

AMARO DUARTE DE PAULA NETO

**CÁLCULOS E ALGORITMOS DE CINEMÁTICA DIRETA E INVERSA DE UM PROTÓTIPO DE BRAÇO
ROBÓTICO DE 5 GRAUS DE LIBERDADE**

Extremoz/RN

2019

AMARO DUARTE DE PAULA NETO

CÁLCULOS E ALGORITMOS DE CINEMÁTICA DIRETA E INVERSA DE UM PROTÓTIPO DE BRAÇO ROBÓTICO DE 5 GRAUS DE LIBERDADE

Este material acompanha o repositório dos códigos fontes do software de controle do braço robô de 5 graus de liberdade descrito em (de Paula Neto, 2015), sendo livre a sua distribuição e impressão em papel, desde que seja respeitada a autoria deste.

Extremoz/RN

2019

Resumo

Este documento tem por objetivo descrever os cálculos, as fórmulas e os algoritmos utilizados para a cinemática direta e a cinemática inversa de um protótipo de um braço robô de 5 graus de liberdade descrito em (de Paula Neto, 2015). Também estão inclusas as fórmulas e os algoritmos dos testes de colisão da garra com a base fixa, a base giratória e o segmento L1. As notações utilizadas nas fórmulas se baseiam em (Craig, 2005).

Sumário

1	Parâmetros de Denavit-Hartenberg (DH).....	3
1.1	<i>Detalhes do a_4 e do a_1.....</i>	4
2	Cálculos da Cinemática Direta.....	5
2.1	<i>Cálculos da Cinemática Direta – Resultado e Otimizações de Fórmulas</i>	6
3	Cinemática Inversa.....	7
3.1	<i>Encontrando a matriz de transformação ${}^B_T T$.....</i>	7
3.2	<i>Cinemática Inversa - Trazendo o ponto da garra ${}^B P_{TORG}$ para dentro do espaço de trabalho.....</i>	8
3.3	<i>Cinemática Inversa – Projetando o ponto x, y, z alvo no plano que corta o braço robô.....</i>	10
3.4	<i>Dedução do vetor M para $x = \mathbf{0}$ e $y = \mathbf{0}$</i>	11
3.5	<i>Cálculos da Cinemática Inversa – θ_1 e θ_5</i>	12
3.6	<i>Cinemática Inversa – Abordagem geométrica para θ_2, θ_3 e θ_4.....</i>	13
3.6.1	<i>Cinemática inversa - Braço robô na posição de repouso</i>	15
3.7	<i>Cinemática Inversa – Posições singulares.....</i>	16
4	Teste de colisão da garra com a base fixa.....	19
5	Teste de colisão da garra com a base giratória.....	22
6	Colisão com o segmento L_1.....	24
6.1	<i>Primeira abordagem – para $\theta_2 \neq 90^\circ$.....</i>	24
6.2	<i>Segunda abordagem – para $\theta_2 = 90^\circ$.....</i>	25
7	Algoritmo geral da cinemática direta para o braço robô	26
8	Algoritmo geral da cinemática inversa	27
9	Bibliografia	28

1 Parâmetros de Denavit-Hartenberg (DH)

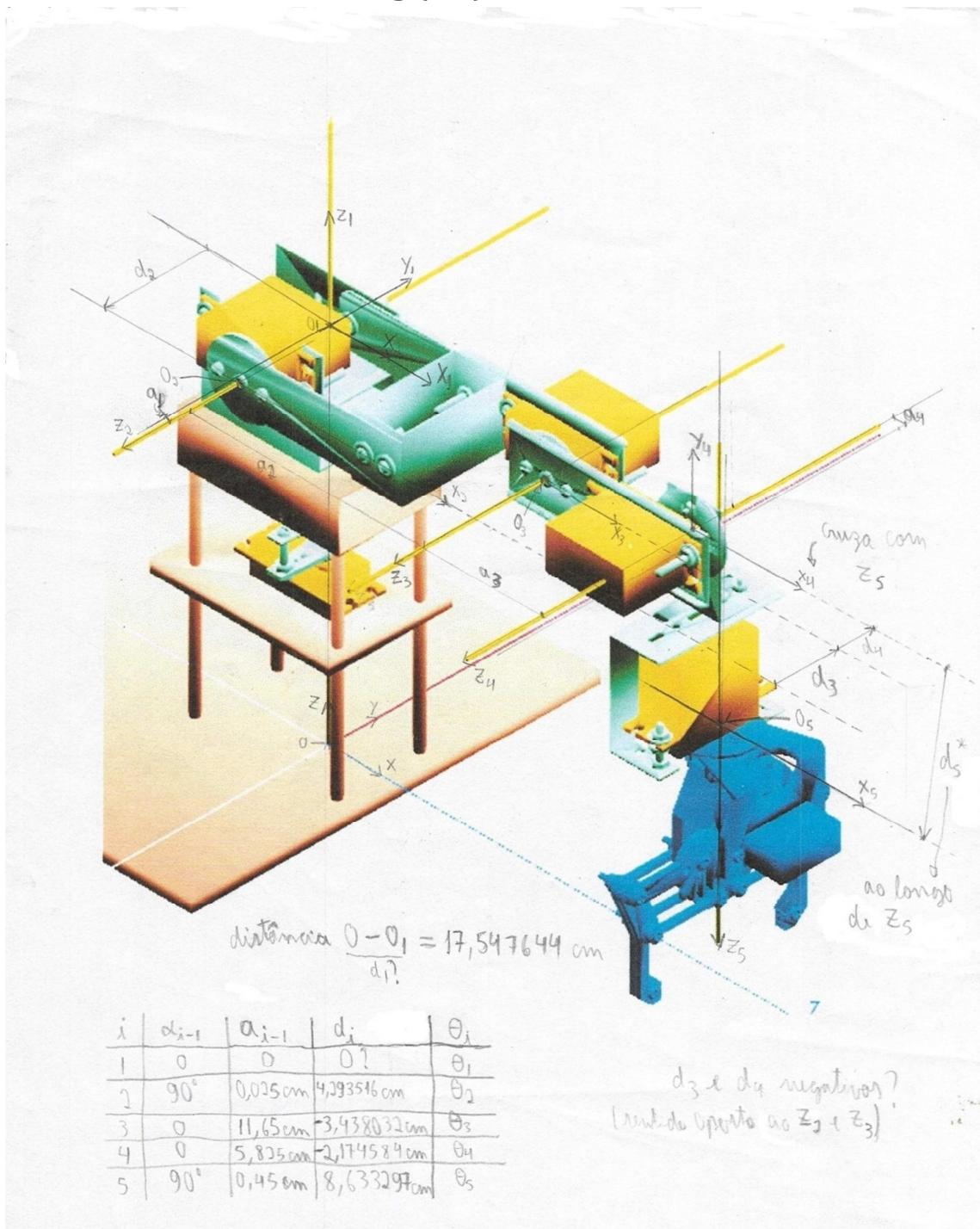


Figura 1: Parâmetros de Denavit-Hartenberg. A posição do braço-robô mostrada nesta figura é a posição em que os ângulos de todas as juntas são iguais a zero.

Apesar de termos dado valores não nulos para d_2 , d_3 , d_4 , d_5 , a_1 e a_4 , na cinemática implementada no software de controle consideramos todos eles como sendo zero, para que os pontos da garra e do pulso fiquem alinhados com a origem, de forma que seja possível definir um plano vertical que corte o braço robô pela origem da base, pelo pulso e pelo ponto da garra.

1.1 Detalhes do a_4 e do a_1

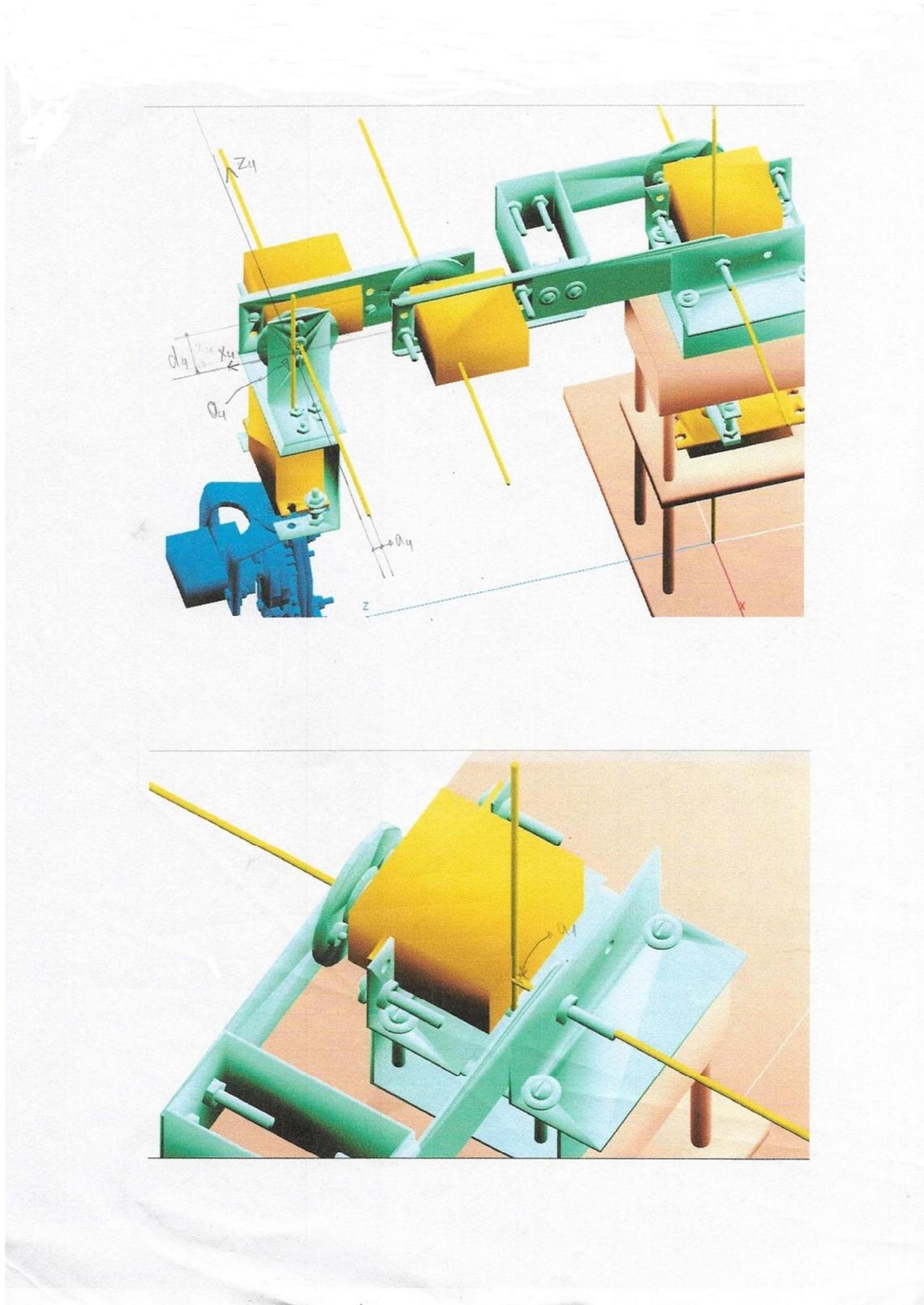


Figura 2: Detalhamentos do a_1 e do a_4

2 Cálculos da Cinemática Direta

A nossa cinemática direta consiste em tomar como entrada os ângulos das juntas e calcular a matriz 0_5T que é a transformação do referencial 5 (frame 5 ou do pulso da garra) em relação ao referencial 0 (frame 0 ou base). A matriz 0_5T é igual (pode ser lida como) a matriz B_WT que é a transformação do referencial do pulso (Wrist) em relação à Base fixa, ou seja:

$${}^0_5T = {}^B_WT = {}^0_1T {}^1_2T {}^2_3T {}^3_4T {}^4_5T$$

A partir de 0_5T , podemos obter a posição XYZ do pulso da garra (em relação à base fixa) e a orientação do mesmo em torno dos eixos X, Y e Z da base fixa (ângulos γ , β e α , respectivamente). Seguem os cálculos da dedução:

$$\begin{aligned} {}^0_1T &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^1_2T &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^0_2T &= \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & c_1a_1 + s_1d_2 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 & s_1a_1 - c_1d_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^2_3T &= \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & a_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^0_3T &= \begin{bmatrix} c_1c_2c_3 - c_1s_2s_3 & -c_1c_2s_3 - c_1s_2c_3 & s_1 & c_1c_2a_2 + s_1d_3 + (c_1a_1 + s_1d_2) \\ s_1c_2c_3 - s_1s_2s_3 & -s_1c_2s_3 - s_1s_2c_3 & -c_1 & s_1c_2a_2 - c_1d_3 + (s_1a_1 - c_1d_2) \\ s_2c_3 + c_2s_3 & -s_2s_3 + c_2c_3 & 0 & s_2a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^0_3T &= \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -c_1s_{23} & s_1 & s_1(d_2 + d_3) + c_1(a_1 + c_2a_2) \\ s_1c_{23} & -s_1s_{23} & -c_1 & s_1(a_1 + c_2a_2) - c_1(d_2 + d_3) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & s_2a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^3_4T &= \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & a_3 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^0_4T &= \begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 - c_1s_{23}s_4 & -c_1c_{23}s_4 - c_1s_{23}c_4 & s_1 & c_1c_{23}a_3 + s_1d_4 + s_1(d_2 + d_3) + c_1(a_1 + c_2a_2) \\ s_1c_{23}c_4 - s_1s_{23}s_4 & -s_1c_{23}s_4 - s_1s_{23}c_4 & -c_1 & s_1c_{23}a_3 - c_1d_4 + s_1(a_1 + c_2a_2) - c_1(d_2 + d_3) \\ s_{23}c_4 + c_{23}s_4 & -s_{23}s_4 + c_{23}c_4 & 0 & s_{23}a_3 + s_2a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^0_4T &= \begin{bmatrix} c_1c_{234} & -c_1s_{234} & s_1 & s_1(d_2 + d_3 + d_4) + c_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3) \\ s_1c_{234} & -s_1s_{234} & -c_1 & s_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3) - c_1(d_2 + d_3 + d_4) \\ s_{234} & c_{234} & 0 & s_{23} + s_2a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^4_5T &= \begin{bmatrix} c_5 & -s_5 & 0 & a_4 \\ 0 & 0 & -1 & -d_5 \\ s_5 & c_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^0_5T &= \begin{bmatrix} c_1c_{234}c_5 + s_1s_5 & -c_1c_{234}s_5 + s_1s_5 & c_1s_{234} & c_1c_{234}a_4 + c_1s_{234}d_5 + s_1(d_2 + d_3 + d_4) + c_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3) \\ s_1c_{234}c_5 - c_1s_5 & -s_1c_{234}s_5 - c_1c_5 & s_1s_{234} & s_1c_{234}a_4 + s_1s_{234}d_5 + s_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3) - c_1(d_2 + d_3 + d_4) \\ s_{234}c_5 & -s_{234}s_5 & -c_{234} & s_{234}a_4 - c_{234}d_5 + s_{23}a_3 + s_2a_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^0_5T &= \begin{bmatrix} c_1c_{234}c_5 + s_1s_5 & -c_1c_{234}s_5 + s_1c_5 & c_1s_{234} & s_1(d_2 + d_3 + d_4) + c_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3 + c_{234}a_4 + s_{234}d_5) \\ s_1c_{234}c_5 - c_1s_5 & -s_1c_{234}s_5 - c_1c_5 & s_1s_{234} & s_1(a_1 + c_2a_2 + c_{23}a_3 + c_{234}a_4 + s_{234}d_5) - c_1(d_2 + d_3 + d_4) \\ s_{234}c_5 & -s_{234}s_5 & -c_{234} & d_1 + s_2a_2 + s_{23}a_3 + s_{234}a_4 - c_{234}d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

Apesar de a cinemática direta ser um processo relativamente simples, o nosso software de controle realiza alguns passos mais para, por exemplo, calcular a posição XYZ da garra e fazer os testes de colisão. Esse processo completo está descrito como um algoritmo na seção 7.

2.1 Cálculos da Cinemática Direta – Resultado e Otimizações de Fórmulas

$${}^0_5T = {}^B_WT = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} c_i &= \cos \theta_i & s_{23} &= s_2 c_3 + c_2 s_3 \\ s_i &= \sin \theta_i & c_{23} &= c_2 s_3 - s_2 c_3 \\ i &= 1, \dots, 5 & c_{234} &= c_{23} c_4 - s_{23} s_4 \\ && s_{234} &= s_{23} c_4 + c_{23} s_4 \end{aligned} \quad (2)$$

B: Base fixa W: pulso (Wrist)

$$\begin{aligned} r_{11} &= c_1 c_{234} c_5 + s_1 s_5 \\ r_{21} &= s_1 c_{234} c_5 - c_1 s_5 \\ r_{31} &= s_{234} c_5 \\ r_{12} &= s_1 c_5 - c_1 c_{234} s_5 \\ r_{22} &= -c_1 c_5 - s_1 c_{234} s_5 \\ r_{32} &= -s_{234} s_5 \\ r_{13} &= c_1 s_{234} \\ r_{23} &= s_1 s_{234} \\ r_{33} &= -c_{234} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} d_{234} &= d_2 + d_3 + d_4 \\ f &= a_1 + a_2 c_2 + a_3 c_{23} + a_4 c_{234} + d_5 s_{234} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} p_x &= d_{234} s_1 + f c_1 \\ p_y &= f s_1 - d_{234} c_1 \\ p_z &= d_1 + a_2 s_2 + a_3 s_{23} + a_4 s_{234} - d_5 c_{234} \end{aligned} \quad (5)$$

Utilizamos rotações em ângulos fixos em torno de X, Y e Z, respectivamente, cujos ângulos são γ , β e α , respectivamente. Para encontrar os ângulos γ , β e α , faremos:

$$\begin{aligned} \beta &= \text{atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right) \\ \alpha &= \text{atan2}\left(\frac{r_{21}}{\cos \beta}, \frac{r_{11}}{\cos \beta}\right) \\ \gamma &= \text{atan2}\left(\frac{r_{32}}{\cos \beta}, \frac{r_{33}}{\cos \beta}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

As fórmulas para α e γ são válidas para $\beta \neq \pm 90^\circ$. Se $\beta = 90^\circ$:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \gamma &= \text{atan2}(r_{12}, r_{22}) \end{aligned} \quad (7)$$

Se $\beta = -90^\circ$:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \gamma &= -\text{atan2}(r_{12}, r_{22}) \end{aligned} \quad (8)$$

Para achar as coordenadas x, y e z da garra (${}^B P_{TO RG}$), basta fazer o seguinte cálculo:

$${}^B P_{TO RG} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + (L_3 + L_g) \cdot \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

B: Base fixa T: Ferramenta (Tool). Neste caso, a garra. ORG: Origem do referencial (frame)

3 Cinemática Inversa

A nossa cinemática inversa consiste em partir da posição XYZ e dos ângulos γ , β e α da garra e calcular os ângulos das juntas. Por ser um processo consideravelmente complexo, dividimos esse processo em passos distintos, e o descrevemos como um algoritmo na seção 8.

3.1 Encontrando a matriz de transformação ${}^B_T T$

No software de controle, são fornecidas as coordenadas x, y, z, Rx, Ry e Rz, sendo que estas três últimas correspondem aos ângulos γ , β e α , respectivamente. A matriz ${}^B_T T$ a ser encontrada tem a seguinte forma:

$${}^B_T T = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^B_T R' & & & {}^B P_{TORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = {}^B_W T \cdot {}^W_T T \quad (10)$$

B: Base Fixa W: pulso (Wrist) T: Ferramenta (Tool), neste caso, a garra.. . ORG: Origem do referencial (frame)

Onde ${}^B_T R'$ é a matriz de rotação para a posição XYZ alvo. Para achar ${}^B_T R'$, faz-se:

$$\begin{aligned} {}^B_T R' &= \begin{bmatrix} r'_{11} & r'_{12} & r'_{13} \\ r'_{21} & r'_{22} & r'_{23} \\ r'_{31} & r'_{32} & r'_{33} \end{bmatrix} \\ r'_{11} &= c\alpha c\beta \\ r'_{21} &= s\alpha c\beta \\ r'_{31} &= -s\beta \\ r'_{12} &= c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ r'_{22} &= s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma \\ r'_{32} &= c\beta s\gamma \\ r'_{13} &= c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ r'_{23} &= s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ r'_{33} &= c\beta c\gamma \end{aligned} \quad \text{onde} \quad \begin{cases} s\alpha = \sin \alpha \\ s\beta = \sin \beta \\ s\gamma = \sin \gamma \\ c\alpha = \cos \alpha \\ c\beta = \cos \beta \\ c\gamma = \cos \gamma \end{cases} \quad (11)$$

E ${}^B P_{TORG}$, que é o ponto da garra, é definido como:

$${}^B P_{TORG} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (12)$$

3.2 Cinemática Inversa - Trazendo o ponto da garra ${}^B P_{TORG}$ para dentro do espaço de trabalho

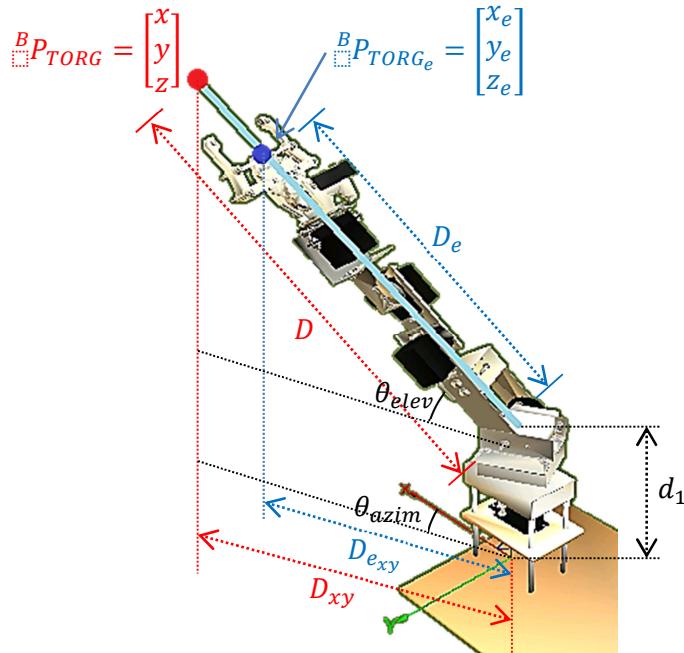


Figura 3: Abordagem geométrica para trazer o ponto ${}^B P_{TORG}$ para dentro do espaço de trabalho do braço robô.

Sendo a distância D definida por

$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - d_1)^2} \quad (13)$$

e a distância D_e definida por

$$D_e = a_2 + a_3 + L_3 + L_g \quad (14)$$

o ponto da garra ${}^B P_{TORG}$ estará fora do espaço de trabalho se $D > D_e$. Neste caso, será necessário trazer o ponto da garra para dentro do espaço de trabalho, ou seja, trazer ${}^B P_{TORG}$ para ${}^B P_{TORG_e}$. Começamos calculando a projeção da distância D no plano XY da base fixa, ou seja:

$$D_{xy} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (15)$$

Associaremos à ${}^B P_{TORG}$ um ângulo de azimute, θ_{azim} , e um ângulo de elevação, θ_{elev} , de forma que, juntamente com D_{xy} , serão suas coordenadas esféricas. Portanto, podemos achar os senos e cossenos desses ângulos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= D_{xy} \cdot \cos \theta_{azim} \\ \cos \theta_{azim} &= \frac{x}{D_{xy}} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} y &= D_{xy} \cdot \sin \theta_{azim} \\ \sin \theta_{azim} &= \frac{y}{D_{xy}} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} z - d_1 &= D \cdot \sin \theta_{elev} \\ \sin \theta_{elev} &= \frac{z - d_1}{D} \\ D_{xy} &= D \cdot \cos \theta_{elev} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\cos \theta_{elev} = \frac{D_{xy}}{D} \quad (19)$$

Com $\cos \theta_{elev}$ calculado, poderemos achar a projeção da distância D_e no plano XY da base fixa, ou seja:

$$D_{e_{xy}} = D_e \cdot \cos \theta_{elev} \quad (20)$$

Por fim, podemos calcular o ponto ${}^B P_{TORG_e} = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix}$ da seguinte forma:

$$x_e = D_{e_{xy}} \cdot \cos \theta_{azim} \quad (21)$$

$$y_e = D_{e_{xy}} \cdot \sin \theta_{azim} \quad (22)$$

$$z_e = D_e \cdot \sin \theta_{elev} + d_1 \quad (23)$$

Para a situação em que $x = 0$ e $y = 0$, apenas as equações (13), (14), (18), (19), (20) e (23) serão válidas para calcular o z_e , e x_e e y_e serão simplesmente iguais a zero.

3.3 Cinemática Inversa - Projetando o ponto x, y, z alvo no plano que corta o braço robô

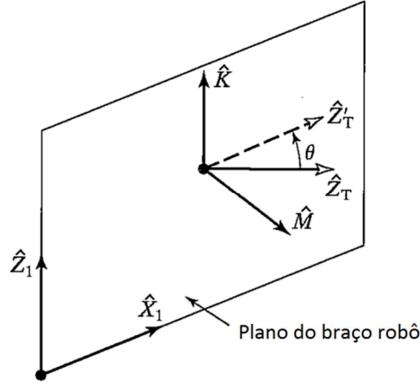


Figura 4: Plano de projeção que corta o braço robô pela origem da base fixa

Mesmo que o ponto ${}^B P_{TORG}$ sempre esteja no plano do braço robô, a orientação alvo da garra nem sempre estará, por conta dos ângulos γ , β e α , que podem, por exemplo, tentar fazer a garra apontar para a direção do vetor \hat{Z}_T mostrado na figura. Para fazer a projeção do vetor \hat{Z}_T da garra, seguem os cálculos:

$$\hat{M} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}, & x \neq 0 \vee y \neq 0 \\ \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{bmatrix}, & x = 0 \wedge y = 0 \end{cases} \quad \hat{Z}_T = \begin{bmatrix} r'_{13} \\ r'_{23} \\ r'_{33} \end{bmatrix} \quad \hat{Y}_T = \begin{bmatrix} r'_{12} \\ r'_{22} \\ r'_{32} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\hat{K} = \hat{M} \times \hat{Z}_T \quad (25)$$

$$\hat{Z}'_T = \hat{K} \times \hat{M} \quad (26)$$

$$\cos \theta = \hat{Z}_T \cdot \hat{Z}'_T \quad (27)$$

$$\sin \theta = (\hat{Z}_T \times \hat{Z}'_T) \cdot \hat{K} \quad (28)$$

Fórmula de Rodrigues:

$$\hat{Y}'_T = \cos \theta \cdot \hat{Y}_T + \sin \theta \cdot (\hat{K} \times \hat{Y}_T) + (1 - \cos \theta) \cdot (\hat{K} \cdot \hat{Y}_T) \hat{K} \quad (29)$$

$$\hat{X}'_T = \hat{Y}'_T \times \hat{Z}'_T \quad (30)$$

A nova matriz de rotação passa a ser (apenas para a cinemática inversa):

$${}^B_T R = [\hat{X}'_T \quad \hat{Y}'_T \quad \hat{Z}'_T] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (31)$$

De forma que o ponto XYZ do pulso da garra passa a ser:

$${}^B P_{WORG} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = {}^B P_{TORG} - (L_3 + L_g) \cdot \hat{Z}'_T = \begin{bmatrix} x - (L_3 + L_g) \cdot r_{13} \\ y - (L_3 + L_g) \cdot r_{23} \\ z - (L_3 + L_g) \cdot r_{33} \end{bmatrix} \quad (32)$$

E as rotações passam a ser

$$\begin{aligned}\beta &= \text{atan}2\left(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}\right) \\ \alpha &= \text{atan}2\left(\frac{r_{21}}{\cos \beta}, \frac{r_{11}}{\cos \beta}\right) \\ \gamma &= \text{atan}2\left(\frac{r_{32}}{\cos \beta}, \frac{r_{33}}{\cos \beta}\right)\end{aligned}\quad (33)$$

As fórmulas para α e γ são válidas para $\beta \neq \pm 90^\circ$. Se $\beta = 90^\circ$:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0 \\ \gamma &= \text{atan}2(r_{12}, r_{22})\end{aligned}\quad (34)$$

Se $\beta = -90^\circ$:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0 \\ \gamma &= -\text{atan}2(r_{12}, r_{22})\end{aligned}\quad (35)$$

3.4 Dedução do vetor \hat{M} para $x = 0$ e $y = 0$

Em (Craig, 2005), página 121, a equação 4.84 referente ao vetor \hat{M} não previa o caso em que p_x e p_y (sendo estes correspondentes ao x e ao y da ferramenta, respectivamente) seriam iguais à zero, pois provavelmente o mecanismo do Yasukawa Motoman L-3 não permitiria o mesmo atingir tal posição. No nosso caso, o braço robô pode assumir diversas posições em que o x e o y da garra sejam zero, o que pode ocasionar uma divisão por zero na primeira expressão. Para prevenir esta situação, a segunda expressão é obtida a partir do cálculo do limite da primeira expressão quando x e y tendem a zero. Segue a dedução, para x e y tendendo a zero:

$$\begin{aligned}\hat{M} &= \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ 0 \end{bmatrix} \\ m_x &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ m_y &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

Para resolver estes limites, devemos fazer uma conversão para coordenadas polares, ou seja:

$$x = r \cdot \cos \alpha$$

$$y = r \cdot \sin \alpha$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned}m_x &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-r \cdot \sin \alpha}{r} = -\sin \alpha \\ m_y &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cdot \cos \alpha}{r} = \cos \alpha\end{aligned}$$

O ângulo α é a nossa melhor aposta para o ângulo das coordenadas polares, pois o plano vertical do braço robô (do qual o vetor \hat{M} é a normal) sempre irá rotacionar em torno do eixo Z da base fixa. Isto só é válido para posições não singulares com $x = 0$ e $y = 0$ (Ver seção 3.7 - Cinemática Inversa – Posições singulares).

3.5 Cálculos da Cinemática Inversa - θ_1 e θ_5

$${}^0T = {}^0T^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} {}^0R^T & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad {}^0T = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ \hline {}^0R & & & {}^0P_{1ORG} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$${}^0T^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & s_1 & 0 & \left[\begin{array}{ccc|c} -c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_1 \end{array} \right] \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad {}^5T = \left[\begin{array}{cccc} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$${}^0T^{-1} {}^0T = {}^0T^{-1}({}^0T {}^1T {}^2T {}^3T {}^4T {}^5T) = {}^1T {}^2T {}^3T {}^4T {}^5T$$

$${}^0T^{-1} {}^0T = \left[\begin{array}{cccc} c_1r_{11} + s_1r_{21} & c_1r_{12} + s_1r_{22} & c_1r_{13} + s_1r_{23} & c_1p_x + s_1p_y \\ -s_1r_{11} + c_1r_{21} & -s_1r_{12} + c_1r_{22} & -s_1r_{13} + c_1r_{23} & -s_1p_x + c_1p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z - d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$${}^1T {}^2T {}^3T {}^4T {}^5T = \left[\begin{array}{cccc} t_{11} & t_{12} & t_{31} & v_x \\ t_{21} & t_{22} & t_{32} & v_y \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$t_{11} = c_1^2 c_{234} c_5 + c_1 s_1 s_5 + s_1^2 c_{234} c_5 - s_1 c_1 s_5 = c_{234} c_5 (c_1^2 + s_1^2) = c_{234} c_5$$

$$t_{21} = -s_1 c_1 c_{234} c_5 - s_1^2 s_5 + c_1 s_1 c_{234} c_5 - c_1^2 s_5 = -s_5$$

$$t_{31} = s_{234} c_5$$

$$t_{12} = -c_1^2 c_{234} s_5 + c_1 s_1 c_5 - s_1^2 c_{234} s_5 - s_1 c_1 c_5 = -c_{234} s_5$$

$$t_{22} = s_1 c_1 c_{234} s_5 - s_1^2 c_5 - c_1 s_1 c_{234} s_5 - c_1^2 c_5 = -c_5$$

$$t_{32} = -s_{234} s_5$$

$$t_{13} = c_1^2 s_{234} + s_1^2 s_{234} = s_{234}$$

$$t_{23} = -s_1 c_1 s_{234} + c_1 s_1 s_{234} = 0$$

$$t_{33} = -c_{234}$$

$$v_x = c_1 s_1 d_{234} - s_1 c_1 f + c_1 s_1 f - s_1 c_1 d_{234} = f$$

$$v_y = -s_1^2 d_{234} - s_1 c_1 f + c_1 s_1 f - c_1^2 d_{234} = -d_{234}$$

$$v_z = s_2 a_2 + s_{23} a_3 + s_{234} a_4 - c_{234} d_5$$

Para o cálculo de θ_1 (todas as soluções), temos:

$$-s_1 p_x + c_1 p_y = -d_{234}$$

$$\boxed{\theta_1 = \text{atan2}(-p_x, p_y) \pm \text{atan2}\left(\sqrt{p_y^2 + p_x^2 - d_{234}^2}, -d_{234}\right)} \quad (\text{soluções 1 e 2}) \quad (36)$$

$$-s_1 r_{13} + c_1 r_{23} = 0$$

$$\boxed{\theta_1 = \text{atan2}(r_{23}, r_{13})} \quad (\text{solução 3}) \quad (37)$$

$$\boxed{\theta_1 = \text{atan2}(-r_{23}, -r_{13})} \quad (\text{solução 4}) \quad (38)$$

Conhecido θ_1 , temos, para θ_5 :

$$\begin{cases} -s_1 r_{11} + c_1 r_{21} = -s_5 \\ -s_1 r_{12} + c_1 r_{22} = -c_5 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} s_5 = s_1 r_{11} - c_1 r_{21} \\ c_5 = s_1 r_{12} - c_1 r_{22} \end{cases}} \quad (39)$$

Conhecido θ_1 , temos, para θ_{234} :

$$\begin{aligned} s_{234} &= c_1 r_{13} + s_1 r_{23} \\ c_{234} &= -r_{33} \\ \theta_{234} &= \text{atan2}(s_{234}, c_{234}) \end{aligned} \quad (40)$$

3.6 Cinemática Inversa - Abordagem geométrica para θ_2 , θ_3 e θ_4

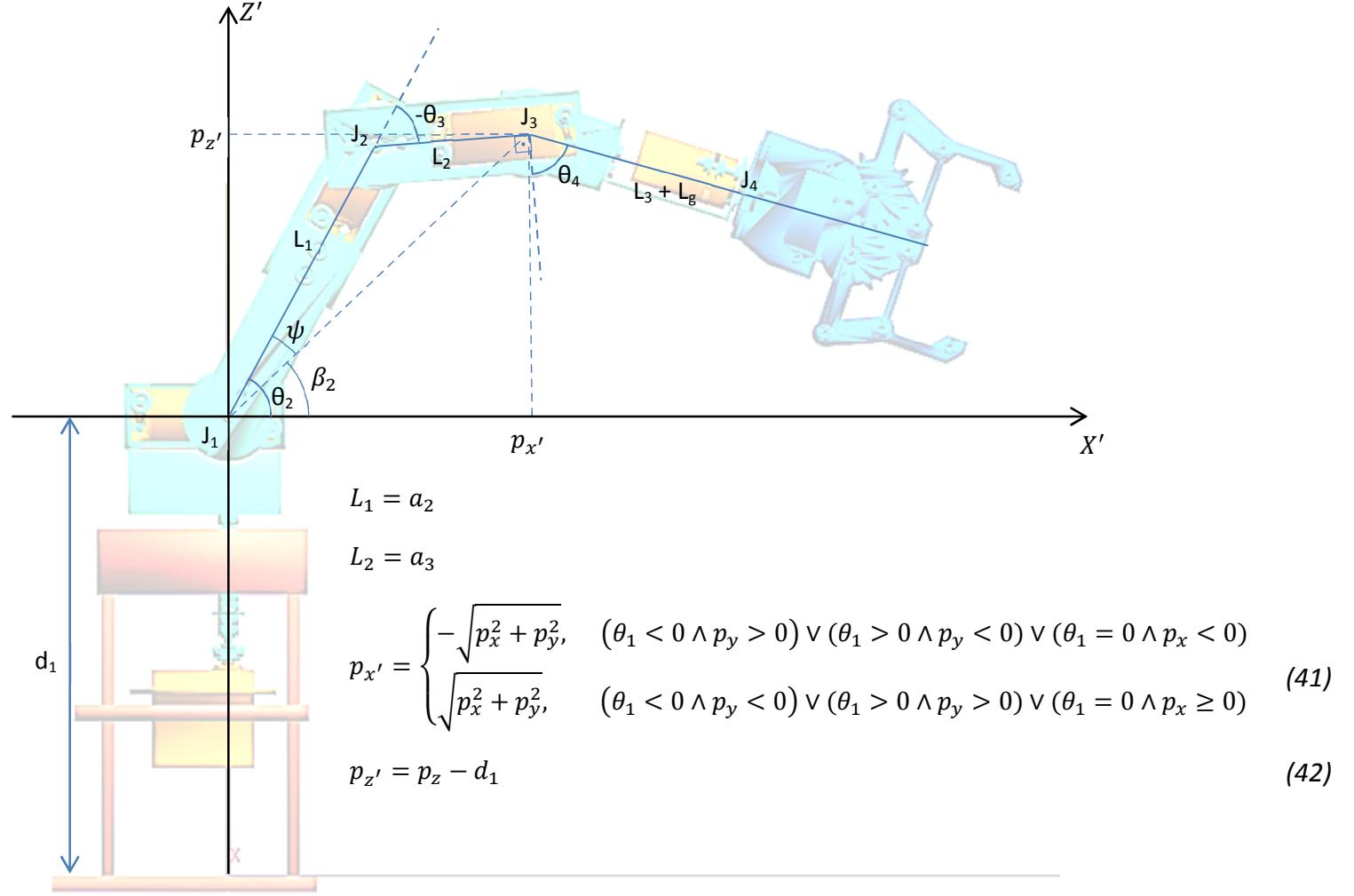


Figura 5: Abordagem geométrica para os ângulos θ_2 , θ_3 e θ_4 .

Para esta abordagem, trataremos o pulso da garra (J_4) como se estivesse junto com J_3 , de forma que p_x , p_y e p_z se referem aos valores de coordenada de J_3 . Isso torna possível a abordagem geométrica como se o braço robô fosse um manipulador planar.

Para θ_3 , temos, a partir do triângulo formado por J_1 , J_2 e J_3 :

$$p_{x'}^2 + p_{z'}^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot \cos(180^\circ + \theta_3)$$

$$\cos \theta_3 = \frac{p_{x'}^2 + p_{z'}^2 - a_2^2 - a_3^2}{2 \cdot a_2 \cdot a_3}$$
 (43)

Como θ_3 será sempre menor ou igual a zero, então:

$$\sin \theta_3 = -\sqrt{1 - \cos^2 \theta_3}$$
 (44)

Logo:

$$\theta_3 = \text{atan2}(\sin \theta_3, \cos \theta_3)$$
 (45)

Para θ_2 , calculamos os ângulos β_2 e ψ :

$$\beta_2 = \text{atan}2(p_{z'}, p_{x'}) \quad (46)$$

$$\cos \psi = \frac{p_{x'}^2 + p_{z'}^2 + a_2^2 - a_3^2}{2 \cdot a_2 \cdot \sqrt{p_{x'}^2 + p_{z'}^2}} \quad (47)$$

Como ψ será sempre maior ou igual à zero, então:

$$\sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi} \quad (48)$$

$$\psi = \text{atan}2(\sin \psi, \cos \psi) \quad (49)$$

Logo:

$$\theta_2 = \beta_2 + \psi \quad (50)$$

Logo, para θ_4 , temos:

$$\theta_4 = \theta_{234} - \theta_2 - \theta_3 \quad (51)$$

3.6.1 Cinemática inversa - Braço robô na posição de repouso

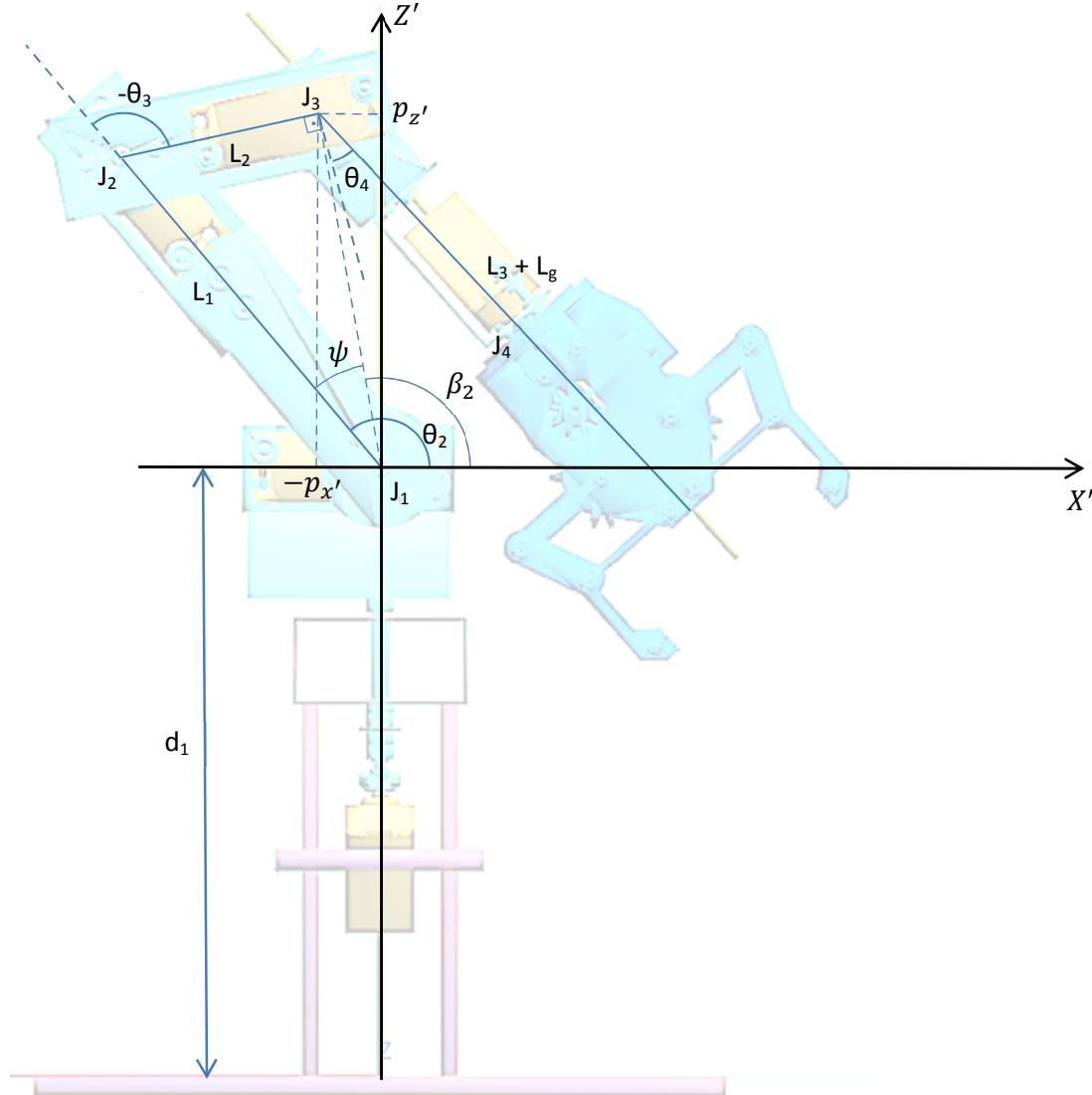


Figura 6: Abordagem geométrica para quando o braço robô estiver na posição de repouso. A posição aqui mostrada é a parte de trás do braço robô. A junta 4 está girada de -90° nesta figura apenas para mostrar onde termina o segmento formado por L_3 e L_g .

Observe que, nesta posição, o $p_{x'}$ deve assumir valor negativo, pois está no lado negativo do eixo X' , o que justifica a fórmula do $p_{x'}$ ser:

$$p_{x'} = \begin{cases} -\sqrt{p_x^2 + p_y^2}, & (\theta_1 < 0 \wedge p_y > 0) \vee (\theta_1 > 0 \wedge p_y < 0) \vee (\theta_1 = 0 \wedge p_x < 0) \\ \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, & (\theta_1 < 0 \wedge p_y < 0) \vee (\theta_1 > 0 \wedge p_y > 0) \vee (\theta_1 = 0 \wedge p_x \geq 0) \end{cases}$$

de forma que o ângulo β_2 seja calculado no quadrante correto. As equações são as mesmas usadas na abordagem geométrica da Figura 5.

3.7 Cinemática Inversa – Posições singulares

Para a nossa cinemática inversa, posição singular é toda e qualquer posição da garra em que $x = 0, y = 0, z \leq d_1 + a_2 + a_3 + L_3 + L_g, \gamma = 0$ e $\beta = 0$.

Nesta situação, a garra está na vertical e rente ao eixo Z da base fixa. O processo de cinemática inversa normal feita para quaisquer outras posições da garra (e/ou do pulso) falha nesta condição, tanto nas fórmulas de projeção do ponto da garra (em particular, a equação (24), do vetor \hat{M}) quanto no cálculo de todos os valores possíveis de θ_1 (equações (36), (37) e (38)), sendo que, no cálculo dos valores deste ângulo, teríamos o operador *atan2* com os 2 parâmetros sendo zero, situação esta para a qual o valor de *atan2* é indefinido.

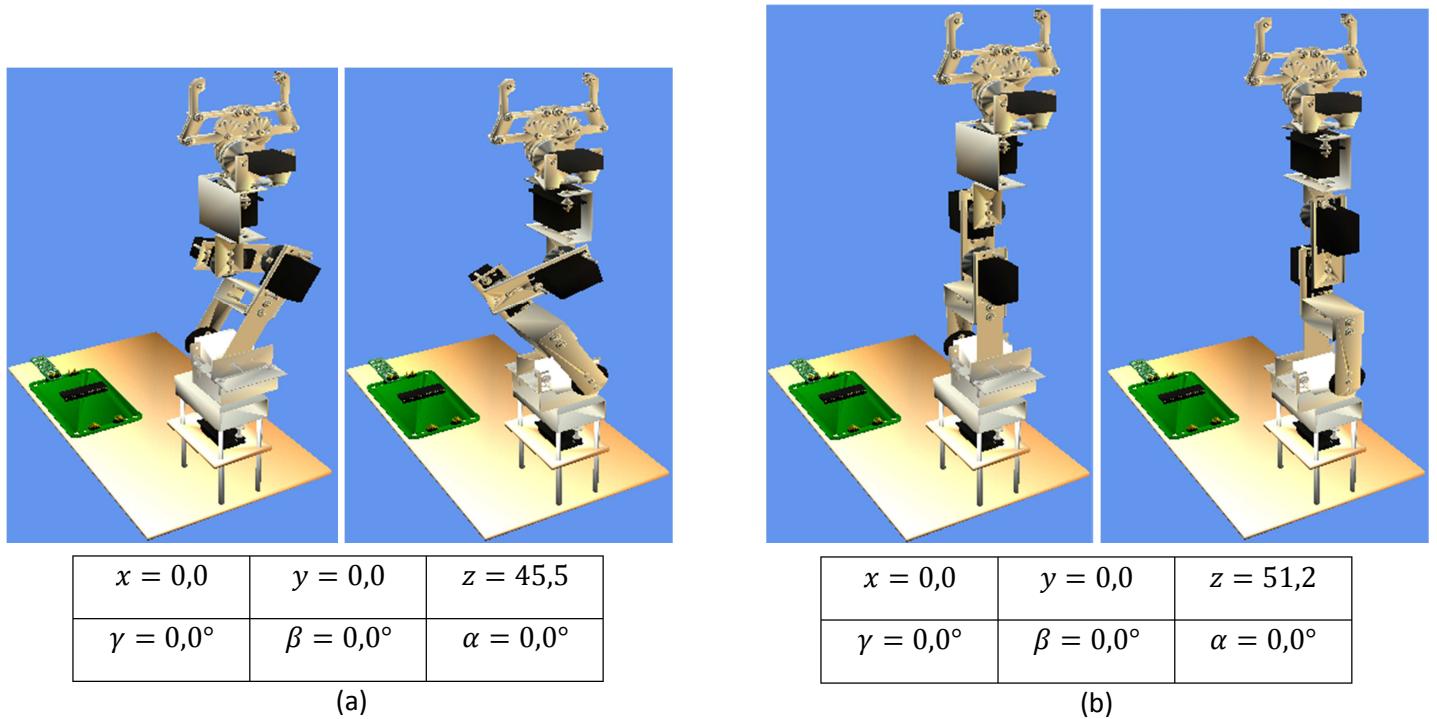


Figura 7: Algumas posições singulares com $\alpha = 0,0^\circ$

O grande problema de posições singulares é que, matematicamente, cada uma delas pode possuir múltiplas ou até infinitas soluções. No nosso caso prático, como é limitada a quantidade de ângulos possíveis para as juntas 0 e 4, também será limitada a quantidade de soluções possíveis para uma posição singular. Na Figura 7, podemos ver 4 situações onde $\alpha = 0,0^\circ$. Neste caso particular, para cada valor de z , temos 2 soluções diferentes. Para outros valores de α , a quantidade de soluções pode chegar a ser maior.

Em resumo, a abordagem de posições singulares da nossa cinemática inversa procura manter a posição corrente da junta 0 e mover somente a junta 4, se necessário. Caso o movimento da junta 4 não seja suficiente para se atingir a posição alvo, daí se calcula a diferença que falta aplicar na junta 0. No geral, quando α_{alvo} se mantém no mesmo quadrante de $\alpha_{corrente}$, somente θ_5 muda; quando α_{alvo} muda para um quadrante diferente de $\alpha_{corrente}$, o valor de θ_1 pode mudar também. Já os ângulos $\theta_2, \theta_3, \theta_4$ são obtidos pela abordagem geométrica da Figura 5, quando $p_z < d_1 + a_2 + a_3$, ou simplesmente eles recebem os valores $90^\circ, 0^\circ$ e 90° , respectivamente, quando $p_z = d_1 + a_2 + a_3$.

Seja q_α o quadrante de α . Então:

$$q_\alpha = \begin{cases} 1, & 0^\circ \leq \alpha_{alvo} \leq 90^\circ \\ 2, & 90^\circ < \alpha_{alvo} \leq 180^\circ \\ 3, & -180^\circ \leq \alpha_{alvo} \leq -90^\circ \\ 4, & -90^\circ < \alpha_{alvo} < 0^\circ \end{cases} \quad (52)$$

Seja θ'_1 um valor provisório para θ_1 (alvo) e $\theta_{1\text{corrente}}$ o valor corrente de θ_1 . Então, para $q_\alpha = 1$:

$$\theta'_1 = \begin{cases} \theta_{1\text{corrente}}, & (-90^\circ \leq \theta_{1\text{corrente}} < 0^\circ) \vee (90^\circ < \theta_{1\text{corrente}} \leq 100^\circ) \\ 100^\circ, & 0^\circ \leq \alpha_{\text{alvo}} \leq 10^\circ \\ -90^\circ, & ((\theta_{1\text{corrente}} < -90^\circ) \vee (0^\circ \leq \theta_{1\text{corrente}} \leq 90^\circ) \vee (\theta_{1\text{corrente}} > 100^\circ)) \wedge (\alpha_{\text{alvo}} > 10^\circ) \end{cases} \quad (53)$$

Para $q_\alpha = 2$:

$$\theta'_1 = \begin{cases} \theta_{1\text{corrente}}, & 0^\circ \leq \theta_{1\text{corrente}} < 90^\circ \\ -90^\circ, & (\theta_{1\text{corrente}} < 0^\circ) \vee (\theta_{1\text{corrente}} \geq 90^\circ) \end{cases} \quad (54)$$

Para $q_\alpha = 3$:

$$\theta'_1 = \begin{cases} \theta_{1\text{corrente}}, & 0^\circ \leq \theta_{1\text{corrente}} \leq 100^\circ \\ 0^\circ, & (\theta_{1\text{corrente}} < 0^\circ) \vee (\theta_{1\text{corrente}} > 100^\circ) \end{cases} \quad (55)$$

Para $q_\alpha = 4$:

$$\theta'_1 = \begin{cases} \theta_{1\text{corrente}}, & 0^\circ < \theta_{1\text{corrente}} \leq 100^\circ \\ 90^\circ, & (\theta_{1\text{corrente}} \leq 0^\circ) \vee (\theta_{1\text{corrente}} > 100^\circ) \end{cases} \quad (56)$$

Nas posições singulares, o ângulo α é obtido pela seguinte fórmula:

$$\alpha = \begin{cases} \theta_1 + \theta_5 + 180^\circ, & q_\alpha \in \{1, 2\} \\ \theta_1 + \theta_5 - 180^\circ, & q_\alpha \in \{3, 4\} \end{cases} \quad (57)$$

Substituindo α por α_{alvo} , θ_1 por θ'_1 e θ_5 por θ'_5 (sendo este o valor provisório do ângulo da junta 4 necessário para se chegar a α_{alvo}), teremos:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{alvo}} &= \begin{cases} \theta'_1 + \theta'_5 + 180^\circ, & q_\alpha \in \{1, 2\} \\ \theta'_1 + \theta'_5 - 180^\circ, & q_\alpha \in \{3, 4\} \end{cases} \\ \theta'_5 &= \begin{cases} \alpha_{\text{alvo}} - \theta'_1 - 180^\circ, & q_\alpha \in \{1, 2\} \\ \alpha_{\text{alvo}} - \theta'_1 + 180^\circ, & q_\alpha \in \{3, 4\} \end{cases} \end{aligned} \quad (58)$$

Quando θ'_5 está dentro dos limites máximo e mínimo de ângulos da junta 4:

$$\theta_5 = \theta'_5 \quad (59)$$

$$\theta_1 = \theta'_1 \quad (60)$$

Há a possibilidade de θ'_5 dar um valor que esteja fora dos limites máximo e mínimo da junta 4. Quando isso acontece, obtém-se o valor da diferença entre θ'_5 e o valor máximo ou mínimo de ângulo da junta 4. Definiremos este valor como $\Delta\theta_5$. Portanto, $\Delta\theta_5$, θ_5 e θ_1 são calculados, respectivamente, pelas seguintes fórmulas:

$$\Delta\theta_5 = \begin{cases} \theta'_5 + 90^\circ, & \theta'_5 < -90^\circ \\ \theta'_5 - 90^\circ, & \theta'_5 > +90^\circ \end{cases} \quad (61)$$

$$\theta_5 = \begin{cases} -90^\circ, & \theta'_5 < -90^\circ \\ +90^\circ, & \theta'_5 > +90^\circ \end{cases} \quad (62)$$

$$\theta_1 = \theta'_1 + \Delta\theta_5 \quad (63)$$

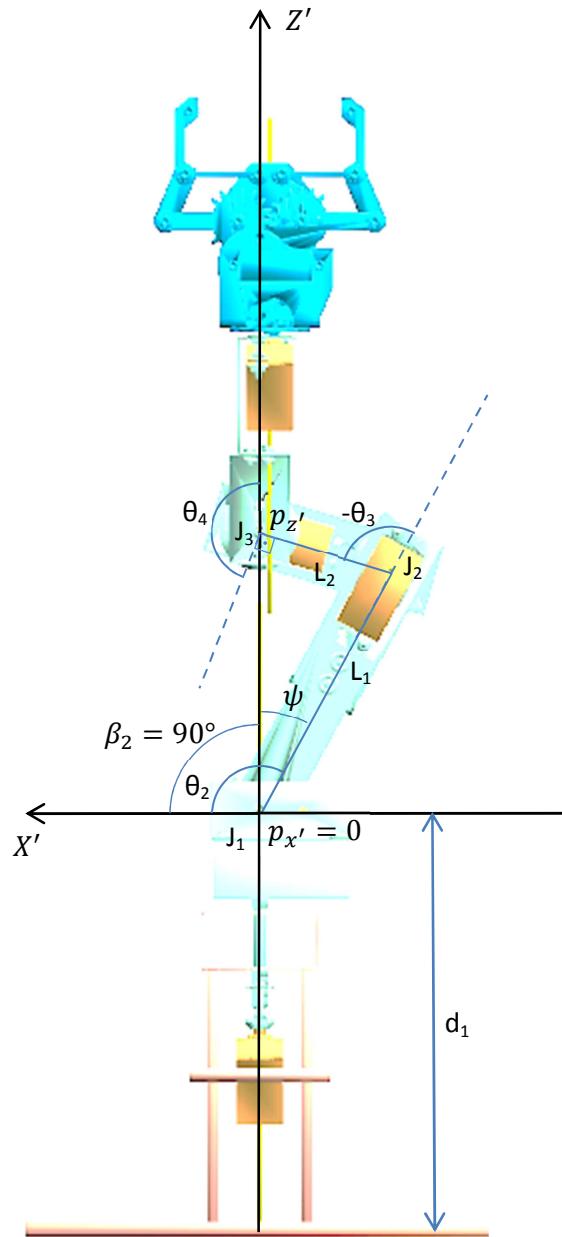


Figura 8: Abordagem geométrica para posições singulares

Para calcular os ângulos θ_2 , θ_3 e θ_4 , usa-se a mesma abordagem geométrica utilizada para a Figura 5, utilizando $\theta_{234} = 180^\circ$. A justificativa para este valor é a seguinte: na Figura 1, vemos que a posição da garra quando todos os ângulos das juntas estão em zero ($\theta_{234} = 0^\circ$) faz com que ela aponte para baixo na vertical (sentido negativo do eixo Z da base fixa); na Figura 8, a garra está na vertical apontando para cima (sentido positivo do eixo Z da base fixa), ou seja, a 180° da posição em que ela se encontra na Figura 1. Chamando a posição da garra na Figura 1 de posição 0, podemos dizer que o ângulo θ_{234} é o ângulo que a garra faz em relação à posição 0. Na Figura 8, a garra faz um ângulo $\theta_{234} = 180^\circ$ em relação à posição 0.

4 Teste de colisão da garra com a base fixa

Consiste, basicamente, em representar a colisão da garra como um cruzamento de um segmento de reta (que representa a garra) com uma de várias áreas delimitadas de planos no espaço tridimensional (estas áreas representam as faces da base fixa).

Para este teste, são necessários os valores de x, y, z, p_x, p_y, p_z e o vetor \hat{Z}_T (ou o \hat{Z}'_T , caso pegue a posição projetada na cinemática inversa). O vetor \hat{Z}_T é obtido a partir da 3ª coluna da matriz ${}^B_W T$ na cinemática direta ou da ${}^T_B T$ na cinemática inversa.

Para o segmento de reta formado pela posição alvo $G = (x, y, z)$ e pelo pulso da garra $P = (p_x, p_y, p_z)$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - p_x \\ y - p_y \\ z - p_z \end{bmatrix} = (L_3 + L_g) \cdot \hat{Z}_T = (L_3 + L_g) \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix} \quad (64)$$

Onde \hat{Z}_T é o vetor direção da garra.

Equação paramétrica do segmento de reta da garra:

$$\begin{cases} x = p_x + v_x \cdot t \\ y = p_y + v_y \cdot t \\ z = p_z + v_z \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = p_x + (L_3 + L_g) \cdot r_{13} \cdot t \\ y = p_y + (L_3 + L_g) \cdot r_{23} \cdot t \\ z = p_z + (L_3 + L_g) \cdot r_{33} \cdot t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (65)$$

Equação simétrica:

$$\frac{x - p_x}{v_x} = \frac{y - p_y}{v_y} = \frac{z - p_z}{v_z}$$

$$\frac{x - p_x}{(L_3 + L_g) \cdot r_{13}} = \frac{y - p_y}{(L_3 + L_g) \cdot r_{23}} = \frac{z - p_z}{(L_3 + L_g) \cdot r_{33}} = t \quad 0 \leq t \leq 1$$

Para a base fixa, parte contendo o servo da junta J0:

$$\text{Equação geral dos planos para } \vec{N} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \text{ e } P_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}: \quad n_x x + n_y y + n_z z + (-n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0) = 0$$

$$\text{Face 1: lado positivo do eixo Y: } \vec{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_{0_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,5 \\ 0 \end{bmatrix}:$$

$$y - 2,5 = 0 \Rightarrow y = 2,5 \quad -5 \leq x \leq 3 \quad 0 \leq z \leq 13,2$$

$$\text{Face 2: lado negativo do eixo Y: } \vec{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_{0_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2,5 \\ 0 \end{bmatrix}:$$

$$-y - 2,5 = 0 \Rightarrow y = -2,5 \quad -5 \leq x \leq 3 \quad 0 \leq z \leq 13,2$$

Face 3: lado positivo do eixo X: $\vec{N}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $P_{0_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad -2,5 \leq y \leq 2,5 \quad 0 \leq z \leq 13,2$$

Face 4: lado negativo do eixo X: $\vec{N}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $P_{0_4} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$-x - 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \quad -2,5 \leq y \leq 2,5 \quad 0 \leq z \leq 13,2$$

Face 5: lado positivo do eixo Z: $\vec{N}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $P_{0_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 13,2 \end{bmatrix}$:

$$z - 13,2 = 0 \Rightarrow z = 13,2 \quad -5 \leq x \leq 3 \quad -2,5 \leq y \leq 2,5$$

Face 6: lado positivo do eixo Z (base maior): $\vec{N}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $P_{0_6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$z = 0 \quad -34,34 \leq x \leq 3,36 \quad -9,95 \leq y \leq 9,95$$

Logo, a condição para detecção de colisão de um ponto da garra com a base fixa é:

$$((-5 \leq x \leq 3) \wedge (-2,5 \leq y \leq 2,5) \wedge (0 < z \leq 13,2)) \vee ((-34,34 \leq x \leq 3,36) \wedge (-9,95 \leq y \leq 9,95) \wedge (z \leq 0)) \quad (66)$$

Caso nem o ponto da garra e nem o ponto do pulso colidam com a base, devemos verificar se o segmento de reta representante da garra colide com a base. Para isso, a equação do segmento de reta da garra é a equação (65). A equação geral dos “planos” da base é:

$$n_x x + n_y y + n_z z + (-n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0) = 0$$

Se o segmento de reta da garra de alguma forma se cruza com um plano da base, faz-se:

$$n_x(p_x + (L_3 + L_G) \cdot r_{13} \cdot t) + n_y(p_y + (L_3 + L_g) \cdot r_{23} \cdot t) + n_z(p_z + (L_3 + L_g) \cdot r_{33} \cdot t) + (-n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0) = 0$$

$$n_x p_x + (L_3 + L_G) \cdot n_x \cdot r_{13} \cdot t + n_y p_y + (L_3 + L_g) \cdot n_y \cdot r_{23} \cdot t + n_z p_z + (L_3 + L_g) \cdot n_z \cdot r_{33} \cdot t = n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0$$

$$(L_3 + L_G)(n_x r_{13} + n_y r_{23} + n_z r_{33}) \cdot t = n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0 - n_x p_x - n_y p_y - n_z p_z$$

$$(L_3 + L_G)(n_x r_{13} + n_y r_{23} + n_z r_{33}) \cdot t = n_x(x_0 - p_x) + n_y(y_0 - p_y) + n_z(z_0 - p_z)$$

$$t = \frac{n_x(x_0 - p_x) + n_y(y_0 - p_y) + n_z(z_0 - p_z)}{(L_3 + L_G)(n_x r_{13} + n_y r_{23} + n_z r_{33})}$$

(67)

Um detalhe a ser observado é que, em qualquer situação em que a garra colida com a base, sem colidir o pulso e a posição alvo, obrigatoriamente vai cair em uma colisão com uma de 2 faces: a face 5 ou a face 6. Testando estas 2 faces, elimina a necessidade de testar as demais faces.

Para cada face a ser testada (5 e 6), deve-se:

1. Variar os parâmetros n_x, n_y, n_z, x_0, y_0 e z_0 ;
2. Testar se $(n_x r_{13} + n_y r_{23} + n_z r_{33}) \neq 0$. Se for verdade, vai para o passo 3. Caso contrário, a posição alvo é estritamente paralela à face e significa que não há nenhuma colisão entre a garra e a face corrente. Voltar para o passo 1, se houver mais alguma face a ser testada.
3. Calcular o valor de t , e substituir na fórmula do segmento de reta da garra.
4. Testar se:
 - 2.1. O ponto XYZ calculado está entre a posição alvo e o pulso da garra e
 - 2.2. O ponto XYZ está dentro dos limites da face testada.
 - 2.3. Se a resposta for verdadeira para ambas as condições, significa que haverá colisão da garra com a base para a posição alvo. Caso contrário, volta para o passo 1, se houver mais alguma face para ser testada. Caso todas as faces tenham sido testadas e a resposta for falsa para ambas as condições, significa que não haverá colisão da garra com a base para a posição alvo.

5 Teste de colisão da garra com a base giratória

Para esta abordagem, precisaremos das coordenadas x, y e z da garra, coordenadas p_x , p_y e p_z do pulso, do ângulo θ_1 e do ângulo θ_{234} (ou dos ângulos θ_2 , θ_3 e θ_4). Lembrar que x, y e z devem ser coordenadas projetadas no plano vertical do braço robô.

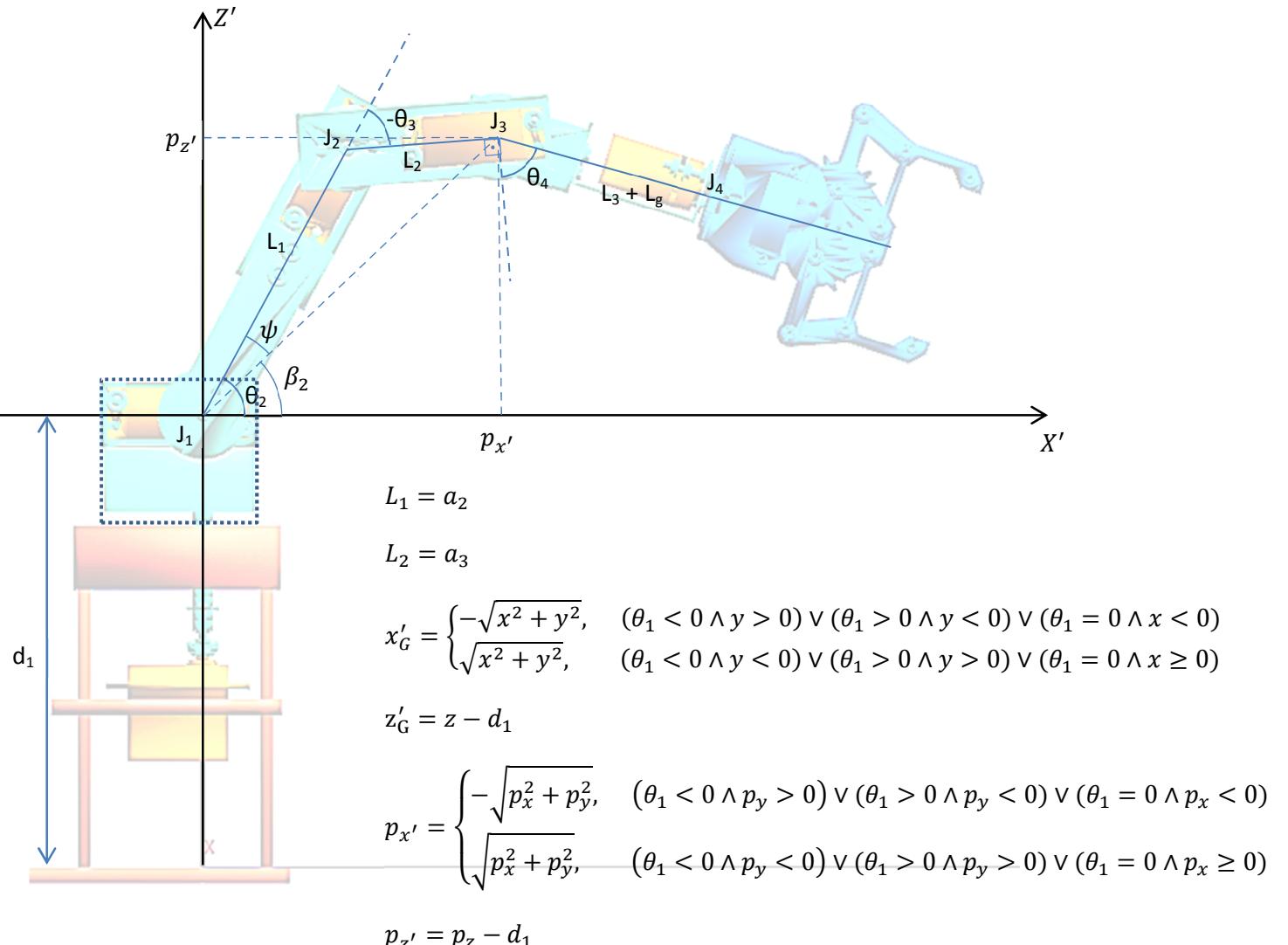


Figura 9: Abordagem geométrica para a detecção de colisão com a base giratória

Para esta abordagem, trataremos o pulso da garra (J_4) como se estivesse junto com J_3 , de forma que p_x , p_y e p_z se referem aos valores de coordenada de J_3 . Isso torna possível tratar o braço robô como se fosse um manipulador planar, de forma que, independente do ângulo θ_1 , a base giratória seja tratada como se fosse uma base fixa retangular, com tamanho fixo.

O ângulo de inclinação da garra em relação ao eixo X' :

$$\theta_G = \theta_{234} - 90^\circ = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 90^\circ \quad (68)$$

A equação da reta sobre a qual está a garra pode ser obtida como a seguir:

$$\tan \theta_G = \frac{z' - p'_z}{x' - p'_x} = a$$

$$z' - p'_z = a(x' - p'_x)$$

$$z' = ax' - ap'_x + p'_z$$

Fazendo $b = p'_z - ap'_x$, teremos como equação da reta da garra:

$$z' = ax' + b$$

O problema de usar esta equação da reta é que, no momento que θ_G assumir o ângulo de 90° ou -90° , o valor de $\tan \theta_G$ vai para infinito. Se for este o caso, usaremos:

$$x' = p'_x \quad \min(p'_z, z'_G) \leq z' \leq \max(p'_z, z'_G)$$

significando que a garra está na posição vertical.

Para a base giratória, podemos definir as seguintes relações:

$$(-3,95 \leq x' \leq 2,15) \wedge (-4,35 \leq z' \leq 1,2)$$

Nosso teste de colisão com a base giratória precisa ser mais abrangente, ou seja, ele precisa detectar como colisão, tanto posições dentro da base giratória como posições “atrás” da base giratória (posições que fazem a garra atravessar a base giratória). Portanto, podemos eliminar o limite inferior das relações da base giratória, resultando no seguinte:

$$(x' \leq 2,15) \wedge (z' \leq 1,2) \tag{69}$$

Ou seja, qualquer ponto da garra ou do pulso que atenda estas condições será detectado como ponto de colisão com a base giratória. Caso nem o ponto da garra e nem o ponto do pulso colidam com a base giratória, será necessário testar se algum ponto entre o pulso e o ponto garra colide. Uma colisão nessas condições obrigatoriamente vai ocorrer com as duas arestas da base giratória, de forma que só será necessário testar o cruzamento de uma delas com o segmento de reta da garra.

Assumindo $\theta_G \neq \pm 90^\circ$, se for testar com o segmento vertical da base giratória que fica do lado positivo do eixo X' ($x' = 2,15$), verificar se:

$$(\min(x'_G, p'_x) \leq 2,15 \leq \max(x'_G, p'_x)) \wedge (a \cdot 2,15 + b \leq 1,2) \tag{70}$$

Se for testar com o segmento horizontal da base giratória que fica do lado positivo do eixo Z' ($z' = 1,2$), poderíamos verificar se:

$$(\min(z'_G, p'_z) \leq 1,2 \leq \max(z'_G, p'_z)) \wedge \left(\frac{1,2 - b}{a} \leq 2,15 \right)$$

exceto se $a = 0$ ($\theta_G = 0^\circ$), o que nos faz concluir que a condição computacionalmente mais adequada é a (70). Em ambos os casos, se a condição for verdadeira, haverá colisão da garra com a base giratória.

Assumindo $\theta_G = \pm 90^\circ$, haverá colisão da garra com a base giratória se:

$$(2,15 = p'_x) \wedge (\min(p'_z, z'_G) \leq 1,2 \leq \max(p'_z, z'_G)) \tag{71}$$

6 Colisão com o segmento L₁

Para detecção de colisão da garra com o segmento L₁, serão necessários os valores de θ_2 , x'_G , z'_G , p'_x e p'_z , sendo estes 4 últimos obtidos a partir das equações da Figura 9.

6.1 Primeira abordagem – para $\theta_2 \neq 90^\circ$

Ainda no mesmo referencial, testar a colisão com o segmento L₁ será como testar se o segmento de reta da garra cruza com o segmento de reta do segmento L₁. Para isso, podemos definir a fórmula do segmento L₁ como segue:

$$a_{L_1} = \tan \theta_2 \quad (72)$$

$$z' = a_{L_1}x' \quad (0 \leq x' \leq L_1 \cos \theta_2) \wedge (0 \leq z' \leq L_1 \sin \theta_2) \wedge (\theta_2 \neq 90^\circ) \quad (73)$$

Esta fórmula se torna um problema quando $\theta_2 = 90^\circ$. Podemos, então, usar a forma paramétrica dela:

$$\begin{cases} x' = L_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot t \\ z' = L_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (74)$$

Para a equação da garra $z' = ax' + b$ usaremos a forma paramétrica da mesma que assume a seguinte forma:

$$P = P_0 + v \cdot t$$

Sendo P um ponto no plano X'Z', P₀ o ponto do pulso da garra, v o vetor direção do segmento de reta da garra e t um valor entre 0 e 1. Ou seja:

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} & P_0 &= \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_z \end{bmatrix} & v &= \begin{bmatrix} x'_G - p'_x \\ z'_G - p'_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_G - p'_x \\ z'_G - p'_z \end{bmatrix} \cdot t \\ \begin{cases} x' = p'_x + (x'_G - p'_x) \cdot t \\ z' = p'_z + (z'_G - p'_z) \cdot t \end{cases} & 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (75)$$

Substituindo as equações paramétricas do segmento de reta da garra na equação do segmento L₁, teremos:

$$\begin{aligned} z' &= a_{L_1}x' \quad (0 \leq x' \leq L_1 \cos \theta_2) \wedge (0 \leq z' \leq L_1 \sin \theta_2) \\ p'_z + (z'_G - p'_z) \cdot t &= a_{L_1} \cdot (p'_x + (x'_G - p'_x) \cdot t) \\ t((z'_G - p'_z) - a_{L_1} \cdot (x'_G - p'_x)) &= a_{L_1} \cdot p'_x - p'_z \\ t = \frac{a_{L_1} \cdot p'_x - p'_z}{(z'_G - p'_z) - a_{L_1} \cdot (x'_G - p'_x)} \end{aligned} \quad (76)$$

Se $(z'_G - p'_z) - a_{L_1} \cdot (x'_G - p'_x) = 0$, significa que a garra não colide com o segmento L₁. Caso contrário, devemos calcular o valor de t e substituir na equação paramétrica da reta da garra. Dado que o ponto do segmento L₁ onde se encontra a junta 2 é definido por:

$$\begin{aligned} x'_{J_2} &= L_1 \cdot \cos \theta_2 \\ z'_{J_2} &= L_1 \cdot \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (77)$$

Devemos testar se o ponto calculado na equação paramétrica da garra pertence ao segmento L₁. Para isso, devemos testar se:

$$\begin{aligned} (z' = a_{L_1} \cdot x') \wedge (\min(0, x'_{J_2}) \leq x' \leq \max(0, x'_{J_2})) \wedge (\min(0, z'_{J_2}) \leq z' \leq \max(0, z'_{J_2})) \\ \wedge (\min(x'_G, p'_x) \leq x' \leq \max(x'_G, p'_x)) \wedge (\min(p'_z, z'_G) \leq z' \leq \max(p'_z, z'_G)) \end{aligned} \quad (78)$$

Se esta condição for verdade, significa que a garra colide com o segmento L₁. Caso contrário, a garra não colide com o segmento L₁.

Esta abordagem é falha para $\theta_2 = 90^\circ$, pois faz a_{L_1} tender para infinito.

6.2 Segunda abordagem - para $\theta_2 = 90^\circ$

Nesta abordagem, trataremos o caso em que $\theta_2 = 90^\circ$. Igualando as equações paramétricas do segmento L_1 (74) com o segmento da garra (75), teremos:

$$\begin{cases} L_1 \cdot \cos \theta_2 \cdot t = p'_x + (x'_G - p'_x) \cdot t \\ L_1 \cdot \sin \theta_2 \cdot t = p'_z + (z'_G - p'_z) \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &= p'_x + (x'_G - p'_x) \cdot t \\ L_1 \cdot t &= p'_z + (z'_G - p'_z) \cdot t \end{aligned}$$

Resolvendo a primeira equação para t, teremos:

$$t = -\frac{p'_x}{x'_G - p'_x} \quad (79)$$

Se $x'_G - p'_x = 0$, significa que a garra não colide com o segmento L_1 . Caso contrário, devemos calcular o valor de t e substituir na equação paramétrica do segmento de reta da garra. Dado que o ponto em que se encontra a junta 2 (fim do segmento L_1) é definido por:

$$\begin{cases} x'_{J_2} = 0 \\ z'_{J_2} = L_1 \end{cases} \quad (80)$$

devemos testar se o ponto (x', z') calculado pertence também ao segmento de reta do segmento L_1 , ou seja, se:

$$(x' = x'_{J_2}) \wedge (0 \leq z' \leq z'_{J_2}) \wedge (\min(x'_G, p'_x) \leq x' \leq \max(x'_G, p'_x)) \wedge (\min(p'_z, z'_G) \leq z' \leq \max(p'_z, z'_G)) \quad (81)$$

Se esta condição for verdadeira, a garra colide com o segmento L_1 . Caso contrário, a garra não colide com o segmento L_1 .

7 Algoritmo geral da cinemática direta para o braço robô

Este algoritmo é executado tanto para a posição alvo quanto para a posição corrente do braço robô. No entanto, é apenas para a posição alvo que há as checagens de colisão, para impedir que o braço robô tente atravessar a garra pela base fixa. O algoritmo é o seguinte:

1. Obtém os ângulos das juntas;
2. Obtém a matriz da cinemática direta para o pulso da garra (seção 2.1, equações (2) a (5));
3. Obtém os valores de $p_x, p_y, p_z, \gamma, \beta$ e α da matriz do pulso da garra (seção 2.1, equações (5) a (8));
4. Obtém os valores de x, y e z pela equação (9);
5. Se a cinemática direta for para a posição alvo:
 - 5.1. Obtém o vetor \hat{Z}_T da matriz do pulso da garra (seção 4);
 - 5.2. Verifica a colisão com a base fixa (seção 4);
 - 5.3. Obtém as coordenadas da garra e do pulso em coordenadas no plano do braço robô, utilizando as equações (41) e (42);
 - 5.4. Verifica a colisão com a base giratória (seção 5);
 - 5.5. Verifica a colisão com o segmento L1 (seção 6);

8 Algoritmo geral da cinemática inversa

Este algoritmo é executado, apenas, para o cálculo da posição alvo do braço robô. O algoritmo é o seguinte:

1. Se a posição XYZ da garra for uma posição singular, obter os ângulos alvo ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$) com as equações (52) a (63) e as equações da abordagem geométrica (equações (41) a (51)), terminando o algoritmo neste passo. Senão, vá para o passo 2;
2. Obter a matriz de transformação de coordenadas B_T (equações (10), (11) e (12));
3. Se o ponto XYZ da garra estiver fora do alcance do braço robô, trazer o mesmo para dentro do alcance (seção 3.2)
4. Fazer a projeção da posição XYZ da garra no plano do braço robô (equações (24) a (35)). Se a posição projetada for diferente da posição original, indicar que a posição foi projetada no plano e:
 - 4.1. Se a posição XYZ da garra for uma posição singular, obter os ângulos alvo ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$) com as equações (52) a (63) e as equações da abordagem geométrica (equações (41) a (51)), terminando o algoritmo neste passo. Senão, vá para o passo 5;
5. Com a posição projetada, verificar se a garra irá colidir com a base fixa;
6. Calcular as 4 soluções possíveis para θ_1 .(equações (36), (37) e (38));
7. Guardar as soluções de θ_1 que não forem repetidas e estiver dentro dos limites máximo e mínimo. Se nenhuma solução atender os limites máximo e mínimo, guardar o valor mínimo, se alguma solução calculada for menor que o mínimo, ou o valor máximo, caso contrário. Indicar a solução como impossível;
8. Para cada solução de θ_1 guardada:
 - 8.1. Calcular θ_5 (equação (36)). Se este valor estiver fora dos limites máximo e mínimo, guardar o valor do máximo ou do mínimo, o que for mais próximo do calculado, e indicar a solução e o ângulo como impossíveis;
 - 8.2. Transformar as coordenadas XYZ da garra e do pulso em coordenadas no plano do braço robô com as equações (41) e (42).
 - 8.3. Calcular e guardar θ_2, θ_3 e θ_4 com a abordagem geométrica da Figura 5. Indicar a solução e o ângulo como impossíveis caso algum dos ângulos seja calculado fora dos limites máximo e mínimo das juntas;
 - 8.4. Com as coordenadas no plano do braço robô, verificar se a garra irá colidir com a base giratória;
 - 8.5. Com as coordenadas no plano do braço robô, verificar se a garra irá colidir com o segmento L1;
 - 8.6. Guardar a solução numa lista de soluções;
9. Se houver apenas 1 solução na lista de soluções, retornar a solução e terminar o algoritmo. Senão, se houver mais de uma solução na lista de soluções, então, incluir cada solução possível em uma lista de soluções válidas.
10. Se a lista de soluções válidas estiver vazia, retornar a primeira solução da lista de soluções que possuir a maior quantidade de ângulos válidos. Senão, se a lista de soluções válidas tiver apenas uma solução, retornar a solução e terminar o algoritmo. Senão, para cada solução válida:
 - 10.1. Calcular o peso P da solução com a seguinte fórmula:
$$P = \frac{\sum_{i=1}^5 i \cdot (\theta_{i,corrente} - \theta_i)}{15} \quad (82)$$
 - 10.2. Da lista de soluções válidas, retornar a primeira que tiver o maior valor de P, e terminar o algoritmo.

O valor de P calculado pela equação (82) serve como uma forma de estimar o quanto mínimo será o movimento do braço robô. O peso do movimento das juntas é proporcional ao quanto próximo elas estão da garra. Desta forma, o peso de θ_1 é o menor, pois a junta 0 move toda a estrutura do braço robô: base giratória, junta 1, segmento L1, junta 2, segmento L2, junta 3, segmento L3, junta 4 e garra. O peso de θ_5 é o maior, pois ele move apenas a garra. Portanto, os passos 9.1 e 9.2 procuram a solução que atenda os seguintes critérios, nesta ordem:

1. Mover a menor quantidade de estruturas possíveis (segmentos e juntas);
2. Mover as menores amplitudes angulares das juntas.

9 Bibliografia

Craig, J. (2005). *Introduction to robotics: mechanics and control*. Upper Saddle River: Pearson Prentice Hall.

de Paula Neto, A. D. (2015). *PROJETO E DESENVOLVIMENTO DE UM PROTÓTIPO DE BRAÇO ROBÓTICO DE 5 GRAUS DE LIBERDADE*. Curitiba, Paraná, Brasil.