**Parâmetros de Denavit-Hatenberg (DH)**



Figura 1: Parâmetros de Denavit-Hatenberg. A posição do braço-robô mostrada nesta figura é a posição em que os ângulos de todas as juntas são iguais a zero.

Apesar de termos dado valores não nulos para d2, d3, d4, d5, a1 e a4, na cinemática implementada no software de controle consideramos todos eles como sendo zero, para que os pontos da garra e do pulso fiquem alinhados com a origem, de forma que seja possível definir um plano vertical que corte o braço robô pela origem da base, pelo pulso e pelo ponto da garra.

**Detalhes do a4 e do a1**



Figura 2: Detalhamentos do a1 e do a4

**Cálculos da Cinemática Direta**

|  |  |
| --- | --- |
|  | *(1)* |

**Cálculos da Cinemática Direta – Resultado e Otimizações de Fórmulas**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  | | (2) |
|  |  | | (3) |
|  | |  | (4) |
|  | |  | (5) |

Utilizamos rotações em ângulos fixos em torno de X, Y e Z, respectivamente, cujos ângulos são , e , respectivamente. Para encontrar os ângulos , e , faremos:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (6) |

As fórmulas para e são válidas para . Se :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7) |

Se :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (8) |

Para achar as coordenadas x, y e z da garra, basta fazer o seguinte cálculo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (9) |

**Cinemática Inversa – Encontrando a matriz de transformação**

No software de controle, são fornecidas as coordenadas x, y, z, Rx, Ry e Rz, sendo que estas três últimas correspondem aos ângulos , e , respectivamente. A matriz a ser encontrada tem a seguinte forma:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (10) |

Onde é a matriz de rotação para a posição XYZ alvo. Para achar , faz-se:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | onde | (11) |

Para achar , faz-se:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (12) |

**Cinemática Inversa – Projetando o ponto x, y, z alvo no plano que corta o braço robô**



J3

Figura 3: Plano de projeção que corta o braço robô pela origem da base fixa

Mesmo que o ponto sempre esteja no plano do braço robô, o ponto XYZ alvo da garra nem sempre estará, por conta dos ângulos , e , que podem, por exemplo, fazer a garra apontar para a direção do vetor mostrado na figura. Para fazer a projeção do XYZ alvo da garra, seguem os cálculos:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  | (13) |
|  | |  | | (14) |
|  | |  | | (15) |
|  | |  | | (16) |
|  | |  | | (17) |

Fórmula de Rodriques:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | (18) |
|  | |  | (19) | |

A nova matriz de rotação passa a ser (apenas para a cinemática inversa):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (20) |

De forma que o ponto XYZ alvo da garra passa a ser:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (21) |

E as rotações passam a ser

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (22) |

As fórmulas para e são válidas para . Se :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (23) |

Se :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (24) |

**Cálculos da Cinemática Inversa – θ1 e θ5**

Para o cálculo de (todas as soluções), temos:

|  |  |
| --- | --- |
| (soluções 1 e 2) | (25) |

|  |  |
| --- | --- |
| (solução 3) | (26) |
| (solução 4) | (27) |

Conhecido , temos, para :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (28) |

Conhecido , temos, para :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (29) |

**Cinemática Inversa – Abordagem geométrica para θ2,θ3 e θ4**



|  |  |
| --- | --- |
|  | (30) |
|  | (31) |

d1

θ2

-θ3

θ4

L1

L2

L3 + Lg

J1

J2

J3

J4

Figura 4: Abordagem geométrica para os ângulos , e .

Para esta abordagem, trataremos o pulso da garra (J4) como se estivesse junto com J3, de forma que px, py e pz se referem aos valores de coordenada de J3. Isso torna possível a abordagem geométrica como se o braço robô fosse um manipulador planar.

Para θ3, temos, a partir do triângulo formado por J1, J2 e J3:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (32) |

Como θ3 será sempre menor ou igual a zero, então:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (33) |

Logo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (34) |

Para θ2, calculamos os ângulos e :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (35) |
|  |  | (36) |

Como  será sempre maior ou igual à zero, então:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (37) |
|  |  | (38) |

Logo:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (39) |

Logo, para θ4, temos:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (40) |

**Cinemática inversa - Braço robô na posição de repouso**



L1

L2

-θ3

d1

L3 + Lg

J3

J4

θ2

θ4

J1

J2

Figura 5: Abordagem geométrica para quando o braço robô estiver na posição de repouso. A posição aqui mostrada é a parte de trás do braço robô. A junta 4 está girada de nesta figura apenas para mostrar onde termina o segmento formado por L3 e Lg.

Observe que, nesta posição, o deve assumir valor negativo, pois está no lado negativo do eixo , o que justifica a fórmula do ser:

de forma que o ângulo seja calculado no quadrante correto. As equações são as mesmas usadas na abordagem geométrica da Figura 4.

**Cinemática Inversa – Posições singulares**

Para a nossa cinemática inversa, posição singular é toda e qualquer posição do pulso da garra em que , , , e .

Nesta situação, a garra está na vertical e rente ao eixo Z da base fixa. O processo de cinemática inversa normal feita para quaisquer outras posições da garra (e/ou do pulso) falha nesta condição, tanto nas fórmulas de projeção do ponto da garra (em particular, a equação (13), do vetor ) quanto no cálculo de todos os valores possíveis de (equações (25), (26) e (27)), sendo que, no cálculo dos valores deste ângulo, teríamos o operador *atan2* com os 2 parâmetros sendo zero, situação esta para a qual o valor de *atan2* é indefinido.

   

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

(b)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

(a)

Figura 6: Algumas posições singulares com

O grande problema de posições singulares é que, matematicamente, cada uma delas pode possuir múltiplas ou até infinitas soluções. No nosso caso prático, como é limitada a quantidade de ângulos possíveis para as juntas 0 e 4, também será limitada a quantidade de soluções possíveis para uma posição singular. Na Figura 6, podemos ver 4 situações onde . Neste caso particular, para cada valor de z, temos 2 soluções diferentes. Para outros valores de , a quantidade de soluções pode chegar a ser maior.

Em resumo, a abordagem de posições singulares da nossa cinemática inversa procura manter a posição corrente da junta 0 e mover somente a junta 4, se necessário. Caso o movimento da junta 4 não seja suficiente para se atingir a posição alvo, daí se calcula a diferença que falta aplicar na junta 0. No geral, quando se mantém no mesmo quadrante de , somente muda; quando muda para um quadrante diferente de , o valor de pode mudar também. Já os ângulos , , são obtidos pela abordagem geométrica da página 9, quando , ou simplesmente eles recebem os valores e , respectivamente, quando .

Seja o quadrante de . Então:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (41) |

Seja um valor provisório para (alvo) e o valor corrente de . Então, para :

|  |  |
| --- | --- |
|  | (42) |

Para :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (43) |

Para :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (44) |

Para :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (45) |

Nas posições singulares, o ângulo é obtido pela seguinte fórmula:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (46) |

Substituindo por , por e por (sendo este o valor provisório do ângulo da junta 4 necessário para se chegar a ) teremos:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  | (47) |

Quando está dentro dos limites máximo e mínimo de ângulos da junta 4:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (48) |
|  |  | (49) |

Há a possibilidade de dar um valor que esteja fora dos limites máximo e mínimo da junta 4. Quando isso acontece, obtém-se o valor da diferença entre e o valor máximo ou mínimo de ângulo da junta 4. Definiremos este valor como . Portanto, , e são calculados, respectivamente, pelas seguintes fórmulas:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (50) |
|  |  | (51) |
|  |  | (52) |



L2

L1

θ4

J3

-θ3

d1

θ2

J1

J2

Figura 7: Abordagem geométrica para posições singulares

Para calcular os ângulos , e , usa-se a mesma abordagem geométrica utilizada para a Figura 4, utilizando . A justificativa para este valor é a seguinte: na Figura 1, vemos que a posição da garra quando todos os ângulos das juntas estão em zero () faz com que ela aponte para baixo na vertical (sentido negativo do eixo Z da base fixa); na Figura 7, a garra está na vertical apontando para cima (sentido positivo do eixo Z da base fixa), ou seja, a da posição em que ela se encontra na Figura 1. Chamando a posição da garra na Figura 1 de posição 0, podemos dizer que o ângulo é o ângulo que a garra faz em relação à posição 0. Na Figura 7, a garra faz um ângulo em relação à posição 0.

**Teste de colisão da garra com a base fixa**

Consiste, basicamente, em representar a colisão da garra como um cruzamento de um segmento de reta (que representa a garra) com uma de várias áreas delimitadas de planos no espaço tridimensional (estas áreas representam as faces da base fixa).

Para este teste, são necessários os valores de e o vetor (ou o , caso pegue a posição projetada).

Para o segmento de reta formado pela posição alvo e pelo pulso da garra :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (53) |

Onde é o vetor direção da garra.

Equação paramétrica do segmento de reta da garra:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (54) |

Equação simétrica:

Para a base fixa, parte contendo o servo da junta J0:

Equação geral dos planos para e :

Face 1: lado positivo do eixo Y: e :

Face 2: lado negativo do eixo Y: e :

Face 3: lado positivo do eixo X: e :

Face 4: lado negativo do eixo X: e

Face 5: lado positivo do eixo Z: e :

Face 6: lado positivo do eixo Z (base maior): e

Logo, a condição para detecção de colisão de um ponto da garra com a base fixa é:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (55) |

Caso nem o ponto da garra e nem o ponto do pulso colidam com a base, devemos verificar se o segmento de reta representante da garra colide com a base. Para isso, a equação do segmento de reta da garra é a equação (54). A equação geral dos “planos” da base é:

Se o segmento de reta da garra de alguma forma se cruza com um plano da base, faz-se:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (56) |

Um detalhe a ser observado é que, em qualquer situação em que a garra colida com a base, sem colidir o pulso e a posição alvo, obrigatoriamente vai cair em uma colisão com uma de 2 faces: a face 5 ou a face 6. Testando estas 2 faces, elimina a necessidade de testar as demais faces.

Para cada face a ser testada (5 e 6), deve-se:

1. Variar os parâmetros , , , , e ;
2. Testar se . Se for verdade, vai para o passo 3. Caso contrário, a posição alvo é estritamente paralela à face e significa que não há nenhuma colisão entre a garra e a face corrente. Voltar para o passo 1, se houver mais alguma face a ser testada.
3. Calcular o valor de t, e substituir na fórmula do segmento de reta da garra.
4. Testar se:
   1. O ponto XYZ calculado está entre a posição alvo e o pulso da garra e
   2. O ponto XYZ está dentro dos limites da face testada.
   3. Se a resposta for verdadeira para ambas as condições, significa que haverá colisão da garra com a base para a posição alvo. Caso contrário, volta para o passo 1, se houver mais alguma face para ser testada. Caso todas as faces tenham sido testadas e a resposta for falsa para ambas as condições, significa que não haverá colisão da garra com a base para a posição alvo.

**Teste de colisão da garra com a base giratória**

Para esta abordagem, precisaremos das coordenadas x, y e z da garra, coordenadas , e do pulso, do ângulo e do ângulo (ou dos ângulos , e ). Lembrar que x, y e z devem ser coordenadas projetadas no plano vertical do braço robô.



d1

θ2

-θ3

θ4

L1

L2

L3 + Lg

J1

J2

J3

J4

Figura 8: Abordagem geométrica para a detecção de colisão com a base giratória

Para esta abordagem, trataremos o pulso da garra (J4) como se estivesse junto com J3, de forma que px, py e pz se referem aos valores de coordenada de J3. Isso torna possível tratar o braço robô como se fosse um manipulador planar, de forma que, independente do ângulo , a base giratória seja tratada como se fosse uma base fixa retangular, com tamanho fixo.

O ângulo de inclinação da garra em relação ao eixo :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (57) |

A equação da reta sobre a qual está a garra pode ser obtida como a seguir:

Fazendo , teremos como equação da reta da garra:

O problema de usar esta equação da reta é que, no momento que assumir o ângulo de 90° ou -90°, o valor de vai para infinito. Se for este o caso, usaremos:

significando que a garra está na posição vertical.

Para a base giratória, podemos definir as seguintes relações:

Nosso teste de colisão com a base giratória precisa ser mais abrangente, ou seja, ele precisa detectar como colisão, tanto posições dentro da base giratória como posições “atrás” da base giratória (posições que fazem a garra atravessar a base giratória). Portanto, podemos eliminar o limite inferior das relações da base giratória, resultando no seguinte:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (58) |

Ou seja, qualquer ponto da garra ou do pulso que atenda estas condições será detectado como ponto de colisão com a base giratória. Caso nem o ponto da garra e nem o ponto do pulso colidam com a base giratória, será necessário testar se algum ponto entre o pulso e o ponto garra colide. Uma colisão nessas condições obrigatoriamente vai ocorrer com as duas arestas da base giratória, de forma que só será necessário testar o cruzamento de uma delas com o segmento de reta da garra.

Assumindo , se for testar com o segmento vertical da base giratória que fica do lado positivo do eixo X’ (), verificar se:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (59) |

Se for testar com o segmento horizontal da base giratória que fica do lado positivo do eixo Z’ (), poderíamos verificar se:

exceto se , o que nos faz concluir que a condição computacionalmente mais adequada é a (59). Em ambos os casos, se a condição for verdadeira, haverá colisão da garra com a base giratória.

Assumindo , haverá colisão da garra com a base giratória se:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (60) |

**Colisão com o segmento L1 – requisitos**

Para detecção de colisão da garra com o segmento L1, serão necessários os valores de , , , e .

**Colisão com o segmento L1 – primeira abordagem – para**

Ainda no mesmo referencial, testar a colisão com o segmento L1 será como testar se o segmento de reta da garra cruza com o segmento de reta do segmento L1. Para isso, podemos definir a fórmula do segmento L1 como segue:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (61) |
|  |  | (62) |

Esta fórmula se torna um problema quando . Podemos, então, usar a forma paramétrica dela:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (63) |

Para a equação da garra usaremos a forma paramétrica da mesma que assume a seguinte forma:

Sendo P um ponto no plano X’Z’, P0 o ponto do pulso da garra, v o vetor direção do segmento de reta da garra e t um valor entre 0 e 1. Ou seja:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (64) |

Substituindo as equações paramétricas do segmento de reta da garra na equação do segmento L1, teremos:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (65) |

Se , significa que a garra não colide com o segmento L1. Caso contrário, devemos calcular o valor de t e substituir na equação paramétrica da reta da garra. Dado que o ponto do segmento L1 onde se encontra a junta 2 é definido por:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (66) |

Devemos testar se o ponto calculado na equação paramétrica da garra pertence ao segmento L1. Para isso, devemos testar se:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (67) |

Se esta condição for verdade, significa que a garra colide com o segmento L1. Caso contrário, a garra não colide com o segmento L1.

Esta abordagem é falha para , pois faz tender para infinito.

**Colisão com o segmento L1 – segunda abordagem – para**

Nesta abordagem, trataremos o caso em que . Igualando as equações paramétricas do segmento L1 (63) com o segmento da garra (64), teremos:

Resolvendo a primeira equação para t, teremos:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (68) |

Se , significa que a garra não colide com o segmento L1. Caso contrário, devemos calcular o valor de t e substituir na equação paramétrica do segmento de reta da garra. Dado que o ponto em que se encontra a junta 2 (fim do segmento L1) é definido por:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (69) |

devemos testar se o ponto calculado pertence também ao segmento de reta do segmento L1, ou seja, se:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (70) |

Se esta condição for verdadeira, a garra colide com o segmento L1. Caso contrário, a garra não colide com o segmento L1.

**Algoritmo geral da cinemática direta para o braço robô**

Este algoritmo é executado tanto para a posição alvo quanto para a posição corrente do braço robô. No entanto, é apenas para a posição alvo que há as checagens de colisão, para impedir que o braço robô tente atravessar a garra pela base fixa. O algoritmo é o seguinte:

1. Obtém os ângulos das juntas;
2. Obtém a matriz da cinemática direta para o pulso da garra;
3. Obtém os valores de e da matriz do pulso da garra;
4. Obtém os valores de *x*, *y* e *z* pela equação (9);
5. Se a cinemática direta for para a posição alvo:
   1. Obtém o vetor da matriz do pulso da garra;
   2. Verifica a colisão com a base fixa;
   3. Obtém as coordenadas da garra e do pulso em coordenadas no plano do braço robô, utilizando as equações (30) e (31);
   4. Verifica a colisão com a base giratória;
   5. Verifica a colisão com o segmento L1;

**Algoritmo geral da cinemática inversa**

Este algoritmo é executado, apenas, para o cálculo da posição alvo do braço robô. O algoritmo é o seguinte:

1. Se a posição XYZ da garra for uma posição singular, obter os ângulos alvo ()com as equações (41) a (52) e as equações da abordagem geométrica (equações (30) a (40)), terminando o algoritmo neste passo. Senão, vá para o passo 2;
2. Obter a matriz de transformação de coordenadas (equações (10), (11) e (12));
3. Fazer a projeção da posição XYZ da garra no plano do braço robô (equações (13) a (24)). Se a posição projetada for diferente da posição original, indicar que a posição foi projetada no plano;
4. Com a posição projetada, verificar se a garra irá colidir com a base fixa;
5. Calcular as 4 soluções possíveis para .(equações (25), (26) e (27));
6. Guardar as soluções de que não forem repetidas e estiver dentro dos limites máximo e mínimo. Se nenhuma solução atender os limites máximo e mínimo, guardar o valor mínimo, se alguma solução calculada for menor que o mínimo, ou o valor máximo, caso contrário. Indicar a solução como impossível;
7. Para cada solução de guardada:
   1. Calcular (equação (25)). Se este valor estiver fora dos limites máximo e mínimo, guardar o valor do máximo ou do mínimo, o que for mais próximo do calculado, e indicar a solução e o ângulo como impossíveis;
   2. Transformar as coordenadas XYZ da garra e do pulso em coordenadas no plano do braço robô com as equações (30) e (31).
   3. Calcular e guardar e com a abordagem geométrica da Figura 4. Indicar a solução e o ângulo como impossíveis caso algum dos ângulos seja calculado fora dos limites máximo e mínimo das juntas;
   4. Com as coordenadas no plano do braço robô, verificar se a garra irá colidir com a base giratória;
   5. Com as coordenadas no plano do braço robô, verificar se a garra irá colidir com o segmento L1;
   6. Guardar a solução numa lista de soluções;
8. Se houver apenas 1 solução na lista de soluções, retornar a solução e terminar o algoritmo. Senão, se houver mais de uma solução na lista de soluções, então, incluir cada solução possível em uma lista de soluções válidas.
9. Se a lista de soluções válidas estiver vazia, retornar a primeira solução da lista de soluções que possuir a maior quantidade de ângulos válidos. Senão, se a lista de soluções válidas tiver apenas uma solução, retornar a solução e terminar o algoritmo. Senão, para cada solução válida:
   1. Calcular o peso P da solução com a seguinte fórmula:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (71) |

* 1. Da lista de soluções válidas, retornar a primeira que tiver o maior valor de P, e terminar o algoritmo.

O valor de P calculado pela equação (71) serve como uma forma de estimar o quão mínimo será o movimento do braço robô. O peso do movimento das juntas é proporcional ao quão próximo elas estão da garra. Desta forma, o peso de é o menor, pois a junta 0 move toda a estrutura do braço robô: base giratória, junta 1, segmento L1, junta 2, segmento L2, junta 3, segmento L3, junta 4 e garra. O peso de é o maior, pois ele move apenas a garra. Portanto, os passos 9.1 e 9.2 procuram a solução que atenda os seguintes critérios, nesta ordem:

1. Mover a menor quantidade de estruturas possíveis (segmentos e juntas);
2. Mover as menores amplitudes angulares das juntas.