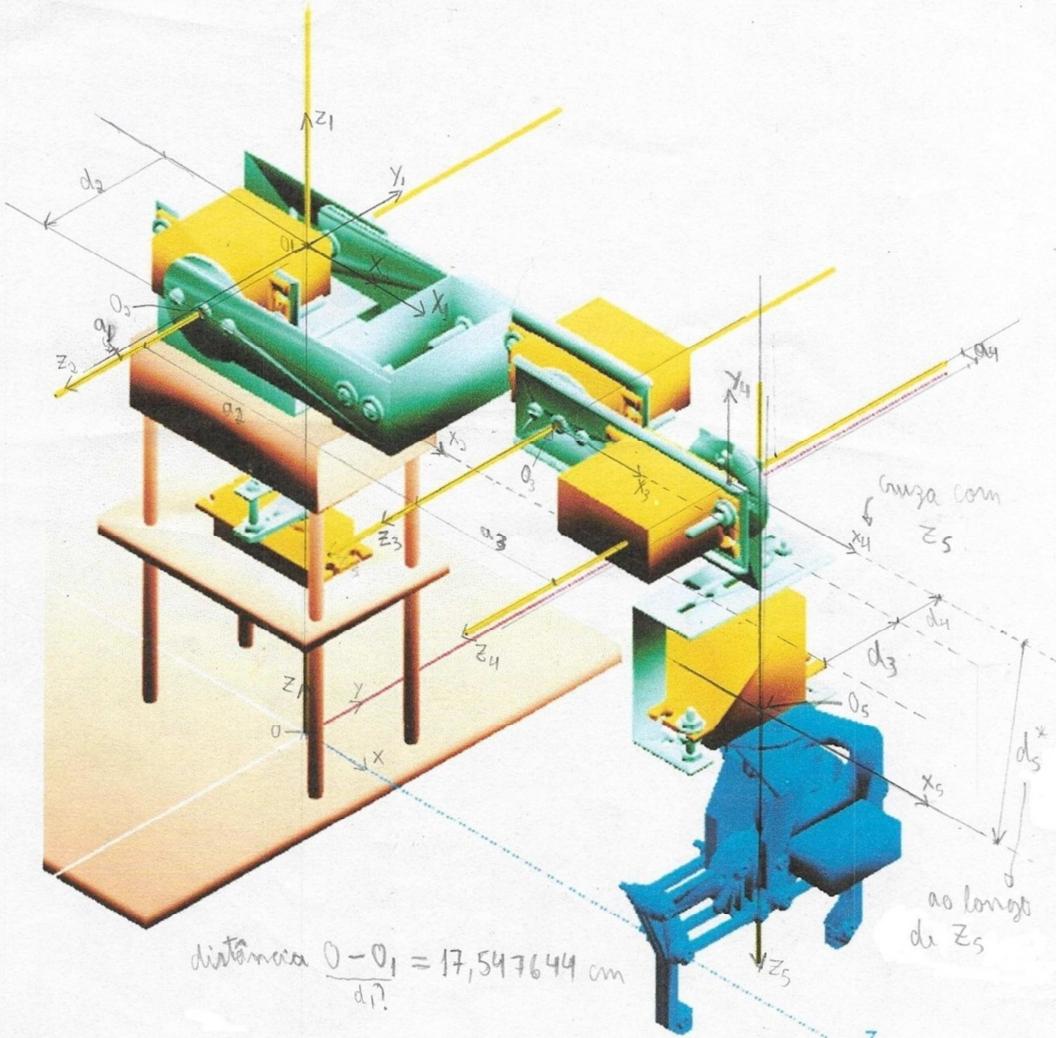


## Parâmetros de Denavit-Hartenberg (DH)

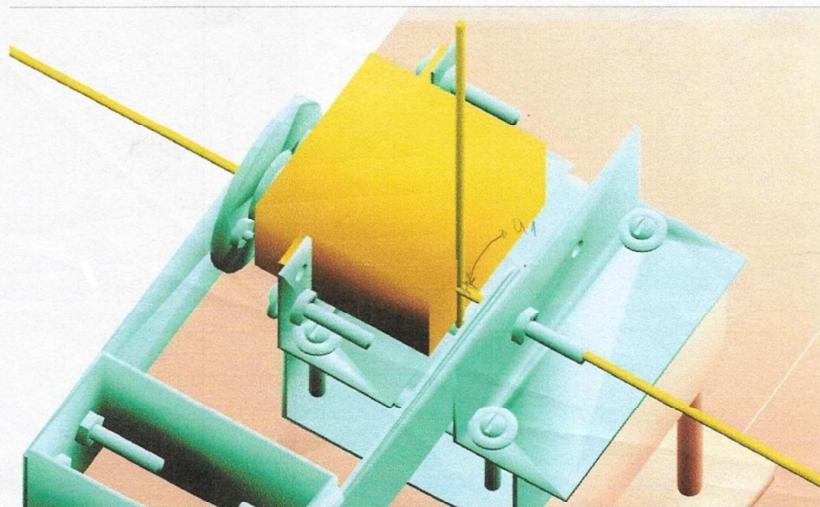
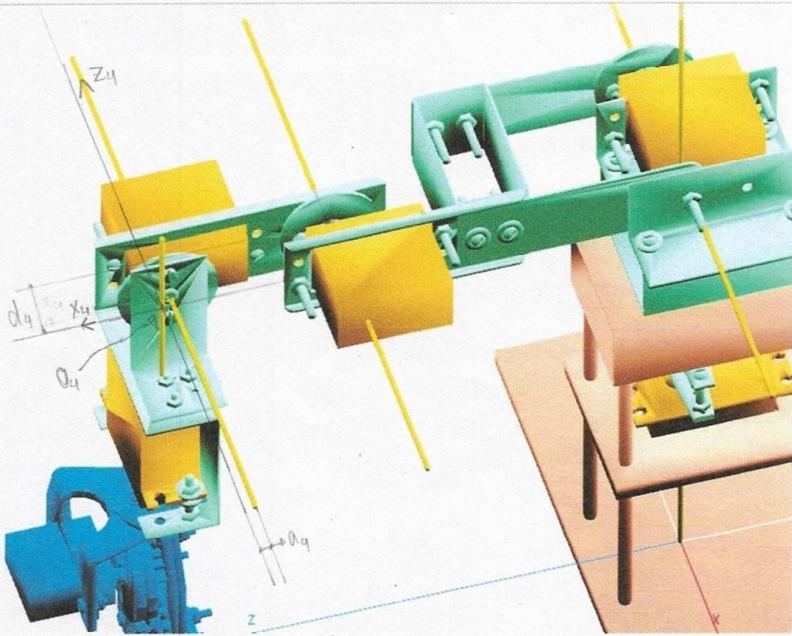


i	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	$90^\circ$	0,025cm	4,293516cm	$\theta_2$
3	0	11,65cm	-3,438032cm	$\theta_3$
4	0	5,825cm	-2,174584cm	$\theta_4$
5	$90^\circ$	0,45cm	8,633297cm	$\theta_5$

$d_3$  e  $d_4$  negativos?  
(linkido ao ponto  $z_1 + z_3$ )

Apesar de termos dado valores não nulos para  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_4$ ,  $d_5$ ,  $a_2$  e  $a_4$ , na cinemática implementada no software de controle consideramos todos eles como sendo zero, para que os pontos da garra e do pulso fiquem alinhados com a origem, de forma que seja possível definir um plano que corte o braço robô, que passe pela origem da base, pelo pulso e pelo ponto da garra.

Detalhes do a<sub>4</sub> e do a<sub>1</sub>



## Cálculos da Cinemática Direta

$$\begin{aligned}
{}^0_1T &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^1_2T &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_2T &= \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & c_1a_1 + s_1d_2 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 & s_1a_1 - c_1d_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^2_3T &= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_3T &= \begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - c_1s_2s_3 & -c_1c_2s_3 - c_1s_2c_3 & s_1 & c_1c_2a_2 + s_1d_3 + (c_1a_1 + s_1d_2) \\ s_1c_2c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1c_2s_3 - s_1s_2c_3 & -c_1 & s_1c_2a_2 - c_1d_3 + (s_1a_1 - c_1d_2) \\ s_2c_3 + c_2s_3 & -s_2s_3 + c_2c_3 & 0 & s_2a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_4T &= \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & s_1(d_2 + d_3) + c_1(a_1 + c_2a_2) \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & s_1(a_1 + c_2a_2) - c_1(d_2 + d_3) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & s_2a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^3_4T &= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_3 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_4T &= \begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 - c_1s_{23}s_4 & -c_1c_{23}s_4 - c_1s_{23}c_4 & s_1 & c_1c_{23}a_3 + s_1d_4 + s_1(d_2 + d_3) + c_1(a_1 + c_2a_2) \\ s_1c_{23}c_4 - s_1s_{23}s_4 & -s_1c_{23}s_4 - s_1s_{23}c_4 & -c_1 & s_1c_{23}a_3 - c_1d_4 + s_1(a_1 + c_2a_2) - c_1(d_2 + d_3) \\ s_{23}c_4 + c_{23}s_4 & -s_{23}s_4 + c_{23}c_4 & 0 & s_{23}a_3 + s_2a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_5T &= \begin{bmatrix} c_1c_{234} & -c_1s_{234} & s_1 & s_1(d_2 + d_3 + d_4) + c_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3) \\ s_1c_{234} & -s_1s_{234} & -c_1 & s_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3) - c_1(d_2 + d_3 + d_4) \\ s_{234} & c_{234} & 0 & s_{23} + s_2a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^4_5T &= \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & -1 & -d_5 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_5T &= \begin{bmatrix} c_1c_{234}c_5 + s_1s_5 & -c_1c_{234}s_5 + s_1s_5 & c_1s_{234} & c_1c_{234}a_4 + c_1s_{234}d_5 + s_1(d_2 + d_3 + d_4) + c_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3) \\ s_1c_{234}c_5 - c_1s_5 & -s_1c_{234}s_5 - c_1c_5 & s_1s_{234} & s_1c_{234}a_4 + s_1s_{234}d_5 + s_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3) - c_1(d_2 + d_3 + d_4) \\ s_{234}c_5 & -s_{234}s_5 & -c_{234} & s_{234}a_4 - c_{234}d_5 + s_{23}a_3 + s_2a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
{}^0_5T &= \boxed{\begin{bmatrix} c_1c_{234}c_5 + s_1s_5 & -c_1c_{234}s_5 + s_1c_5 & c_1s_{234} & s_1(d_2 + d_3 + d_4) + c_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3 + c_{234}a_4 + s_{234}d_5) \\ s_1c_{234}c_5 - c_1s_5 & -s_1c_{234}s_5 - c_1c_5 & s_1s_{234} & s_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3 + c_{234}a_4 + s_{234}d_5) - c_1(d_2 + d_3 + d_4) \\ s_{234}c_5 & -s_{234}s_5 & -c_{234} & d_1 + s_2a_2 + s_{23}a_3 + s_{234}a_4 - c_{234}d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}
\end{aligned}$$

## Cálculos da Cinemática Direta – Resultado e Otimizações de Fórmulas

$${}^0_5T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{lll} c_i = \cos \theta_i & s_{23} = s_2 c_3 + c_2 s_3 \\ s_i = \sin \theta_i & c_{23} = c_2 s_3 - s_2 c_3 \\ i = 1, \dots, 5 & c_{234} = c_{23} c_4 - s_{23} s_4 \\ & s_{234} = s_{23} c_4 + c_{23} s_4 \end{array}$$

$$r_{11} = c_1 c_{234} c_5 + s_1 s_5$$

$$r_{21} = s_1 c_{234} c_5 - c_1 s_5$$

$$r_{31} = s_{234} c_5$$

$$r_{12} = s_1 c_5 - c_1 c_{234} s_5$$

$$r_{22} = -c_1 c_5 - s_1 c_{234} s_5$$

$$r_{32} = -s_{234} s_5$$

$$r_{13} = c_1 s_{234}$$

$$r_{23} = s_1 s_{234}$$

$$r_{33} = -c_{234}$$

$$d_{234} = d_2 + d_3 + d_4$$

$$f = a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23} + a_4 c_{234} + d_5 s_{234}$$

$$p_x = d_{234} s_1 + f c_1$$

$$p_y = f s_1 - d_{234} c_1$$

$$p_z = d_1 + a_2 s_2 + a_3 s_{23} + a_4 s_{234} - d_5 c_{234}$$

Utilizamos rotações em ângulos fixos em torno de X, Y e Z, respectivamente, cujos ângulos são  $\gamma$ ,  $\beta$  e  $\alpha$ , respectivamente. Para encontrar os ângulos  $\gamma$ ,  $\beta$  e  $\alpha$ , faremos:

$$\begin{aligned} \beta &= \text{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right) \\ \alpha &= \text{atan2}\left(\frac{r_{21}}{\cos \beta}, \frac{r_{11}}{\cos \beta}\right) \\ \gamma &= \text{atan2}\left(\frac{r_{32}}{\cos \beta}, \frac{r_{33}}{\cos \beta}\right) \end{aligned}$$

As fórmulas para  $\alpha$  e  $\gamma$  são válidas para  $\beta \neq 0$ . Se  $\beta = 90^\circ$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \gamma &= \text{atan2}(r_{12}, r_{22}) \end{aligned}$$

Se  $\beta = -90^\circ$ :

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \gamma &= -\text{atan2}(r_{12}, r_{22}) \end{aligned}$$

Para achar as coordenadas x, y e z da garra, basta fazer o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} x &= p_x + (L_3 + L_g) \cdot r_{13} \\ y &= p_y + (L_3 + L_g) \cdot r_{23} \\ z &= p_z + (L_3 + L_g) \cdot r_{33} \end{aligned}$$

## Cinemática Inversa – Encontrando a matriz de transformação ${}^5T_0$

No software de controle, são fornecidas as coordenadas x, y, z, Rx, Ry e Rz, sendo que estas três últimas correspondem aos ângulos  $\gamma$ ,  $\beta$  e  $\alpha$ , respectivamente. A matriz  ${}^5T_0$  a ser encontrada tem a seguinte forma:

$${}^5T_0 = \left[ \begin{array}{ccc|c} & {}^5R' & & {}^0P_{5ORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Onde  ${}^5R'$  é a matriz de rotação para a posição XYZ alvo. Para achar  ${}^5R'$ , faz-se:

$${}^5R' = \begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} \\ r'_{21} & r'_{22} & r'_{23} \\ r'_{31} & r'_{32} & r'_{33} \end{bmatrix}$$

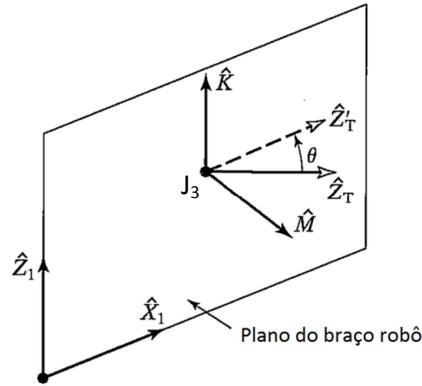
$$\begin{aligned} r'_{11} &= c\alpha c\beta \\ r'_{21} &= s\alpha c\beta \\ r'_{31} &= -s\beta \\ r'_{12} &= c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ r'_{22} &= s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \\ r'_{32} &= c\beta s\gamma \\ r'_{13} &= c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ r'_{23} &= s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ r'_{33} &= c\beta c\gamma \end{aligned} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} s\alpha = \sin \alpha \\ s\beta = \sin \beta \\ s\gamma = \sin \gamma \\ c\alpha = \cos \alpha \\ c\beta = \cos \beta \\ c\gamma = \cos \gamma \end{cases}$$

Para achar  ${}^0P_{5ORG}$ , faz-se:

$${}^0P_{5ORG} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_x &= x - (L_3 + L_g) \cdot r'_{13} \\ p_y &= y - (L_3 + L_g) \cdot r'_{23} \\ p_z &= z - (L_3 + L_g) \cdot r'_{33} \end{aligned}$$

Cinemática Inversa – Projetando o ponto x, y, z alvo no plano que corta o braço robô



Mesmo que o ponto  ${}^0P_{ORG}$  sempre esteja no plano do braço robô, o ponto XYZ alvo da garra nem sempre estará, por conta dos ângulos  $\gamma$ ,  $\beta$  e  $\alpha$ , que podem, por exemplo, fazer a garra apontar para a direção do vetor  $\hat{Z}_T$  mostrado na figura. Para fazer a projeção do XYZ alvo da garra, seguem os cálculos:

$$\hat{M} = \frac{1}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}} \cdot \begin{bmatrix} -p_y \\ p_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{Z}_T = \begin{bmatrix} r'_{13} \\ r'_{23} \\ r'_{33} \end{bmatrix} \quad \hat{Y}_T = \begin{bmatrix} r'_{12} \\ r'_{22} \\ r'_{32} \end{bmatrix}$$

$$\hat{K} = \hat{M} \times \hat{Z}_T$$

$$\hat{Z}'_T = \hat{K} \times \hat{M}$$

$$\cos \theta = \hat{Z}_T \cdot \hat{Z}'_T$$

$$\sin \theta = (\hat{Z}_T \times \hat{Z}'_T) \cdot \hat{K}$$

Fórmula de Rodrigues:

$$\hat{Y}'_T = \cos \theta \cdot \hat{Y}_T + \sin \theta (\hat{K} \times \hat{Y}_T) + (1 - \cos \theta) (\hat{K} \cdot \hat{Y}_T) \hat{K}$$

$$\hat{X}'_T = \hat{Y}'_T \times \hat{Z}'_T$$

A nova matriz de rotação passa a ser (apenas para a cinemática inversa):

$${}^0_R = [\hat{X}'_T \quad \hat{Y}'_T \quad \hat{Z}'_T] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

De forma que o ponto XYZ alvo da garra passa a ser:

$$\begin{aligned} x &= p_x + (L_3 + L_g) \cdot r_{13} \\ y &= p_y + (L_3 + L_g) \cdot r_{23} \\ z &= p_z + (L_3 + L_g) \cdot r_{33} \end{aligned}$$

E as rotações passam a ser

$$\beta = \text{atan}2\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right)$$

$$\alpha = \text{atan}2\left(\frac{r_{21}}{\cos \beta}, \frac{r_{11}}{\cos \beta}\right)$$

$$\gamma = \text{atan}2\left(\frac{r_{32}}{\cos \beta}, \frac{r_{33}}{\cos \beta}\right)$$

As fórmulas para  $\alpha$  e  $\gamma$  são válidas para  $\beta \neq 0$ . Se  $\beta = 90^\circ$ :

$$\alpha = 0$$

$$\gamma = \text{atan}2(r_{12}, r_{22})$$

Se  $\beta = -90^\circ$ :

$$\alpha = 0$$

$$\gamma = -\text{atan}2(r_{12}, r_{22})$$

Teste de Colisão da garra com a base fixa:

Consiste, basicamente, de representar a colisão da garra como um cruzamento de um segmento de reta (que representa a garra) com uma de várias áreas delimitadas de planos no espaço tridimensional (estas áreas representam as faces da base fixa).

Para a reta formada pela posição alvo  $G = (x, y, z)$  e pelo pulso da garra  $P = (p_x, p_y, p_z)$ :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - p_x \\ y - p_y \\ z - p_z \end{bmatrix} = (L_3 + L_g) \cdot \hat{Z}_T = (L_3 + L_g) \cdot \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}$$

Equação paramétrica da reta da garra:

$$\begin{cases} x = p_x + v_x \cdot t \\ y = p_y + v_y \cdot t \\ z = p_z + v_z \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = p_x + (L_3 + L_g) \cdot r_{13} \cdot t \\ y = p_y + (L_3 + L_g) \cdot r_{23} \cdot t \\ z = p_z + (L_3 + L_g) \cdot r_{33} \cdot t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Equação simétrica:

$$\frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y} = \frac{z - p_z}{v_z}$$

$$\frac{x - p_x}{(L_3 + L_g) \cdot r_{13}} = \frac{y - p_y}{(L_3 + L_g) \cdot r_{23}} = \frac{z - p_z}{(L_3 + L_g) \cdot r_{33}} = t \quad 0 \leq t \leq 1$$

Para a base fixa, parte contendo o servo da junta JO:

Equação geral dos planos para  $\vec{N} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$  e  $P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ :  $n_x x + n_y y + n_z z + (-n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0) = 0$

Plano 1, no lado positivo do eixo Y:  $\vec{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $P_{0_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 0 \end{bmatrix}$ :

$$y - 2.5 = 0 \Rightarrow y = 2.5 \quad -5 \leq x \leq 3 \quad 0 \leq z \leq 13.2$$

Plano 2, no lado negativo do eixo Y:  $\vec{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $P_{0_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.5 \\ 0 \end{bmatrix}$ :

$$-y - 2.5 = 0 \Rightarrow y = -2.5 \quad -5 \leq x \leq 3 \quad 0 \leq z \leq 13.2$$

Plano 3: no lado positivo do eixo X:  $\vec{N}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $P_{0_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ :

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad -2.5 \leq y \leq 2.5 \quad 0 \leq z \leq 13.2$$

Plano 4: no lado negativo do eixo X:  $\vec{N}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $P_{0_4} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$-x - 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \quad -2.5 \leq y \leq 2.5 \quad 0 \leq z \leq 13.2$$

Plano 5: Lado positivo do eixo Z:  $\vec{N}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  e  $P_{0_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 13.2 \end{bmatrix}$ :

$$z - 13.2 = 0 \Rightarrow z = 13.2 \quad -5 \leq x \leq 3 \quad -2.5 \leq y \leq 2.5$$

Plano 6: Lado positivo do eixo Z (base maior):  $\vec{N}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  e  $P_{0_6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$z = 0 \quad -34.34 \leq x \leq 3.36 \quad -9.95 \leq y \leq 9.95$$

Logo, a condição para detecção de colisão de um ponto da garra com a base fixa é:

$$((-5 \leq x \leq 3) \wedge (-2.5 \leq y \leq 2.5) \wedge (0 < z \leq 13.2)) \vee ((-34.34 \leq x \leq 3.36) \wedge (-9.95 \leq y \leq 9.95) \wedge (z \leq 0))$$

Caso nem o ponto da garra e nem o ponto do pulso colidam com a base, devemos verificar se a reta representante da garra colide com a base. Para isso, a equação da reta da garra é:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + t \cdot (L_3 + L_G) \cdot \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x + (L_3 + L_G) \cdot r_{13} \cdot t \\ p_y + (L_3 + L_g) \cdot r_{23} \cdot t \\ p_z + (L_3 + L_g) \cdot r_{33} \cdot t \end{bmatrix}$$

E a equação geral dos planos da base é:

$$n_x x + n_y y + n_z z + (-n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0) = 0$$

Se a reta da garra de alguma forma se cruza com um plano da base, faz-se:

$$n_x(p_x + (L_3 + L_G) \cdot r_{13} \cdot t) + n_y(p_y + (L_3 + L_g) \cdot r_{23} \cdot t) + n_z(p_z + (L_3 + L_g) \cdot r_{33} \cdot t) + (-n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0) = 0$$

$$n_x p_x + (L_3 + L_G) \cdot n_x \cdot r_{13} \cdot t + n_y p_y + (L_3 + L_G) \cdot n_y \cdot r_{23} \cdot t + n_z p_z + (L_3 + L_G) \cdot n_z \cdot r_{33} \cdot t = n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0$$

$$(L_3 + L_G)(n_x r_{13} + n_y r_{23} + n_z r_{33}) \cdot t = n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0 - n_x p_x - n_y p_y - n_z p_z$$

$$(L_3 + L_G)(n_x r_{13} + n_y r_{23} + n_z r_{33}) \cdot t = n_x(x_0 - p_x) + n_y(y_0 - p_y) + n_z(z_0 - p_z)$$

$$t = \frac{n_x(x_0 - p_x) + n_y(y_0 - p_y) + n_z(z_0 - p_z)}{(L_3 + L_G)(n_x r_{13} + n_y r_{23} + n_z r_{33})}$$

Um detalhe a ser observado é que, em qualquer situação em que a garra colida com a base, sem colidir o pulso e a posição alvo obrigatoriamente vai cair em uma colisão com um de 2 planos: o plano 5 ou o plano 6. Testando estes 2 planos, elimina a necessidade de testar os demais planos.

Para cada plano a ser testado (5 e 6), deve-se:

1. Variar os parâmetros  $n_x, n_y, n_z, x_0, y_0$  e  $z_0$ ;
2. Testar se  $(n_x r_{13} + n_y r_{23} + n_z r_{33}) \neq 0$ . Se for verdade, vai para o passo 3. Caso contrário, a posição alvo é estritamente paralela ao plano e significa que não há nenhuma colisão entre a garra e o plano corrente. Voltar para o passo 1, se houver mais algum plano a ser testado.
3. Calcula o valor de  $t$ , e substitui na fórmula da reta da garra.
4. Testa se:
  - 2.1. O ponto XYZ calculado está entre a posição alvo e o pulso da garra e
  - 2.2. O ponto XYZ está dentro dos limites do plano testado.
  - 2.3. Se a resposta for verdadeira para ambas as condições, significa que haverá colisão da garra com a base para a posição alvo. Caso contrário, volta para o passo 1, se houver mais algum plano para ser testado. Caso todos os planos tenham sido testados e a resposta for falsa para ambas as condições, significa que não haverá colisão da garra com a base para a posição alvo.

## Cálculos da Cinemática Inversa – $\theta_1$ e $\theta_5$

$${}^1T = {}^0T^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|c} {}^0R^T & & & -{}^0R^T \cdot {}^0P_{1ORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad {}^0T = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} {}^1R & & & {}^0P_{1ORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$${}^0T^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_1 & s_1 & 0 & -c_1 & -s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & s_1 & -c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & d_1 & \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad {}^5T = \left[ \begin{array}{cccc} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$${}^1T^{-1} {}^0T = {}^0T^{-1}({}^0T {}^1T {}^2T {}^3T {}^4T {}^5T) = {}^1T {}^2T {}^3T {}^4T {}^5T$$

$${}^1T^{-1} {}^0T = \left[ \begin{array}{cccc} c_1r_{11} + s_1r_{21} & c_1r_{12} + s_1r_{22} & c_1r_{13} + s_1r_{23} & c_1p_x + s_1p_y \\ -s_1r_{11} + c_1r_{21} & -s_1r_{12} + c_1r_{22} & -s_1r_{13} + c_1r_{23} & -s_1p_x + c_1p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$${}^1T {}^2T {}^3T {}^4T {}^5T = \left[ \begin{array}{cccc} t_{11} & t_{12} & t_{31} & v_x \\ t_{21} & t_{22} & t_{32} & v_y \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$t_{11} = c_1^2 c_{234} c_5 + c_1 s_1 s_5 + s_1^2 c_{234} c_5 - s_1 c_1 s_5 = c_{234} c_5 (c_1^2 + s_1^2) = c_{234} c_5$$

$$t_{21} = -s_1 c_1 c_{234} c_5 - s_1^2 s_5 + c_1 s_1 c_{234} c_5 - c_1^2 s_5 = -s_5$$

$$t_{31} = s_{234} c_5$$

$$t_{12} = -c_1^2 c_{234} s_5 + c_1 s_1 c_5 - s_1^2 c_{234} s_5 - s_1 c_1 c_5 = -c_{234} s_5$$

$$t_{22} = s_1 c_1 c_{234} s_5 - s_1^2 c_5 - c_1 s_1 c_{234} s_5 - c_1^2 c_5 = -c_5$$

$$t_{32} = -s_{234} s_5$$

$$t_{13} = c_1^2 s_{234} + s_1^2 s_{234} = s_{234}$$

$$t_{23} = -s_1 c_1 s_{234} + c_1 s_1 s_{234} = 0$$

$$t_{33} = -c_{234}$$

$$v_x = c_1 s_1 d_{234} - s_1 c_1 f + c_1 s_1 f - s_1 c_1 d_{234} = f$$

$$v_y = -s_1^2 d_{234} - s_1 c_1 f + c_1 s_1 f - c_1^2 d_{234} = -d_{234}$$

$$v_z = s_2 a_2 + s_{23} a_3 + s_{234} a_4 - c_{234} d_5$$

Para o cálculo de  $\theta_1$ (todas as soluções), temos:

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = -d_{234}$$

$$\boxed{\theta_1 = \text{atan2}(-p_x, p_y) \pm \text{atan2}\left(\sqrt{p_y^2 + p_x^2 - d_{234}^2}, -d_{234}\right)} \quad (\text{soluções 1 e 2})$$

$$-s_1 r_{13} + c_1 r_{23} = 0$$

$$\boxed{\theta_1 = \text{atan2}(r_{23}, r_{13})} \quad (\text{solução 3})$$

$$\boxed{\theta_1 = \text{atan2}(-r_{23}, -r_{13})} \quad (\text{solução 4})$$

Conhecido  $\theta_1$ , temos, para  $\theta_5$ :

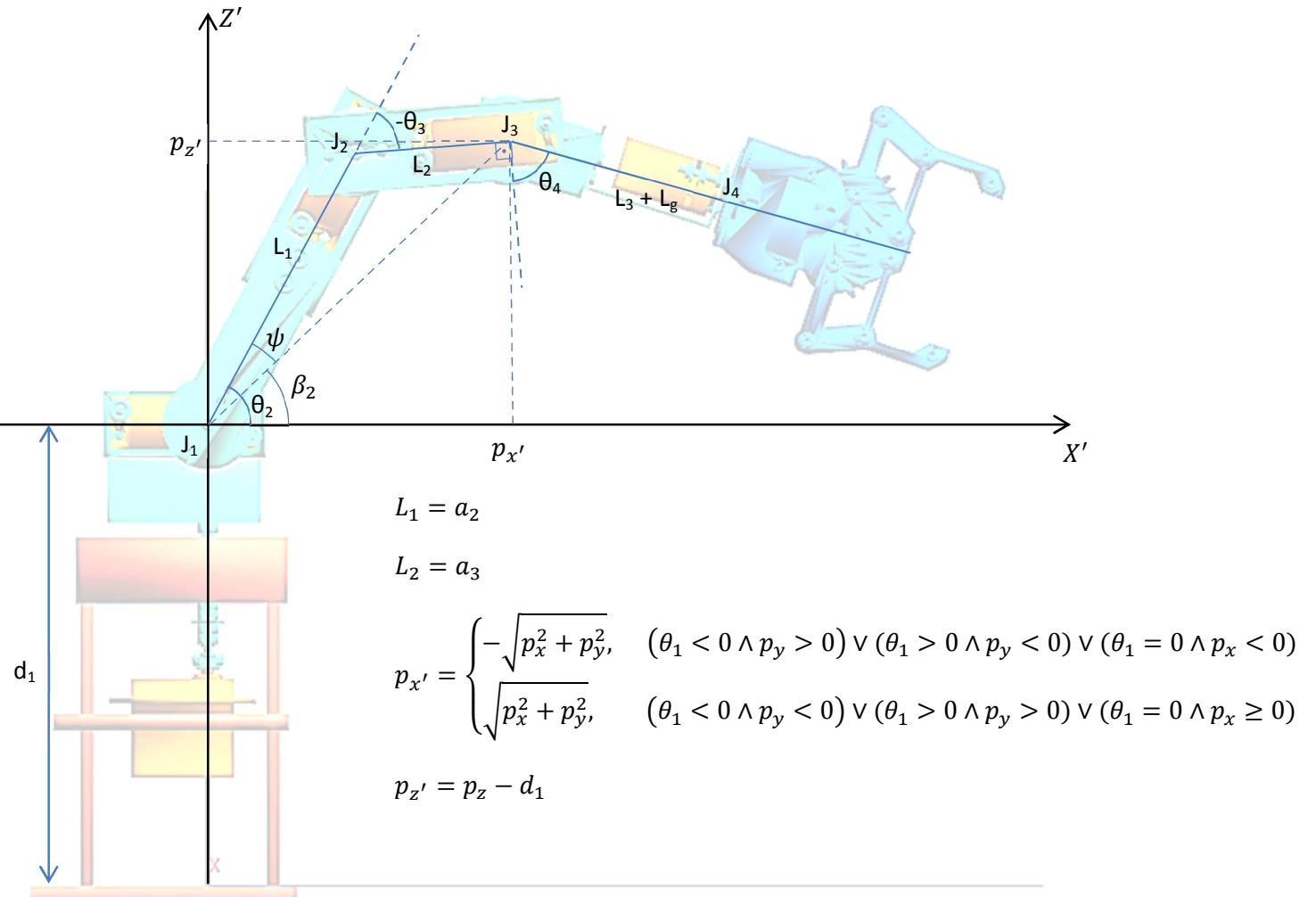
$$\begin{cases} -s_1 r_{11} + c_1 r_{21} = -s_5 \\ -s_1 r_{12} + c_1 r_{22} = -c_5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_5 = s_1 r_{11} - c_1 r_{21} \\ c_5 = s_1 r_{12} - c_1 r_{22} \\ \theta_5 = \text{atan2}(s_5, c_5) \end{cases}$$

Conhecido  $\theta_1$ , temos, para  $\theta_{234}$ :

$$\begin{aligned} s_{234} &= c_1 r_{13} + s_1 r_{23} \\ c_{234} &= -r_{33} \\ \theta_{234} &= \text{atan2}(s_5, c_5) \end{aligned}$$

## Cinemática Inversa – Abordagem geométrica para $\theta_2, \theta_3$ e $\theta_4$



Para esta abordagem, trataremos o pulso da garra ( $J_4$ ) como se estivesse junto com  $J_3$ , de forma que  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  se referem aos valores de coordenada de  $J_3$ . Isso torna possível a abordagem geométrica como se o braço robô fosse um manipulador planar.

Para  $\theta_3$ , temos, a partir do triângulo formado por  $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$ :

$$p_{x'}^2 + p_{z'}^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot \cos(180^\circ + \theta_3)$$

$$\cos \theta_3 = \frac{p_{x'}^2 + p_{z'}^2 - a_2^2 - a_3^2}{2 \cdot a_2 \cdot a_3}$$

Como  $\theta_3$  será sempre menor ou igual a zero, então:

$$\sin \theta_3 = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta_3}$$

Logo:

$$\theta_3 = \text{atan2}(\sin \theta_3, \cos \theta_3)$$

Para  $\theta_2$ , calculamos os ângulos  $\beta_2$  e  $\psi$ :

$$\beta_2 = \text{atan2}(p_{z'}, p_{x'})$$

$$\cos \psi = \frac{p_{x'}^2 + p_{z'}^2 + a_2^2 - a_3^2}{2 \cdot a_2 \cdot \sqrt{p_{x'}^2 + p_{z'}^2}}$$

Como  $\psi$  será sempre maior ou igual à zero, então:

$$\sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi}$$

$$\psi = \text{atan2}(\sin \psi, \cos \psi)$$

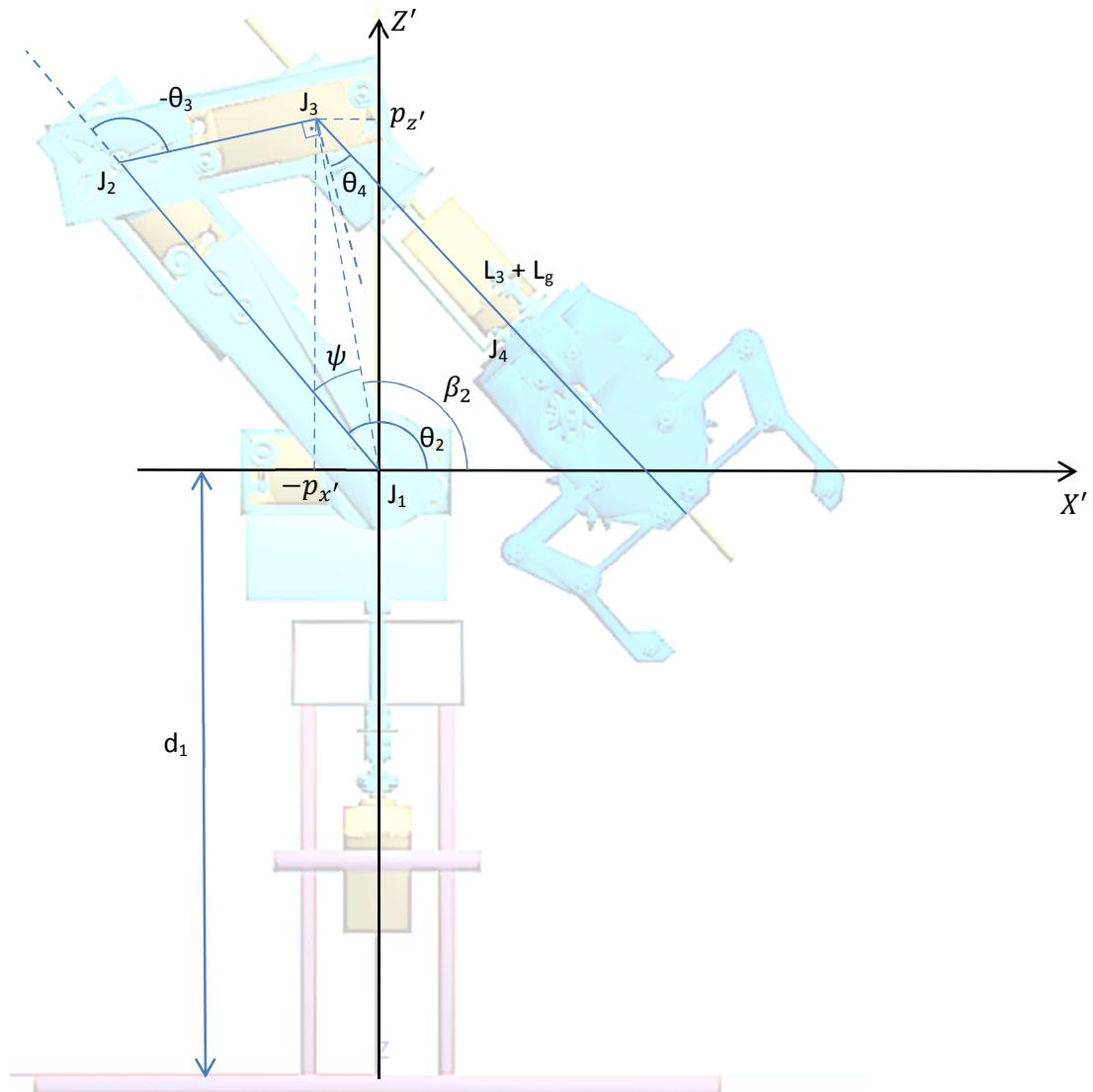
Logo:

$$\theta_2 = \beta_2 + \psi$$

Logo, para  $\theta_4$ , temos:

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_2 - \theta_3$$

### Braço robô na posição de repouso



Observe que, nesta posição, o  $p_{x'}$  deve assumir valor negativo, pois está no lado negativo do eixo  $X'$ , o que justifica a fórmula do  $p_{x'}$  ser:

$$p_{x'} = \begin{cases} -\sqrt{p_x^2 + p_y^2}, & (\theta_1 < 0 \wedge p_y > 0) \vee (\theta_1 > 0 \wedge p_y < 0) \vee (\theta_1 = 0 \wedge p_x < 0) \\ \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, & (\theta_1 < 0 \wedge p_y < 0) \vee (\theta_1 > 0 \wedge p_y > 0) \vee (\theta_1 = 0 \wedge p_x \geq 0) \end{cases}$$

de forma que o ângulo  $\beta_2$  seja calculado no quadrante correto.