Probabilidad I

Santiago de Diego
Braulio Valdivielso
Francisco Luque

Agradecimientos

¡Un saludo a mi gente de Tinder, se os quiere!

Resumen

Contents

Chapter 1

Conjuntos y funciones σ-aditivas

1.1 Introducción: Espacio medible

Concepto de σ-álgebra

Sea un conjunto Ω, y sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra sobre Ω. Se dice que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra si cumple las siguientes propiedades:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3. Si $E_1, E_2, E_3 ... \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Es decir, una σ-álgebra es una clase de conjuntos cerrada para las operaciones complementario y unión numerable. Existen una serie de propiedades inmediatas derivadas de las propiedades que definen a la σ-álgebra:

$\emptyset \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ es cerrada para la operación intersección finita.

Espacio medible

Al par $(\Omega, \mathcal{A})$ se le llama espacio medible, y a los conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$ se les denomina conjuntos medibles.

1.2 Concepto de σ-aditividad

Sea un conjunto Ω y una σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre Ω. Definimos:

$$\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

$$\varphi(s) \text{ es único}$$

Se dice que φ es aditiva si $\varphi(\sum_1^n A_k) = \sum_1^n \mu(A_k)$

Se dice que φ es σ-aditiva si $\varphi(\sum_1^\infty A_k) = \sum_1^\infty \mu(A_k)$

Lema 1.2.1 *Si* $\exists B : \varphi(B) < \infty \Rightarrow \varphi(\emptyset) = 0$

Teorema 1.2.1 *Si φ es σ-aditiva y* $\sum \varphi(A_i) < \infty \Rightarrow \sum(|\varphi(A_i)|) < \infty$

Demostración 1.2.1 *Tomemos las sucesiones:*
Si $\varphi(A_n) \geq 0 \Longrightarrow A_n^+ = A_n$ *y* $A_n^- = \emptyset$
Si $\varphi(A_n) < 0 \Longrightarrow A_n^+ = \emptyset$ *y* $A_n^- = A_n$
Entonces $\varphi(\sum A_n^+) = \sum \varphi(A_n^+)$ *y* $\varphi(\sum A_n^-) = \sum \varphi(A_n^-)$*, ambas finitas.*
Sumando ambas cantidades obtenemos que $\sum(|\varphi(A_i)|) < \infty$ ■

Teorema 1.2.2 *Si φ es σ-aditiva, $\varphi \geq 0$, entonces: φ es no decreciente y subaditiva*

Demostración 1.2.2 *Veamos que es no decreciente ($A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \leq \varphi(B)$). Podemos escribir $B = (B \cap A) + (B \cap \overline{A}) = A + (B \cap \overline{A})$. Entonces $\varphi(A) \leq \varphi(A) + \varphi(B \cap \overline{A}) = \varphi(B)$.*

Veamos ahora que es subaditiva ($\varphi(A \cup B) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$). Tenemos que $A \cup B = A + (B \setminus A)$. Tenemos entonces que $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B \setminus A) \leq \varphi(A) + \varphi(B)$. ■

1.3 Límites en sucesiones de conjuntos

1.3.1 Límites en sucesiones monótonas

Si tomamos la relación de inclusión entre conjuntos ($\subseteq$) como una relación de orden, podemos hablar sin ningún tipo de problema de sucesiones monótonas.

En este sentido, una sucesión creciente de conjuntos sería una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en la que se cumple que $A_i \subseteq A_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}$. De forma análoga se podría ver qué es una sucesión decreciente de conjuntos.

Resulta que existe una forma intuitiva de definir el límite de una sucesión monótona de conjuntos. En particular, el límite de una sucesión creciente de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se puede definir como

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k\in\mathbb{N}}^{\infty} A_k$$

Esta definición aprovecha la relación de orden entre los conjuntos de la sucesión para afirmar que *si un elemento está en el último conjunto de la sucesión, entonces está en todos los anteriores, y por tanto en* ***todos***, por ello se puede utilizar una intersección numerable (que está perfectamente definida) para formalizar el concepto.

Con una intuición análoga se define el límite de una sucesión decreciente de conjuntos. Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}^{\infty} A_k$$

1.3.2 Límites superiores e inferiores

No solo se puede hablar de límites en sucesiones monótonas. Para definir los límites en sucesiones arbitrarias de conjuntos tenemos que recurrir a los conceptos de límite inferior y límite superior. La intuición de estos límites superior e inferior pasan por el concepto de las colas de la sucesión.

Dada una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podemos considerar el conjunto

$$B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

y este conjunto contiene aquellos elementos que están en **todos** los A_k para $k \geq n$. Es fácil probar que la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos, y por tanto se puede obtener el límite $\lim_{n\to\infty} B_n$. Informalmente, ese límite es un conjunto que contiene a todos los elementos de A_n que están en todos los conjuntos A_k a partir de cierto $n \in \mathbb{N}$. Definimos el límite inferior de A_n como

$$\liminf A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n$$

Análogamente, podríamos definir la sucesión de conjuntos $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$$

Cada C_n contiene todos los elementos que están presentes en algún A_k para $k \geq n$. Es fácil también ver que la sucesión $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos, y por tanto su límite también está bien definido. Se puede definir entonces el límite superior de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$\limsup A_n = \lim_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$$

Informalmente se puede pensar en este límite superior de A_n como el conjunto de los elementos que están en infinitos conjuntos de la sucesión.

A partir de estas definiciones, es fácil comprobar que

$$\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$$

1.3.3 Límite de una sucesión de conjuntos

Diremos que una sucesión de conjuntos tiene límite si su límite inferior y superior coinciden, y el límite tendrá como valor efectivamente el de estos límites. Es decir:

$$\lim A_n = \liminf A_n = \limsup A_n$$

en caso de que límite superior e inferior coincidan.

1.4 Continuidad en funciones sobre conjuntos

Una vez introducido el concepto de límite para una sucesión de conjuntos, vamos a tratar de definir la continuidad para funciones de conjunto. Tendremos tres tipos de continuidad, cada uno relacionado con un tipo de sucesiones de conjuntos de las que hemos definido anteriormente. En esta sección trabajaremos con una función $\varphi : \Omega \to \Omega'$

Diremos que φ es continua por abajo si cumple que, dada una sucesión creciente de elementos $A_n \uparrow A$, se tiene que

$$\lim \varphi(A_n) = \varphi(A)$$

Por otra parte, diremos que φ es continua por arriba si cumple que dada una sucesión decreciente de elementos $A_n \downarrow A$, se tiene que

$$\lim \varphi(A_n) = \varphi(A)$$

Por último, diremos que una función es continua si lo es por arriba y por abajo.

Teorema 1.4.1 *Teorema de continuidad para funciones sobre conjuntos*

Sea φ una función σ-aditiva. Entonces, φ es aditiva y continua. Inversamente, si φ es aditiva y, o bien continua por abajo, o finita y continua en $\emptyset$, entonces φ es σ-aditiva.

Demostración 1.4.1 *Por un lado, sea φ una función σ-aditiva. Entonces es trivialmente aditiva. Ahora, veamos que es continua por abajo y por arriba. Sea $A_n \uparrow A$, entonces:*

$$A = \lim A_n = \bigcup A_n = A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + ...$$

Unión de conjuntos disjuntos. Por tanto:

$$\varphi(A) = \varphi(\lim A_n) = \lim_{n\to\infty} \{\varphi(A_1) + \varphi(A_2 - A_1) + ... + \varphi(A_n - A_{n-1})\} = \lim \varphi(A_n)$$

Veamos la continuidad por arriba. Sea $A_n \downarrow A$, tomamos A_{n_0} tal que $\varphi(A_{n_0})$ es finito. Entonces $A_{n_0} - A_n \uparrow A_{n_0} - A$, y por el apartado anterior tenemos la convergencia desde abajo, por tanto:

$$\varphi(A_{n_0}) - \varphi(A) = \varphi(\lim(A_{n_0} - A_n)) = \lim \varphi(A_{n_0} - A_n) = \varphi(A_{n_0}) - \lim \varphi(A_n)$$

De donde se deduce que $\varphi(A) = \lim \varphi(A_n)$.

Inversamente, sea φ una función aditiva. Si φ es continua por abajo, tenemos

$$\varphi\left(\sum_n^{\infty} A_n\right) = \varphi\left(\lim \sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(A_k\right) = \sum_n^{\infty} \varphi(A_n)$$

Y por tanto es σ-aditiva. Si es finita y continua en $\emptyset$, entonces se obtiene la σ-aditividad de:

$$\varphi\left(\sum_{n}^{\infty} A_n\right) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) + \varphi\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k) + \varphi\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k\right)$$

Y tenemos que

$$\varphi\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) \to \varphi(\emptyset) = 0$$

■

Una vez demostrado este teorema, vamos a ver un teorema que nos relaciona las propiedades del supremo e ínfimo de una función σ-aditiva con los conjuntos sobre los que está dicha función definida:

Teorema 1.4.2 *Teorema del supremo e ínfimo*

Sea φ una función σ-aditiva sobre una σ-álgebra $\mathcal{A}$. Entonces, existen $C, D \in \mathcal{A}$ tales que $\varphi(C) = \sup \varphi$ y $\varphi(D) = \inf \varphi$

Demostración 1.4.2 *Probaremos la existencia del conjunto C. La del conjunto D es análoga. Si $\varphi(A) = \infty$ para algún $A \in \mathcal{A}$, entonces podemos establecer $A = C$ y la demostración del teorema es trivial. Entonces, supongamos que $\varphi < \infty$ y dado que el valor $-\infty$ está excluido, φ es finita.*

Entonces, existe una sucesión $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ tal que $\varphi(A_n) \to \sup \varphi$. Sea $A = \cup A_n$ y para cada n, consideramos la partición de A en 2^n conjuntos A_{nm} de la forma $\cap_{k=1}^{n} A'_k$, donde $A'_k = A_k$ o $A - A_k$. Para $n < n'$, cada conjunto A_{nm} es una suma finita de conjuntos $A_{n'm'}$. Sea ahora B_n la suma de los conjuntos A_{nm} para los cuales φ es no negativa. Si no hay ninguno, entonces $B_n = \emptyset$ ■

1.5 Funciones medibles

Dados dos espacios medibles $(\Omega, \mathcal{A})$ y $(\Omega', \mathcal{A}')$, sea una función $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$. Se dice que φ es medible si $\forall A' \in \mathcal{A}' \Rightarrow \varphi^{-1}(A') \in \mathcal{A}$. Es decir, una función se dice medible si la imagen inversa de todo conjunto medible es medible. A la tupla $(\Omega, \mathcal{A}, \varphi_{\mathcal{A}})$ se le denomina espacio de medida. Esto no debe estar aquí, pero ya lo había escrito y no sabía muy bien donde meterlo, hay que recolocarlo.

Definición de medida exterior: Una función de conjuntos μ_0 es una medida exterior si verifica:

- Es subaditiva, es decir, $\mu^\circ(\cup A_j) \leq \sum \mu^\circ(A_j)$
- Es no decreciente $A \subset B\, \mu^\circ(A) \leq \mu^\circ(B)$
- $\mu^\circ(\emptyset) = 0$

Definición de medida: Una medida es una función de conjuntos positiva y σ-aditiva: una medida puede ser infinita y una probabilidad no.

Para que una medida exterior fuera una medida tendría que ser σ-aditiva. Es decir, lr falla la primera condición. Sí que es positiva ya que $\mu^\circ(\emptyset) = 0$ y es creciente. Esta medida exterior se aplica a cualquier conjunto.

Definición: Un conjunto $A \in S(\Omega)$ es μ° medible si se cumple que $\mu^\circ(D) \geq \mu^\circ(AD) + \mu^\circ(A^c D)\ D \in S(\Omega)$

Va a haber unos subconjuntos en los que la función se comporte como si fuera aditiva

Teorema 1.5.1 *Si μ° es una medida exterior, entonces:*

- *a° es un σ-campo*
- *μ° en a° es una medida*

Demostración 1.5.1 ■

Lema 1.5.1 *Sea $\mathbb{X} : A \longrightarrow B$*

$\mathbb{X}$ es medible $\Longleftrightarrow \mathbb{X}^{-1}(S) \in A, S \in B$

Teorema 1.5.2 *Si g es continua $\Longrightarrow g(\mathbb{X})$ es medible*

Demostración 1.5.2 *$g()\mathbb{X}$ es medible si la puedo escribir como límite de funciones medibles, es decir, $g(\mathbb{X}) = \lim g(\mathbb{X}_n)$* ■

Teorema 1.5.3 *Sea $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_1 \ldots \mathbb{X}_n)$ un vector. Será medible $\Longleftrightarrow \forall j = 1 \ldots k\,,\ \mathbb{X}_j$ son medibles.*

Demostración 1.5.3

$$\Longrightarrow$$

$\mathbb{X}^{-1}(-\infty, -\infty, \ldots, x_j, \ldots, \infty) = [\mathbb{X}_j < x_j]$

De la medibilidad de $\mathbb{X}$ se deduce la medibilidad de todas las componentes, poniendo el x_j donde nos interesa

$$\Longleftarrow$$

Supongamos que las componentes son medibles:
$[\mathbb{X}_n \leq X_n] = [\mathbb{X}_1 \leq x_1, \ldots, \mathbb{X}_k \leq X_k] = \bigcap_{j=1}^{k} [\mathbb{X}_j \leq x_j] \in a$ ■

Teorema 1.5.4 *Si $\mathbb{X}$ es medible $\Longrightarrow g(\mathbb{X})$ es medible si g es Borel*

Demostración 1.5.4

$$g(\mathbb{X})^{-1}B = \mathbb{X}^{-1}(g^{-1}(B)) \in a$$

$$P[|\mathbb{X} - \mathbb{Y}| \geq \epsilon] \leq P[[|\mathbb{X}_n - \mathbb{X}| \geq \frac{\epsilon}{2}] + P[|\mathbb{X}_n - \mathbb{Y}| \geq \frac{\epsilon}{2}] \underbrace{\longrightarrow}_{n\to\infty} 0$$

■

1.6 Integrales sobre funciones de conjunto en espacios de medida

Para el cálculo de probabilidades, nos será muy útil el concepto de integral sobre funciones de conjunto. Vamos a tratar de aproximarnos al concepto de función que dió Lebesgue. En este apartado trabajaremos sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Comenzaremos definiendo la integral para las funciones simples, para dar luego una definición de integral para funciones no negativas y por último para funciones cualesquiera.

Sea entonces $\{A_k\} \in \mathcal{A}$, tal que $\sum_k A_k = \Omega$, partición medible del espacio.

Sea entonces la función simple $X = \sum_{j=1}^{m} x_j I_{A_j}, x_j \geq 0$. La integral de la función X se define como:

$$\int_\Omega X d\mathcal{P} = \sum_{j=1}^{m} x_j \mathcal{P}_{A_j}$$

Ahora, para cualquier función no negativa X, se define la integral de la función como:

$$\int_\Omega X d\mathcal{P} = \lim \int_\Omega X_n d\mathcal{P}$$

Donde $\{X_n\} \to X$. Finalmente, la integral en Ω de una función medible X se define como:

$$\int_\Omega X d\mathcal{P} = \int_\Omega X^+ d\mathcal{P} - \int_\Omega X^- d\mathcal{P}$$

donde $X^+ = XI_{[X\geq 0]}$ y $X^- = -XI_{[X<0]}$. Si $\int_\Omega X d\mathcal{P}$ es finita, es decir, si los dos términos de la diferencia anterior son finitos, entonces se dice que X es integrable en Ω. Ahora, una vez definida la integral, vamos a ver algunas de sus propiedades. Tenemos primero una serie de propiedades relacionadas con la aditividad de la integral. Sean X, Y dos funciones medibles, entonces (no se demostrarán las propiedades triviales):

$$\int (X+Y) d\mathcal{P} = \int X d\mathcal{P} + \int Y d\mathcal{P}$$

Demostración 1.6.1 *Sean* $X = \sum x_j I_{A_j}$ *y* $y = \sum y_k I_{B_k}$. *Entonces* $X + Y = \sum_k \sum_j x_j I_{A_j B_k} + \sum_k \sum_j y_k I_{A_j B_k} = \sum_k \sum_j (x_k + y_j) I_{A_j B_k}$

Si calculamos ahora las integrales:

$$\int (X+Y) d\mathcal{P} = \sum_k + \sum_j (x_j + y_k)\mathcal{P}(A_j B_k) = \sum_j x_j \mathcal{P}(A_j) + \sum_k y_k \mathcal{P}(B_k) = \int X d\mathcal{P} + \int Y d\mathcal{P} \blacksquare$$

$$\int_{A+B} X d\mathcal{P} = \int_A X d\mathcal{P} + \int_B X d\mathcal{P}$$

$$\int cX d\mathcal{P} = c \int X d\mathcal{P}$$

Veamos ahora algunas propiedades relacionadas con el orden:

$$X \geq 0 \to \int X d\mathcal{P} \geq \int 0 = 0$$

$X \geq Y \rightarrow \int X d\mathcal{P} \geq \int Y d\mathcal{P}$

$X \stackrel{c.s}{=} Y \rightarrow \int X d\mathcal{P} = \int Y d\mathcal{P}$

■

1.6.1 Teorema de la convergencia monótona

Una vez vista la definición de la integral y algunas de sus propiedades, vamos a enunciar y demostrar un teorema de convergencia que nos será de mucha utilidad para el estudio de variables aleatorias. Veamos su enunciado y demostración:

Teorema 1.6.1 *Teorema de la convergencia monótona para funciones medibles no negativas*

Sea $\{X_n\} \geq 0$ *tal que* $X_n \uparrow X$. *Entonces, se tiene que* $\int X_n \uparrow \int X$

Demostración 1.6.2 *Tomamos las sucesiones* $X_{km} \uparrow X_k$. *La sucesión* $Y_n = \max_{k \geq n} X_{kn}$ *es una sucesión de funciones simples no negativas y no decreciente, y además*

$$X_{kn} \leq Y_n \leq X_n \rightarrow \int X_{kn} \leq \int Y_n \leq \int X_n$$

Ahora, cuando $n \rightarrow \infty$, *tenemos que*

$$X_k \leq limY_n \leq X \rightarrow \int X_k \leq \int limY_n \leq \int X$$

Por último, cuando $K \rightarrow \infty$, *obtenemos*

$$X \leq limY_n \leq X \rightarrow lim \int X_n \leq \int limY_n \leq lim \int X_n$$

De donde extraemos que $\lim Y_n = X$ *y que* $\int X = lim \int X_n$ ■

1.6.2 Lema de Fatou

Lema 1.6.1 *Sean* Y, Z *dos funciones integrables (pueden no mantener su signo), entonces:*

- *Si* $Y_n \leq X_n \Longrightarrow \int \lim_{inf} X_n \leq \lim_{inf} \int X_n$
- *Si* $X_n \leq Z_n \Longrightarrow \lim_{sup} \int X_n \leq \int \lim_{sup} X_n$

1.6.3 Lema de Fatou-Lebesgue

Lema 1.6.2 *Sean Y, Z dos funciones integrables (pueden no mantener su signo) y $\mathbb{X}_n$ una sucesión de variables aleatorias, entonces:*

- *Si* $X_n \leq Y\, \forall n \Longrightarrow E(\lim_{sup} \mathbb{X}_n) \geq \lim_{sup} E(\mathbb{X}_n)$
- *Si* $X_n \geq Z\, \forall n \Longrightarrow$ *si la sucesión es convergente y acotada se cumple que:* $E(\lim \mathbb{X}_n) \geq \lim E(\mathbb{X}_n)$

1.7 Espacios de probabilidad y variables aleatorias

Lema 1.7.1 *de Borel-Cantelli*

Sea (Ω, a, P) , $A_n \in a$*. Entonces, si* $\sum P\, A_n < \infty \Longrightarrow P(\lim_{sup} A_n) = 0$

Demostración 1.7.1

$$\lim_{sup} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$P(\lim_{sup} A_n) = P \lim B_n = \lim P\, B_n \leq \lim_n P \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \leq \lim_n \sum_{k=n}^{\infty} P\, A_k = 0$$

El recíproco no es cierto ■

Teorema 1.7.1 *(de extensión de Caratheodory) Una medida μ sobre $\mathbb{C}$ se extiende a $A(\mathbb{C})$. La extensión es mínima si μ es finita.*

$$(\Omega, \mathbb{C}, \mu) \overbrace{\longrightarrow}^{extension} (\Omega, S(\Omega), \mu^\circ) \overbrace{\longrightarrow}^{restriccion} (\Omega, A^\circ, \mu^\circ) \overbrace{\longrightarrow}^{restriccion} (\Omega, A(\mathbb{C}), \mu^\circ)$$

donde:

μ° *es la medida exterior que es extensión de* μ
A° *es el* σ*-campo*

μ° *es medida exterior si es subaditiva, no decreciente y* $\mu^\circ(\emptyset) = 0$

$A \in \Omega$, $\mu^\circ(A) = inf \sum(A_j)$

$\mu^{\circ}(\emptyset) \leq \mu(\emptyset)$

$a \in A^{\circ}$ *si* $D \in S(\Omega)$ *se cumple que* $\mu^{\circ}(D) \geq \mu^{\circ}(AD) + \mu^{\circ}(A^c D)$

Lema 1.7.2 $\mathbb{X}(w) = \varphi(w)\, \forall w \in \Omega - \Lambda\, t.q.\, P(\Lambda) = 0$. *Entonces,* $\mathbb{X} = \varphi$

$P(\mathbb{X} = \varphi) = 1$

Definimos la relación de equivalencia $\mathbb{X} R \varphi \leftrightarrow P(\mathbb{X} = \varphi) = 1$

Lema 1.7.3 *Sea* $Y \leq \mathbb{X}_n \leq Z$ *con* Y, Z *integrables y tal que* $\mathbb{X}_n \overset{c.s.}{\widehat{\longrightarrow}} \mathbb{X}$. *Entonces se tiene que* $\int \mathbb{X}_n \to \int \mathbb{X}$

1.7.1 Algunas desigualdades interesantes

Lema 1.7.4 $|a+b|^r \leq C_r|a|^r + C_r|b|^r$ *con* $C_r = 1$ *si* $r = 1$ *y* $C_r = 2^r$ *si* $r > 1$

Entonces se tiene $E|\mathbb{X} + \mathbb{Y}|^r \leq C_r E|\mathbb{X}|^r + C_r E|\mathbb{Y}|^r$

Desigualdad de Hölder-Schwartz

$E|\mathbb{X}\mathbb{Y}| \leq (E|\mathbb{X}|^r)^{\frac{1}{r}} (E|\mathbb{Y}|^s)^{\frac{1}{s}}$ con $r > s$; $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$

Desigualdad de Markvov

Sea $\mathbb{X}$ una v.a. y sea g una función borel. Entonces se tiene que si g es par y no decreciente en $[0, \infty)\, \forall a > 0$, entonces:

$$\frac{Eg(\mathbb{X}) - g(a)}{sup\, g(\mathbb{X})} \leq P[|\mathbb{X}| \geq a] \leq \frac{Eg(\mathbb{X})}{g(a)}$$

1.8 Convergencia en probabilidad de espacios métricos

Definición de convergencia en probabilidad: Si $P(|\mathbb{X}_n - \mathbb{X}| \geq \epsilon) \to 0$, entonces se dice que $\mathbb{X}_n \overset{P}{\widehat{\longrightarrow}} \mathbb{X}$, es decir, $\mathbb{X}_n$ converge en probabilidad a $\mathbb{X}$

Lema: $\mathbb{X}_n \overset{P}{\overbrace{\longrightarrow}} \mathbb{X} \bigwedge \mathbb{X}_n \overset{P}{\overbrace{\longrightarrow}} \varphi \Longrightarrow P(\mathbb{X} = \varphi) = 1$

Demostración

$|\mathbb{X} - \varphi| = |-\mathbb{X}_n + \mathbb{X} - \varphi + \mathbb{X}_n| \leq |\mathbb{X}_n - \mathbb{X}| + |\mathbb{X}_n - \varphi|$

$P(|\mathbb{X} - \varphi| \geq \epsilon) \leq P(|\mathbb{X}_n - \mathbb{X}| \geq \frac{\epsilon}{2}) + P(|\mathbb{X}_n - \varphi| \leq \frac{\epsilon}{2}) \to 0$

□

Teorema: Una sucesión $\mathbb{X}_n$ converge en probabilidad a $\mathbb{X}$ si y solo si:

$$P(|\mathbb{X}_{n+\delta} - \mathbb{X}_n| \geq \epsilon) \longrightarrow 0$$

Demostración

$|\mathbb{X}_{n+\delta} - \mathbb{X}_n| = |\mathbb{X}_{n+\delta} - \mathbb{X} + \mathbb{X} - \mathbb{X}_n|$

Y se termina aplicando la desigualdad de Cauchy como antes.

□

En el siguiente ejemplo consideramos una sucesión de variables aleatorias indicadoras tal que:

$P(\mathbb{X}_n = 1) = \dfrac{1}{n}$ y $P(\mathbb{X}_n = 0) = 1 - \dfrac{1}{n}$

La pregunta es, ¿a dónde converge en probabilidad $\mathbb{X}_n$?

Podemos afirmar que $\mathbb{X}_n \overset{P}{\overbrace{\longrightarrow}} 0$ ya que:

$P(|\mathbb{X}_n - 0| \geq \epsilon) = P(|\mathbb{X}_n| \geq \epsilon) = P(|\mathbb{X}_n| = 1) = \dfrac{1}{n} \to 0$

1.8.1 Propiedades

1. $\mathbb{X}_n \overset{P}{\overbrace{\longrightarrow}} \mathbb{X} \bigwedge \varphi_n \overset{P}{\overbrace{\longrightarrow}} \varphi \Longrightarrow \mathbb{X}_n + \varphi_n \overset{P}{\overbrace{\longrightarrow}} \mathbb{X} + \varphi$

2. $\mathbb{X}_n \overset{P}{\overbrace{\longrightarrow}} \mathbb{X} \Longrightarrow K\mathbb{X}_n \overset{P}{\overbrace{\longrightarrow}} K\mathbb{X}$

3. $\mathbb{X}_n \overset{P}{\longrightarrow} K$ (es decir, que degenera), entonces ${\mathbb{X}_n}^2 \overset{P}{\longrightarrow} K^2$.

   Para demostrarlo basta notar que: ${\mathbb{X}_n}^2 - K^2 = (\mathbb{X}_n + K)(\mathbb{X}_n - K)$

4. $\mathbb{X}_n \overset{P}{\longrightarrow} a \bigwedge \varphi_n \overset{P}{\longrightarrow} b \Longrightarrow \mathbb{X}_n\varphi_n \overset{P}{\longrightarrow} a \cdot b$

   Para demostrarlo tenemos que notar que:

$$\mathbb{X}_n\varphi_n = \frac{(\mathbb{X}_n + \varphi_n)^2 - \mathbb{X}_n - \varphi_n)^2}{4} \overset{P}{\longrightarrow} \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = ab$$

5. $\mathbb{X}_n \overset{P}{\longrightarrow} 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{\mathbb{X}_n} \overset{P}{\longrightarrow} 1$

6. $\mathbb{X}_n \overset{P}{\longrightarrow} a \bigwedge \varphi_n \overset{P}{\longrightarrow} b \Longrightarrow \mathbb{X}_n\varphi_n^{-1} \overset{P}{\longrightarrow} ab^{-1}$

7. $\mathbb{X}_n \overset{P}{\longrightarrow} \mathbb{X} \bigwedge \varphi_n \overset{P}{\longrightarrow} \varphi \Longrightarrow \mathbb{X}_n\varphi_n \overset{P}{\longrightarrow} \mathbb{X}\varphi$

   Para demostrarlo basta notar que: $(\mathbb{X}_n - \mathbb{X})(\varphi_n - \varphi) \overset{P}{\longrightarrow} 0$ y luego $\mathbb{X}_n\varphi_n - \mathbb{X}\varphi_n - \mathbb{X}_n\varphi - \mathbb{X}\varphi \overset{P}{\longrightarrow} 0$ (Por la propiedad siguiente)

8. $\mathbb{X}_n \overset{P}{\longrightarrow} \mathbb{X}$, entonces $\varphi\mathbb{X}_n \overset{P}{\longrightarrow} \varphi\mathbb{X}$

Teorema 1.8.1 *Si $\mathbb{X}_n \overset{P}{\longrightarrow} \mathbb{X}$ y $g(\cdot)$ es continua, entonces se cumple que:*

$$g(\mathbb{X}_n) \overset{P}{\longrightarrow} g(\mathbb{X})$$

1.9 Convergencia casi segura de espacios métricos

Definición de convergencia casi segura: Una sucesión de variables aleatorias, $\mathbb{X}_n$, converge con probabilidad 1, o de forma casi segura, a una variable aleatoria $\mathbb{X}$ (que puede degenerar en una constante K) cuando se cumple que:

$$P(\lim_{n\to\infty} x_n = \mathbb{X}) = 1$$

De esta forma interpretamos que $\mathbb{X}_n \overset{c.s.}{\overbrace{\longrightarrow}} \mathbb{X}$ cuando la probabilidad de que en el límite la sucesión de variables aleatorias y aquella a la que converge sean iguales es uno

Teorema 1.9.1

$$\mathbb{X}_n \overset{c.s.}{\overbrace{\longrightarrow}} \mathbb{X} \Longrightarrow \mathbb{X}_n \overset{P}{\overbrace{\longrightarrow}} \mathbb{X}$$

$$\mathbb{X}_n \overset{P}{\overbrace{\longrightarrow}} \mathbb{X} \Longrightarrow \exists \mathbb{X}_{nk} \,:\, \mathbb{X}_{n_k} \overset{c.s.}{\overbrace{\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}}} \mathbb{X}$$

Demostración 1.9.1

$$0 = \lim_{n\to\infty} P \bigcup_{m\geq n} [|\mathbb{X}_m - \mathbb{X}| \geq \epsilon] \geq \lim_{n\to\infty} P[|\mathbb{X}_n - \mathbb{X}| \geq \epsilon]$$

■

1.10 Funciones características y funciones de distribución

1.10.1 Función característica

Función puntual que se define sobre la recta real, no negativa, no decreciente, continua por la izquierda y finita. Para nosotros será la función que está entre 0 y 1.

Verifica estas tres propiedades:

- $0 \leq F[a, b] \leq \infty$
- $F[a, b] \to 0\,,\ a \to b$
- Si $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} F[a_k, b_k] - \sum_{k=1}^{n-1} F[b_k, a_{k+1}] = F[a_1, b_n]$$

Las funciones de distribución representan medidas

Teorema 1.10.1 *La relación $\mu[a, b] = F[a, b]$ establece una correspondencia uno a uno (da igual pasar de una a otra)*

$$\int_{\mathbb{R}} g(\mathbb{X} dP_{\mathbb{X}}(x)) = \int_{\mathbb{R}} g\, Pg = \int_{\Omega} g(\mathbb{X}(\omega))dP(\omega)$$

1.11 Leyes de la probabilidad y tipos de leyes