



Práctica 3: Medición de la función de Wigner

En esta práctica el estudiante se familiarizará experimentalmente con la técnica de detección llamada homodina balanceada (BHD) para medir las cuadraturas de la luz. Los estudiantes podrán, a partir de las mediciones de cuadraturas, reconstruir la función de Wigner para un estado coherente y para el vacío. La práctica tiene componente de medición en el laboratorio y otra parte de simulación computacional.

Objetivos

- Para la parte experimental:
 - Entender el método de BHD reconociendo claramente la componente óptica y la componente electrónica.
 - Reconocer que con la técnica de BHD se pueden medir las cuadraturas de la luz.
 - Realizar histogramas de los valores de cuadratura de una fuente de luz coherente y del vacío.
- Para la parte de simulación computacional:
 - Familiarizarse con la tomografía cuántica en variables continuas.
 - Familiarizarse con la transformada de Radon.
 - Obtener a partir de datos simulados, u obtenidos en el laboratorio, la función de Wigner para estados coherentes y para el vacío.

Bibliografía

- [1] M. FOX, *Quantum Optics: An Introduction*, Oxford Master Series in Physics, OUP Oxford, 2006.
- [2] M. PARIS AND J. REHACEK, *Quantum State Estimation*, Lecture Notes in Physics, Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [3] H. P. YUEN AND V. W. S. CHAN, *Noise in homodyne and heterodyne detection*, Opt. Lett., 8 (1983), pp. 177–179.



Teoría

Desde el desarrollo de la técnica óptica de detección homodina balanceada por Yuen y Chan en 1983 [3] ha tenido un amplio uso y aplicación, en particular en medir las cuadraturas ¹ (y sus fluctuaciones) de ondas electromagnéticas débiles [2]. El esquema del montaje experimental es el que se puede ver en la Fig. 1.

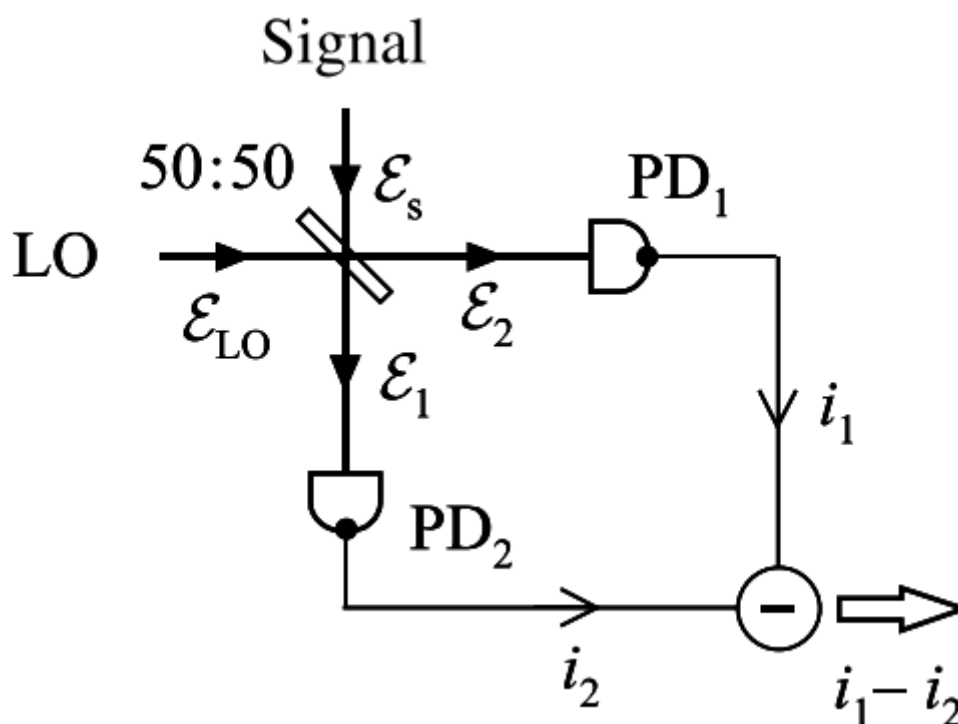


Figura 1: Esquema básico de la técnica óptica de detección homodina balanceada. Tomada de [1]

En la técnica se tiene una señal de entrada, cuyo campo amplitud del campo eléctrico describiremos con \mathcal{E}_s , y una señal de un oscilador local (LO=Local Oscillator) cuya amplitud de campo eléctrico será denotada por \mathcal{E}_{LO} y donde su modo espacio-temporal está muy bien definido. Como resultado de la medición se obtienen las cuadraturas del campo eléctrico de la señal de entrada en el modo espacio-temporal del oscilador local. Una de las ventajas de esta técnica es que las fluctuaciones de intensidad clásicas del oscilador local son rechazadas y al igual que con un Lock-In Amplifier, permite medir señales cuya amplitud es mucho menor a la amplitud del oscilador local. Además, ya que estas cuadraturas se miden para diferentes valores de fase relativa entre el LO y la señal de entrada (que denotaremos por θ), provee un conjunto completo de variables tomográficas, necesarias para hacer *quantum state tomography*. Es común que el oscilador local provenga del

¹Por cuadraturas se refiere al coseno y seno, o a la parte real e imaginaria de un campo eléctrico oscilante en un modo espacio-temporal específico.



mismo láser que la señal, en una configuración tipo Mach-Zehnder.

Para implementar la técnica se deben ingresar ambas señales a un divisor de haz (*beam splitter*) 50:50. A la salida del *beam splitter* se obtienen las amplitudes \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 dadas por las expresiones

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_{LO}e^{i\theta} + \mathcal{E}_s}{\sqrt{2}}, \quad (1)$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_{LO}e^{i\theta} - \mathcal{E}_s}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

La señal de entrada se puede escribir en términos de sus cuadraturas, explícitamente

$$\mathcal{E}_s = X_s + iY_s. \quad (3)$$

Usando esta expresión, y teniendo en cuenta que las fotocorrientes en cada detector son proporcionales a $\mathcal{E}^*\mathcal{E}$ se obtiene que (después de pasar por el restador)

$$i_1 - i_2 \propto 2\mathcal{E}_{LO} (X \cos(\theta) + Y \sin(\theta)), \quad (4)$$

por lo que la medición será proporcional al término $(X \cos(\theta) + Y \sin(\theta))$ que depende de las cuadraturas de la señal y de la fase relativa entre la señal y el oscilador local. Cambiando esta fase relativa se puede medir con precisión los valores de X y Y .

Desde el punto de vista de los campos eléctricos cuantizados se entiende en términos de los operadores de destrucción de la señal \hat{a} y del oscilador local \hat{c}_{LO} . Suponemos que a la entrada del *beam splitter* la señal se encuentra en una superposición de modos normales (denotados por el subíndice j) tal que el campo eléctrico se puede escribir como

$$\hat{E}_s(\vec{r}, t) = i \sum_j \hat{a}_j \vec{v}_j(\vec{r}, t), \quad (5)$$

en donde en el factor $v_j(\vec{r}, t)$ contiene toda la dependencia espacio temporal y de polarización del campo. Suponga además que el estado cuántico del oscilador local está en un estado coherente (tal que $\hat{c}_{LO} |\alpha_{LO}\rangle = \alpha_{LO} |\alpha_{LO}\rangle$) con un modo específico (LO) con un paquete de onda respectivo $v_{LO}(\vec{r}, t)$ tal que

$$\hat{E}_{LO}(\vec{r}, t) = i\hat{c}_{LO}v_{LO}(\vec{r}, t) + \text{términos de vacío}. \quad (6)$$

Es posible demostrar (ver referencia [2], capítulo 7) que el operador \hat{N}_- correspondiente a la diferencia entre el número de fotones detectados por cada fotodetector está dado por

$$\hat{N}_- = \hat{c}_{LO}^\dagger \hat{a} + \hat{c}_{LO} \hat{a}^\dagger, \quad (7)$$

donde $\hat{a} = \hat{a}_{j=LO}$ es el operador en el mismo modo que el oscilador local y la misma forma espacio-temporal. En particular, como el oscilador local puede tratarse clásicamente se puede reemplazar el operador \hat{c}_{LO} por la amplitud $\alpha_{LO} = |\alpha_{LO}|e^{i\theta}$. Entonces la ecuación (7) se puede escribir como



$$\hat{N}_- = |\alpha_{LO}| (\hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}). \quad (8)$$

Escribiendo \hat{a} y \hat{a}^\dagger en términos de sus cuadraturas \hat{q} y \hat{p} (que se pueden interpretar como las variables conjugadas de un oscilador armónico cuántico con relación de conmutación $[\hat{q}, \hat{p}] = i$)

$$\hat{a} = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad (9)$$

podemos escribir la ecuación (8) como

$$\hat{N}_- = \sqrt{2}|\alpha_{LO}| (\hat{q} \cos(\theta) + \hat{p} \sin(\theta)). \quad (10)$$

Con la fase del oscilador local en $\theta = 0$ se mide la cuadratura \hat{q} y con la fase en $\pi/2$ se mide la cuadratura \hat{p} . Para un θ arbitrario se define un operador \hat{q}_θ como

$$\hat{q}_\theta = \frac{\hat{N}_-}{\sqrt{2}|\alpha_{LO}|} = \hat{q} \cos(\theta) + \hat{p} \sin(\theta), \quad (11)$$

y su variable conjugada

$$\hat{p}_\theta = \hat{p} \cos(\theta) - \hat{q} \sin(\theta). \quad (12)$$

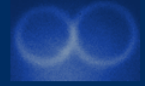
Para el caso en el que el oscilador local es un estado coherente y tratado clásicamente, la distribución de probabilidad para la diferencia de fotoelectrones n_- puede ser aproximada por una función Gaussiana como se muestra a continuación

$$P(n_-) = \left\langle : \frac{\exp \left[-(n_- - \eta \hat{N}_-)^2 / (2\eta \hat{N}_+) \right]}{\sqrt{2\pi\eta \hat{N}_+}} : \right\rangle_s, \quad (13)$$

donde $\hat{N}_+ = |\alpha_{LO}|^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a}$ es el número total de fotones que llegan a ambos detectores y $\eta \leq 1$ es la eficiencia de los detectores. Los puntos $::$ denotan el orden normal (a la derecha los operadores de destrucción y a la izquierda los de creación) y el valor esperado se toma con respecto al estado de la señal de entrada. Usando el operador definido en (11) y definiendo la variable $q_\theta = \frac{n_-}{\eta|\alpha_{LO}\sqrt{2}|}$ se puede transformar la expresión en (13) en:

$$P(q_\theta, \theta) = \left\langle : \frac{\exp \left[-(q_\theta - \hat{q}_\theta) / (2\sigma^2) \right]}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} : \right\rangle_s, \quad (14)$$

donde $2\sigma^2 = 1/\eta$. Esta expresión nos da la distribución de probabilidad para la cuadratura \hat{q}_θ para un ángulo θ arbitrario. La distribución de probabilidad $P(q_\theta, \theta)$ se puede estimar experimentalmente al medir el valor para q_θ (note que será proporcional a n_- y por lo tanto a la diferencia de las corrientes en los fotodiodos) de forma repetida y obteniendo un histograma de frecuencias relativas.



Ejercicios:

Antes de realizar la práctica en el laboratorio responda las siguientes preguntas:

- ¿En qué consiste la técnica de detección homodina balanceada (BHD)?
- Demuestre explícitamente cómo obtener la expresión dada en (4).
- ¿Qué es la tomografía cuántica?
- Consultar la referencia [2] e indicar cómo se obtiene la expresión dada en la ecuación (7).
- ¿Cómo se define la función de Wigner para un estado cuántico? ¿Qué propiedades tiene?
- ¿Por qué es de interés medir la función de Wigner de la luz?

La relación entre la distribución de probabilidad de la cuadratura q_θ y la función de Wigner $W(p, q)$ asociada a la señal está dada por:

$$P(q_\theta, \theta) = \iint \frac{\exp [-(q_\theta - q \cos(\theta) - p \sin(\theta))/(2\epsilon^2)]}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} W(q, p) dq dp, \quad (15)$$

donde $2\epsilon^2 = 2\sigma^2 - 1 = \frac{1}{\eta} - 1$. En el límite $\eta = 1$ (detectores con eficiencia de 100 %) se llega a la expresión

$$P(q_\theta, \theta) = \int W(q_\theta \cos(\theta) - p_\theta \sin(\theta), q_\theta \sin(\theta) + p_\theta \cos(\theta)) dp_\theta, \quad (16)$$

que puede ser interpretada como una distribución de probabilidad marginal. La expresión en (16) también es conocida como la transformada de Radon. Esta relación se puede invertir, obteniendo una expresión para la función de Wigner:

$$W(q, p) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dq_\theta \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta |\zeta| \int_0^\pi d\theta P(q_\theta, \theta) \exp [i\zeta(q_\theta - q \cos(\theta) - p \sin(\theta))]. \quad (17)$$

En el caso en que la eficiencia de los detectores sea menor a 1 ($\eta < 1$), la reconstrucción se hará usando usando los histogramas de frecuencias relativas por lo que el resultado es una función de Wigner experimental que se relaciona con la función de Wigner mediante la relación

$$W_{\text{Exp}}(q, p) = \frac{1}{\pi^2 \epsilon^2} \iint e^{-(q-q')/(2\epsilon^2)} e^{-(p-p')/(2\epsilon^2)} W(q', p') dp' dq'. \quad (18)$$

De esta expresión se puede en principio obtener la función de Wigner mediante una deconvolución [2] aunque no es práctico si la señal no tiene una buena razón señal/ruido.

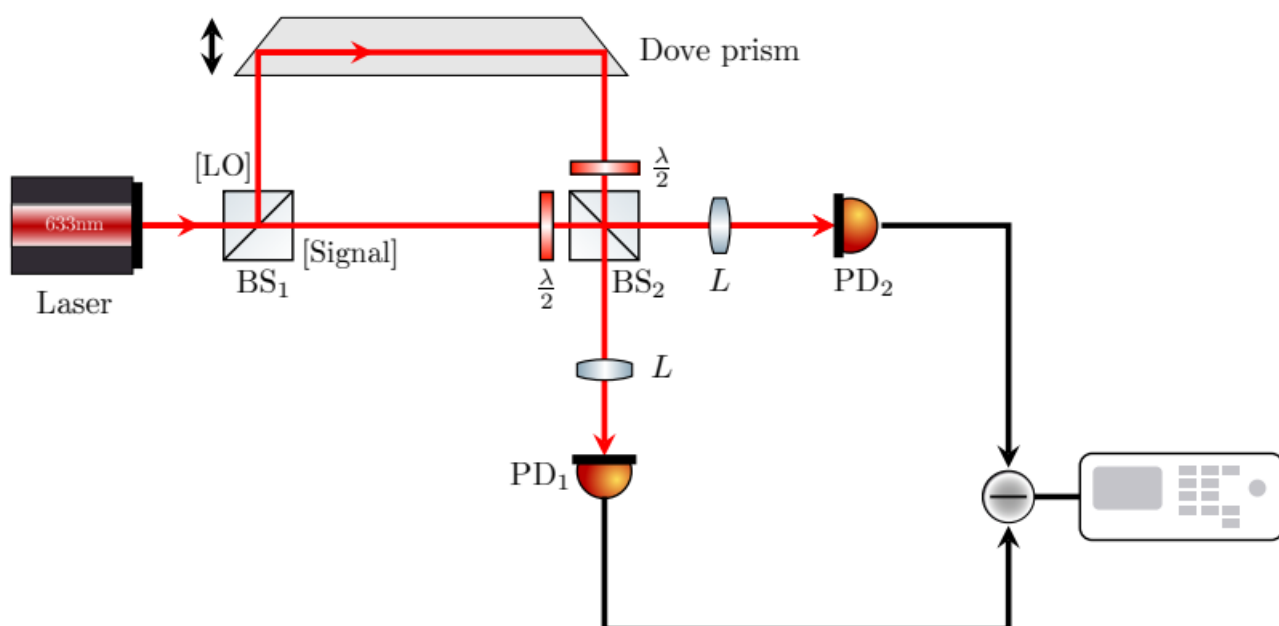


Figura 2: Esquema experimental para detección homodina

Montaje

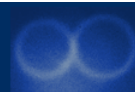
Equipo

El esquema general para la detección homodina se muestra en la Fig. 2. Para su implementación se usan 2 diodos Thorlabs FDS100, un láser de He-Ne con longitud de onda centrada en 633nm y potencia del orden de 1mW que provee la luz del oscilador y la señal. Dos divisores de haz (BS_1 y BS_2), uno para dividir la señal del oscilador local y el otro para implementar el esquema de medición homodina. Las láminas de media onda $\lambda/2$ (HWP) aseguran que la polarización de la señal y del oscilador local sea la misma. Finalmente, un par de lentes (L) de 30mm de distancia focal se usan para enfocar la luz proveniente del divisor de haz a los fotodiodos. Con el fin de cambiar la fase entre el LO y la señal, se usa un prisma *Dove*, cambiando así la diferencia de camino óptico y por ende la fase relativa. Después de los fotodiodos se implementa un restador y un osciloscopio.

Experimentos

Actividad 1: Medida de cuadraturas usando detección homodina

Se medirán cuadraturas de una fuente de luz coherente y del vacío. Para esto debe fijar diferentes posiciones del piezo-eléctrico que hace mover el prisma *Dove*. Defina esta cantidad de movimiento basándose en obtener una oscilación completa del valor promedio de la diferencia de corrientes. Para cada fase del oscilador local acumule, en el osciloscopio, 2 minutos de datos con la mayor resolución temporal que le ofrezca el osciloscopio. A partir



de estos valores genere un histograma para cada fase del oscilador local (LO) y grafique el valor medio y la desviación estándar de la medición de cuadraturas.

- ¿Cómo se reconoce el valor de la fase del LO al utilizar BHD?
- ¿Qué es el shot noise? ¿Cómo afecta al experimento?

Actividad 2: Simulación y reconstrucción de la función de Wigner para diferentes estados de la luz

Para esta parte utilizaremos la implementación computacional desarrollada en el grupo de investigación de óptica cuántica. Los detalles se encuentran en la monografía del estudiante Andrés Martínez (<https://repositorio.uniandes.edu.co/handle/1992/49072>) en los apéndices A1 y A2. Específicamente, se implementó un programa que simula mediciones de cuadraturas para diferentes tipos de luz (apéndice A1) y otro programa, que se basa en la transformación de Radon, y realiza la tomografía para obtener las funciones de Wigner.

Informe

Preparar un informe que describa el experimento que realizó. Las personas que hacen la práctica en el laboratorio deben reportar las funciones de Wigner para el estado coherente y para el vacío. En cambio, las personas que no hacen la práctica presencial debe reportar funciones de Wigner para el estado coherente, el vacío, estados de Fock, térmico y squeezed. Esto lo harán generando datos (apéndice A1) y utilizando el programa del apéndice (A2).