Memoria de la práctica 3
Algorítmica

FCO. JAVIER SÁEZ MALDONADO
LAURA GÓMEZ GARRIDO
LUIS ANTONIO ORTEGA ANDRÉS
PEDRO BONILLA NADAL
DANIEL POZO ESCALONA

Universidad de Granada
26 de mayo de 2017

Índice

1. Introducción

Un polígono P en el plano euclídeo es un conjunto de n puntos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, n$ llamados vértices, y n segmentos de rectas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ llamados lados, que verifican que:

- Los puntos extremos de los lados son dos vértices distintos del polígono.
- Cualquier vértice es el extremo de exactamente dos lados (distintos).

Un polígono del plano se dice **convexo** si cada uno de sus vértices es un vértice de su envolvente convexa.

Por **triangulación** de un polígono plano entenderemos la división de este en un conjunto de triángulos, con la restricción de que dos lados de dos triángulos distintos no se corten o lo hagan en un vértice del polígono.

Una triangulación se dice **mínima** si es un elemento minimal del conjunto de triangulaciones posibles, con el preorden inducido por el orden en $\mathbb{R}$ de la suma de las longitudes de sus diagonales.

2. Problema

Se pide diseñar e implementar un algoritmo *greedy* que solucione el problema de encontrar la triangulación mínima de un polígono convexo. Como salida, se deberá proporcionar el conjunto de aristas que forman la triangulación junto con la suma de los perímetros de los triángulos.

3. Solución

3.1. Descripción del algoritmo

La entrada del algoritmo es un conjunto de n puntos del plano euclídeo, los vértices del polígono convexo que queremos triangular, ordenados. De esta forma, los lados del polígono quedan determinados por el orden, es decir, son:

$$\mathcal{L} = \{\alpha_i \vee \alpha_{i+1} \forall i \in \mathbb{Z}_n\}$$

Del mismo modo, las cuerdas son:

$$\mathcal{C} = \{\alpha_i \vee \alpha_{i+2} \forall i \in \mathbb{Z}_n\}$$

Los pasos del algoritmo:

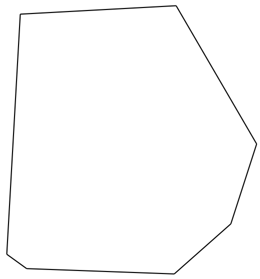
1. Si el polígono es un triángulo, no se hace nada.
2. Encontrar la cuerda de longitud mínima.
3. Almacenar la cuerda en el conjunto solución.
4. Eliminar del conjunto de vértices el comprendido entre los dos vértices que une la cuerda.
5. Ejecutar el algoritmo desde el primer paso, siendo esta vez la entrada el conjunto de vértices resultante en el paso anterior.

3.1.1. Elementos del algoritmo *greedy*

- Lista de candidatos: son todas las cuerdas del polígono que se está evaluando en cada paso.
- Lista de candidatos utilizados: diagonales (cuerdas o no) del primer polígono que han sido seleccionadas.
- Función solución: el polígono tiene tres vértices.
- Criterio de factibilidad: el predicado 0-ario verdadero.
- Función de selección: escogemos una cuerda de longitud mínima.
- Función objetivo: la suma de las longitudes de las cuerdas. Queremos minimizarla.

3.1.2. Eficacia del algoritmo

El algoritmo no es óptimo, en el sentido de que no siempre encuentra una triangulación mínima, aunque lo hace en la mayoría de los casos o se aproxima muy bien.



$\{(0{,}936153, 1{,}76738), (-1{,}12177, 1{,}65579), (-1{,}3, -1{,}51987), (-1{,}03769, -1{,}70974), (0{,}911164, -1{,}78039), (1{,}65839, -1{,}11792), (1{,}99906, -0{,}0612251)\}$

En este ejemplo, el peso de la triangulación *greedy* es 11,7845, mientras que existe una de peso 11,43.

3.2. Implementación

Para la implementación, hemos escogido el lenguaje de programación `C++`.

3.2.1. Estructuras de datos

Para almacenar los vértices del polígono, hemos escogido el contenedor `list` de la *STL* de `C++`. Además, hemos definido una estructura para almacenar los puntos, con un par de coordenadas en punto flotante de doble precisión y un identificador numérico para la salida por pantalla.

3.2.2. Avance circular de un iterador

```
auto circular_advance = [](auto& forwdIt, auto initValue, auto
    endValue, int n) {
  for(int i=0; i<n; i++)
  {
    forwdIt++;
    if(forwdIt == endValue)
    forwdIt = initValue;
  }

  return forwdIt;
};
```

Esta es una función auxiliar, cuyo propósito es implementar la aritmética de un anillo de restos sobre un contenedor con un iterador que soporte el operador de incremento (++).

La eficiencia teórica de esta función es $O(n)$, sin embargo, siempre se llama con un argumento constante.

3.2.3. Cuerda de longitud mínima

```
auto find_min_string = [&min_distance, &it_min, &min_string,
    &points](auto initial_point_it) {
   auto p0 = initial_point_it;
   auto p = p0;

   do {
      auto prev = p;

      circular_advance(p, points.begin(), points.end(), 2);
      if(min_distance > euclidean_distance(*prev, *p))
      {
         min_distance = euclidean_distance(*prev, *p);
         min_string = std::make_pair(*prev, *p);
         it_min = circular_advance(prev, points.begin(),
             points.end(), 1);
      }

   }while(p != p0);
};
```

Esta función acumula la longitud de una cuerda mínima, empezando en un vértice y recorriendo las cuerdas hasta volver al primero. Si el número de vértices del polígono es impar, solo tiene un ciclo de cuerdas, en cambio tiene dos si es par ($\mathbb{Z}_n/2\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{F}_1$ si n es impar, $\simeq \mathbb{F}_2$ si n es par). Por tanto, en un polígono cuyo número de vértices sea par, ha de llamarse dos veces.

La eficiencia teórica de esta función es $O(n)$.

3.2.4. Bucle principal

```
   while(points.size() > 3)
   {
   auto it = points.begin();
```

```
// Unconditionally find minimum length string starting
// at the first element
find_min_string(it);

// If the polygon's number of edges is even, we need to
// do the same starting at the second one
if(!(points.size()%2)) find_min_string(++it);

sol.push_back(min_string);
points.erase(it_min);
}
```

Este bucle es una transcripción a código de la descripción del algoritmo.

3.2.5. La complejidad del algoritmo

Es un algoritmo de complejidad $O(n^2)$, dado que para un polígono de n nodos, en cada iteración del bucle `while` (n iteraciones) llama a la función *find_min_string*, de complejidad $O(n)$, para después eliminar un vértice.

$$T(n) = \sum_{i=3}^{n} ki = k\frac{n^2+n}{2} - 3k \in O(n^2)$$

donde:

- $T(n)$ es el número de instrucciones que ejecuta el algoritmo para un polígono de n vértices.
- k es una constante de proporcionalidad aproximada entre el número de instrucciones que se ejecutan para encontrar la cuerda mínima entre i e i.