Sucesión de Sturm

Asignamos a s(x) el polinomio a partir del cual queremos obtener la sucesión de Sturm.

```
-->  s(x) := x^4 + 2*x^3 -3*x^2 -4*x-1;
```

$$(\%o187)\ \mathrm{s}(x) := -1 - 4 \cdot x - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3 + x^4$$

```
-->  p(x) := s(x);
```

$$(\%o188)\ \mathrm{p}(x) := \mathrm{s}(x)$$

Definimos el primero término de la sucesión.

```
-->  f1(x) := s(x);
```

$$(\%o189)\ \mathrm{f1}(x) := \mathrm{s}(x)$$

Definimos el segundo elemento de la sucesión derivando el anterior.

```
-->  define(f2(x),diff(s(x), x, 1));
```

$$(\%o190)\ \mathrm{f2}(x) := 4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 4$$

Creamos la lista que va a tener todos los elementos de la sucesión.

```
-->  f(x):=[f1(x),f2(x)];
```

$$(\%o191)\ \mathrm{f}(x) := [\mathrm{f1}(x), \mathrm{f2}(x)]$$

```
-->  f(x);
```

$$(\%o192)\ [x^4 + 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 1, 4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - 6 \cdot x - 4]$$

Obtenemos el término i de la sucesión dividiendo el término i-2 entre el i-1. El término i será el resto cambiado de signo.

```
-->  for i:3 while (hipow(p(x),x) > 0) do(
        define(p(x),-divide(f(x)[i-2],f(x)[i-1])[2]),
        define(f(x), append(f(x),[p(x)]))
     );
```

$$(\%o193)\ \mathit{done}$$

Se muestra la lista con los términos de la sucesión.

```
-->     f(x);
```

(%o194) $[x^4+2\cdot x^3-3\cdot x^2-4\cdot x-1, 4\cdot x^3+6\cdot x^2-6\cdot x-4, \frac{2+9\cdot x+9\cdot x^2}{4}, \frac{40+80\cdot x}{9}, \frac{1}{16}]$

num contendrá el valor donde se evaluará los términos de la sucesión.

```
-->     num : -5;
```

(%o197) -5

Se contabiliza el número de cambios de signos que se producen en la sucesión evaluada en num y se guarda en cont.

```
-->     cont : 0;
```

(%o198) 0

```
-->     for i:1 thru (length(f(x))-1) do(
            if f(num)[i]*f(num)[i+1] < 0 then (
                cont : cont + 1
            )
        );
```

(%o200) *done*

Muestra cont.

```
-->     cont;
```

(%o201) 4

Ejercicio 14

Considera el polinomio $p(x) = 2x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 6x + 3$.
a) Calcula una sucesión de Sturm asociada a $p(x)$.

$$f_0(x) = 2 \cdot x^5 - x^4 + 4 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 3$$

$$f_1(x) = 10 \cdot x^4 - 4 \cdot x^3 + 12 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 6$$

$$f_2(x) = -\frac{72 - 118 \cdot x + 36 \cdot x^2 + 38 \cdot x^3}{25}$$

$$f_3(x) = -\frac{7050 - 20500 \cdot x + 20150 \cdot x^2}{361}$$

$$f_4(x) = -\frac{8987456 \cdot x - 7451040}{4060225}$$

$$f_5(x) = \frac{1181525475}{109253762}$$

b) Halla una cota superior e inferior de las raíces de $p(x)$.

c) Localiza todas las raíces reales de $p(x)$ en un intervalo cada una.

	-4	4
Número de cambios de signo	4	1

	-4	0	4
Número de cambios de signo	4	3	1

	0	2	4
Número de cambios de signo	3	1	1

	0	1	2
Número de cambios de signo	3	2	1

Ejercicio 18

Considera el sistema de ecuaciones:

$$g(x) = \begin{cases} 3x_1 - cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} & = 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0{,}1)^2 + sin(x_3) + 1{,}06 & = 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} & = 0 \end{cases}$$

a) Escribe el sistema anterior en la forma $x = g(x)$ despejando en la ecuación i la variable x_i , $i = 1, 2, 3$.

$$g(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{cos(x_2x_3)+\frac{1}{2}}{3} \\ \sqrt{\frac{sin(x_3)+x_1^2+1{,}06}{81}} - 0{,}1 \\ \frac{e^{-x_1x_2}+\frac{10\pi-3}{3}}{-20} \end{pmatrix}$$

b) Demuestra, utilizando el resultado del ejercicio anterior que el sistema de ecuaciones tiene una única solución en

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | 1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$$

```
-->     diff(g1(x,y,z),x);
```

$$(\%o33) \quad 0$$

```
-->     diff(g1(x,y,z),y);
```

$$(\%o34) \quad -\frac{z \cdot \sin(y \cdot z)}{3}$$

```
-->     diff(g1(x,y,z),z);
```

$$(\%o35) \quad -\frac{y \cdot \sin(y \cdot z)}{3}$$

```
-->     diff(g2(x,y,z),x);
```

$$(\%o36) \quad \frac{x}{9 \cdot \sqrt{\sin(z) + x^2 + 1{,}06}}$$

```
-->     diff(g2(x,y,z),y);
```

$$(\%o37)\quad 0$$

```
--> diff(g2(x,y,z),z);
```

$$(\%o38)\quad \frac{\cos(z)}{18\cdot\sqrt{\sin(z)+x^2+1{,}06}}$$

```
--> diff(g3(x,y,z),x);
```

$$(\%o39)\quad \frac{\log(e)\cdot y}{20\cdot e^{x\cdot y}}$$

```
--> diff(g3(x,y,z),y);
```

$$(\%o40)\quad \frac{\log(e)\cdot x}{20\cdot e^{x\cdot y}}$$

```
--> diff(g3(x,y,z),z);
```

$$(\%o41)\quad 0$$

c) Calcula una aproximación de la solución con el método de iteración funcional tomando $x^{(0)} = (0.1,\ 0.1,\ \text{-}0.1)$ con una tolerancia fijada de 10^{-5}, donde la tolerancia viene dada por la norma infinito de la diferencia de dos aproximaciones sucesivas.

Todos las aproximaciones de la primera variante

Aproximación: (0.499983333472222, 0.00944114960371334, -0.523101267285757), punto: (0.499995934919313, 0.0000255677467667359, -0.523363310908805), distancia entre términos: 0.423101267285757

Aproximación: (0.499995934919313, 0.0000255677467667359, -0.523363310908805), punto: (0.499999999970157, 0.0000123367203633540, -0.523598136413912), distancia entre términos: 0.00941558185694660

Aproximación: (0.499999999970157, 0.0000123367203633540, -0.523598136413912), punto: (0.499999999993046, 3.41679062543232e-8, -0.523598467181241), distancia entre términos: 0.000234825505107006

Aproximación: (0.500000000000000, 1.64870403995820e-8, -0.523598774744101), punto: (0.500000000000000, 4.56640003587694e-11, -0.523598775186123), distancia entre términos: 3.07562860180077e-7

d) Sabiendo que la solución del sistema es $x^* = \left(0{,}5, 0, \frac{-\pi}{6}\right)$ calcula el error absoluto cometido en la aproximación obtenida.

```
(%i7) abs([0.500000000000000, 1.64870403995820e-8, -0.523598774744101]-[0.5,0,-(%pi/6)]);
```

(%o7) $[0{,}0, 1{,}6487040399582 \cdot 10^{-8}, \frac{\pi}{6} - 0{,}523598774744101]$

e) Calcula, utilizando la cota teórica del método de iteración funcional, el número de iteraciones necesarias para asegurar un error absoluto menor que 10^{-5} ¿Qué conclusión extraes?