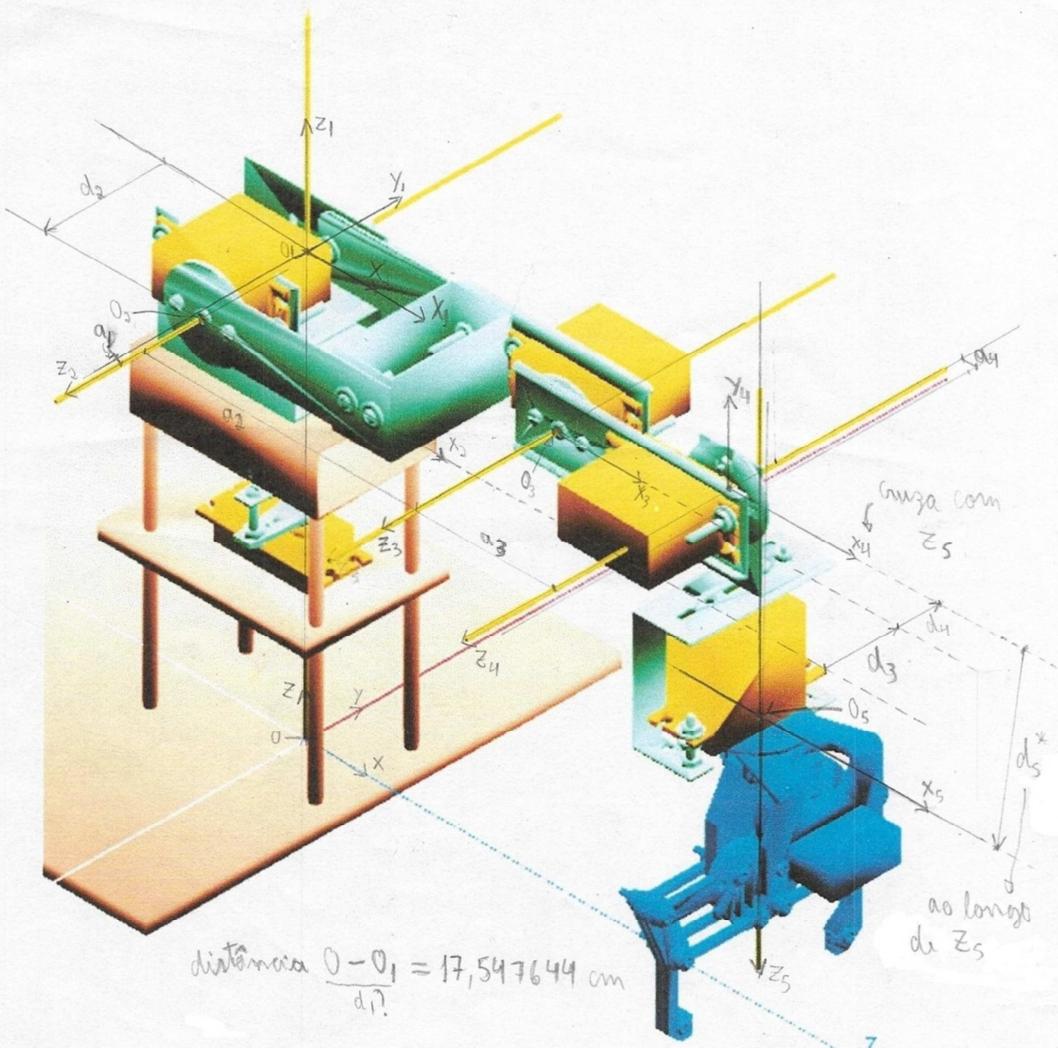


Parâmetros de Denavit-Hartenberg (DH)

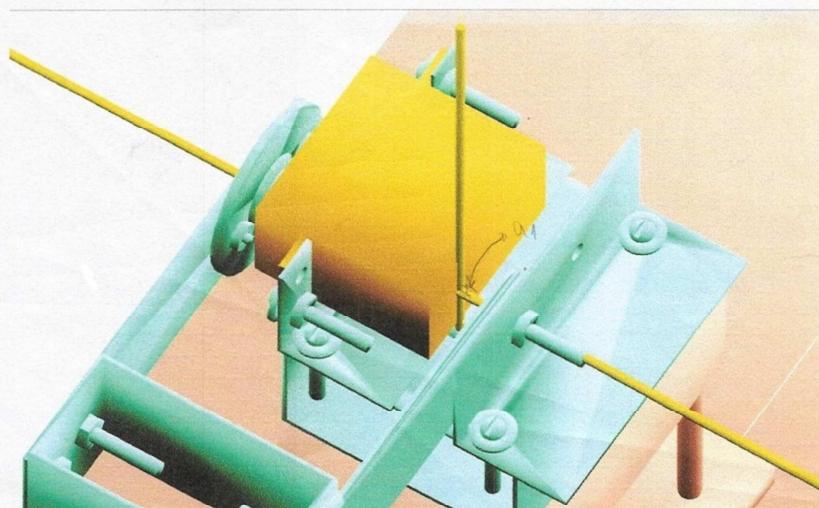
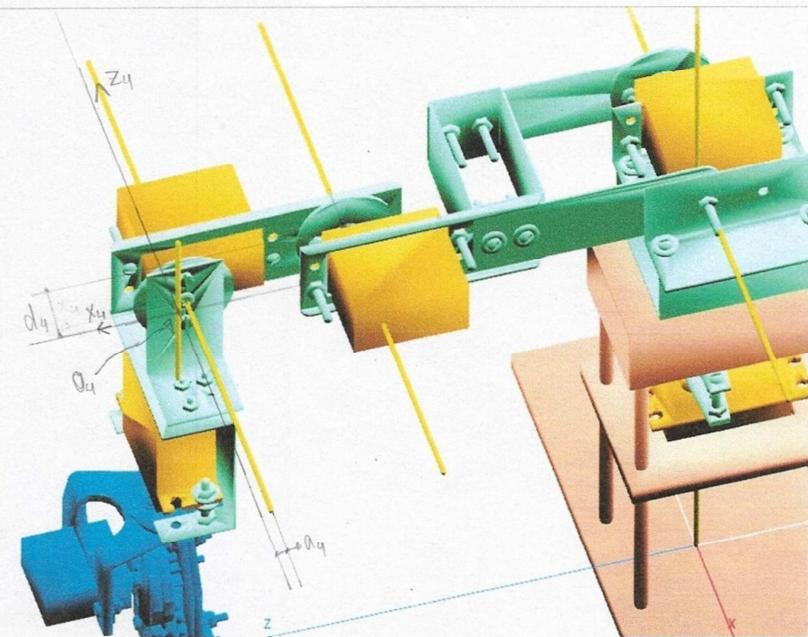


i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0?	θ_1
2	90°	0,025cm	4,293516cm	θ_2
3	0	11,65cm	-3,438032cm	θ_3
4	0	5,825cm	-2,174584cm	θ_4
5	90°	0,45cm	8,633297cm	θ_5

d_3 e d_4 negativos?
(linkido invertido no $z_2 + z_3$)

Apesar de termos dado valores não nulos para d_2 , d_3 , d_4 , d_5 , a_2 e a_4 , na cinemática implementada no software de controle consideramos todos eles como sendo zero, para que os pontos da garra e do pulso fiquem alinhados com a origem, de forma que seja possível definir um plano vertical que corte o braço robô pela origem da base, pelo pulso e pelo ponto da garra.

Detalhes do a₄ e do a₁



Cálculos da Cinemática Direta

$$\begin{aligned}
{}^0_1T &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^1_2T &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_2T &= \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & c_1a_1 + s_1d_2 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 & s_1a_1 - c_1d_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^2_3T &= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_3T &= \begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - c_1s_2s_3 & -c_1c_2s_3 - c_1s_2c_3 & s_1 & c_1c_2a_2 + s_1d_3 + (c_1a_1 + s_1d_2) \\ s_1c_2c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1c_2s_3 - s_1s_2c_3 & -c_1 & s_1c_2a_2 - c_1d_3 + (s_1a_1 - c_1d_2) \\ s_2c_3 + c_2s_3 & -s_2s_3 + c_2c_3 & 0 & s_2a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_4T &= \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & s_1(d_2 + d_3) + c_1(a_1 + c_2a_2) \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & s_1(a_1 + c_2a_2) - c_1(d_2 + d_3) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & s_2a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^3_4T &= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_3 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_4T &= \begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 - c_1s_{23}s_4 & -c_1c_{23}s_4 - c_1s_{23}c_4 & s_1 & c_1c_{23}a_3 + s_1d_4 + s_1(d_2 + d_3) + c_1(a_1 + c_2a_2) \\ s_1c_{23}c_4 - s_1s_{23}s_4 & -s_1c_{23}s_4 - s_1s_{23}c_4 & -c_1 & s_1c_{23}a_3 - c_1d_4 + s_1(a_1 + c_2a_2) - c_1(d_2 + d_3) \\ s_{23}c_4 + c_{23}s_4 & -s_{23}s_4 + c_{23}c_4 & 0 & s_{23}a_3 + s_2a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_5T &= \begin{bmatrix} c_1c_{234} & -c_1s_{234} & s_1 & s_1(d_2 + d_3 + d_4) + c_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3) \\ s_1c_{234} & -s_1s_{234} & -c_1 & s_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3) - c_1(d_2 + d_3 + d_4) \\ s_{234} & c_{234} & 0 & s_{23} + s_2a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^4_5T &= \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & -1 & -d_5 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_5T &= \begin{bmatrix} c_1c_{234}c_5 + s_1s_5 & -c_1c_{234}s_5 + s_1s_5 & c_1s_{234} & c_1c_{234}a_4 + c_1s_{234}d_5 + s_1(d_2 + d_3 + d_4) + c_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3) \\ s_1c_{234}c_5 - c_1s_5 & -s_1c_{234}s_5 - c_1c_5 & s_1s_{234} & s_1c_{234}a_4 + s_1s_{234}d_5 + s_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3) - c_1(d_2 + d_3 + d_4) \\ s_{234}c_5 & -s_{234}s_5 & -c_{234} & s_{234}a_4 - c_{234}d_5 + s_{23}a_3 + s_2a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_5T &= \boxed{\begin{bmatrix} c_1c_{234}c_5 + s_1s_5 & -c_1c_{234}s_5 + s_1c_5 & c_1s_{234} & s_1(d_2 + d_3 + d_4) + c_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3 + c_{234}a_4 + s_{234}d_5) \\ s_1c_{234}c_5 - c_1s_5 & -s_1c_{234}s_5 - c_1c_5 & s_1s_{234} & s_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3 + c_{234}a_4 + s_{234}d_5) - c_1(d_2 + d_3 + d_4) \\ s_{234}c_5 & -s_{234}s_5 & -c_{234} & d_1 + s_2a_2 + s_{23}a_3 + s_{234}a_4 - c_{234}d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}
\end{aligned}$$

Cálculos da Cinemática Direta – Resultado e Otimizações de Fórmulas

$${}^0_5T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{lll} c_i = \cos \theta_i & s_{23} = s_2 c_3 + c_2 s_3 \\ s_i = \sin \theta_i & c_{23} = c_2 s_3 - s_2 c_3 \\ i = 1, \dots, 5 & c_{234} = c_{23} c_4 - s_{23} s_4 \\ & s_{234} = s_{23} c_4 + c_{23} s_4 \end{array}$$

$$r_{11} = c_1 c_{234} c_5 + s_1 s_5$$

$$r_{21} = s_1 c_{234} c_5 - c_1 s_5$$

$$r_{31} = s_{234} c_5$$

$$r_{12} = s_1 c_5 - c_1 c_{234} s_5$$

$$r_{22} = -c_1 c_5 - s_1 c_{234} s_5$$

$$r_{32} = -s_{234} s_5$$

$$r_{13} = c_1 s_{234}$$

$$r_{23} = s_1 s_{234}$$

$$r_{33} = -c_{234}$$

$$d_{234} = d_2 + d_3 + d_4$$

$$f = a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23} + a_4 c_{234} + d_5 s_{234}$$

$$p_x = d_{234} s_1 + f c_1$$

$$p_y = f s_1 - d_{234} c_1$$

$$p_z = d_1 + a_2 s_2 + a_3 s_{23} + a_4 s_{234} - d_5 c_{234}$$

Utilizamos rotações em ângulos fixos em torno de X, Y e Z, respectivamente, cujos ângulos são γ , β e α , respectivamente. Para encontrar os ângulos γ , β e α , faremos:

$$\begin{aligned} \beta &= \text{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right) \\ \alpha &= \text{atan2}\left(\frac{r_{21}}{\cos \beta}, \frac{r_{11}}{\cos \beta}\right) \\ \gamma &= \text{atan2}\left(\frac{r_{32}}{\cos \beta}, \frac{r_{33}}{\cos \beta}\right) \end{aligned}$$

As fórmulas para α e γ são válidas para $\beta \neq \pm 90^\circ$. Se $\beta = 90^\circ$:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \gamma &= \text{atan2}(r_{12}, r_{22}) \end{aligned}$$

Se $\beta = -90^\circ$:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \gamma &= -\text{atan2}(r_{12}, r_{22}) \end{aligned}$$

Para achar as coordenadas x, y e z da garra, basta fazer o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} x &= p_x + (L_3 + L_g) \cdot r_{13} \\ y &= p_y + (L_3 + L_g) \cdot r_{23} \\ z &= p_z + (L_3 + L_g) \cdot r_{33} \end{aligned}$$

Cinemática Inversa – Encontrando a matriz de transformação 5T_0

No software de controle, são fornecidas as coordenadas x, y, z, Rx, Ry e Rz, sendo que estas três últimas correspondem aos ângulos γ , β e α , respectivamente. A matriz 5T_0 a ser encontrada tem a seguinte forma:

$${}^5T_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^5R' & & {}^0P_{5ORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Onde ${}^5R'$ é a matriz de rotação para a posição XYZ alvo. Para achar ${}^5R'$, faz-se:

$${}^5R' = \begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} \\ r'_{21} & r'_{22} & r'_{23} \\ r'_{31} & r'_{32} & r'_{33} \end{bmatrix}$$

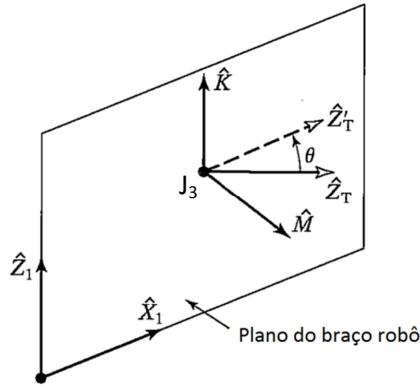
$$\begin{aligned} r'_{11} &= c\alpha c\beta \\ r'_{21} &= s\alpha c\beta \\ r'_{31} &= -s\beta \\ r'_{12} &= c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ r'_{22} &= s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \\ r'_{32} &= c\beta s\gamma \\ r'_{13} &= c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ r'_{23} &= s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ r'_{33} &= c\beta c\gamma \end{aligned} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} s\alpha = \sin \alpha \\ s\beta = \sin \beta \\ s\gamma = \sin \gamma \\ c\alpha = \cos \alpha \\ c\beta = \cos \beta \\ c\gamma = \cos \gamma \end{cases}$$

Para achar ${}^0P_{5ORG}$, faz-se:

$${}^0P_{5ORG} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_x &= x - (L_3 + L_g) \cdot r'_{13} \\ p_y &= y - (L_3 + L_g) \cdot r'_{23} \\ p_z &= z - (L_3 + L_g) \cdot r'_{33} \end{aligned}$$

Cinemática Inversa – Projetando o ponto x, y, z alvo no plano que corta o braço robô



Mesmo que o ponto ${}^0P_{ORG}$ sempre esteja no plano do braço robô, o ponto XYZ alvo da garra nem sempre estará, por conta dos ângulos γ , β e α , que podem, por exemplo, fazer a garra apontar para a direção do vetor \hat{Z}_T mostrado na figura. Para fazer a projeção do XYZ alvo da garra, seguem os cálculos:

$$\hat{M} = \frac{1}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \cdot \begin{bmatrix} -p_y \\ p_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{Z}_T = \begin{bmatrix} r'_{13} \\ r'_{23} \\ r'_{33} \end{bmatrix} \quad \hat{Y}_T = \begin{bmatrix} r'_{12} \\ r'_{22} \\ r'_{32} \end{bmatrix}$$

$$\hat{K} = \hat{M} \times \hat{Z}_T$$

$$\hat{Z}'_T = \hat{K} \times \hat{M}$$

$$\cos \theta = \hat{Z}_T \cdot \hat{Z}'_T$$

$$\sin \theta = (\hat{Z}_T \times \hat{Z}'_T) \cdot \hat{K}$$

Fórmula de Rodrigues:

$$\hat{Y}'_T = \cos \theta \cdot \hat{Y}_T + \sin \theta (\hat{K} \times \hat{Y}_T) + (1 - \cos \theta) (\hat{K} \cdot \hat{Y}_T) \hat{K}$$

$$\hat{X}'_T = \hat{Y}'_T \times \hat{Z}'_T$$

A nova matriz de rotação passa a ser (apenas para a cinemática inversa):

$${}^0_R = [\hat{X}'_T \quad \hat{Y}'_T \quad \hat{Z}'_T] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

De forma que o ponto XYZ alvo da garra passa a ser:

$$\begin{aligned} x &= p_x + (L_3 + L_g) \cdot r_{13} \\ y &= p_y + (L_3 + L_g) \cdot r_{23} \\ z &= p_z + (L_3 + L_g) \cdot r_{33} \end{aligned}$$

E as rotações passam a ser

$$\beta = \text{atan}2\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

$$\alpha = \text{atan}2\left(\frac{r_{21}}{\cos \beta}, \frac{r_{11}}{\cos \beta}\right)$$

$$\gamma = \text{atan}2\left(\frac{r_{32}}{\cos \beta}, \frac{r_{33}}{\cos \beta}\right)$$

As fórmulas para α e γ são válidas para $\beta \neq \pm 90^\circ$. Se $\beta = 90^\circ$:

$$\alpha = 0$$

$$\gamma = \text{atan}2(r_{12}, r_{22})$$

Se $\beta = -90^\circ$:

$$\alpha = 0$$

$$\gamma = -\text{atan}2(r_{12}, r_{22})$$

Teste de Colisão da garra com a base fixa

Consiste, basicamente, em representar a colisão da garra como um cruzamento de um segmento de reta (que representa a garra) com uma de várias áreas delimitadas de planos no espaço tridimensional (estas áreas representam as faces da base fixa).

Para a reta formada pela posição alvo $G = (x, y, z)$ e pelo pulso da garra $P = (p_x, p_y, p_z)$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - p_x \\ y - p_y \\ z - p_z \end{bmatrix} = (L_3 + L_g) \cdot \hat{Z}_T = (L_3 + L_g) \cdot \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}$$

Onde \hat{Z}_T é o vetor direção da garra.

Equação paramétrica da reta da garra:

$$\begin{cases} x = p_x + v_x \cdot t \\ y = p_y + v_y \cdot t \\ z = p_z + v_z \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = p_x + (L_3 + L_g) \cdot r_{13} \cdot t \\ y = p_y + (L_3 + L_g) \cdot r_{23} \cdot t \\ z = p_z + (L_3 + L_g) \cdot r_{33} \cdot t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Equação simétrica:

$$\frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y} = \frac{z - p_z}{v_z}$$

$$\frac{x - p_x}{(L_3 + L_g) \cdot r_{13}} = \frac{y - p_y}{(L_3 + L_g) \cdot r_{23}} = \frac{z - p_z}{(L_3 + L_g) \cdot r_{33}} = t \quad 0 \leq t \leq 1$$

Para a base fixa, parte contendo o servo da junta JO:

$$\text{Equação geral dos planos para } \vec{N} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \text{ e } P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}: \quad n_x x + n_y y + n_z z + (-n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0) = 0$$

$$\text{Plano 1: lado positivo do eixo Y: } \vec{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_{0_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 0 \end{bmatrix}:$$

$$y - 2,5 = 0 \Rightarrow y = 2,5 \quad -5 \leq x \leq 3 \quad 0 \leq z \leq 13,2$$

$$\text{Plano 2: lado negativo do eixo Y: } \vec{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_{0_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2,5 \\ 0 \end{bmatrix}:$$

$$-y - 2,5 = 0 \Rightarrow y = -2,5 \quad -5 \leq x \leq 3 \quad 0 \leq z \leq 13,2$$

$$\text{Plano 3: lado positivo do eixo X: } \vec{N}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_{0_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}:$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad -2,5 \leq y \leq 2,5 \quad 0 \leq z \leq 13,2$$

$$\text{Plano 4: lado negativo do eixo X: } \vec{N}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_{0_4} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x - 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \quad -2,5 \leq y \leq 2,5 \quad 0 \leq z \leq 13,2$$

$$\text{Plano 5: lado positivo do eixo Z: } \vec{N}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } P_{0_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 13,2 \end{bmatrix}:$$

$$z - 13,2 = 0 \Rightarrow z = 13,2 \quad -5 \leq x \leq 3 \quad -2,5 \leq y \leq 2,5$$

$$\text{Plano 6: lado positivo do eixo Z (base maior): } \vec{N}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } P_{0_6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$z = 0 \quad -34,34 \leq x \leq 3,36 \quad -9,95 \leq y \leq 9,95$$

Logo, a condição para detecção de colisão de um ponto da garra com a base fixa é:

$$((-5 \leq x \leq 3) \wedge (-2,5 \leq y \leq 2,5) \wedge (0 < z \leq 13,2)) \vee ((-34,34 \leq x \leq 3,36) \wedge (-9,95 \leq y \leq 9,95) \wedge (z \leq 0))$$

Caso nem o ponto da garra e nem o ponto do pulso colidam com a base, devemos verificar se a reta representante da garra colide com a base. Para isso, a equação da reta da garra é:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + t \cdot (L_3 + L_G) \cdot \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_x + (L_3 + L_G) \cdot r_{13} \cdot t \\ p_y + (L_3 + L_g) \cdot r_{23} \cdot t \\ p_z + (L_3 + L_g) \cdot r_{33} \cdot t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

E a equação geral dos planos da base é:

$$n_x x + n_y y + n_z z + (-n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0) = 0$$

Se a reta da garra de alguma forma se cruza com um plano da base, faz-se:

$$n_x(p_x + (L_3 + L_G) \cdot r_{13} \cdot t) + n_y(p_y + (L_3 + L_g) \cdot r_{23} \cdot t) + n_z(p_z + (L_3 + L_g) \cdot r_{33} \cdot t) + (-n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0) = 0$$

$$n_x p_x + (L_3 + L_G) \cdot n_x \cdot r_{13} \cdot t + n_y p_y + (L_3 + L_G) \cdot n_y \cdot r_{23} \cdot t + n_z p_z + (L_3 + L_G) \cdot n_z \cdot r_{33} \cdot t = n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0$$

$$(L_3 + L_G)(n_x r_{13} + n_y r_{23} + n_z r_{33}) \cdot t = n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0 - n_x p_x - n_y p_y - n_z p_z$$

$$(L_3 + L_G)(n_x r_{13} + n_y r_{23} + n_z r_{33}) \cdot t = n_x(x_0 - p_x) + n_y(y_0 - p_y) + n_z(z_0 - p_z)$$

$$t = \frac{n_x(x_0 - p_x) + n_y(y_0 - p_y) + n_z(z_0 - p_z)}{(L_3 + L_G)(n_x r_{13} + n_y r_{23} + n_z r_{33})}$$

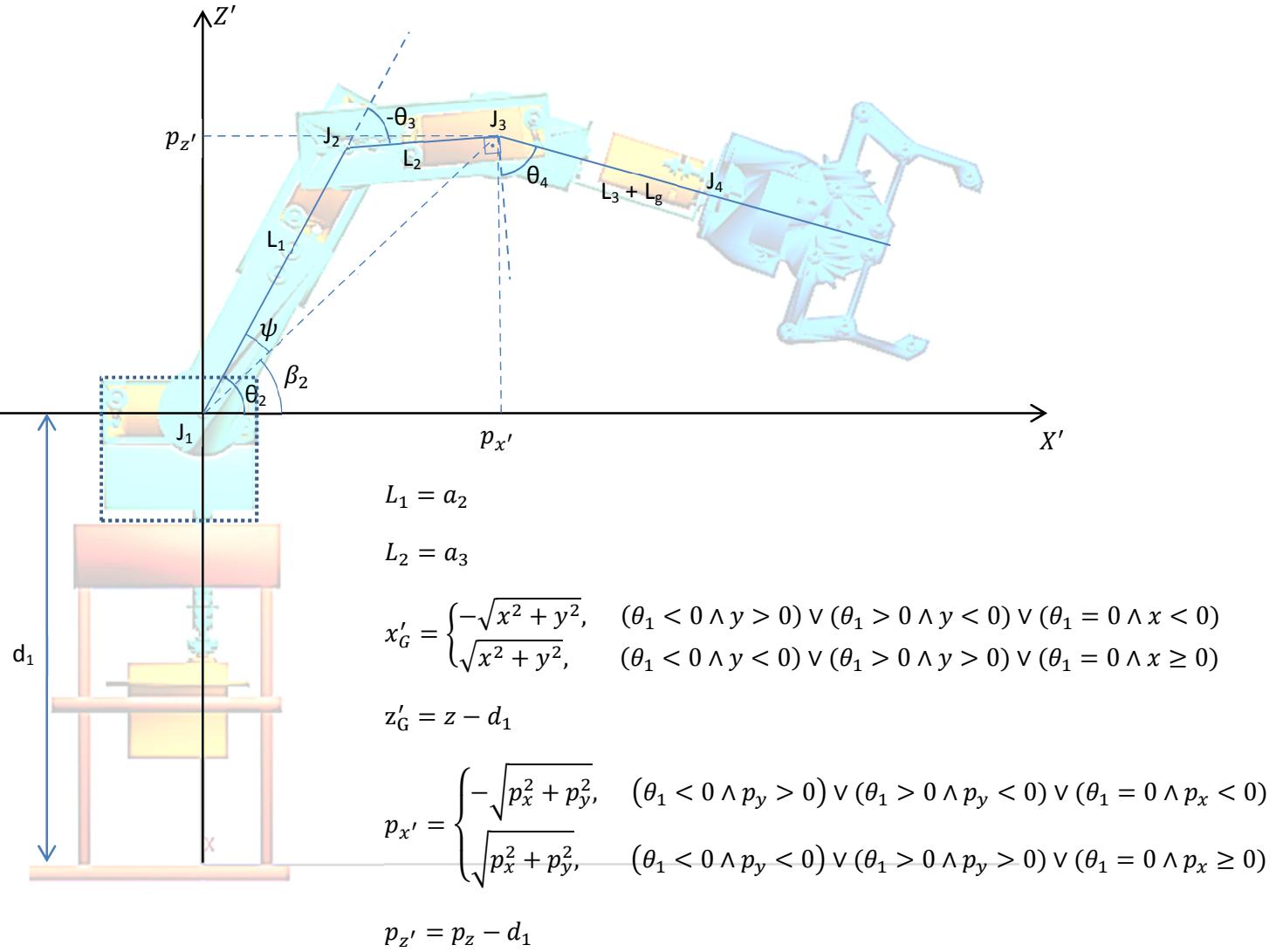
Um detalhe a ser observado é que, em qualquer situação em que a garra colida com a base, sem colidir o pulso e a posição alvo, obrigatoriamente vai cair em uma colisão com um de 2 planos: o plano 5 ou o plano 6. Testando estes 2 planos, elimina a necessidade de testar os demais planos.

Para cada plano a ser testado (5 e 6), deve-se:

1. Variar os parâmetros n_x, n_y, n_z, x_0, y_0 e z_0 ;
2. Testar se $(n_x r_{13} + n_y r_{23} + n_z r_{33}) \neq 0$. Se for verdade, vai para o passo 3. Caso contrário, a posição alvo é estritamente paralela ao plano e significa que não há nenhuma colisão entre a garra e o plano corrente. Voltar para o passo 1, se houver mais algum plano a ser testado.
3. Calcula o valor de t , e substitui na fórmula da reta da garra.
4. Testa se:
 - 2.1. O ponto XYZ calculado está entre a posição alvo e o pulso da garra e
 - 2.2. O ponto XYZ está dentro dos limites do plano testado.
 - 2.3. Se a resposta for verdadeira para ambas as condições, significa que haverá colisão da garra com a base para a posição alvo. Caso contrário, volta para o passo 1, se houver mais algum plano para ser testado. Caso todos os planos tenham sido testados e a resposta for falsa para ambas as condições, significa que não haverá colisão da garra com a base para a posição alvo.

Teste de colisão da garra com a base giratória

Para esta abordagem, precisaremos das coordenadas x, y e z da garra, coordenadas p_x , p_y e p_z do pulso, do ângulo θ_1 e do ângulo θ_{234} (ou dos ângulos θ_2 , θ_3 e θ_4). Lembrar que x, y e z devem ser coordenadas projetadas no plano vertical do braço robô.



Para esta abordagem, trataremos o pulso da garra (J_4) como se estivesse junto com J_3 , de forma que p_x , p_y e p_z se referem aos valores de coordenada de J_3 . Isso torna possível tratar o braço robô como se fosse um manipulador planar, de forma que, independente do ângulo θ_1 , a base giratória seja tratada como se fosse uma base fixa retangular, com tamanho fixo.

O ângulo de inclinação da garra em relação ao eixo X' :

$$\theta_G = \theta_{234} - 90^\circ = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 90^\circ$$

A equação da reta sobre a qual está a garra pode ser obtida como a seguir:

$$\tan \theta_G = \frac{z' - p'_z}{x' - p'_x} = a$$

$$z' - p'_z = a(x' - p'_x)$$

$$z' = ax' - ap'_x + p'_z$$

Fazendo $b = p'_z - ap'_x$, teremos como equação da reta da garra:

$$z' = ax' + b$$

O problema de usar esta equação da reta é que, no momento que θ_G assumir o ângulo de 90° ou -90° graus, o valor de $\tan \theta_G$ vai para infinito. Se for este o caso, usaremos:

$$x' = p'_x \quad \min(p'_z, z'_G) \leq z' \leq \max(p'_z, z'_G)$$

significando que a garra está na posição vertical.

Para a base giratória, podemos definir as seguintes relações:

$$(-3,95 \leq x' \leq 2,15) \wedge (-4,35 \leq z' \leq 1,2)$$

Nosso teste de colisão com a base giratória precisa ser mais abrangente, ou seja, ele precisa detectar como colisão, tanto posições dentro da base giratória como posições “atrás” da base giratória (posições que fazem a garra atravessar a base giratória). Portanto, podemos eliminar o limite inferior das relações da base giratória, resultando no seguinte:

$$(x' \leq 2,15) \wedge (z' \leq 1,2)$$

Ou seja, qualquer ponto da garra ou do pulso que atenda estas condições será detectado como ponto de colisão com a base giratória. Caso nem o ponto da garra e nem o ponto do pulso colidam com a base fixa, será necessário testar se algum ponto entre o pulso e o ponto garra colide com a base giratória. Uma colisão nessas condições obrigatoriamente vai ocorrer com as duas arestas da base giratória, de forma que só será necessário testar o cruzamento de uma delas com o segmento de reta da garra.

Assumindo $\theta_G \neq \pm 90^\circ$, se for testar com o segmento vertical da base giratória que fica do lado positivo do eixo X' ($x' = 2,15$), verificar se:

$$(\min(x'_G, p'_x) \leq 2,15 \leq \max(x'_G, p'_x)) \wedge (a \cdot 2,15 + b \leq 1,2)$$

Se for testar com o segmento horizontal da base giratória que fica do lado positivo do eixo Z' ($z' = 1,2$), poderíamos verificar se:

$$(\min(z'_G, p'_z) \leq 1,2 \leq \max(z'_G, p'_z)) \wedge \left(\frac{1,2 - b}{a} \leq 2,15 \right)$$

exceto se $a = 0$ ($\theta_G = 0^\circ$), o que nos faz concluir que a condição computacionalmente mais adequada é a que testa o segmento vertical da base giratória. Em ambos os casos, se a condição for verdadeira, haverá colisão da garra com a base giratória.

Assumindo $\theta_G = \pm 90^\circ$, haverá colisão da garra com a base giratória se:

$$(2,15 = p'_x) \wedge (\min(p'_z, z'_G) \leq 1,2 \leq \max(p'_z, z'_G))$$

Colisão com o segmento L₁ – requisitos

Para detecção de colisão da garra com o segmento L₁, serão necessários os valores de θ_2 , x'_G , z'_G , p'_x e p'_z .

Colisão com o segmento L₁ – primeira abordagem – para $\theta_2 \neq 90^\circ$

Ainda no mesmo referencial, testar a colisão com o segmento L₁ será como testar se o segmento de reta da garra cruza com o segmento de reta do segmento L₁. Para isso, podemos definir a fórmula do segmento L₁ como segue:

$$z' = a_{L_1}x' \quad (0 \leq x' \leq L_1 \cos \theta_2) \wedge (0 \leq z' \leq L_1 \sin \theta_2) \wedge (\theta_2 \neq 90^\circ)$$

Esta fórmula se torna um problema quando $\theta_2 = 90^\circ$. Podemos, então, usar a forma paramétrica dela:

$$\begin{cases} x' = L_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot t \\ z' = L_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Para a equação da garra $z' = ax' + b$ usaremos a forma paramétrica da mesma que assume a seguinte forma:

$$P = P_0 + v \cdot t$$

Sendo P um ponto no plano X'Z', P₀ o ponto do pulso da garra, v o vetor direção do segmento de reta da garra e t um valor entre 0 e 1. Ou seja:

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} & P_0 &= \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_z \end{bmatrix} & v &= \begin{bmatrix} x'_G - p'_x \\ z'_G - p'_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_G - p'_x \\ z'_G - p'_z \end{bmatrix} \cdot t \\ \begin{cases} x' = p'_x + (x'_G - p'_x) \cdot t \\ z' = p'_z + (z'_G - p'_z) \cdot t \end{cases} & 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

Substituindo as equações paramétricas do segmento de reta da garra na equação do segmento L₁, teremos:

$$\begin{aligned} z' &= a_{L_1}x' \quad (0 \leq x' \leq L_1 \cos \theta_2) \wedge (0 \leq z' \leq L_1 \sin \theta_2) \\ p'_z + (z'_G - p'_z) \cdot t &= a_{L_1} \cdot (p'_x + (x'_G - p'_x) \cdot t) \\ t((z'_G - p'_z) - a_{L_1} \cdot (x'_G - p'_x)) &= a_{L_1} \cdot p'_x - p'_z \\ t &= \boxed{\frac{a_{L_1} \cdot p'_x - p'_z}{(z'_G - p'_z) - a_{L_1} \cdot (x'_G - p'_x)}} \end{aligned}$$

Se $(z'_G - p'_z) - a_{L_1} \cdot (x'_G - p'_x) = 0$, significa que a garra não colide com o segmento L₁. Caso contrário, devemos calcular o valor de t e substituir na equação paramétrica da reta da garra. Dado que o ponto do segmento L₁ onde se encontra a junta 2 é definido por:

$$\begin{aligned} x'_{J_2} &= L_1 \cdot \cos \theta_2 \\ z'_{J_2} &= L_1 \cdot \sin \theta_2 \end{aligned}$$

Devemos testar se o ponto calculado na equação paramétrica da garra pertence ao segmento L₁. Para isso, devemos testar se:

$$\begin{aligned} (z' = a_{L_1} \cdot x') \wedge (\min(0, x'_{J_2}) \leq x' \leq \max(0, x'_{J_2})) \wedge (\min(0, z'_{J_2}) \leq z' \leq \max(0, z'_{J_2})) \\ \wedge (\min(x'_G, p'_x) \leq x' \leq \max(x'_G, p'_x)) \wedge (\min(p'_z, z'_G) \leq z' \leq \max(p'_z, z'_G)) \end{aligned}$$

Se esta condição for verdade, significa que a garra colide com o segmento L₁. Caso contrário, a garra não colide com o segmento L₁.

Esta abordagem é falha para $\theta_2 = 90^\circ$, pois faz a_{L_1} tender para infinito.

Colisão com o segmento L₁ – segunda abordagem – para $\theta_2 = 90^\circ$

Nesta abordagem, trataremos o caso em que $\theta_2 = 90^\circ$. Igualando as equações paramétricas do segmento L₁ com o segmento da garra, teremos:

$$\begin{cases} L_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot t = p'_x + (x'_G - p'_x) \cdot t \\ L_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot t = p'_z + (z'_G - p'_z) \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &= p'_x + (x'_G - p'_x) \cdot t \\ L_1 \cdot t &= p'_z + (z'_G - p'_z) \cdot t \end{aligned}$$

Resolvendo a primeira equação para t, teremos:

$$t = -\frac{p'_x}{x'_G - p'_x}$$

Se $x'_G - p'_x = 0$, significa que a garra não colide com o segmento L₁. Caso contrário, devemos calcular o valor de t e substituir na equação paramétrica do segmento de reta da garra. Dado que o ponto em que se encontra a junta 2 (fim do segmento L₁) é definido por:

$$\begin{cases} x'_{J_2} = 0 \\ z'_{J_2} = L_1 \end{cases}$$

Devemos testar se o ponto (x', z') calculado pertence também ao segmento de reta do segmento L₁, ou seja, se:

$$(x' = x'_{J_2}) \wedge (0 \leq z' \leq z'_{J_2}) \wedge (\min(x'_G, p'_x) \leq x' \leq \max(x'_G, p'_x)) \wedge (\min(p'_z, z'_G) \leq z' \leq \max(p'_z, z'_G))$$

Se esta condição for verdadeira, a garra colide com o segmento L₁. Caso contrário, a garra não colide com o segmento L₁.

Cálculos da Cinemática Inversa – θ_1 e θ_5

$${}^1T = {}^0T^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^0R^T & & & -{}^0R^T \cdot {}^0P_{1ORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad {}^0T = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^1R & & & {}^0P_{1ORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$${}^0T^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & s_1 & 0 & \left[\begin{array}{ccc|c} -c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \end{array} \right] \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad {}^5T = \left[\begin{array}{cccc} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$${}^1T^{-1} {}^0T = {}^0T^{-1}({}^0T {}^1T {}^2T {}^3T {}^4T {}^5T) = {}^1T {}^2T {}^3T {}^4T {}^5T$$

$${}^1T^{-1} {}^0T = \left[\begin{array}{cccc} c_1r_{11} + s_1r_{21} & c_1r_{12} + s_1r_{22} & c_1r_{13} + s_1r_{23} & c_1p_x + s_1p_y \\ -s_1r_{11} + c_1r_{21} & -s_1r_{12} + c_1r_{22} & -s_1r_{13} + c_1r_{23} & -s_1p_x + c_1p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$${}^1T {}^2T {}^3T {}^4T {}^5T = \left[\begin{array}{cccc} t_{11} & t_{12} & t_{31} & v_x \\ t_{21} & t_{22} & t_{32} & v_y \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$t_{11} = c_1^2 c_{234} c_5 + c_1 s_1 s_5 + s_1^2 c_{234} c_5 - s_1 c_1 s_5 = c_{234} c_5 (c_1^2 + s_1^2) = c_{234} c_5$$

$$t_{21} = -s_1 c_1 c_{234} c_5 - s_1^2 s_5 + c_1 s_1 c_{234} c_5 - c_1^2 s_5 = -s_5$$

$$t_{31} = s_{234} c_5$$

$$t_{12} = -c_1^2 c_{234} s_5 + c_1 s_1 c_5 - s_1^2 c_{234} s_5 - s_1 c_1 c_5 = -c_{234} s_5$$

$$t_{22} = s_1 c_1 c_{234} s_5 - s_1^2 c_5 - c_1 s_1 c_{234} s_5 - c_1^2 c_5 = -c_5$$

$$t_{32} = -s_{234} s_5$$

$$t_{13} = c_1^2 s_{234} + s_1^2 s_{234} = s_{234}$$

$$t_{23} = -s_1 c_1 s_{234} + c_1 s_1 s_{234} = 0$$

$$t_{33} = -c_{234}$$

$$v_x = c_1 s_1 d_{234} - s_1 c_1 f + c_1 s_1 f - s_1 c_1 d_{234} = f$$

$$v_y = -s_1^2 d_{234} - s_1 c_1 f + c_1 s_1 f - c_1^2 d_{234} = -d_{234}$$

$$v_z = s_2 a_2 + s_{23} a_3 + s_{234} a_4 - c_{234} d_5$$

Para o cálculo de θ_1 (todas as soluções), temos:

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = -d_{234}$$

$$\boxed{\theta_1 = \text{atan2}(-p_x, p_y) \pm \text{atan2}\left(\sqrt{p_y^2 + p_x^2 - d_{234}^2}, -d_{234}\right)} \quad (\text{soluções 1 e 2})$$

$$-s_1 r_{13} + c_1 r_{23} = 0$$

$$\boxed{\theta_1 = \text{atan2}(r_{23}, r_{13})} \quad (\text{solução 3})$$

$$\boxed{\theta_1 = \text{atan2}(-r_{23}, -r_{13})} \quad (\text{solução 4})$$

Conhecido θ_1 , temos, para θ_5 :

$$\begin{cases} -s_1 r_{11} + c_1 r_{21} = -s_5 \\ -s_1 r_{12} + c_1 r_{22} = -c_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_5 = s_1 r_{11} - c_1 r_{21} \\ c_5 = s_1 r_{12} - c_1 r_{22} \\ \theta_5 = \text{atan2}(s_5, c_5) \end{cases}$$

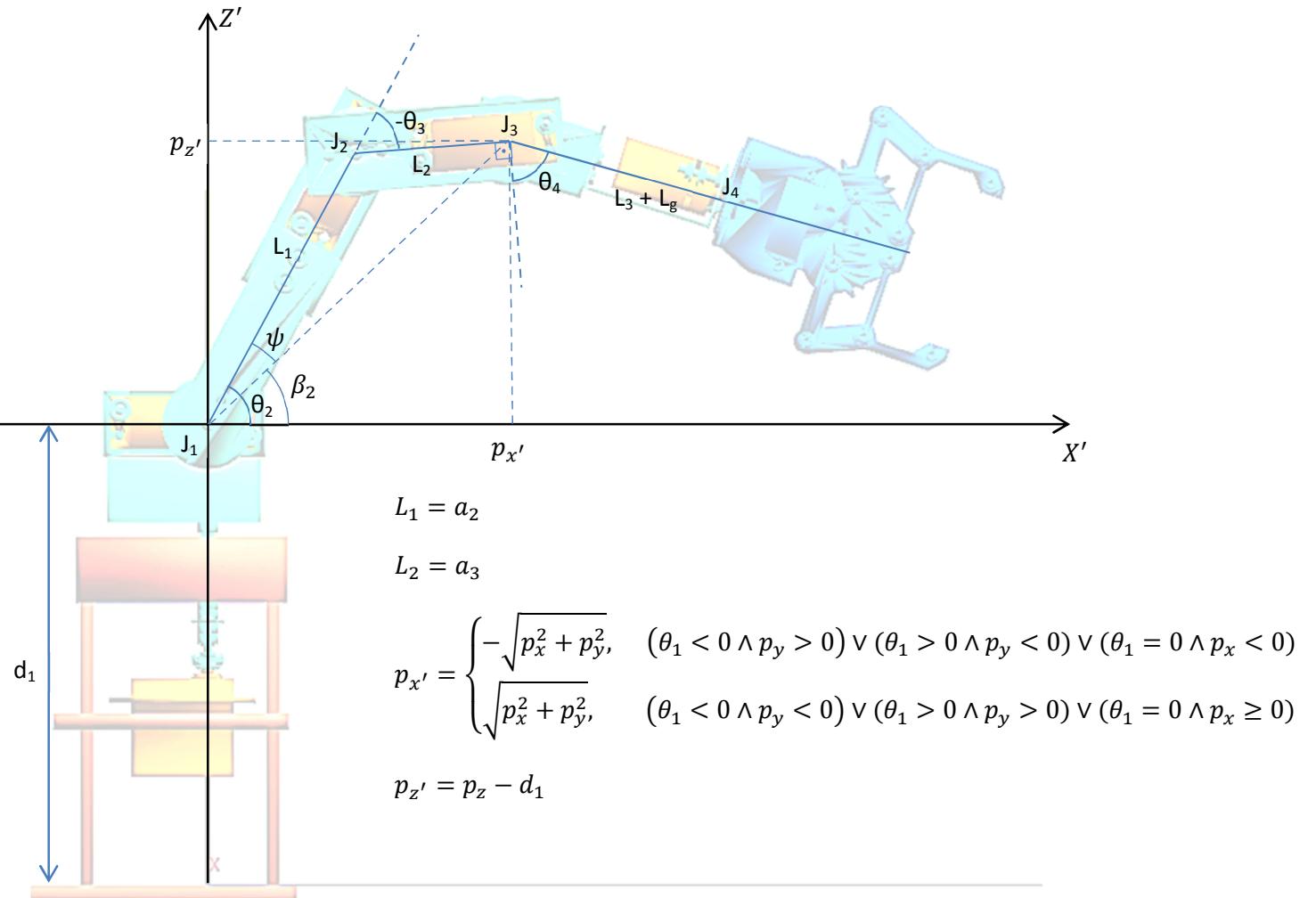
Conhecido θ_1 , temos, para θ_{234} :

$$s_{234} = c_1 r_{13} + s_1 r_{23}$$

$$c_{234} = -r_{33}$$

$$\theta_{234} = \text{atan2}(s_{234}, c_{234})$$

Cinemática Inversa – Abordagem geométrica para θ_2, θ_3 e θ_4



Para esta abordagem, trataremos o pulso da garra (J₄) como se estivesse junto com J₃, de forma que p_x, p_y e p_z se referem aos valores de coordenada de J₃. Isso torna possível a abordagem geométrica como se o braço robô fosse um manipulador planar.

Para θ_3 , temos, a partir do triângulo formado por J₁, J₂ e J₃:

$$p_{x'}^2 + p_{z'}^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot \cos(180^\circ + \theta_3)$$

$$\cos \theta_3 = \frac{p_{x'}^2 + p_{z'}^2 - a_2^2 - a_3^2}{2 \cdot a_2 \cdot a_3}$$

Como θ_3 será sempre menor ou igual a zero, então:

$$\sin \theta_3 = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta_3}$$

Logo:

$$\theta_3 = \text{atan2}(\sin \theta_3, \cos \theta_3)$$

Para θ_2 , calculamos os ângulos β_2 e ψ :

$$\beta_2 = \text{atan2}(p_{z'}, p_{x'})$$

$$\cos \psi = \frac{p_{x'}^2 + p_{z'}^2 + a_2^2 - a_3^2}{2 \cdot a_2 \cdot \sqrt{p_{x'}^2 + p_{z'}^2}}$$

Como ψ será sempre maior ou igual à zero, então:

$$\sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi}$$

$$\psi = \text{atan2}(\sin \psi, \cos \psi)$$

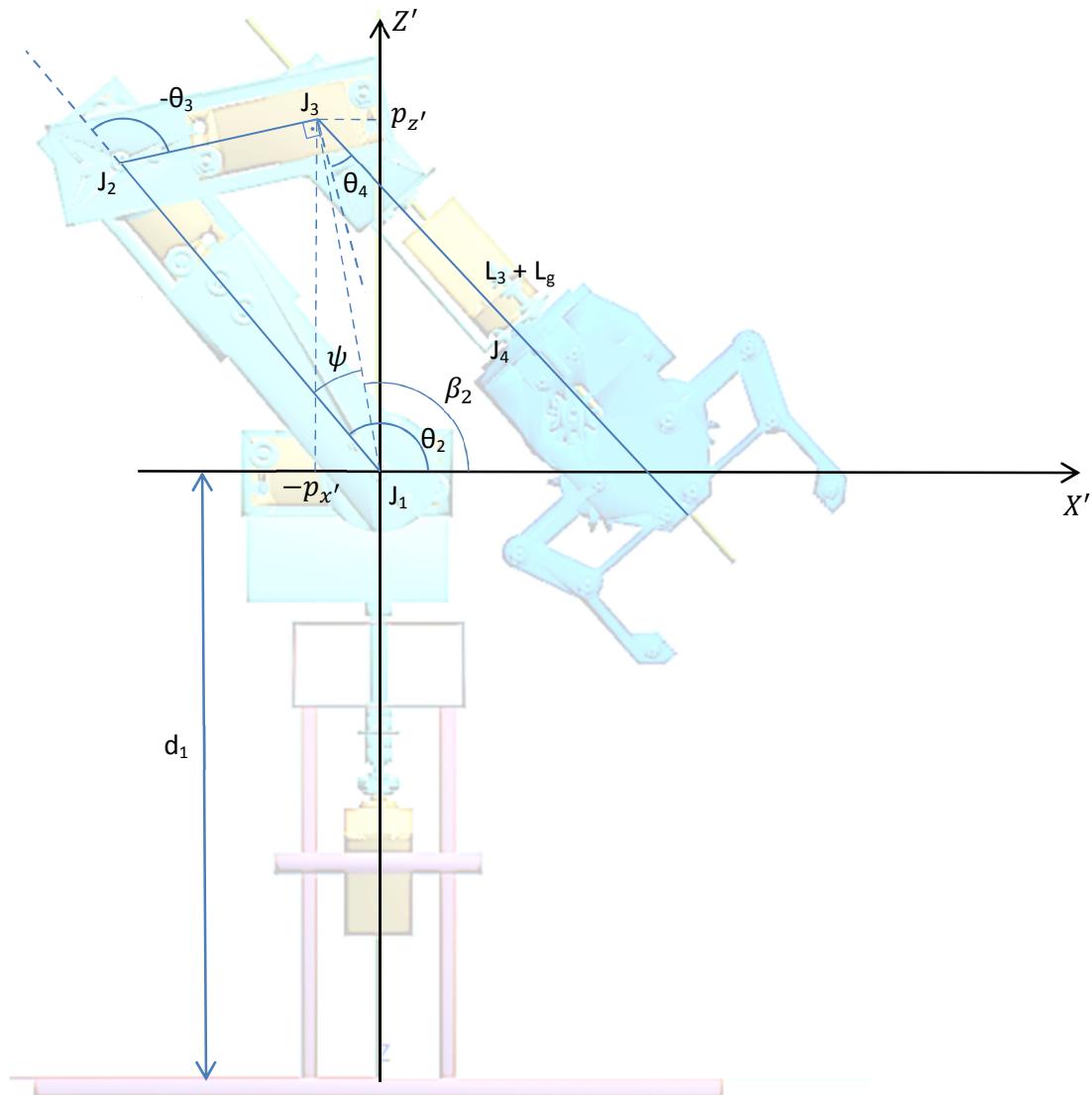
Logo:

$$\theta_2 = \beta_2 + \psi$$

Logo, para θ_4 , temos:

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_2 - \theta_3$$

Braço robô na posição de repouso



Observe que, nesta posição, o $p_{x'}$ deve assumir valor negativo, pois está no lado negativo do eixo X' , o que justifica a fórmula do $p_{x'}$ ser:

$$p_{x'} = \begin{cases} -\sqrt{p_x^2 + p_y^2}, & (\theta_1 < 0 \wedge p_y > 0) \vee (\theta_1 > 0 \wedge p_y < 0) \vee (\theta_1 = 0 \wedge p_x < 0) \\ \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, & (\theta_1 < 0 \wedge p_y < 0) \vee (\theta_1 > 0 \wedge p_y > 0) \vee (\theta_1 = 0 \wedge p_x \geq 0) \end{cases}$$

de forma que o ângulo β_2 seja calculado no quadrante correto.