

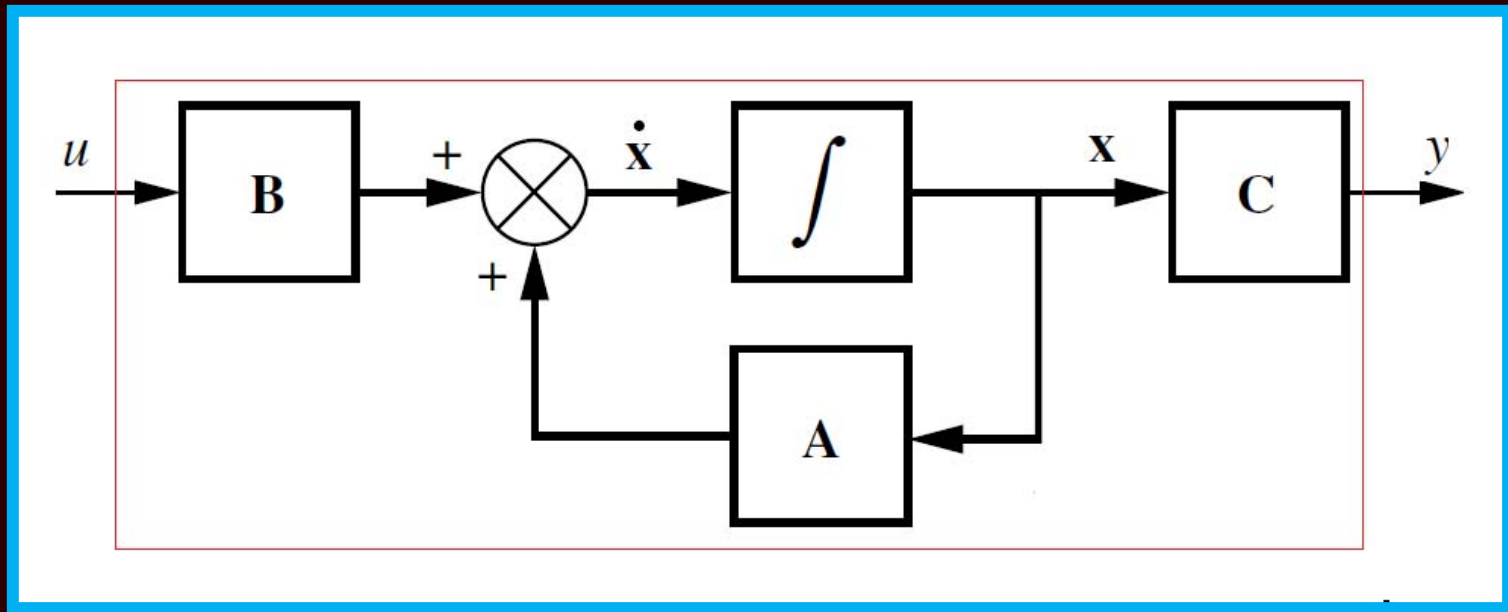


# CONTROL POR REALIMENTACIÓN DE ESTADOS



Fernando di Sciascio (2016)

# Control por Realimentación de Estados



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

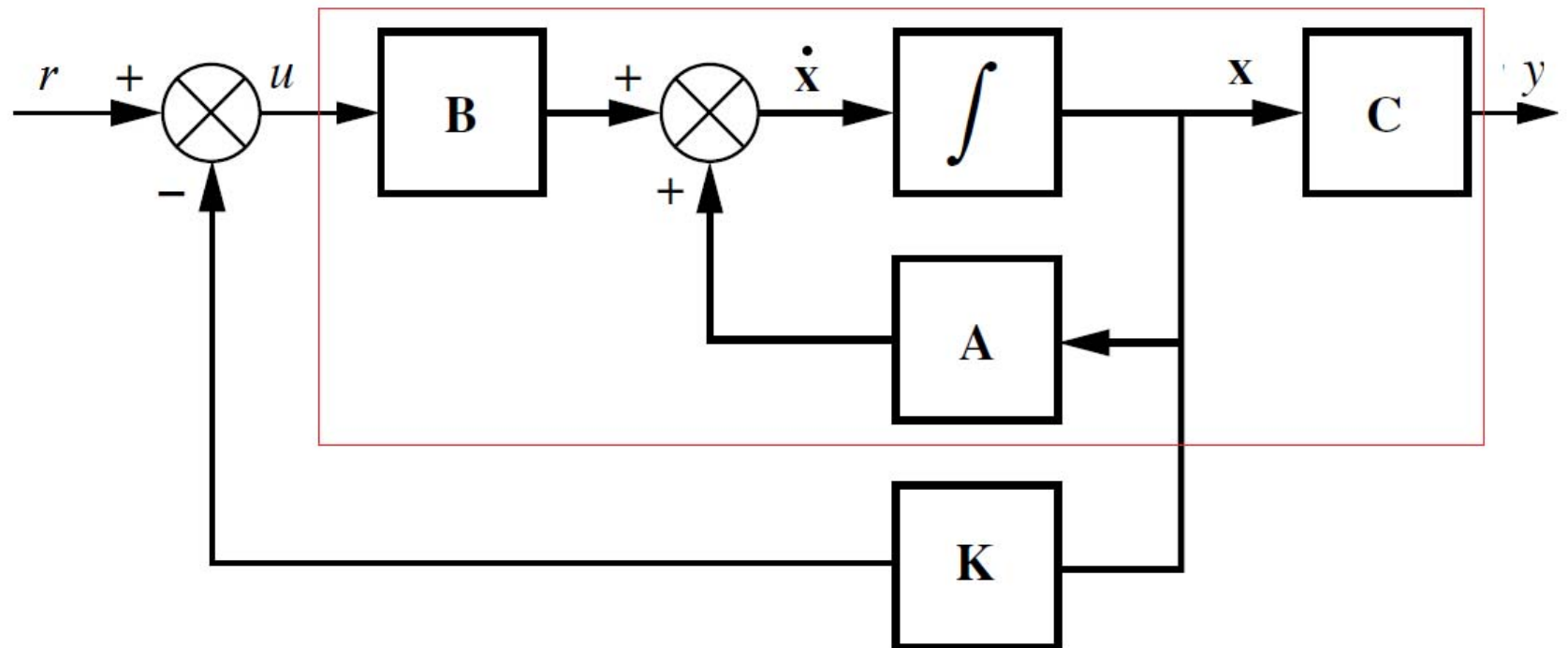
El par  $(A,B)$  es controlable.

$$\begin{aligned} G_{ol}(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = C [sI - A]^{-1} B \\ &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m < n \end{aligned}$$

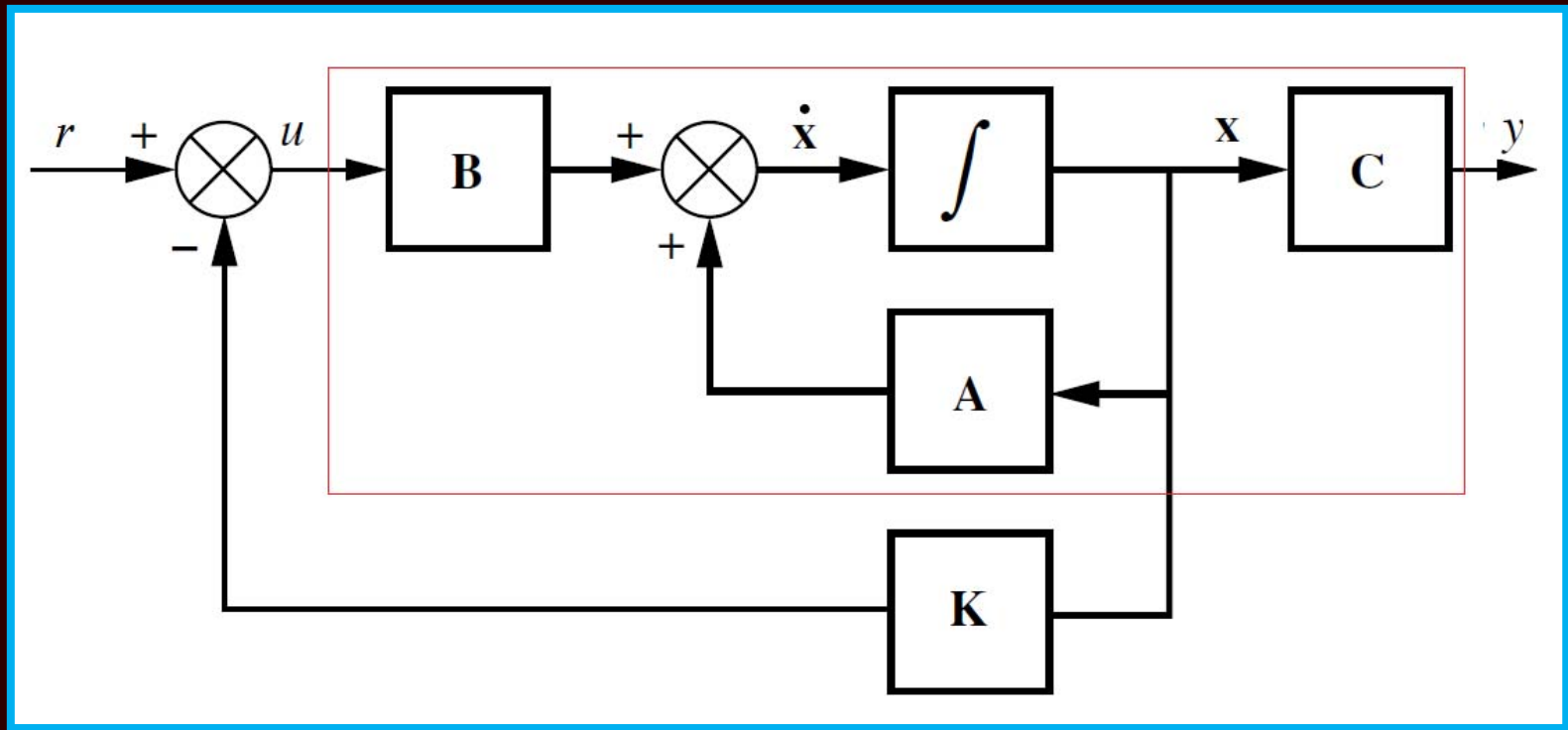
# Control por Realimentación de Estados

Los métodos clásicos de diseño no permiten especificar todos los polos a lazo cerrado de sistemas de orden superior a dos. Esto es porque al realimentar la salida no disponemos del número suficiente de grados de libertad (parámetros) para ubicar de manera independiente todos los polos a lazo cerrado.

La solución es realimentar todos los estados



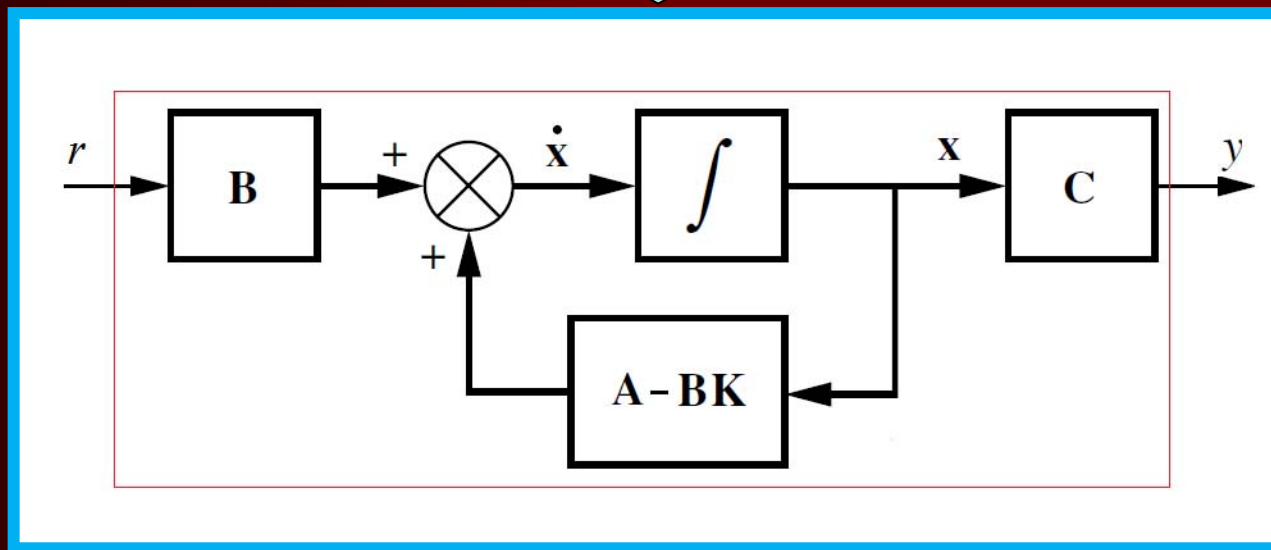
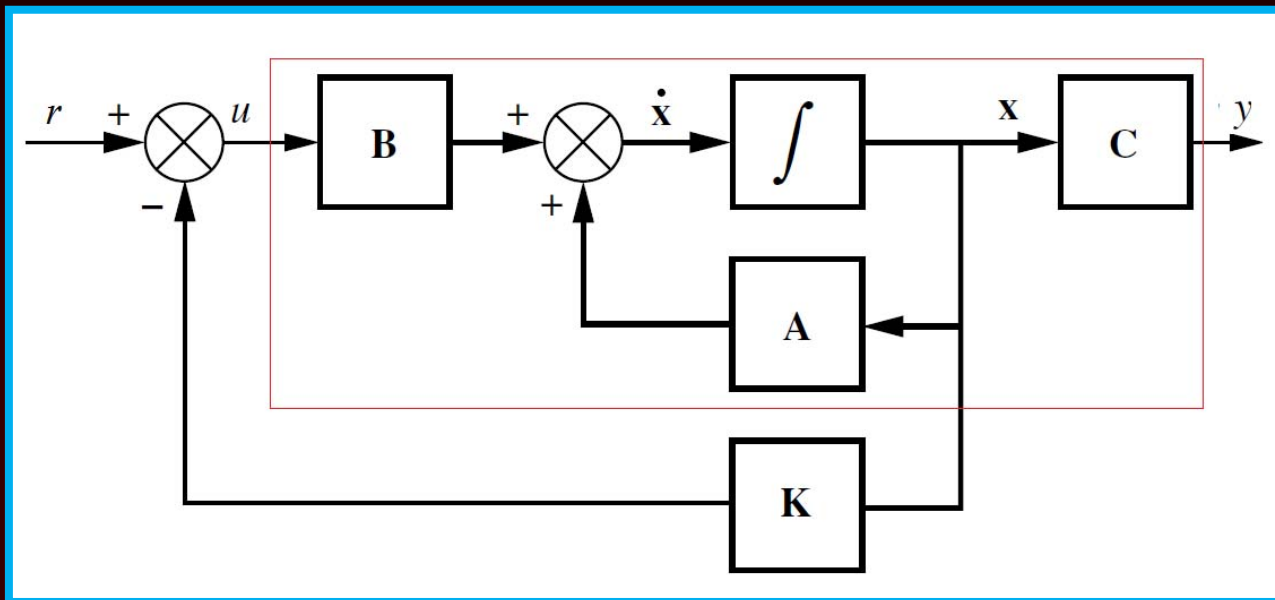
# Control por Realimentación de Estados



$$u(t) = r(t) - Kx(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - KB)x(t) + Br(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Por ahora suponemos que todos los estados se pueden medir para poder realimentarlos.



Para que el sistema sea estable, se diseña  $K$  para que todos los autovalores de  $A-BK$  tengan parte real negativa.

# CUATRO TEOREMAS IMPORTANTES

# Cuatro Teoremas Importantes

---

**Teorema 1:** (Asignación de autovalores). Si el par  $(A,B)$  es controlable, entonces mediante la realimentación de estados  $u(t) = r(t) - Kx(t)$ , donde  $K$  es un vector fila real constante, los autovalores de  $A-BK$  pueden ser asignados arbitrariamente, siempre que los autovalores complejos conjugados se asignen en pares.

**Teorema 2:** La realimentación de los estados puede mover los polos pero no tiene ningún efecto sobre los ceros.

# Cuatro Teoremas Importantes

---

Teorema 3: La Controlabilidad de una planta es invariante con respecto a la realimentación de los estados. Por lo tanto si el par  $[A, B]$  es controlable, para cualquier vector  $K$  el par  $[(A-BK), B]$  también es controlable.

Si la planta no es controlable, no podrá convertirse en controlable mediante la realimentación de los estados.



# Cuatro Teoremas Importantes

---

Teorema 4: La Observabilidad de un sistema de lazo cerrado puede ser destruida por la realimentación de los estados. Esto es, la Observabilidad de un sistema no es invariante con respecto a la realimentación de los estados.

Si con la realimentación muevo los polos de tal manera que cancele algún cero entonces se pierde la observabilidad.

# Control por Realimentación de Estados

Existen varios métodos de diseño para determinar el vector de realimentación  $K$ .

**1) Método Directo:** Se iguala el polinomio característico de la planta a lazo cerrado  $|sI - A + BK|$  con el deseado y se despejan las componentes del vector  $K$ .

**Ejemplo del Método Directo:**

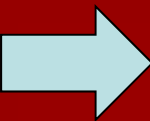
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 1], D = 0, G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

Las posiciones deseadas de los polos a lazo cerrado son:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -4$$

El polinomio característico deseado es:

$$P_{cd}(s) = (s + 1)^2(s + 4) = s^3 + 6s^2 + 9s + 4$$



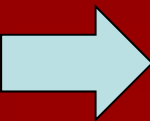
El polinomio característico de la planta a lazo cerrado es:

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \right| \\ &= s^3 + (k_2 + k_3 + 2)s^2 + (k_1 + k_3 + 2)s + (k_3 + 1) \end{aligned}$$

Igualando ambos polinomios

$$\underbrace{s^3 + (k_2 + k_3 + 2)s^2 + (k_1 + k_3 + 2)s + (k_3 + 1)}_{\text{Polinomio característico de la planta a lazo cerrado}} = \underbrace{s^3 + 6s^2 + 9s + 4}_{\text{Polinomio característico deseado}}$$

$$\begin{cases} k_2 + k_3 + 2 = 6 \\ k_1 + k_3 + 2 = 9 \\ k_3 + 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 1 \\ k_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}}$$



El sistema a lazo cerrado es:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \underbrace{(A - KB)}_{A_{cl}} x(t) + Br(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - [4 \ 1 \ 3] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & -4 \\ -4 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

La función de transferencia a lazo cerrado es:

$$G_{cl}(s) = C(sI - A_{cl})^{-1}B = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 6s^2 + 9s + 4}$$

Comparando con la función de transferencia a lazo abierto:

$$G_{ol}(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

Tienen los mismos ceros y  $G_{cl}(s)$  tiene los polos en las posiciones deseadas.



## Observaciones:

- En el método directo no queda claro que rol que juega la controlabilidad en la asignación de autovalores (polos).
- El ejemplo muestra que la realimentación de estados permite ubicar los autovalores del sistema realimentado en cualquier posición, y que la ganancia de realimentación  $K$  puede calcularse por substitución directa. Sin embargo, el método directo no es práctico para dimensiones mayores.

- Para este ejemplo el sistema de ecuaciones es tan simple que se resuelve por inspección:

$$\begin{cases} k_2 + k_3 + 2 = 6 \\ k_1 + k_3 + 2 = 9 \\ k_3 + 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 4 \\ k_2 = 1 \\ k_3 = 3 \end{cases}$$

Para un sistema de ecuaciones más complejo se puede utilizar el comando de Matlab **solve** (Symbolic solution of algebraic equations).

```
>> [k1, k2, k3] = solve ('k2+k3+2=6', 'k1+k3+2=9', 'k3+1=4')
```

k1 = 4	k2 = 1	k3 = 3
--------	--------	--------

# Repaso de la Forma Canónica Controlable $[A, B, C] \xRightarrow{P} [\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}]$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \xRightarrow{x(t)=\bar{x}(t)P(t)} \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) = \bar{C}\bar{x}(t) \end{cases}$$

Las matrices de la FCC1a (variables de fase) son:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1}]$$

La función de transferencia es la misma para los dos sistemas

$$G(s) = C [sI - A]^{-1} B = \bar{C} [sI - \bar{A}]^{-1} \bar{B} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + \cdots + a_1s + a_0}$$

# Repaso de la Forma Canónica Controlable (continuación)

Mediante una transformación de semejanza  $P$  se pasa del sistema controlable  $(A, B, C)$  a la forma canónica controlable  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$

$$[A, B, C] \xRightarrow{P} [\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}]$$

$$x(t) = P \bar{x}(t) \Rightarrow \begin{cases} \bar{A} = P^{-1} A P \\ \bar{B} = P^{-1} B \\ C = C P \end{cases}$$

$$P = \mathcal{C} \bar{\mathcal{C}}^{-1}$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}, \text{Rango}(\mathcal{C}) = n$$

$$\bar{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- La estructura de la matriz es la de una matriz de Hankel, se calcula con Matlab con:

$$\text{hankel}([a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{n-1} \ 1])$$



2) Método para asignación de autovalores via forma canónica controlable: Se basa en que si el sistema original esta en la forma canónica controlable es muy fácil e inmediato obtener el vector  $K$  (las ganancias de realimentación).

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1}]$$

$$\bar{A} - \bar{B}\bar{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -(a_0 + \bar{k}_1) & -(a_1 + \bar{k}_2) & -(a_2 + \bar{k}_3) & \cdots & -(a_{n-1} + \bar{k}_n) \end{bmatrix}$$

$$|sI - (\bar{A} - \bar{B}\bar{K})| = \left| \begin{bmatrix} s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(a_0 + \bar{k}_1) & -(a_1 + \bar{k}_2) & \cdots & -(a_{n-1} + \bar{k}_n) \end{bmatrix} \right|$$

El polinomio característico a lazo cerrado cuando la planta esta en forma canónica controlable es:

$$|sI - \bar{A} + \bar{B}\bar{K}| = s^n + (a_{n-1} + \bar{k}_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + \bar{k}_2)s + (a_0 + \bar{k}_1)$$

El polinomio característico deseado es:

$$P_{cd}(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 = 0$$

Igualando ambos polinomios e igualando los términos de igual orden:

$$\begin{cases} a_0 + \bar{k}_1 = \alpha_0 \\ a_1 + \bar{k}_2 = \alpha_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} + \bar{k}_n = \alpha_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \bar{k}_1 & = & \alpha_0 - a_0 \\ \bar{k}_2 & \vdots & \alpha_1 - a_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ \bar{k}_n & = & \alpha_{n-1} - a_{n-1} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\bar{k}_i = \alpha_{i-1} - a_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n}$$

$$\boxed{\bar{K} = [\alpha_0 - a_0 \quad \alpha_1 - a_1 \quad \dots \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1}]}$$

Luego el cálculo del vector  $K$  (las ganancias de realimentación) es inmediato cuando el sistema está en la FCC1a.

# Control por Realimentación de Estados

---

El procedimiento de de diseño es el siguiente:

a) Se obtienen los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  del polinomio característico del sistema en lazo abierto de la planta a controlar  $(A, B, C, D)$ .

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = C [sI - (A - BK)]^{-1} B \\ &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad m < n \end{aligned}$$

b) Se forman las matrices de la controlabilidad  $\mathcal{C}$  del sistema original  $(A,B,C,D)$  y  $\bar{\mathcal{C}}$  del sistema en la forma canónica controlable 1a  $(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D})$ .

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}, \quad \text{Rango}(\mathcal{C}) = n$$

$$\bar{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = M^{-1}$$

$$M = \bar{\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{hankel}([a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{n-1} \ 1])$$

c) Se eligen las posiciones de los polos (autovalores de la matriz  $|sI-A-BK|$ ) deseados y los coeficientes  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  del polinomio característico deseado.

$$\begin{aligned} P_{c_d}(s) &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n) \\ &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0 = 0 \end{aligned}$$

d) Se determina el vector de ganancias de realimentación  $\bar{K}$  en las coordenadas de la forma canónica controlable  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \alpha_0 - a_0 & \alpha_1 - a_1 & \cdots & \alpha_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

e) Se determina el vector de realimentación  $K$  en las coordenadas originales.

Teniendo en cuenta que la acción de control es la misma para el modelo original  $(A,B,C,D)$  ó el modelo en su forma canónica controlable  $(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D})$  .

$$u(t) = -Kx(t) = -\bar{K} \bar{x}(t) = -\bar{K}P^{-1} x(t) \Rightarrow K = \bar{K}P^{-1}$$

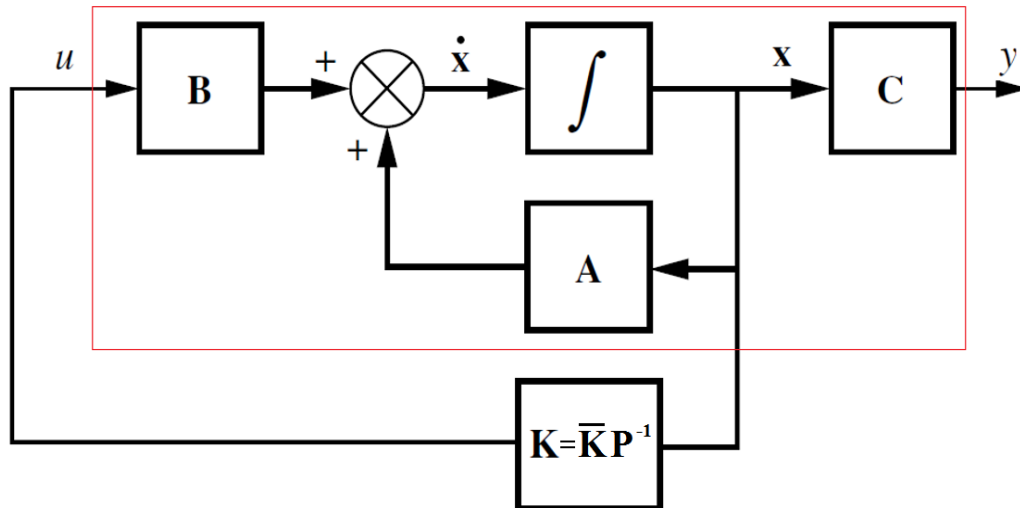
Fórmula de Bass-Gura

$$K = \bar{K} \bar{C} \mathcal{C}^{-1} = \bar{K} M^{-1} \mathcal{C}^{-1} = \bar{K} P^{-1}$$

# Fórmula de Bass-Gura

$$K = \underbrace{[\alpha_0 - a_0, \alpha_1 - a_1, \dots, \alpha_{n-1} - a_{n-1}]}_{\bar{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}}_{\bar{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1}}_{\mathcal{C}^{-1}}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{P^{-1}}$$



$$K = \bar{K} M^{-1} \mathcal{C}^{-1} = \bar{K} P^{-1}$$



# Fórmula de Bass-Gura

$$K = \bar{K} \bar{\mathcal{C}} \mathcal{C}^{-1} = \bar{K} P^{-1}$$

$$K = \underbrace{[\alpha_0 - a_0, \alpha_1 - a_1, \dots, \alpha_{n-1} - a_{n-1}]}_{\bar{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}}_{\bar{\mathcal{C}}} \underbrace{\left[ B \ AB \ \cdots \ A^{n-1} B \right]^{-1}}_{\mathcal{C}^{-1}}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{P^{-1}}$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 1]$$

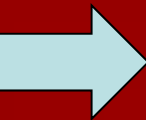
a) Se obtienen los coeficientes del polinomio característico de (A,B,C,D).

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{1s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

b) Se calculan las matrices de controlabilidad

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Rango}(\mathcal{C}) = 3$$

$$\bar{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$



c) Las posiciones deseadas de los polos a lazo cerrado son:

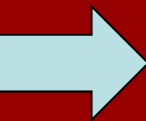
$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -4$$

El polinomio característico deseado es:

$$P_{cd}(s) = (s + 1)^2(s + 4) = s^3 + 6s^2 + 9s + 4$$

d) Se determina el vector de ganancias de realimentación  $\bar{K}$  en las coordenadas de la forma canónica controlable

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \underbrace{4 - 1}_{\alpha_0 - a_0} & \underbrace{9 - 2}_{\alpha_1 - a_1} & \underbrace{6 - 2}_{\alpha_2 - a_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$



e) Se determina el vector de realimentación  $K$  en las coordenadas originales.

La fórmula de Bass-Gura es:

$$K = \bar{K} \bar{\mathcal{C}} \mathcal{C}^{-1} = \bar{K} P^{-1}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = [\alpha_0 - a_0, \alpha_1 - a_1, \alpha_2 - a_2] P^{-1}$$

$$K = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

El mismo resultado que con el método directo

### 3) Método de diseño utilizando la fórmula de Ackermann

La formula de Ackerman es:

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \mathcal{C}^{-1} \phi(A)$$

Por lo tanto K será la última fila de la matriz  $\mathcal{C}^{-1} \phi(A)$

$\mathcal{C}$  es la matriz de controlabilidad

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B], \text{ Rango}(\mathcal{C}) = n$$

y la matriz  $\phi(A)$  se define como:

$$\phi(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_1A + \alpha_0I$$

Ejemplo:

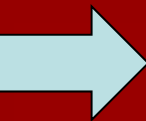
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 1]$$

$$P_{cd}(s) = (s + 1)^2(s + 4) = s^3 + 6s^2 + 9s + 4$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Rango}(\mathcal{C}) = 3$$

$$\phi(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^3 + 6 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^2 + 9 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

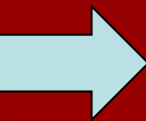
$$= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$K = [0 \ 0 \ 1] \mathcal{C}^{-1} \phi(A) = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [4 \ 1 \ 3]$$

$$K = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

El mismo resultado de antes.



Resolvemos la fórmula de Ackerman con Matlab:

```
k_Ack=[0 0 1]*inv([B A*B A^2*B])*(A^3+alpha(2)  
*A^2+alpha(3)* A+alpha(4)*eye(3))
```

ó podemos utilizar directamente el comando acker

```
K = acker(A,B,roots(P_cd))
```

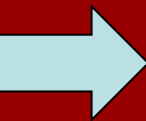
Donde  $\text{roots}(P_{cd})$  son las raíces del polinomio característico deseado, esto es, son las posiciones de los polos deseados  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = -4$ .

```
>> k_Ack=[0 0 1]*inv([B A*B A^2*B])*(A^3+alpha(2)*A^2+alpha(3)*A+alpha(4)*eye(3))
```

```
k_Ack =[4 1 3]
```

```
>> k_Ack = acker(A,B,[-1 -1 -4])
```

```
k_Ack =[4 1 3]
```





También se puede utilizar el comando `place`

$$K = \text{place}(A, B, \text{roots}(P_{cd}))$$

Como antes,  $\text{roots}(P_{cd})$  son las raíces del polinomio característico deseado, esto es, son las posiciones de los polos deseados  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = -4$ .

```
>> k_place = place(A,B, [-4 -1 -1])  
  
k_place = [ 4.0000    1.0000    3.0000]
```

# **Distintos casos de Control por Realimentación de Estado**

# Control por Realimentación de Estado

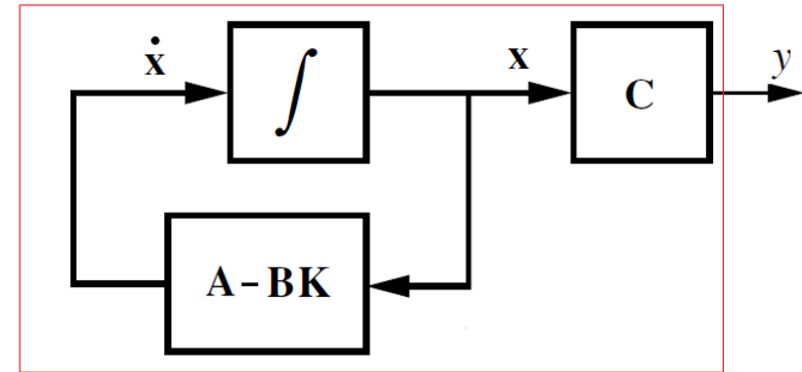
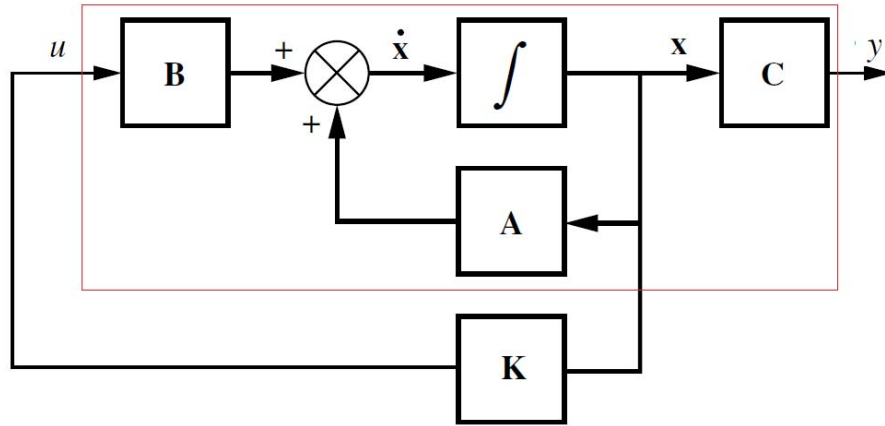
- Caso 1: Diseño mediante realimentación de estados para referencia igual a cero ( $r(t)=0$ )
- Caso 2: Diseño mediante realimentación de estados para referencia distinta de cero ( $r(t) \neq 0$ )
  - Caso 2.a: Compensación para eliminar el error en estado estacionario.
  - Caso 2.b: Diseño de servosistemas de Tipo 1 para plantas Tipo 0.
  - Caso 2.c: Diseño de servosistemas de Tipo 1 para plantas Tipo 1 (con un integrador).

# Caso 1

## Diseño mediante realimentación de estados para referencia igual a cero

$$r(t) = 0$$

# Caso 1: Referencia igual a cero ( $r(t)=0$ )



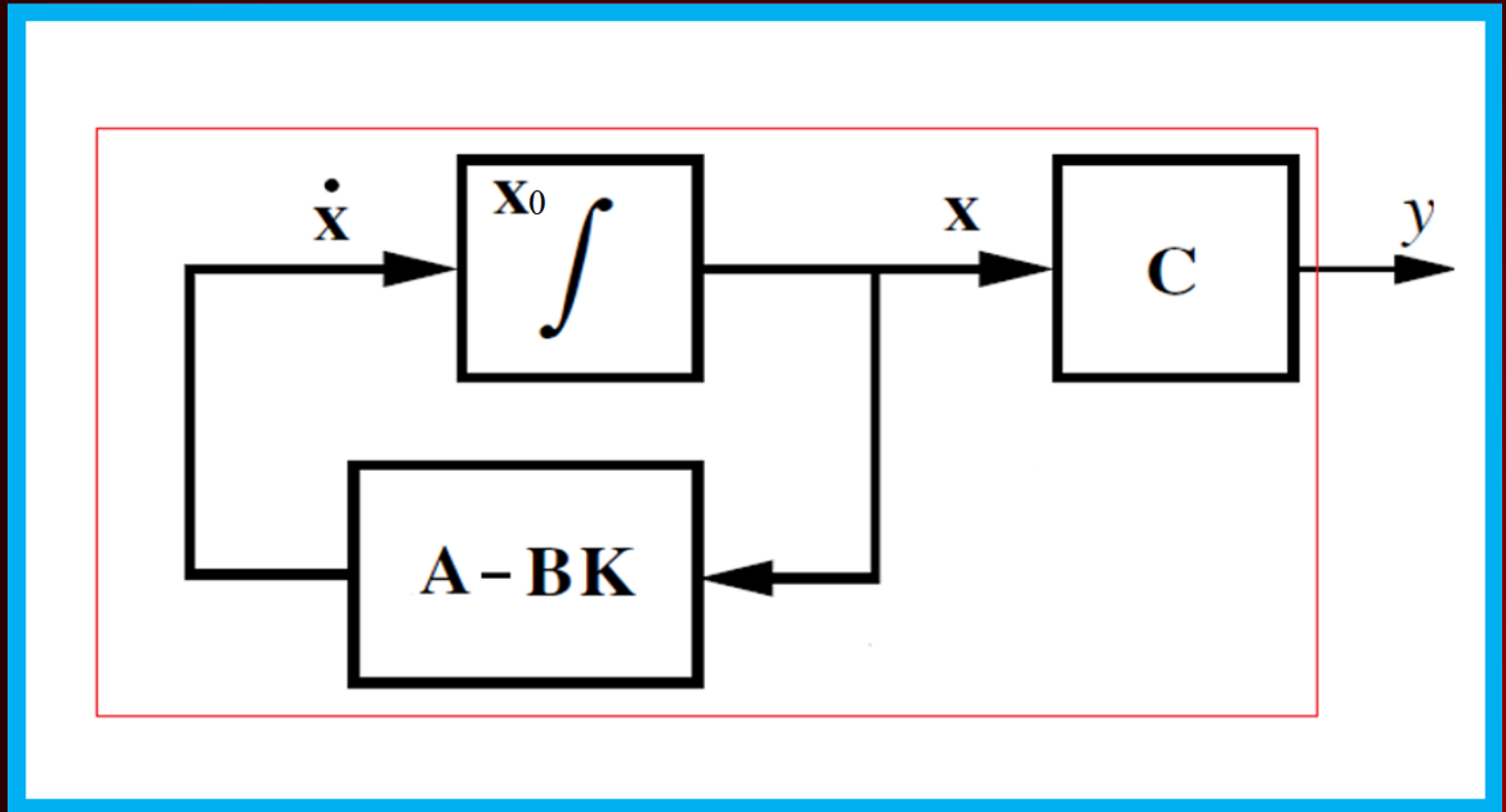
El par  $(A,B)$  es controlable

Las posiciones deseadas de los polos a lazo cerrado son  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

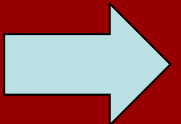
La ecuación característica a lazo cerrado entonces es:

$$\begin{aligned} |sI - A + BK| &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_n) \\ &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0 = 0 \end{aligned}$$

Los autovalores (polos) del sistema a lazo cerrado  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tienen parte real negativa. Luego a partir del vector de estado inicial  $x(0) = x_0$ , los estados  $x(t)$  y la salida  $y(t) = Cx(t)$  evolucionan y convergen a cero.



Ejemplo

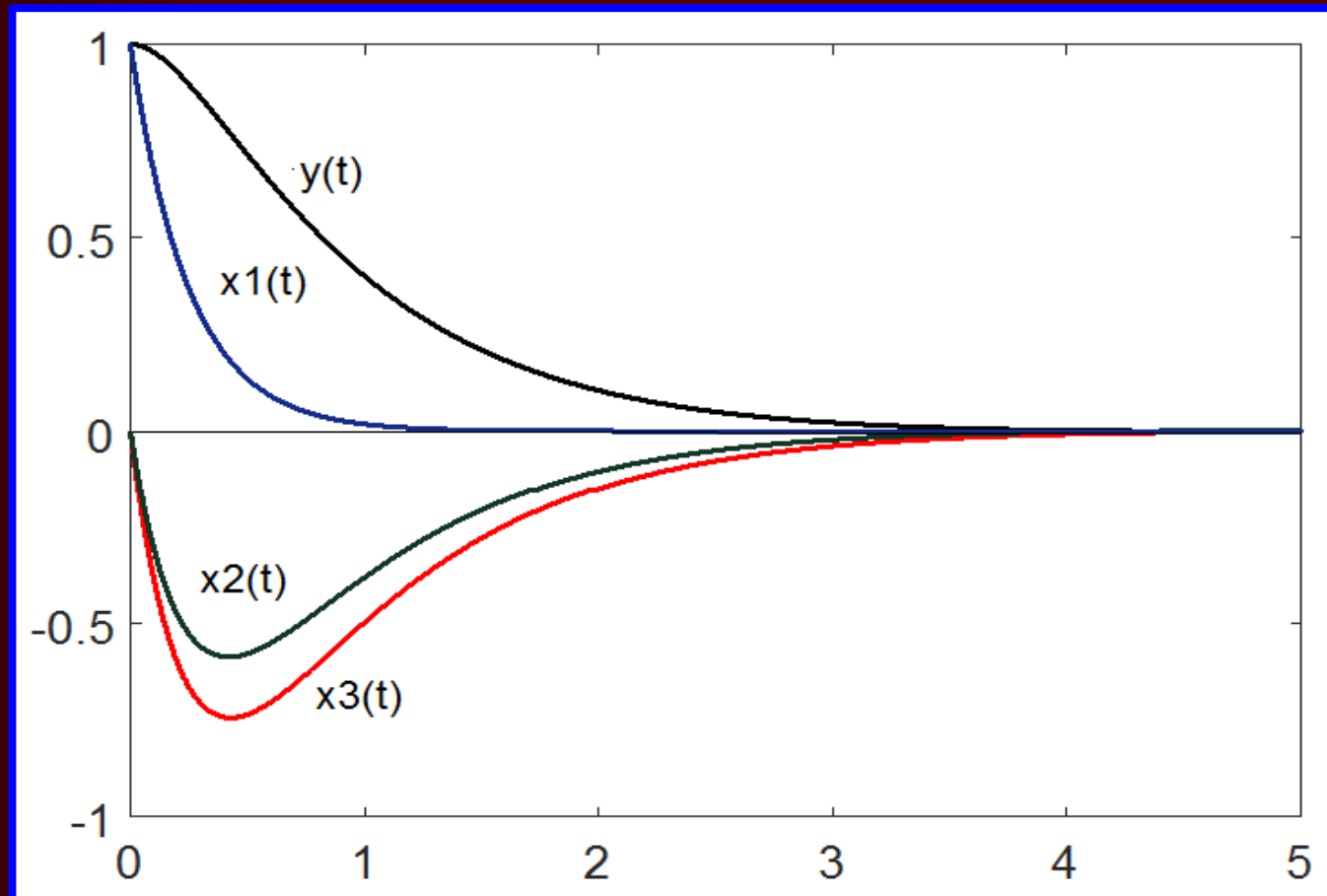


Ejemplo:

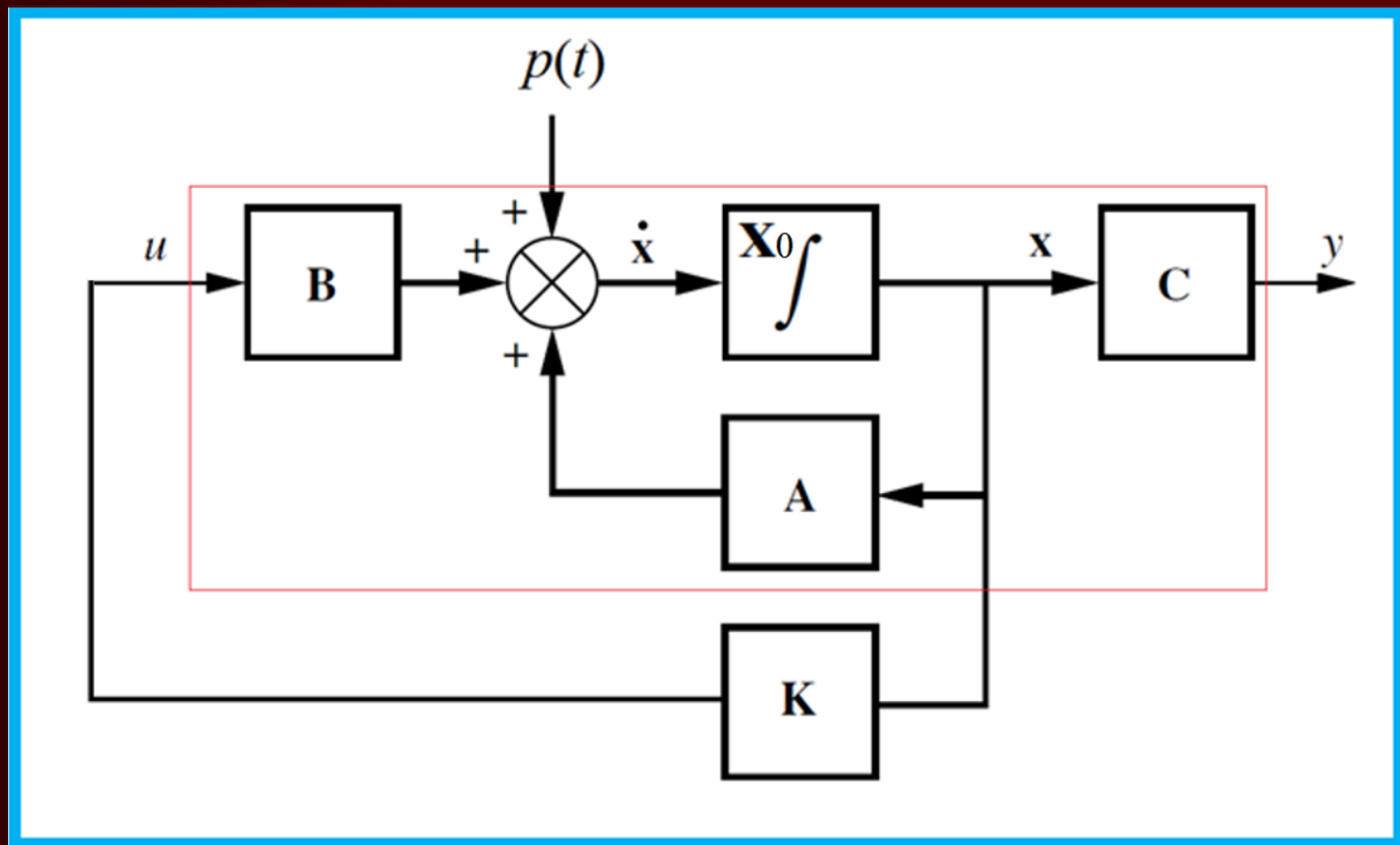
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & -4 \\ -4 & -1 & -4 \end{bmatrix} x(t), \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y(t) = [1 \quad 0 \quad 1] x(t) \end{array} \right.$$



Las perturbaciones pueden afectar mucho la regulación ya que la realimentación de estado no es eficiente para minimizar sus efectos. La realimentación de estados no afecta a los **ceros** (recordar que los ceros están relacionado con las entradas) y las perturbaciones externas son entradas.



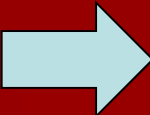
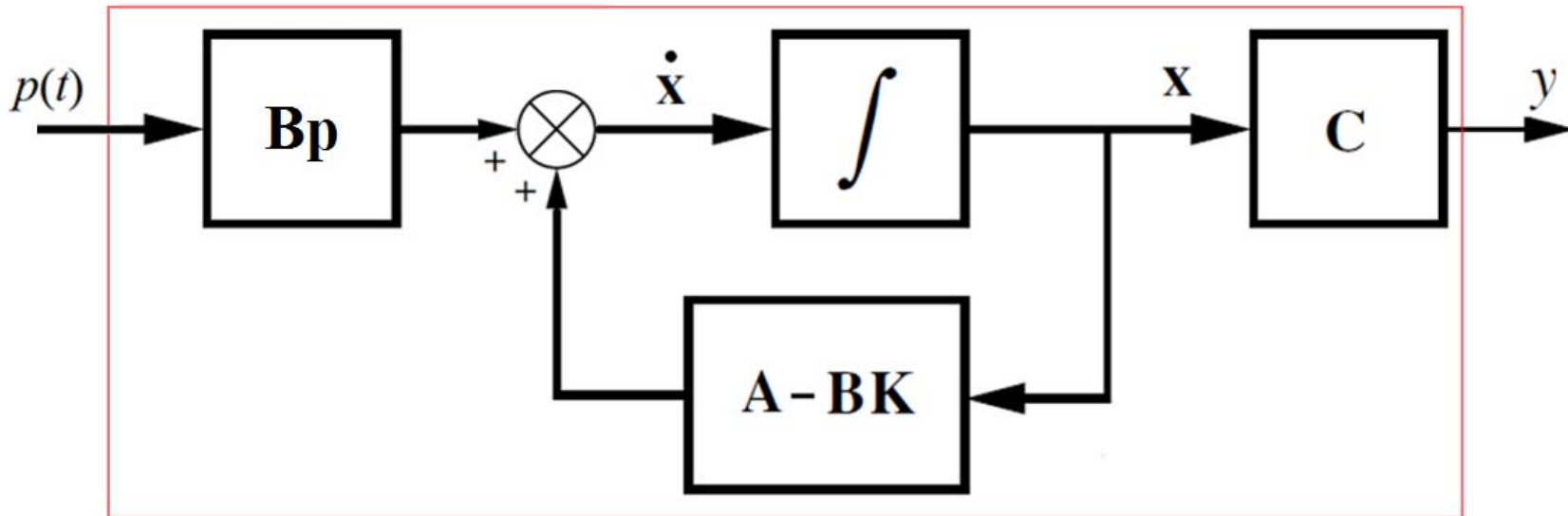


## Ejemplo (continuación):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 1], \quad K = [4 \ 1 \ 3]$$

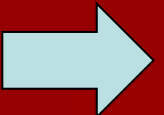
$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p(t) = \frac{1}{2} \mu(t - 4)$$

escalón de amplitud  
0.5 que comienza en  
t=4seg.

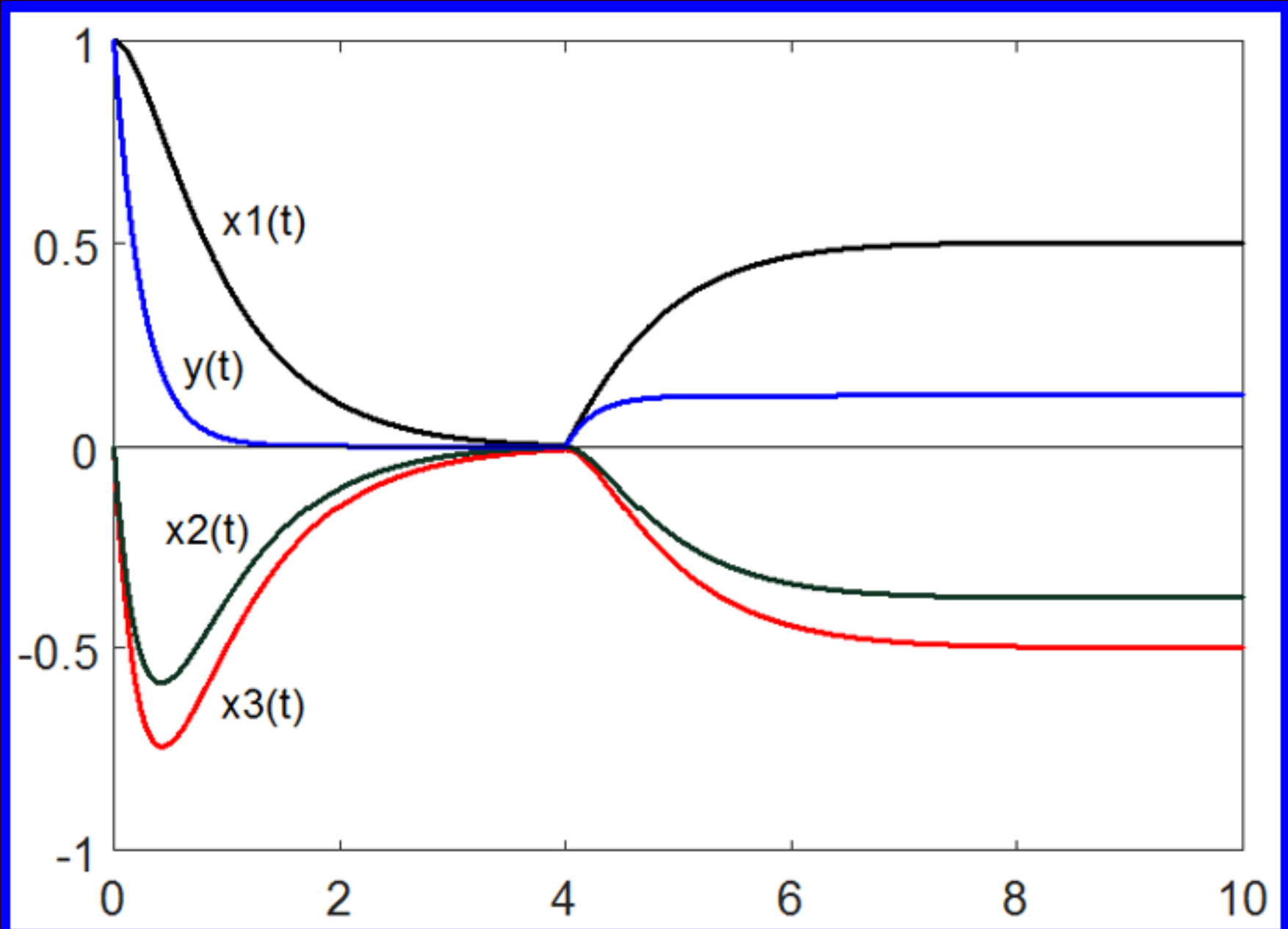


## Ejemplo (continuación):

```
% Efecto_de_la_perturbación_para_regulación.m
clear; clc; close all
A=[0 1 0;-1 -1 -1;0 0 -1]; B=[0 1 1]'; C=[1 0 1];
D=0; K=[4 1 3];Bp=[1 0 0]'; Acl=A-B*K;
sys_p=ss(Acl,Bp,C,0); x0=[1; 0; 0];
t = linspace(0,10,1000);
p=zeros(1,400) ones(1,600)/2];
[y,t,x]=lsim(sys_p,p,t,x0);
plot(t,x)
hold on
plot(t,y)
```



## Ejemplo (continuación):



## Ejemplo (continuación):

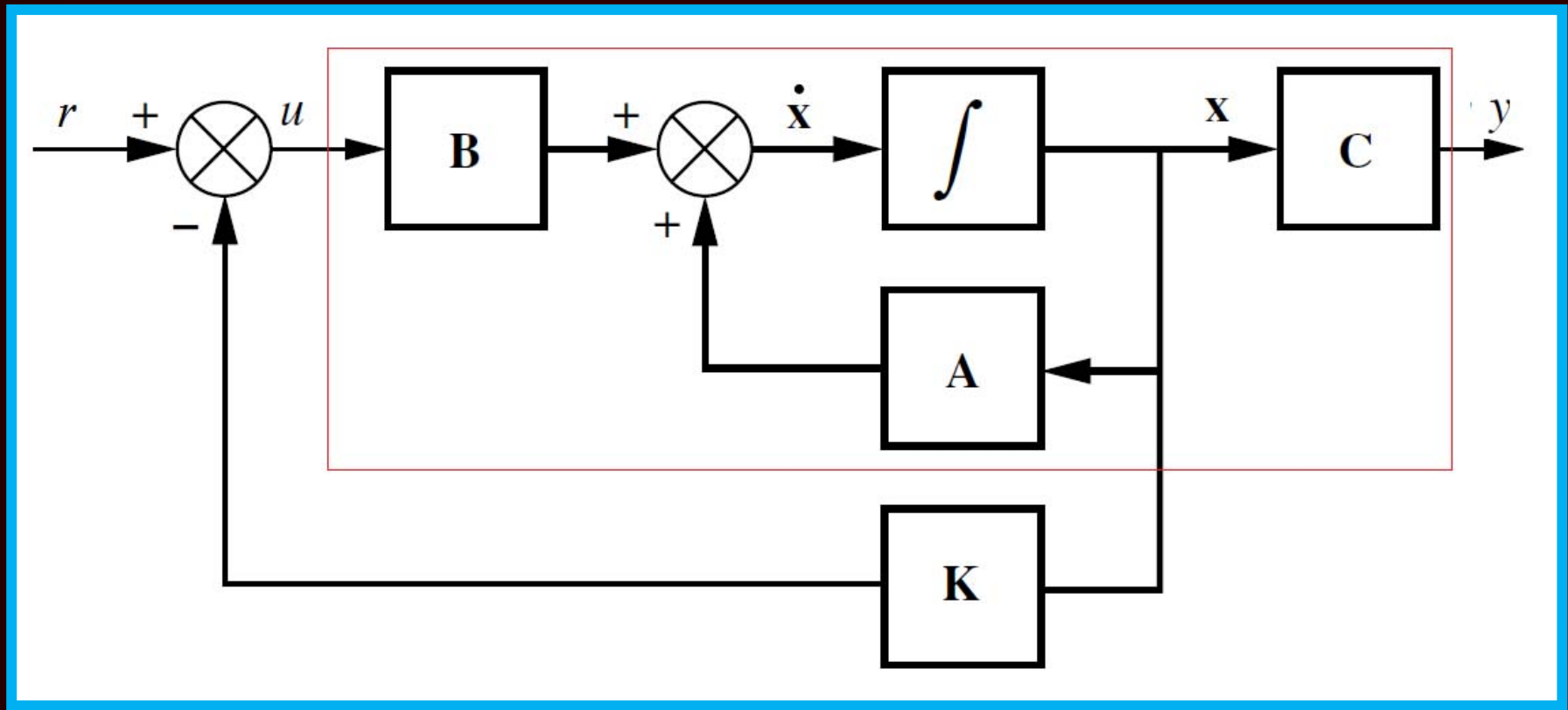


## Caso 2

Diseño mediante  
realimentación de estados  
para referencia distinta de  
cero

$$r(t) \neq 0$$

## Caso 2: Referencia distinta de cero $r(t) \neq 0$



Como antes el par  $(A, B)$  es controlable y los autovalores de  $A - BK$  tienen parte real negativa.

## Caso 2: Referencia distinta de cero $r(t) \neq 0$

---

Si la planta es tipo cero (no tiene integrador) el error de estado estacionario de la salida normalmente es grande. Esto se debe a que las posiciones de los ceros no cambian con la realimentación de los estados.

## Caso 2: Referencia distinta de cero $r(t) \neq 0$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 1], D = 0, \quad G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

Las posiciones deseadas de los polos a lazo cerrado son:

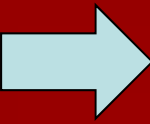
$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -4$$

El polinomio característico deseado es:

$$P_{cd}(s) = (s + 1)^2(s + 4) = s^3 + 6s^2 + 9s + 4$$

Vimos por varios métodos que la ganancia de realimentación que coloca los polos a lazo cerrado en los lugares especificados es:

$$K = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$





Ejemplo:

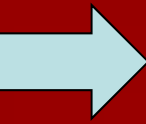
$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Para  $u(t)$  escalón unitario ( $U(s)=1/s$ ) la salida del sistema en estado estacionario a lazo abierto es:

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = G(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = 1$$

*también*

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} C(sI - A)^{-1} B = -C A^{-1} B = 1$$



Vimos también que la función de transferencia a lazo cerrado para  $K = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  es:

$$G_{cl}(s) = C(sI - (A - BK))^{-1}B = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 6s^2 + 9s + 4}$$

Conserva los ceros del sistema a lazo abierto y los polos están en las posiciones asignadas. Para  $u(t)$  escalón unitario la salida del sistema a lazo cerrado es:

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = G(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 6s^2 + 9s + 4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

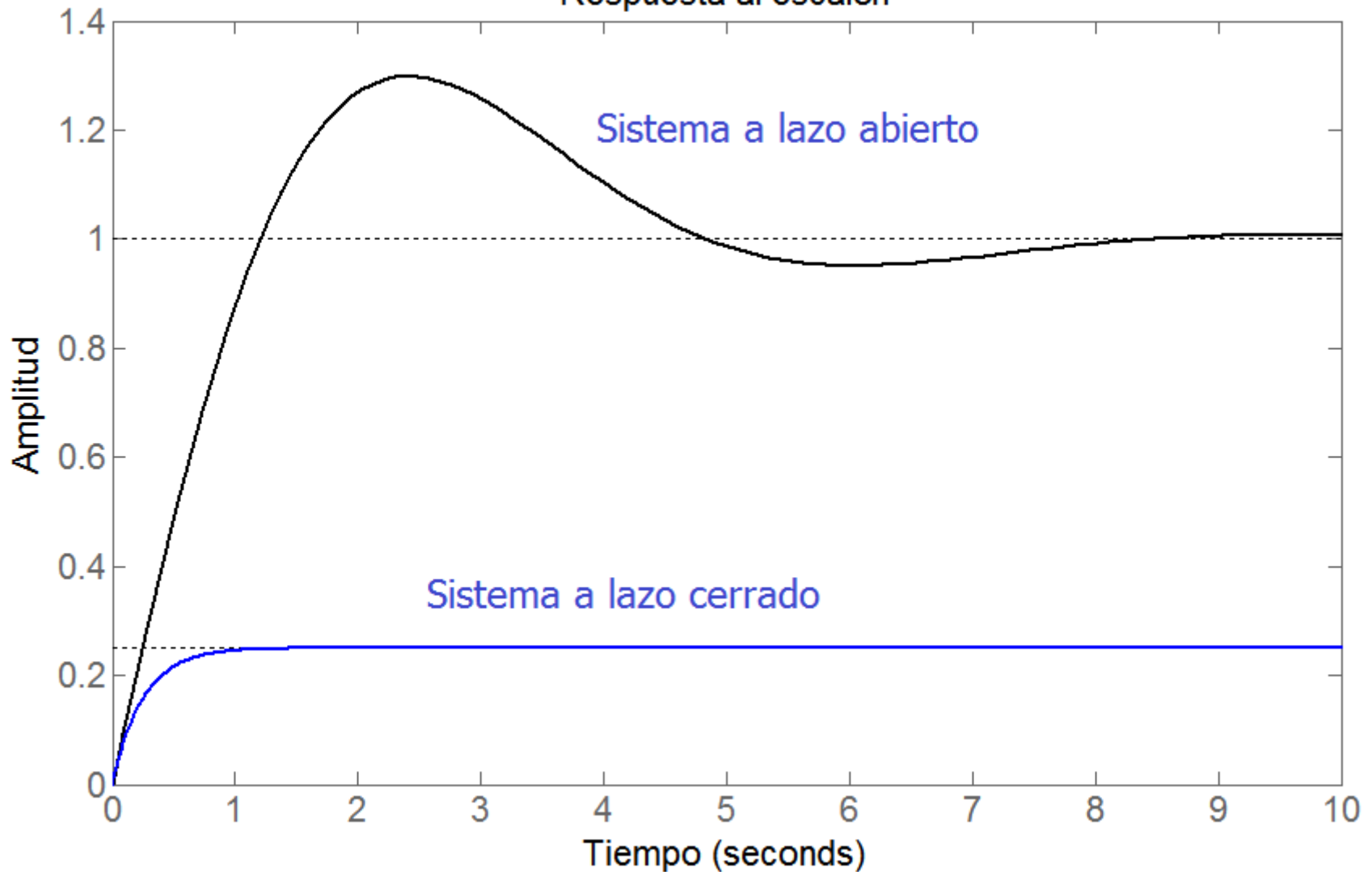
$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} C(sI - (A - BK))^{-1}B = -C(A - BK)^{-1}B$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.25$$

Luego la respuesta al escalón de las funciones de transferencia a lazo abierto y a lazo cerrado difieren mucho.



## Respuesta al escalón

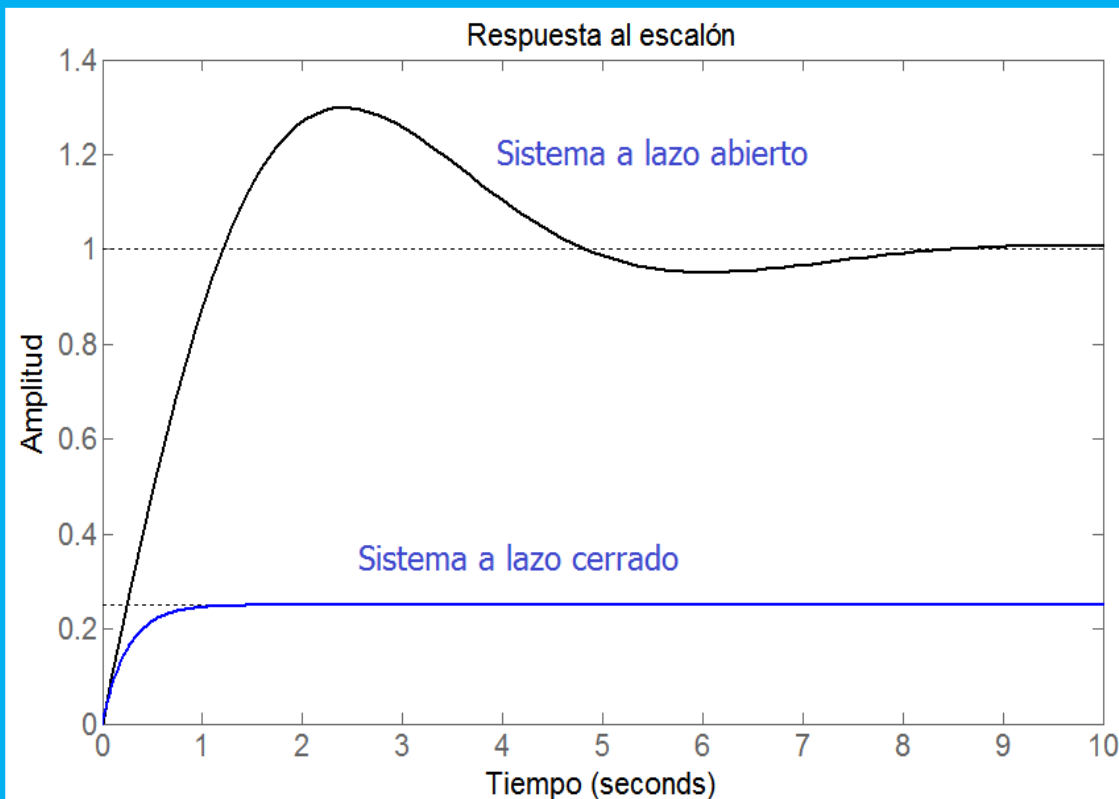
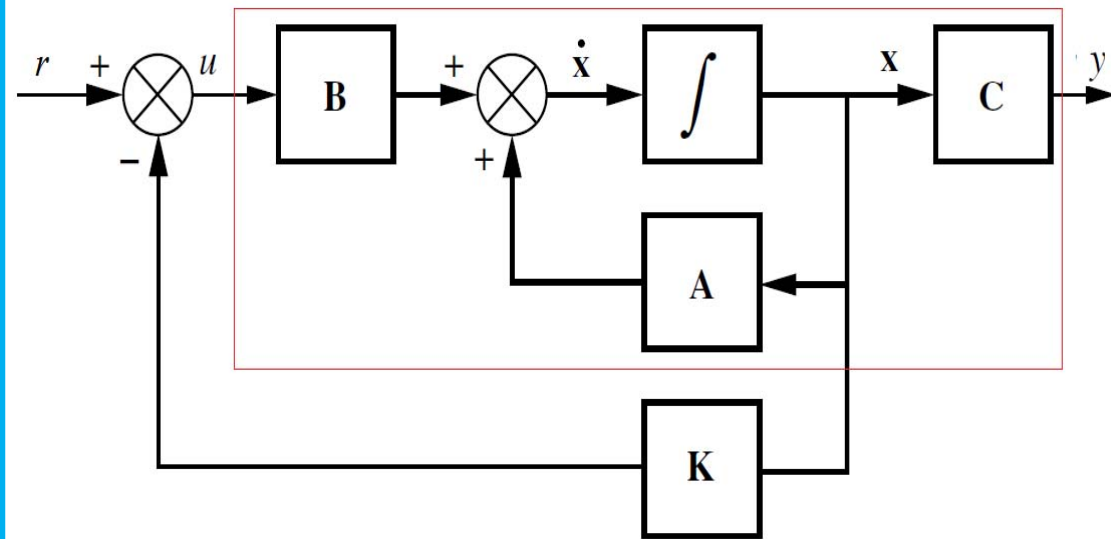


La respuesta dinámica es la deseada pero el error de estado estacionario es enorme.

## Caso 2

Referencia distinta de cero  
 $r(t) \neq 0$

2.a: Compensación para mejorar el error de estado estacionario

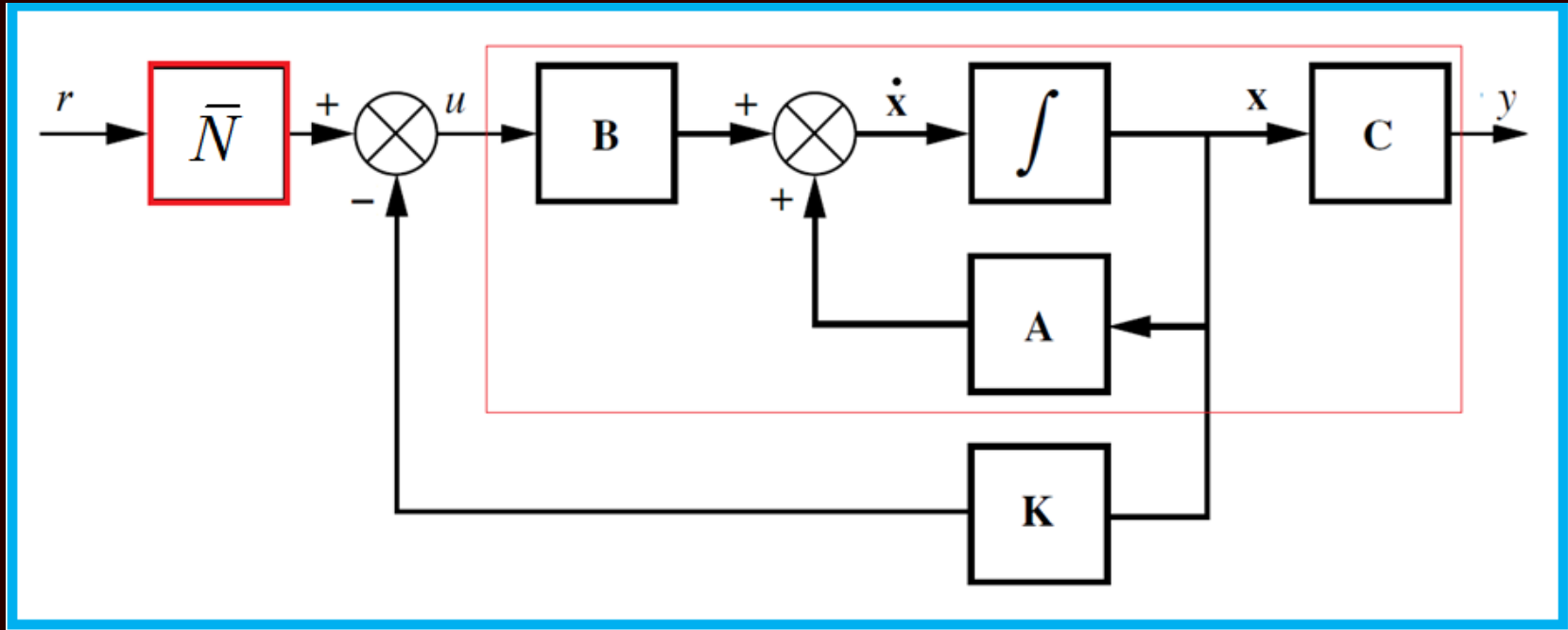


Recordemos que:

- La realimentación de estados actúa sobre los polos y no sobre los ceros.
- Cuando  $r(t) = 0$ , la evolución del sistema depende solo de los polos (respuesta natural). Cuando  $r(t) \neq 0$  los ceros también participan en la respuesta del sistema.

Entonces este esquema funciona bien para regulación porque la entrada es cero y lleva la salida a cero. El problema con el seguimiento es que la entrada es distinta de cero y no hay control sobre la salida  $y(t)$  y sobre el error  $e(t) = r(t) - y(t)$ .

Se soluciona agregando una ganancia  $\bar{N}$  de precompensación



La función de transferencia a lazo cerrado es

$$\begin{aligned} G_{cl}(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \bar{N}C [sI - (A - BK)]^{-1} B \\ &= \bar{N} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}, \quad m < n \end{aligned}$$

# Realimentación de Estados + Ganancia de Precompensación

La función de transferencia a lazo cerrado es

$$\begin{aligned} G_{cl}(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \bar{\mathbf{N}} \mathbf{C} [s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})]^{-1} \mathbf{B} \\ &= \bar{\mathbf{N}} \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}, \quad m < n \end{aligned}$$

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = G_{cl}(0) = \bar{\mathbf{N}} \frac{b_0}{\alpha_0} \Rightarrow \bar{\mathbf{N}} = \frac{\alpha_0}{b_0}$$

$$y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = -\bar{\mathbf{N}} \mathbf{C} [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}]^{-1} \mathbf{B} = 1 \Rightarrow \bar{\mathbf{N}} = -\frac{1}{\mathbf{C} [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}]^{-1} \mathbf{B}}$$

La ganancia de precompensación es:

$$\bar{\mathbf{N}} = -\frac{1}{\mathbf{C} [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}]^{-1} \mathbf{B}} = \frac{\alpha_0}{b_0}$$

Ejemplo: Vimos en el ejemplo anterior que el error en estado estacionario era grande. Ahora le aplicamos al mismo sistema precompensación

La función de transferencia a lazo cerrado es:

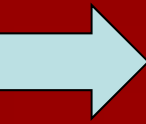
$$G_{cl}(s) = C(sI - (A - BK))^{-1}B = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 6s^2 + 9s + 4}$$

La ganancia de precompensación debe ser:

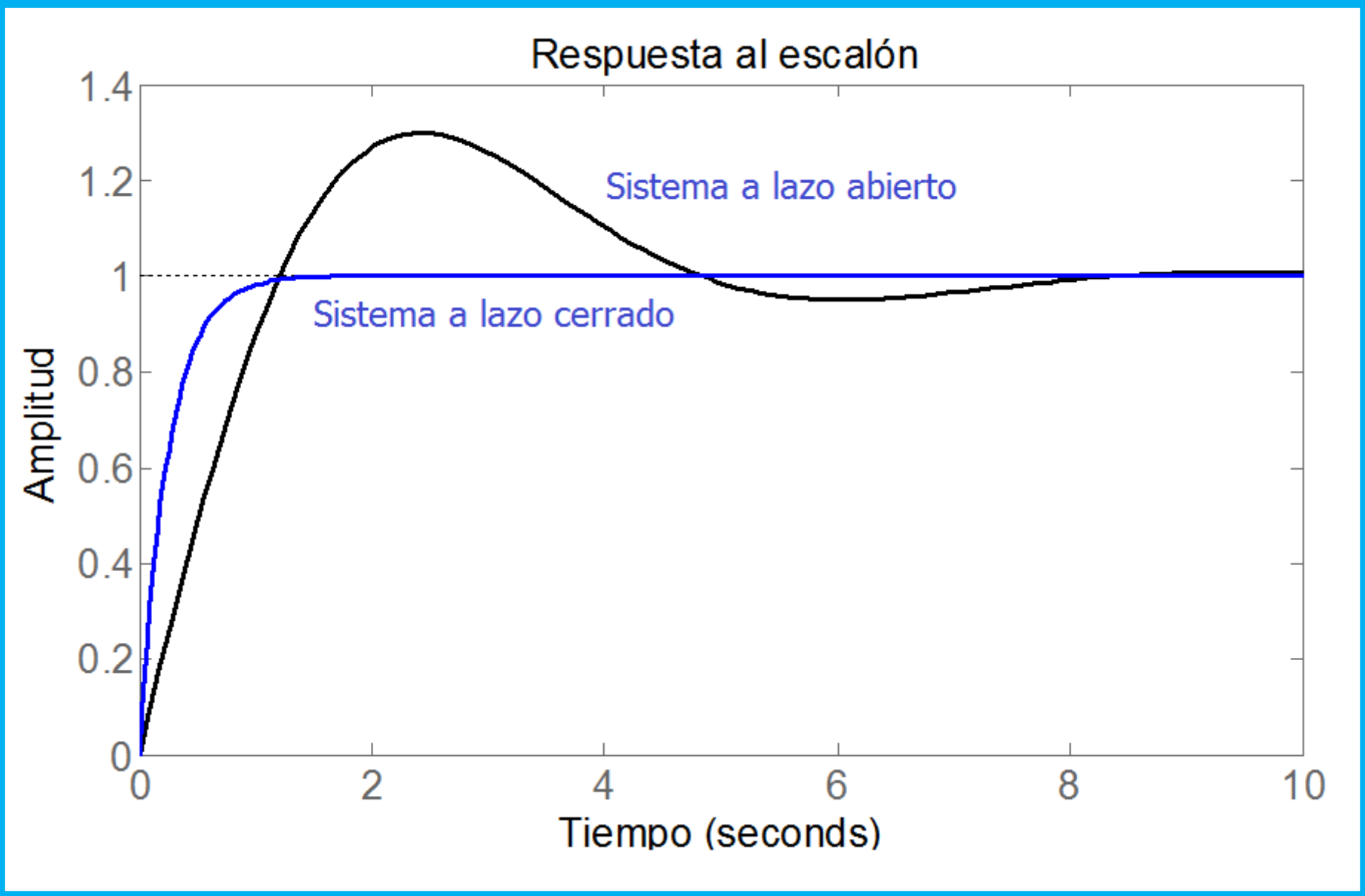
$$\bar{N} = -\frac{1}{C[A - BK]^{-1}B} = \frac{\alpha_0}{b_0} = 4$$

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = 4 \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 6s^2 + 9s + 4} \Rightarrow G_{cl}(0) = 1$$

Ahora la respuesta al escalón de las funciones de transferencia son:



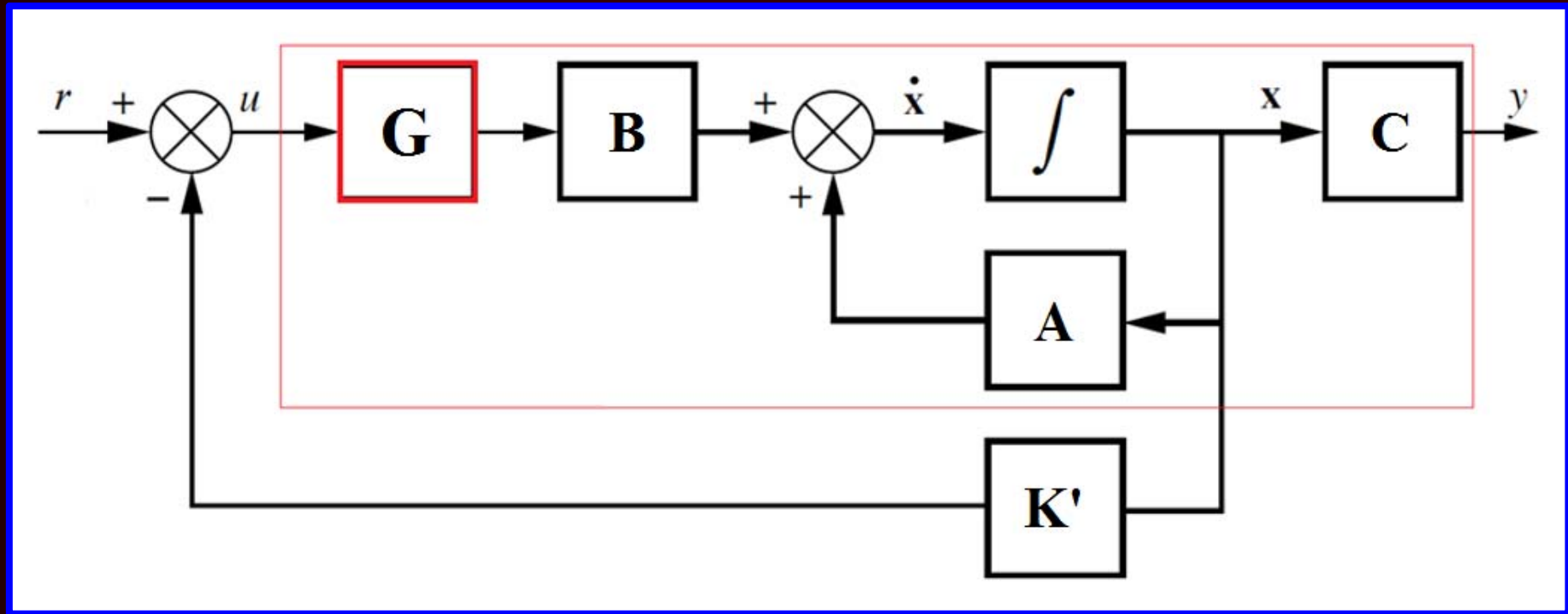




La respuesta dinámica es la deseada y el error de estado estacionario es cero.



Otra posibilidad para solucionar el problema es agregar una ganancia  $G$  al vector  $B$



La función de transferencia a lazo cerrado es

$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C [sI - (A - GBK')]^{-1} GB$$

Observar que el vector de ganancias  $K$  se ha modificado a  $K'$  para no modificar las posiciones de los polos a lazo cerrado.

Para que no se modifiquen las posiciones de los polos a lazo cerrado debe ser.

$$K' = G^{-1}K$$

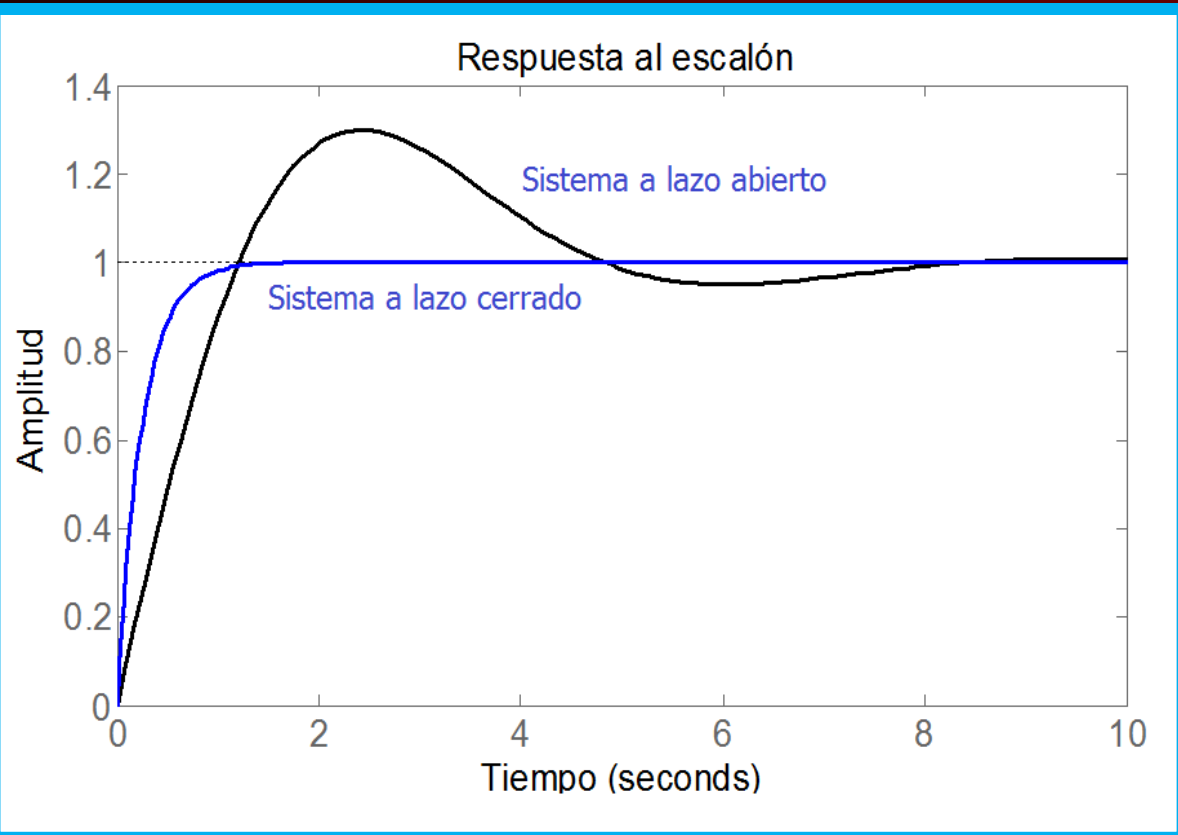
$$\begin{aligned} y_{ss} &= \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = G(0) = -C [A - GBK']^{-1}GB \\ &= -C [A - BK]^{-1}GB = 1 \end{aligned}$$

$$G = -\frac{1}{C [A - BK]^{-1}B} = \frac{\alpha_0}{b_0} = \bar{N}$$

$G$  es igual a la ganancia de precompensación  $\bar{N}$  que se calculo anteriormente.

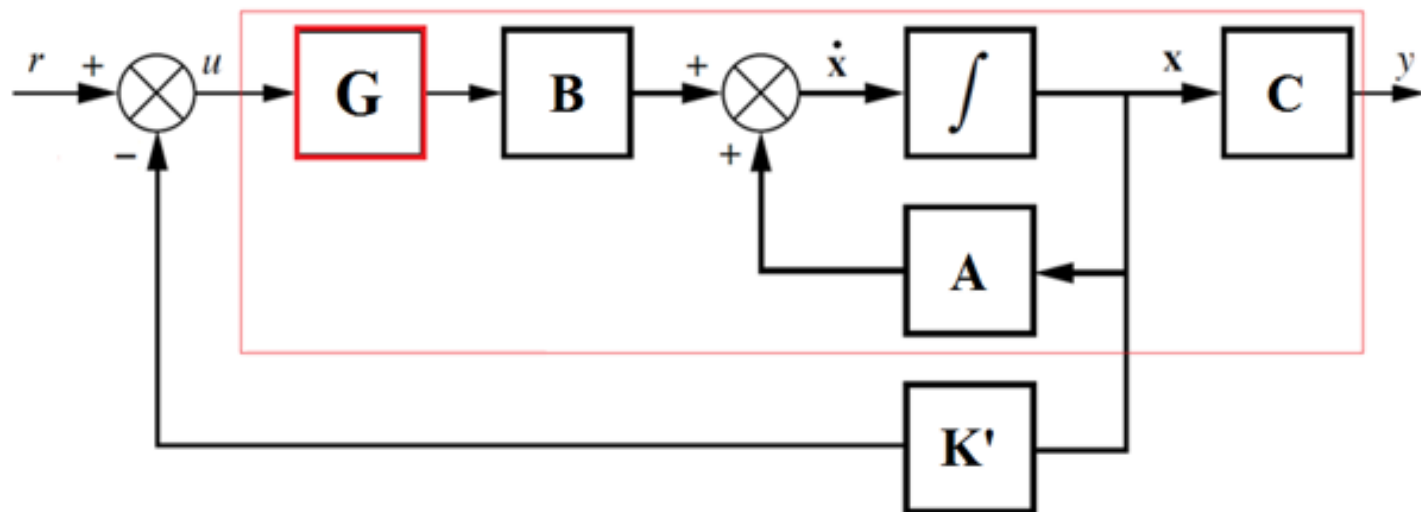
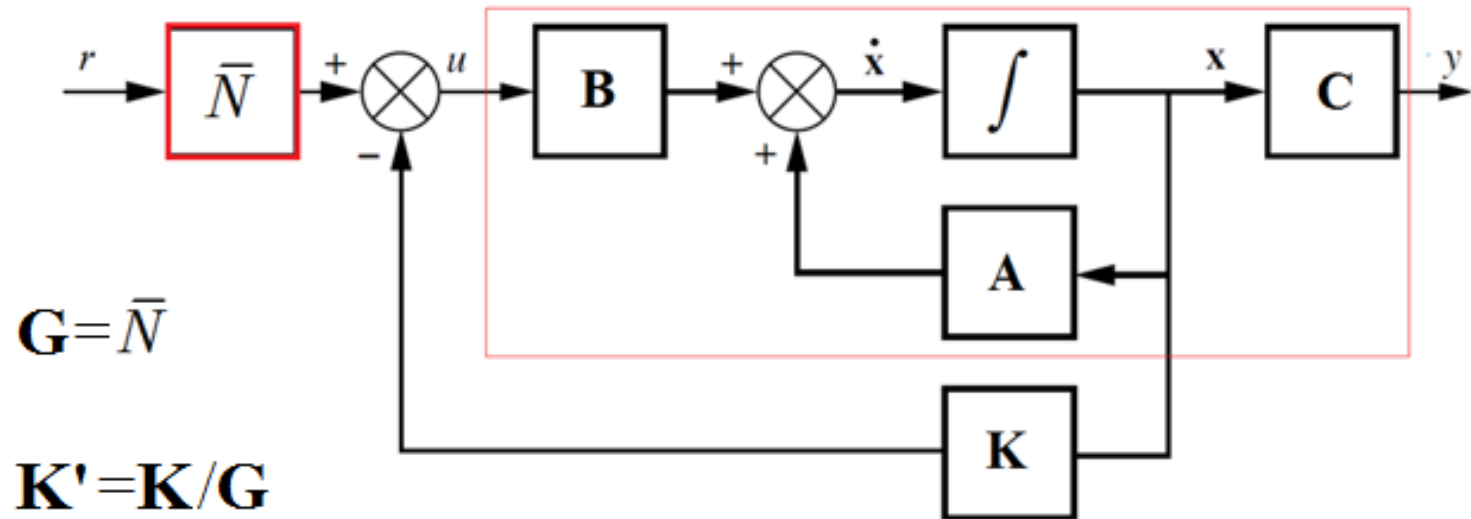
En el ejemplo anterior se agrega la ganancia  $G$ , y se modifican las ganancias de la realimentación de estados de la siguiente manera:

$$\begin{cases} G = \bar{N} = 4 \\ K' = G^{-1}K = \frac{1}{4}[4 \quad 1 \quad 3] = [1 \quad .25 \quad .75] \end{cases}$$



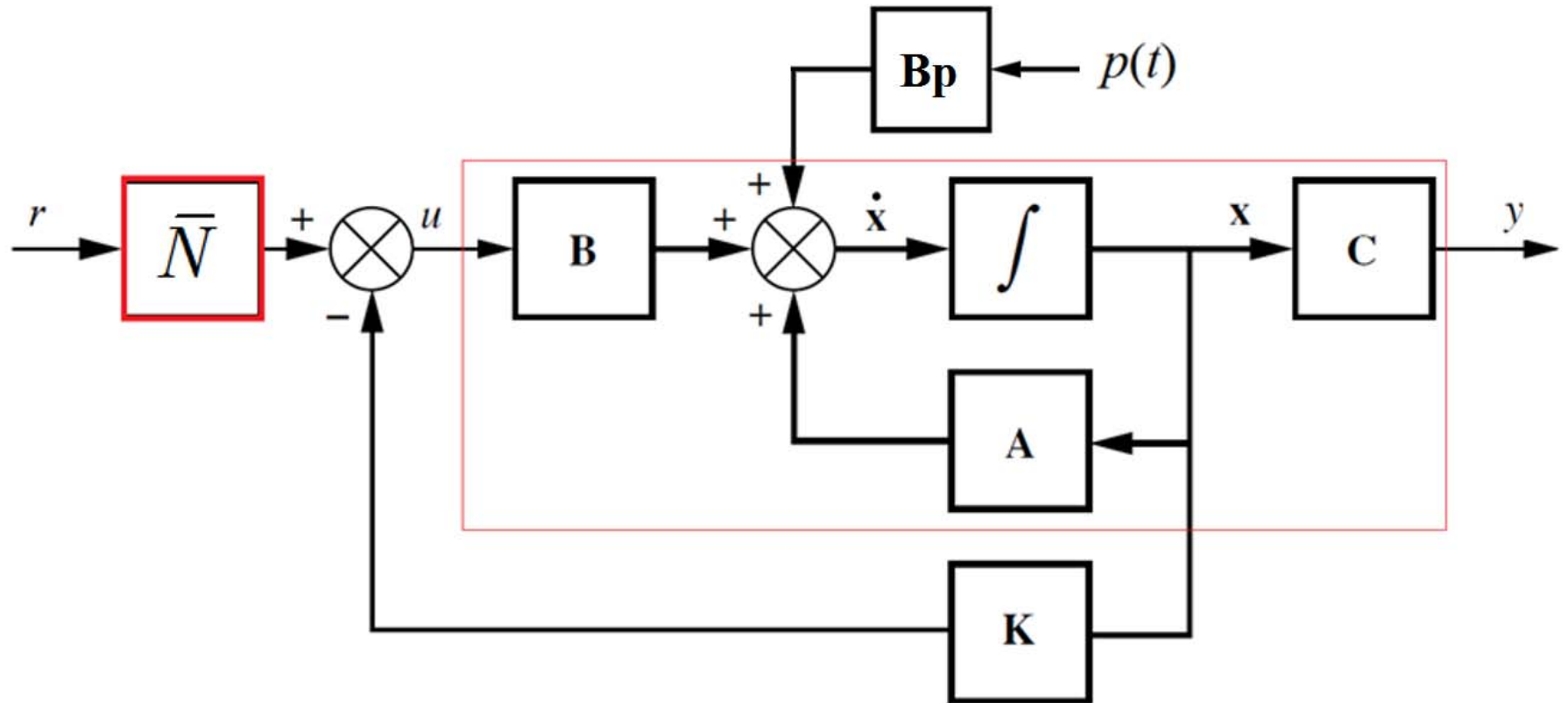
El resultado es idéntico al obtenido con la precompensación





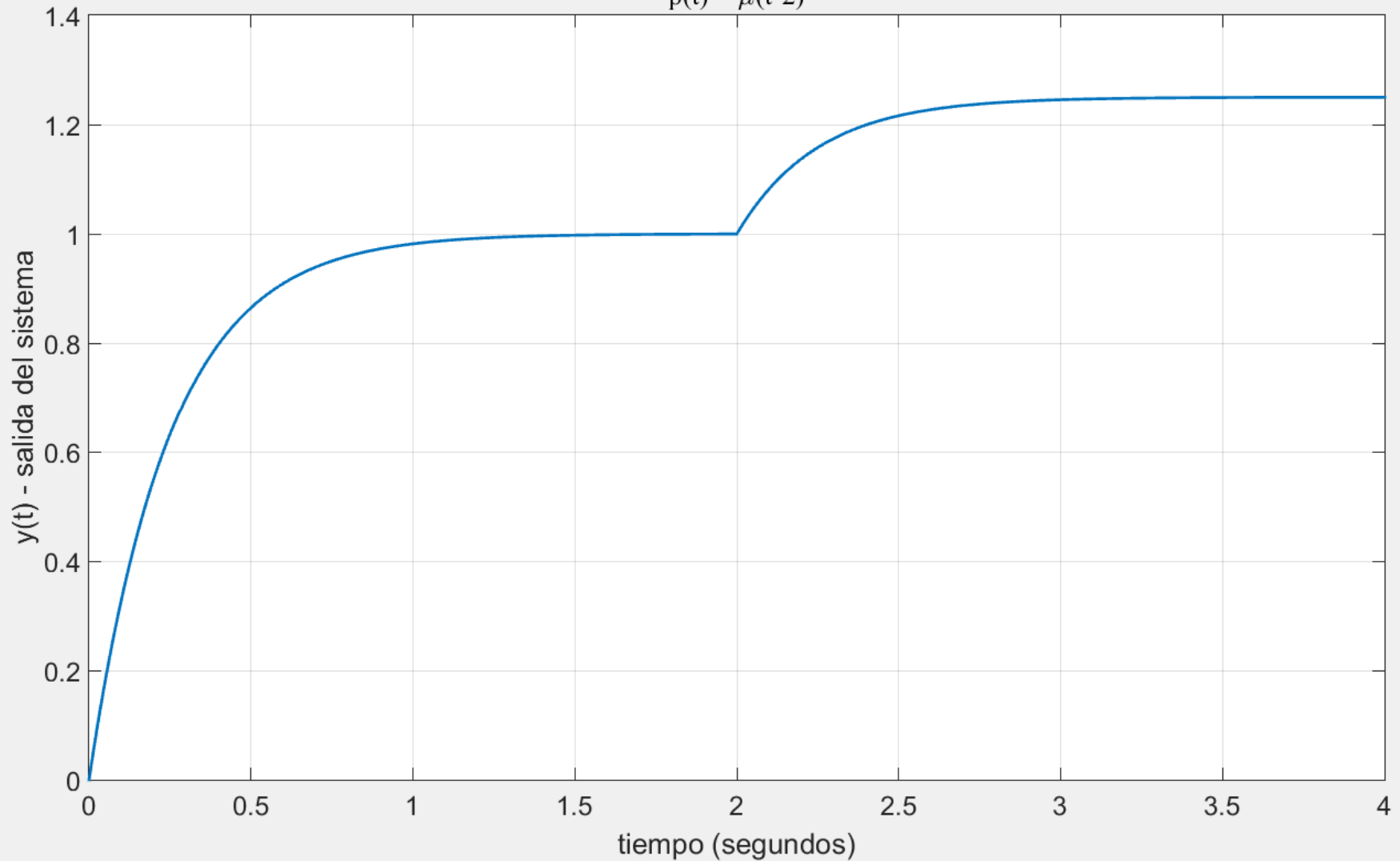
La respuesta dinámica es la deseada en ambos casos y el error de estado estacionario es cero. **PERO HAY UN PROBLEMA CON ESTOS ESQUEMAS.**

Las perturbaciones NUEVAMENTE pueden afectar mucho ya que ni Los esquemas de compensación vistos, ni la realimentación de estado son eficientes para minimizar sus efectos no afectan a los ceros (recordar que los ceros están relacionado con las entradas) y las perturbaciones externas son entradas al sistema.



Respuesta del sistema ante una perturbación en  $t=2\text{seg.}$

$$p(t) = \mu(t-2)$$



La respuesta dinámica es la deseada y el error de estado estacionario es cero. **PERO MALA RESPUESTA ANTE PERTURBACIONES**

El inconveniente de las soluciones vistas hasta ahora es que el control de ganancia se efectúa en lazo abierto, por lo que los sistemas diseñados resultantes son sensibles a las perturbaciones e inexactitudes del modelo, no efectuando un verdadero control en lazo cerrado sobre la ganancia del sistema, es decir, sobre su valor en régimen permanente.

Esto se puede solucionar en parte incrementando el tipo del sistema, y realimentando la salida. El control se puede denominar realimentación de los estados más realimentación de la salida con control integral.

Esto es lo que trataremos en la próxima clase.