t.\ \Gamma\subset\Gamma' \end{cases}$　　Γ 极大一致 $\Leftrightarrow$ Γ 一致; $\forall A$, $A\in\Gamma$ 或 $\sim A\in\Gamma$

极大一致推理　$\Gamma\vdash_{mcs} A \Leftrightarrow MCS(\Gamma)\vdash A$

5. 公理系统的等价性: L 推出 L' 所有公理(反之亦然)

*公理的独立性: 公理系统某个公理子集 Γ 称为独立若 $\exists$ Γ 的公式不能从 Γ 以外公理推出

(L_1. L_2. L_3 均独立)　证明: 设计真值表 s.t. 其余为0. 所证为1

§ 2.2 完全性定理

(语法) $\xleftrightarrow{同构}$ 语义,

1. L 基本性质: $\begin{cases} 可靠性: \Gamma\vdash A \Rightarrow \Gamma\models A \\ 完全性: \Gamma\vdash A \Leftarrow \Gamma\models A \end{cases}$

可靠性定理: A 的每一个定理都是一个重言式

$\boxed{\vdash A \Rightarrow \models A}$

3) L^* 一致 $\Rightarrow \exists v$ s.t. $\forall A\in L^*$. $v(A)=T$

4) 完全性定理: A 公式重言. 则 $\vdash_L A$

$\boxed{\models A \Rightarrow \vdash A}$

5) 可判定性定理: 可判断 L 中公式是否为定理

L^* 是一致的, 则存在 L^{**} s.t. 一致完全

赋值: L 的赋值是一个函数 v s.t. 其定义域为 L 公式. 值域是 $\{T, F\}$ s.t.

for any $A.B\in L$ 有 $\begin{cases} v(A)\neq v(\sim A) \\ v(A\to B)=F \Leftrightarrow v(A)=T\ \ v(B)=F \end{cases}$

$v(A)=T \Rightarrow v$ 满足 A, $v\models_L A$　重言式: for $\forall v$. $v(A)=T$, 记作 $\models_L A$

扩充: 修改扩到 L 公理组(保证定理仍是定理)

(不一定和原来有公共公理)

1) 一致性: 不存在 L 公式 A. s.t. A, $\sim A$ 均为扩充后定理 ($\because$ L 满足)

L 的一个扩充 L^* 一致 $\Leftrightarrow \exists A$ s.t. A 不是 L^* 定理

A 是 L 公式不是 L^* 定理 $\Rightarrow L^{**}$ 由 L^* 补充 $\sim A$ 得到. L^{**} 一致

2) 完全性: for any A, A, $\sim A$ 是 L^* 定理 (L 不是)

扫描全能王 创建