

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE BUENOS AIRES

22.93 CONTROL AUTOMÁTICO

Trabajo Práctico Final

Grupo 2

PARRA, Rocío	57669
PIERDOMINICI, Matías Nicolás	57498

Profesores

GHERSIN, Alejandro Simón
SILVA RODRIGUES, Reurison

Presentado: 05/06/2021

Índice

1. Introducción	2
2. Modelo	2
3. Determinación de las constantes del modelo	3
3.1. Experimento B/E	4
3.2. Experimento D	4
3.3. Experimento C	6
4. Control por estados observados con control integral	6
4.1. Realimentación lineal de estados con control integral	6
4.2. Observador	8
4.3. Implementación del controlador en tiempo discreto	10
4.4. Implementación en microprocesador	11
5. Loop shaping	13
5.1. Controlador 2	13
5.2. Controlador 1	14
5.3. Implementación en microprocesador	16
6. Bibliografía	19

1. Introducción

El presente informe se desarrolló el modelado, identificación y control del simulador 'soft real time' de un péndulo. Se implementaron dos controladores. El primero consiste en un controlador de estados observados con control integral. El segundo es un controlador realizado a través de la técnica de *loop shaping*. Para ambos controladores se realizó una implementación capaz de ser volcada en un microprocesador.

2. Modelo

El modelo utilizado es el desarrollado en el paper *On the Dynamics of the Furuta Pendulum*[1], en el cual se realiza un análisis a partir del método de Lagrange aplicado a manipuladores. Del mismo se obtuvieron las matrices del espacio de estados, linealizado la [Ecuación 1](#).

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$J_1 = \begin{pmatrix} J_{1xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{1zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} J_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Los valores de los elementos de la matriz en dicha ecuación se encuentran en la [Ecuación 4](#).

$$\left\{ \begin{array}{lll} A_{31} = 0 & A_{41} = 0 & B_{31} = \frac{\hat{J}_2}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2} \\ A_{32} = \frac{g m_2^2 l_2^2 L_1}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2} & A_{42} = \frac{g m_2 l_2 \hat{J}_0}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2} & B_{32} = \frac{m_2 L_1 l_2}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2} \\ A_{33} = \frac{-b_1 \hat{J}_2}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2} & A_{43} = \frac{-b_1 m_2 l_2 L_1}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2} & B_{41} = \frac{m_2 L_1 l_2}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2} \\ A_{34} = \frac{-b_2 m_2 l_2 L_1}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2} & A_{44} = \frac{-b_2 \hat{J}_0}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2} & B_{42} = \frac{\hat{J}_0}{\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2} \end{array} \right. \quad (4)$$

```

1 J1_hat = J1 + m1*l1^2;
2 J2_hat = J2 + m2*l2^2;
3 J0_hat = J1_hat + m2*L1^2;
4 m2l2 = m2*l2; % este producto aparece mucho, solo por conveniencia
5
6 denominador = J0_hat*J2_hat - m2l2^2*L1^2;
7
8 a32 = g*m2l2^2*L1 / denominador;
9 a34 = -b2*m2l2*L1 / denominador;
10 a42 = g*m2l2*J0_hat / denominador;
11 a44 = -b2*J0_hat / denominador;
12 a33 = -b1*J2_hat / denominador;
```

```

13 a43 = -b1*m2*l2*L1/denominador;
14
15 %a34=-a34;
16 %a42=-a42;
17
18 A = [0, 0,      1, 0; ...
19      0, 0,      0, 1; ...
20      0, a32,    a33, a34; ...
21      0, a42,    a43, a44];
22
23 b31 = J2_hat / denominador;
24 b41 = m2l2*L1 / denominador;
25 b32 = b41;
26 b42 = J0_hat / denominador;
27 B = [0,      0; ...
28      0,      0; ...
29      b31,    b32; ...
30      b41,    b42];
31 Bb2 = [0,      0; ...
32      0,      0; ...
33      b31,    b32; ...
34      b41,    b42];
35
36 C = [1, 0, 0, 0; ...
37      0, 1, 0, 0];
38 D = 0;

```

Listing 1: Modelo simbólico

3. Determinación de las constantes del modelo

A partir del modelo seleccionado, es necesario hallar las constantes físicas. Se supuso que las longitudes y masas no son interrogantes, ya que si se tuviese el péndulo físicamente, se habrían podido medir. La [Tabla 1](#) muestra las constantes necesarias para la utilización del modelo.

Constantes	Descripción	Valor
l_1	Distancia al centro de masa 1	A determinar
l_2	Distancia al centro de masa 2	A determinar
J_1	Momento de inercia de la primera articulación	A determinar
J_2	Momento de inercia de la segunda articulación	A determinar
m_1	Masa de la primera articulación	19.6g
m_2	Masa de la segunda articulación	3.49g
L_1	Longitud de la primera articulación	8.3cm
L_2	Longitud de la segunda articulación	17.3cm
b	Coeficiente de roce dinámico	$0.001e^{-3}$

Tabla 1: Constantes requeridas para el modelo

Para obtener las constantes restantes, se procedió a realizar una serie de ensayos que se describirán a continuación.

3.1. Experimento B/E

El experimento E consta del simulador únicamente con el primer link y sin roce. El actuador aplica un torque constante de 1Nm. Cabe señalar que el experimento original entregado por la cátedra, el primer brazo no incluía el eje que sostiene el segundo brazo, con lo cual se debió realizar esta adaptación, obteniendo así un nuevo experimento "E".



(a) Configuración del primer brazo, experimento B



(b) Configuración del segundo brazo, experimento E

El resultado del experimento es lo observado en la [Figura 2](#).

Sabemos que los movimientos rotacionales están descritos por la ecuación:

$$\tau = \alpha \cdot J, \quad (5)$$

donde τ es el torque que genera el actuador 1, de 1N m. Por otro lado, la aceleración angular se obtiene de la pendiente de la recta de velocidad angular, [Figura 2](#). Conociendo ambas constantes, se reemplaza en la ecuación anterior obteniéndose el momento de inercia 1:

$$J_1 = 1.7513e^{-5} \text{kgm}^2$$

3.2. Experimento D

El experimento D consta de los dos brazos del péndulo. El primero posee una masa mucho mayor que la que tiene en la realidad, con el objetivo de restringir su movilidad. El torque es aplicado por el segundo manipulador, y su valor es de $2e^{-3}$ N m.

El resultado del experimento es que el brazo 2 se encuentra detenido a 37 grados, que es el valor que se obtiene de la [Figura 3](#).

En la ecuación 31 del paper utilizado para el modelado, se relaciona el torque que aplica el segundo brazo con su posición angular y velocidad. Aplicando que $\dot{\theta}_1 = \theta_1 = \dot{\theta}_2 = 0$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\tau_2 = g m_2 l_2 \sin(\theta_2). \quad (6)$$

Reemplazando con $\tau_2 = 2e^{-3}$ N m, $g = 9.8 \text{m/s}^2$, $m_2 = 3.49 \text{g}$ y $\theta_2 = 37^\circ$, se obtuvo la distancia al centro de masa del segundo brazo (l_2):

$$l_2 = 11.85 \text{cm}$$

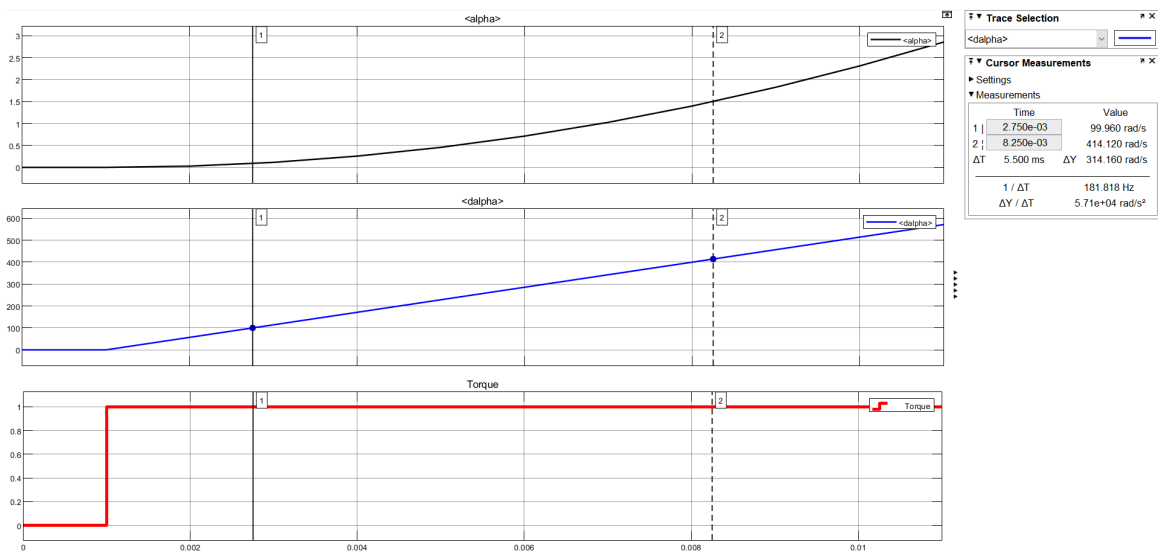


Figura 2: Resultados del experimento E

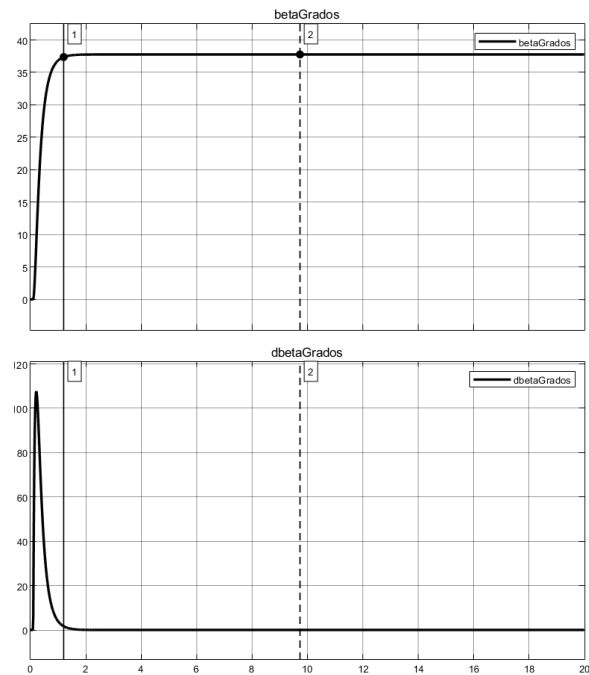


Figura 3: Resultados del experimento D

3.3. Experimento C

El experimento C consta del péndulo completo, y al segundo brazo se lo libera desde una posición inicial elevada. El resultado del experimento es la oscilación del péndulo, con un período de 737ms, tal como se observa en la [Figura 4](#).

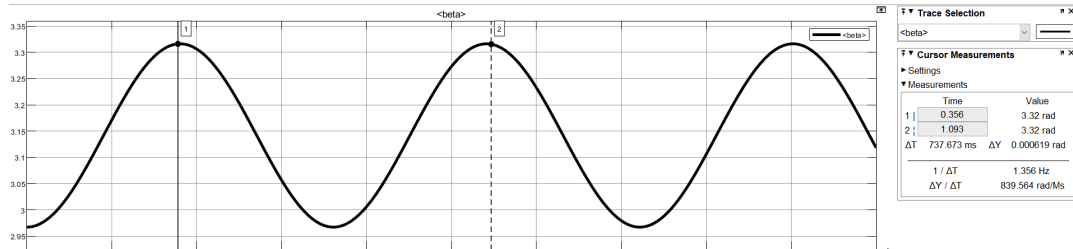


Figura 4: Resultados del experimento C

La relación entre el período de oscilación de un péndulo y su momento de inercia está dada por la siguiente ecuación:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{m_2 g l_2}}. \quad (7)$$

Reemplazando con las constantes obtenidas anteriormente, el segundo momento de inercia es:

$$J_2 = 4.8545e^{-5} \text{kgm}^2$$

Con este valor, se cuenta ya con la totalidad de las constantes requeridas para utilizar el modelo. Un resumen de todos los valores obtenidos se encuentra en la [Tabla 2](#).

Constantes	Descripción	Valor
l_1	Distancia al centro de masa 1	4cm
l_2	Distancia al centro de masa 2	11.85cm
J_1	Momento de inercia de la primera articulación	$1.7513e^{-5} \text{kgm}^2$
J_2	Momento de inercia de la segunda articulación	$4.8545e^{-5} \text{kgm}^2$
m_1	Masa de la primera articulación	19.6g
m_2	Masa de la segunda articulación	3.49g
L_1	Longitud de la primera articulación	8.3cm
L_2	Longitud de la segunda articulación	17.3cm
b	Coefficiente de roce dinámico	$0.001e^{-3}$

Tabla 2: Valores de las constantes utilizadas en las simulaciones

4. Control por estados observados con control integral

4.1. Realimentación lineal de estados con control integral

A partir del modelo descrito anteriormente, se realizó un control con realimentación lineal de estados con control integral. Para la ubicación de las singularidades se utilizó el método del regulador cuadrático lineal (LQR).

```

1 Qi = diag([3 3 3 3 1]);
2 R = 2;
3 sys = ss(A,B,C,0);
4 [Kpp_B_completa,St,et] = lqi(sys,Qi,R);
5 Kpp_B_i=-Kpp_B_completa(5);
6 Kpp_B=Kpp_B_completa(1:4);

```

Listing 2: Código LQR con control integral

El resultado del control es el mostrado en las figuras 5 y 6.

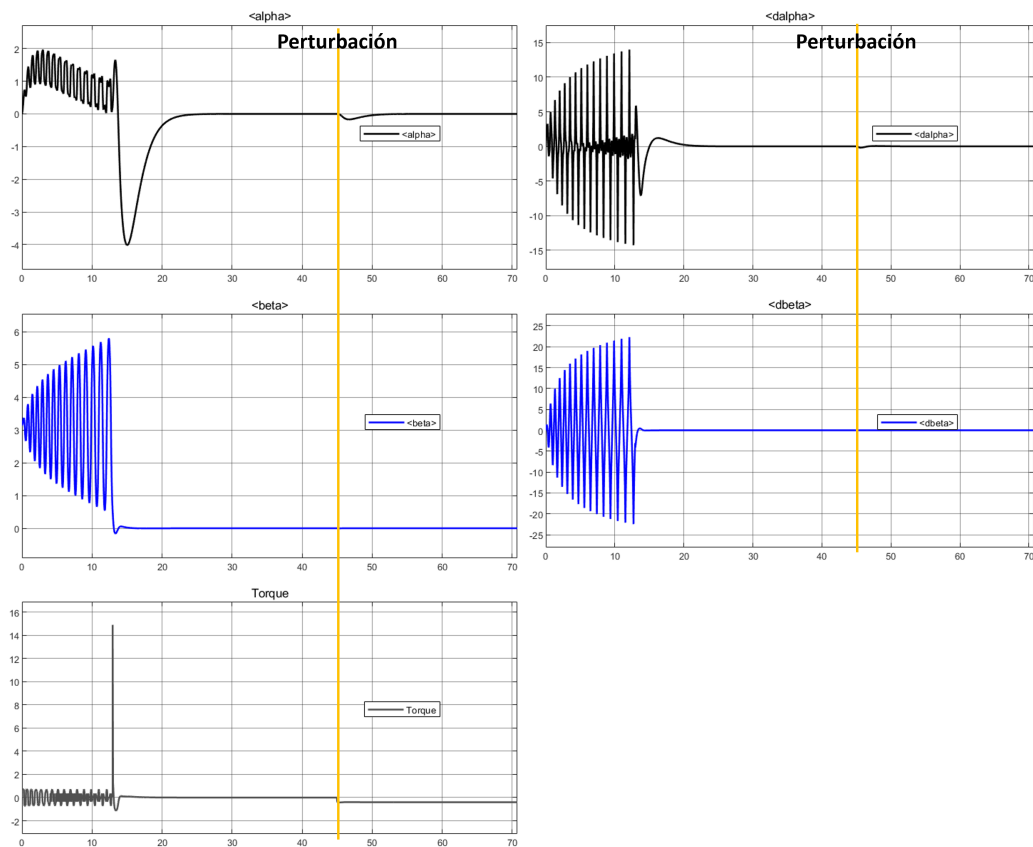


Figura 5: Resultados de la realimentación lineal de estados con control integral

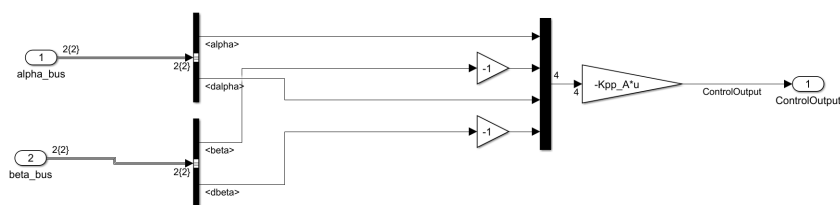


Figura 6: Controlador de la realimentación lineal de estados con control integral

Finalmente, los polos a lazo cerrado del sistema son:

$$\begin{cases} -20.2309 \\ -5.9445 + j1.0089 \\ -5.9445 - j1.0089 \\ -0.7348 + j0.1964 \\ -0.7348 - j0.1964 \end{cases}$$

4.2. Observador

El observador que se implementó es de orden mínimo. Su estructura es la desarrollada en las figuras 7 y 8[2].

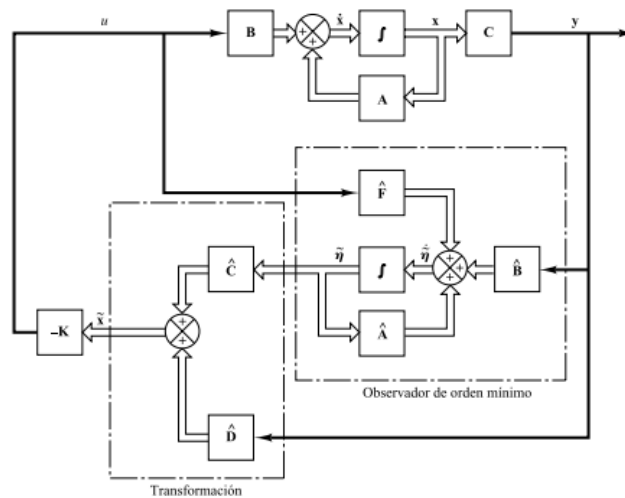


Figura 7: Esquema en bloques del observador de orden mínimo

Observador de estado de orden completo	Observador de estado de orden mínimo
$\tilde{\mathbf{x}}$	$\tilde{\mathbf{x}}_b$
\mathbf{A}	\mathbf{A}_{bb}
$\mathbf{B}u$	$\mathbf{A}_{ba}\mathbf{x}_a + \mathbf{B}_b u$
y	$\dot{\mathbf{x}}_a - \mathbf{A}_{aa}\mathbf{x}_a - \mathbf{B}_a u$
\mathbf{C}	\mathbf{A}_{bb}
\mathbf{K}_e (matriz $n \times 1$)	\mathbf{K}_e [matriz $(n-1) \times 1$]

Figura 8: Relación entre observador completo y de orden mínimo

Para la implementación del observador, se consideró que las variables a estimar son las velocidades angulares, ya que las posiciones se pueden medir con mayor exactitud.

El siguiente fragmento de código muestra la implementación del controlador.

```

1 Aaa=A(1:2,1:2);
2 Aab=A(1:2,3:4);
3 Aba=A(3:4,1:2);
4 Abb=A(3:4,3:4);
5 Ba=B(1:2);
6 Bb=B(3:4);
7 Ke_C=place(Abb',Aab',[-200 -200])';
8 A_hat=Abb-Ke_C*Aab;
9 B_hat=A_hat*Ke_C+Aba-Ke_C*Aaa;
10 F_hat=Bb-Ke_C*Ba;
11 D_hat=[eye(2,2);Ke_C];
12 C_hat=[zeros(2,2);eye(2,2)];

```

Listing 3: Observador de orden mínimo

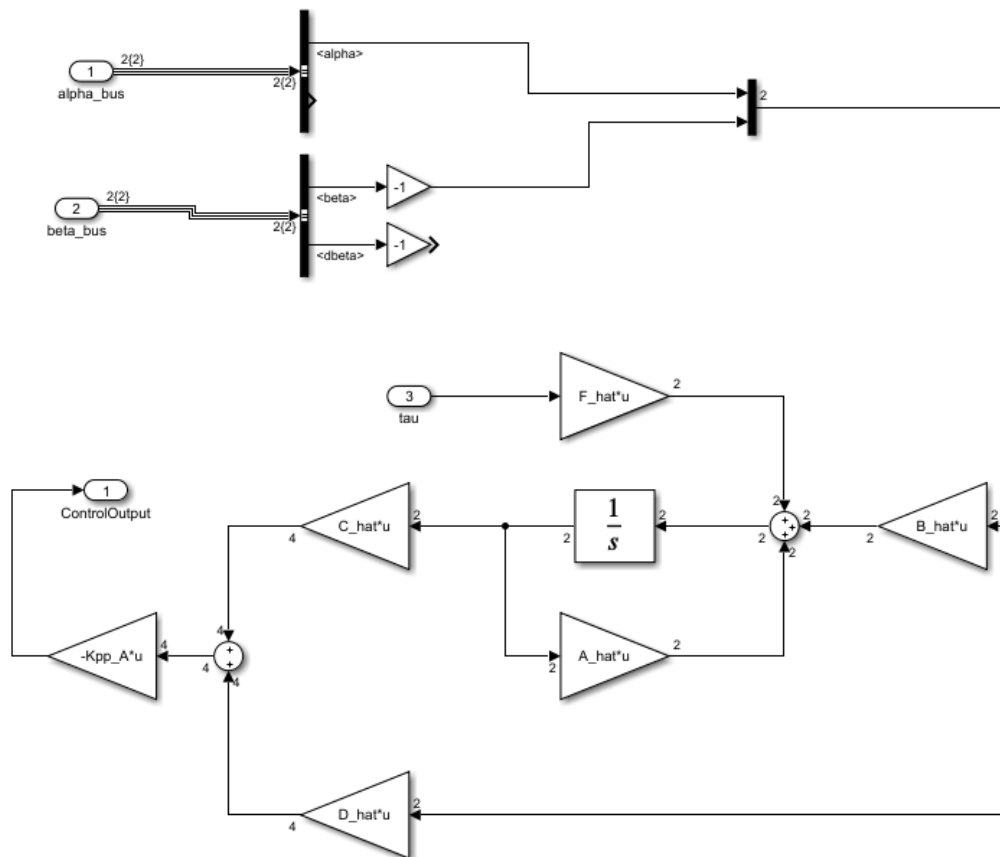


Figura 9: Observador de orden mínimo, implementación en Simulink

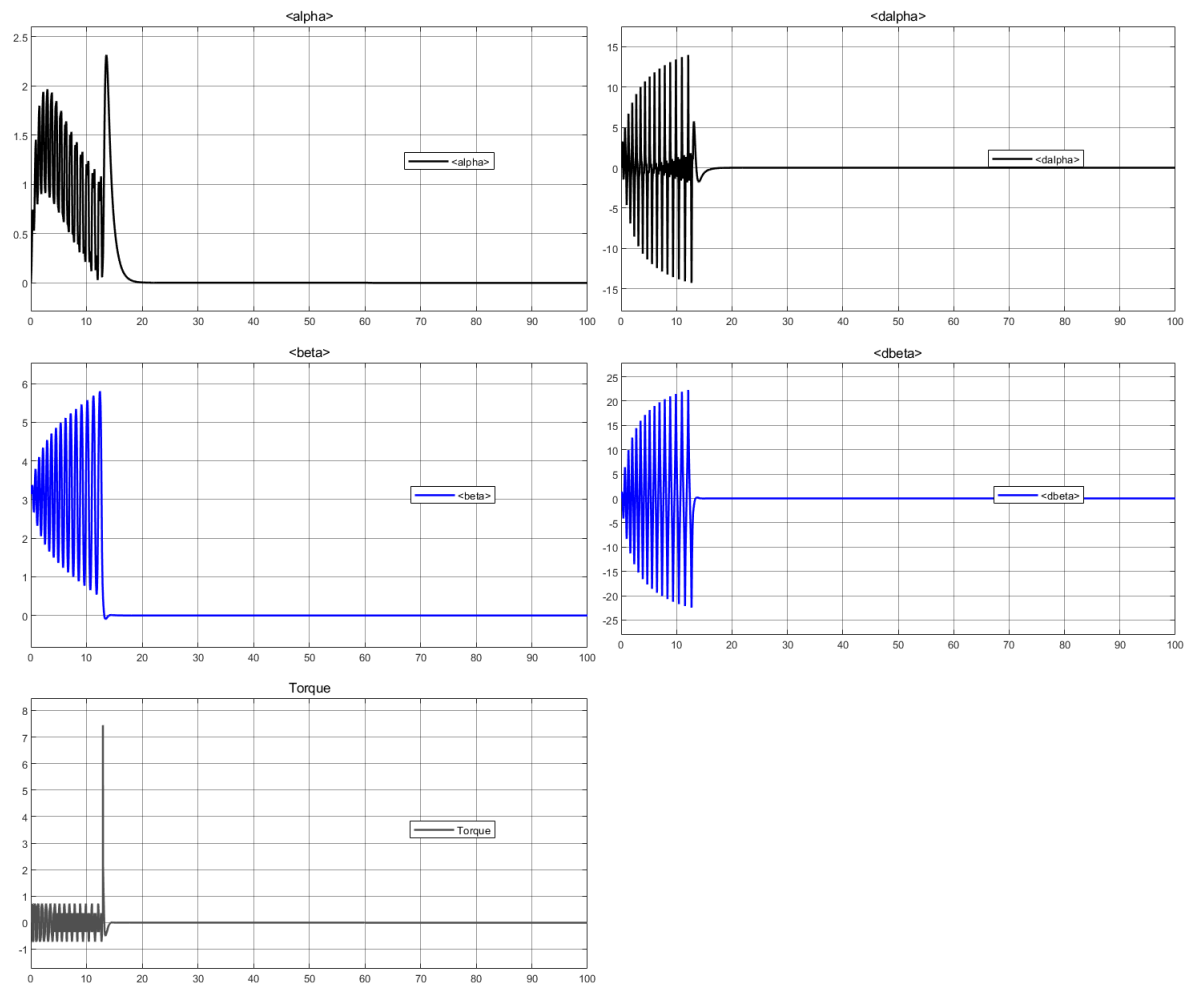


Figura 10: Resultados del observador de orden mínimo

4.3. Implementación del controlador en tiempo discreto

Para realizar la discretización, se tomó el modelo de la planta y se discretizó. Posteriormente se recalcularon las matrices del observador de orden mínimo. Para elegir la frecuencia de muestreo se utilizó como criterio que sea superior a dos veces la frecuencia del polo mas rápido (20rad s^{-1}), a lazo cerrado. Por lo tanto la frecuencia mínima de muestreo es 7Hz. Se eligió entonces una frecuencia de muestro de 1kHz.

```

1 Ts_D=1e-3;
2 G=ss(A,B,C,D);
3 G_D=c2d(G,Ts_D,'zoh');
4 A_D=[G_D.A zeros(4,1); -Ts_D*G_D.C 1];
5 B_D=[G_D.B;0];
6
7 Aaa_D=A_D(1:2,1:2);
8 Aab_D=A_D(1:2,3:4);

```

```

9  Aba_D=A_D(3:4,1:2);
10 Abb_D=A_D(3:4,3:4);
11 Ba_D=B_D(1:2);
12 Bb_D=B_D(3:4);
13
14
15 [Kpp_D_completa,St,et] = lqi(G_D,Qi,R);
16 Kpp_D_i=-Kpp_D_completa(5);
17 Kpp_D=Kpp_D_completa(1:4);
18
19 Ke_D=place(Abb_D',Aab_D',[0.98 0.98])';
20 A_hat_D=Abb_D-Ke_D*Aab_D;
21 B_hat_D=A_hat_D*Ke_D+Aba_D-Ke_D*Aaa_D;
22 F_hat_D=Bb_D-Ke_D*Ba_D;
23 D_hat_D=[eye(2,2);Ke_D];
24 C_hat_D=[zeros(2,2);eye(2,2)];

```

Listing 4: Controlador en tiempo discreto

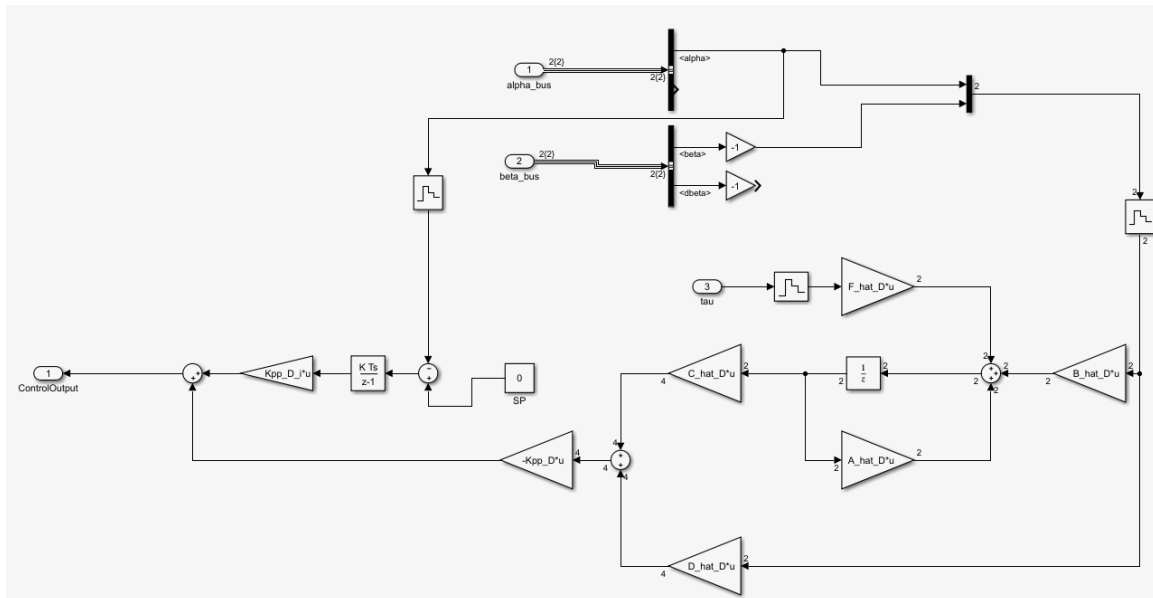


Figura 11: Controlador discreto en Simulink

4.4. Implementación en microprocesador

La implementación del controlador en microprocesador se realiza a partir de las matrices de estados del controlador. Para hallarlas se recurrió al resultado del ejemplo 10-8 del libro *Ingeniería de control moderna*[2]. La transferencia del controlador está definida por la siguiente ecuación:

$$H(s) = -\frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}} = -\left[\tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} + \tilde{D}\right], \quad (8)$$

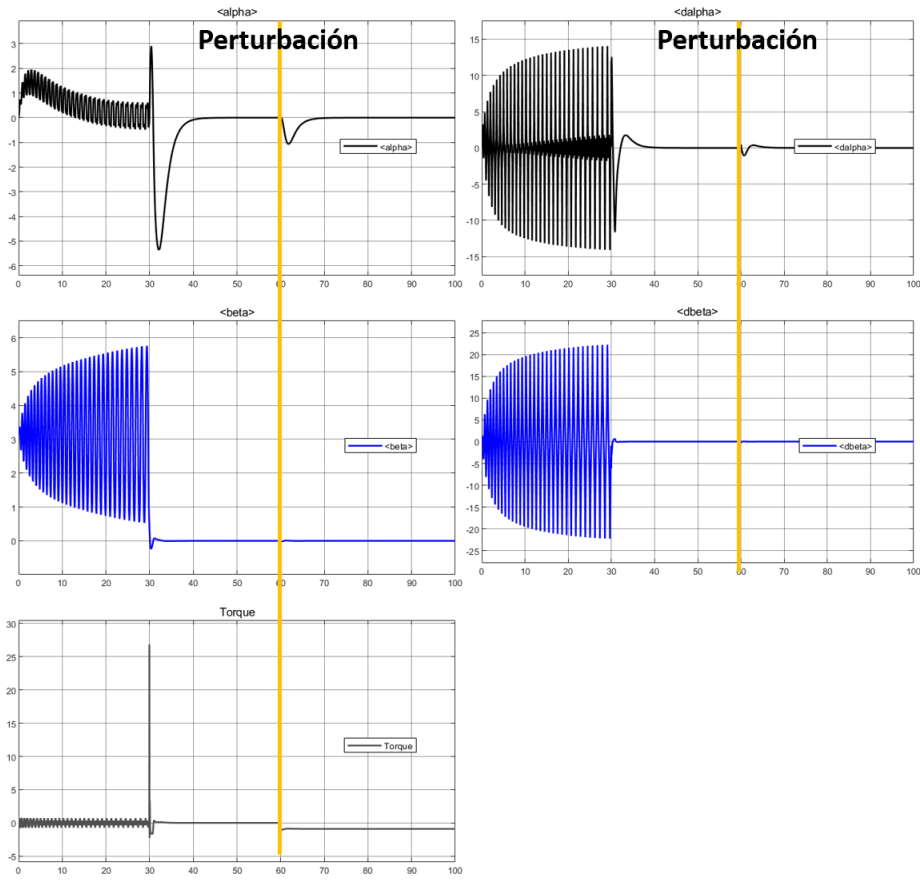


Figura 12: Resultados del controlador discreto

donde

$$\begin{cases} \tilde{A} = \hat{A} - \hat{F}K_b \\ \tilde{B} = \hat{B} - \hat{F}(K_a + K_bK_e) \\ \tilde{C} = -K_b \\ \tilde{D} = -(K_a + K_bK_e) \end{cases}$$

```

1 ka=Kpp_B(1:2);
2 kb=Kpp_B(3:4);
3 Amonio=A_hat-F_hat*kb;
4 Bmonio=B_hat-F_hat*(ka+kb*Ke_C);
5 Cmonio=-kb;
6 Dmonio=-(ka+kb*Ke_C);
7 ObsTf=Cmonio*((s*eye(2)-Amonio)^-1)*Bmonio+Dmonio;
8 ObsTf=-minreal(ObsTf,0.01);
9 ObsTf=tf(ObsTf);

```

Listing 5: Transferencia del observador de orden mínimo

A partir de la transferencia en tiempo continuo, se la discretizó y se halló su representación en espacio de estados.

```

1 Ts_g=1e-3;
2 numObs=cell2mat(ObsTf.Numerator);
3 denObs=cell2mat(ObsTf.Denominator);
4
5 numObs=[numObs(1:2);numObs(3:4)];
6 denObs=denObs(1:2);
7 [Aobs_g,Bobs_g,Cobs_g,Dobs_g]=tf2ss(numObs,denObs);
8 ObsTf_disc_g = c2d(ss(Aobs_g,Bobs_g,Cobs_g,Dobs_g),Ts_g,'zoh');
9 Aobs_d_g=ObsTf_disc_g.a;
10 Bobs_d_g=ObsTf_disc_g.b;
11 Cobs_d_g=ObsTf_disc_g.c;
12 Dobs_d_g=ObsTf_disc_g.d;

```

Listing 6: Discretización del controlador

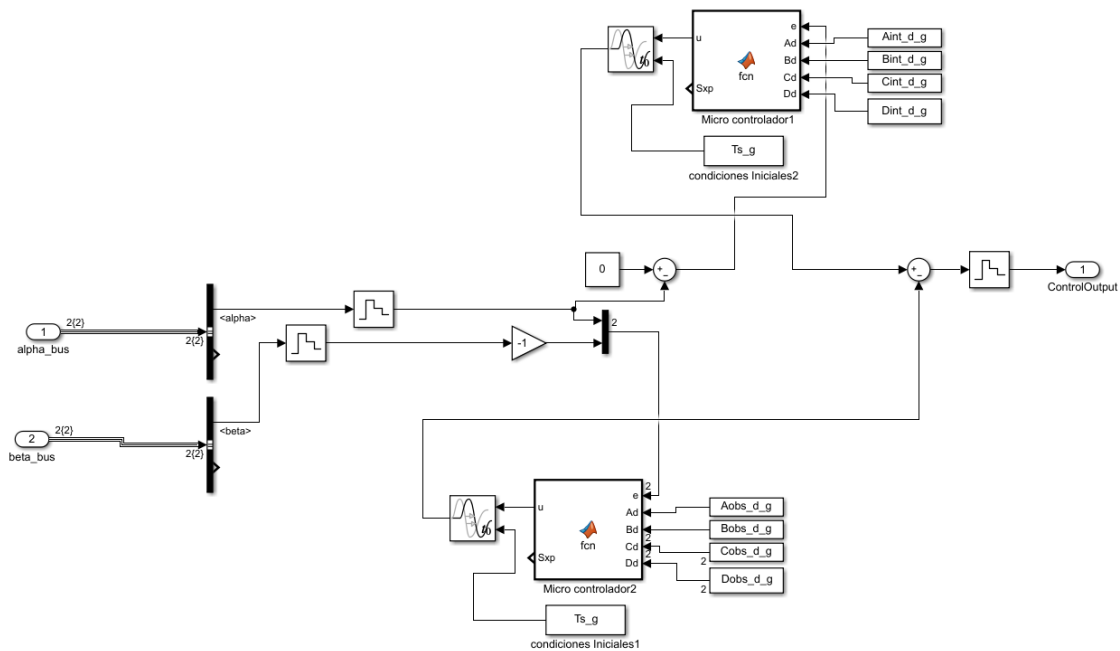


Figura 13: Controlador en microprocesador en Simulink

5. Loop shaping

5.1. Controlador 2

Se calculó la transferencia de la planta desde la entrada del torque hasta la salida θ_2 , obteniendo la siguiente transferencia:

$$H(s) = \frac{\theta_2}{\tau} = \frac{5.58}{(s - 6.815)(s + 6.83)} \quad (9)$$

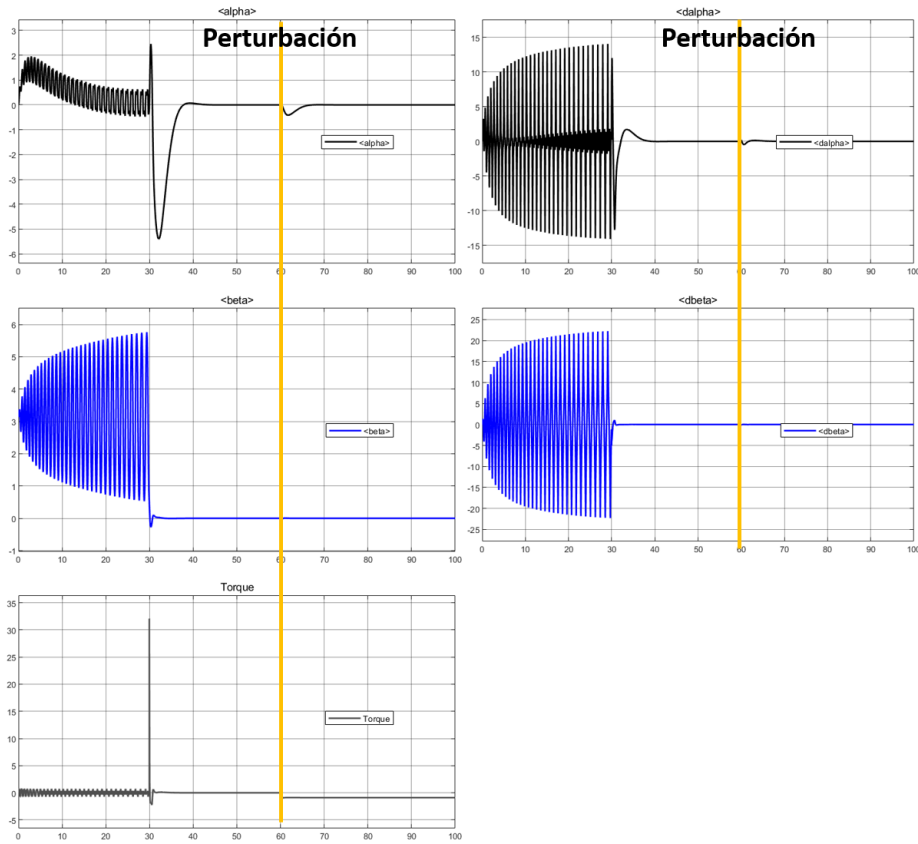


Figura 14: Resultados del controlador en microprocesador

A partir de esta transferencia se propuso un controlador de la forma:

$$C_2 = \frac{s + 6.83}{s + 70} \quad (10)$$

Conociendo la planta y el controlador, se buscó la ganancia de lazo para que la transferencia a lazo cerrado sea estable, y además, robusto. Para ello se buscó un margen de fase de aproximadamente 60° .

Finalmente se halló la ganancia G y se obtuvo la ganancia de lazo $L(s) = H(s) \cdot C_2(s) \cdot G$. Como se observa en la Figura 15, el margen de fase es de 51 grados y la frecuencia de corte $f_{c2} = 12.36\text{Hz}$. Sus polos a lazo cerrado son:

$$\begin{cases} -31.6 + j41.1 \\ -31.6 - j41.1 \\ -6.8 \end{cases}$$

5.2. Controlador 1

Al igual que en el controlador 2, es necesario conocer la transferencia desde U_p a p , de acuerdo a lo indicado en la Figura 16.

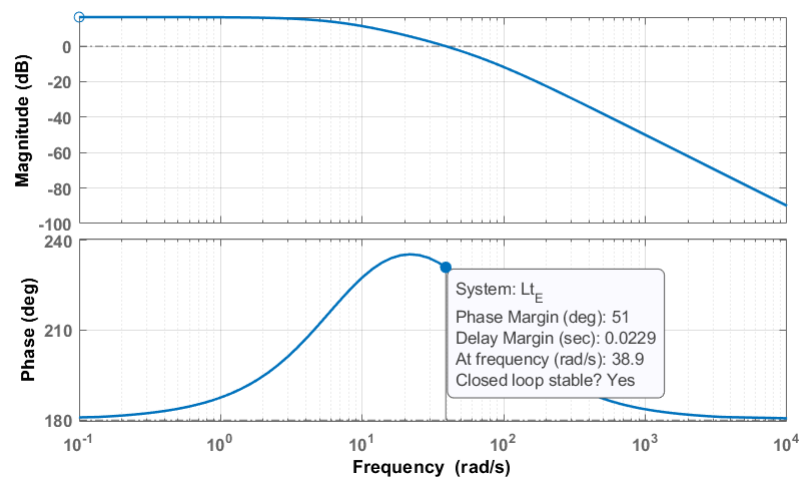


Figura 15: Ganancia de lazo

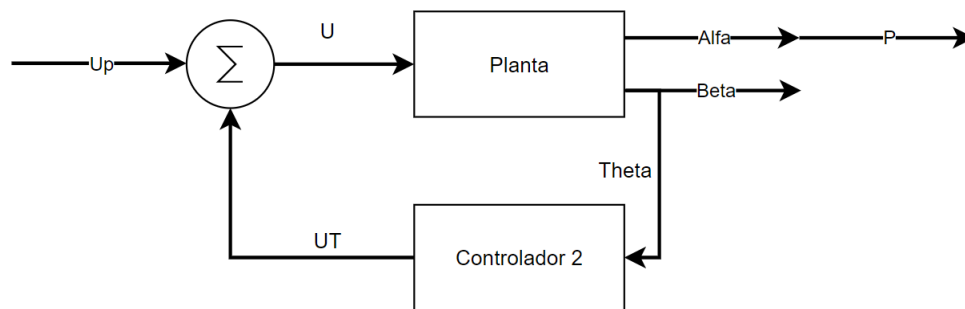


Figura 16: Esquema en bloques, transferencia controlador 1

Para hallar la transferencia se utilizó el siguiente fragmento de código:

```

1 CC1_E=[1 0 0 0];
2 Gss=ss(A,B,[CC1_E;CC2_E],[0;0]);
3 Gss.u='u';
4 Gss.y='y';
5 Sum=sumblk('u=up + ut');
6 Sys=ss([],[],[],[1 0]);
7 Sys.u='y';
8 Sys.y='p';
9 Sys2=ss([],[],[],[0 1]);
10 Sys2.u='y';
11 Sys2.y='theta';
12
13 Ga_E=connect(Gss,Kt_E,Sum,Sys,Sys2,'up','p');
14 zpk(Ga_E)

```

Listing 7: Cálculo de transferencia

$$G_a(s) = \frac{p}{U_p} = \frac{15.14(s+70)(s-6.29)}{s(s-0.002)(s^2 63.2s + 2689)} \quad (11)$$

Se propuso el siguiente controlador:

$$C_1(s) = \frac{(s+6.83) \cdot (s+0.1)^2 \cdot (s^2 + 63.2s + 2689)}{s \cdot (s+80) \cdot (s+70) \cdot (s+6.308) \cdot (s+6.298)} \quad (12)$$

Posteriormente se buscó la ganancia, para obtener así un sistema a lazo cerrado estable y robusto.

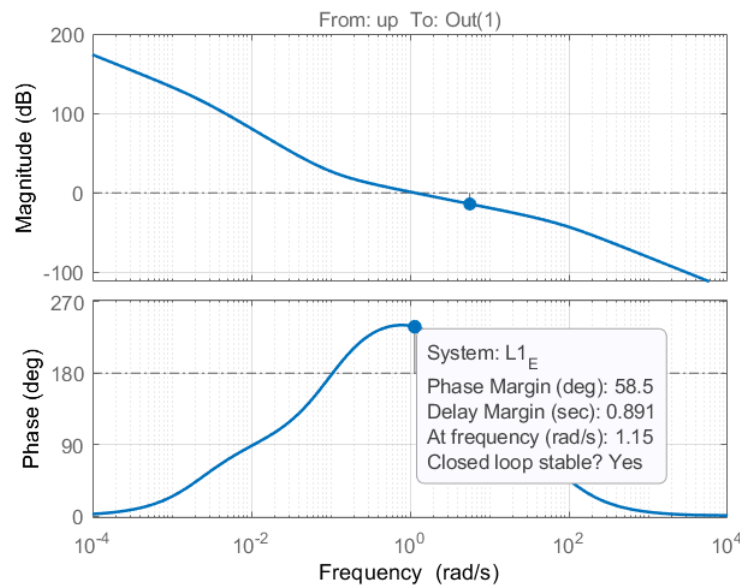


Figura 17: Ganancia de lazo

De la Figura 17, obtenemos que el margen de fase es de 58° , la frecuencia de corte de 0.73Hz, y los polos a lazo cerrado del sistema:

$$\begin{cases} -0.0791 & -6.8296 \\ -81.3035 & -6.3085 \\ -70.0000 & -2.3799 \\ -31.6002 + j41.1153 & -2.3754 \\ -31.6002 - j41.1153 & -0.1576 \end{cases}$$

5.3. Implementación en microprocesador

El primer paso para implementar el controlador en un microprocesador es discretizar ambos controladores, para lo cual es necesario elegir la frecuencia de muestreo. La mínima frecuencia esta dada por dos veces la máxima frecuencia de las singularidades. En este caso la $f_{s \min} = 26\text{Hz}$. Se eligió pues una frecuencia de muestreo de 1000Hz.

```

1 TS_F=1/1000;
2 C1_F=c2d(C1_E,TS_F,'zoh');
3 C2_F=c2d(C2_E,TS_F,'zoh');
4 C1_F=tf(C1_F);
5 [A1_F,B1_F,Cc1_F,D1_F]=tf2ss(cell2mat(C1_F.Numerator),cell2mat(C1_F.Denominator));
6 [A2_F,B2_F,Cc2_F,D2_F]=tf2ss(cell2mat(C2_F.Numerator),cell2mat(C2_F.Denominator));
7 C1_E=tf(C1_E);
8 [A1_G,B1_G,Cc1_G,D1_G]=tf2ss(cell2mat(C1_E.Numerator),(cell2mat(C1_E.Denominator)));

```

Listing 8: Discretización de controladores y matrices de espacio de estados

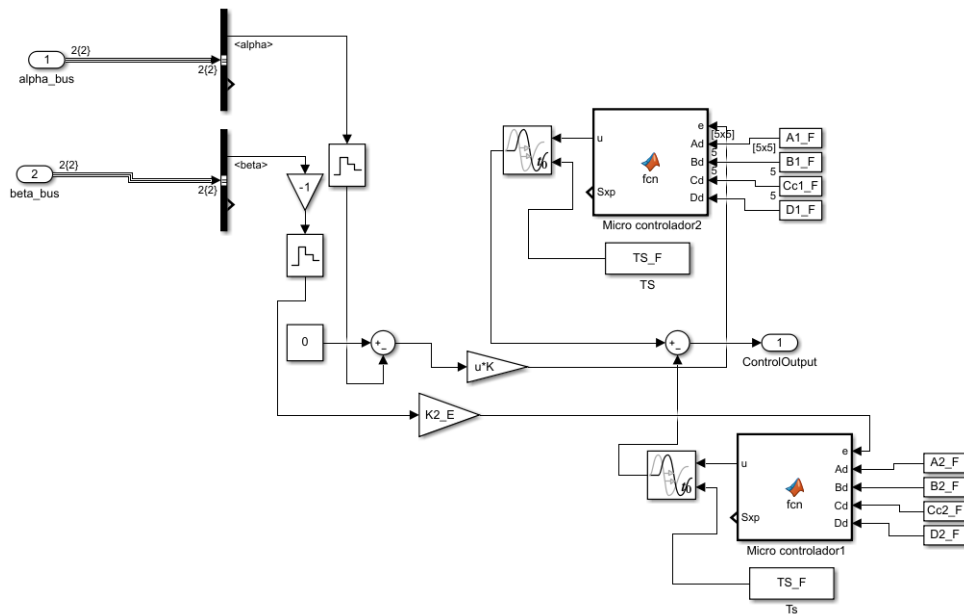


Figura 18: Controlador en microprocesador en Simulink

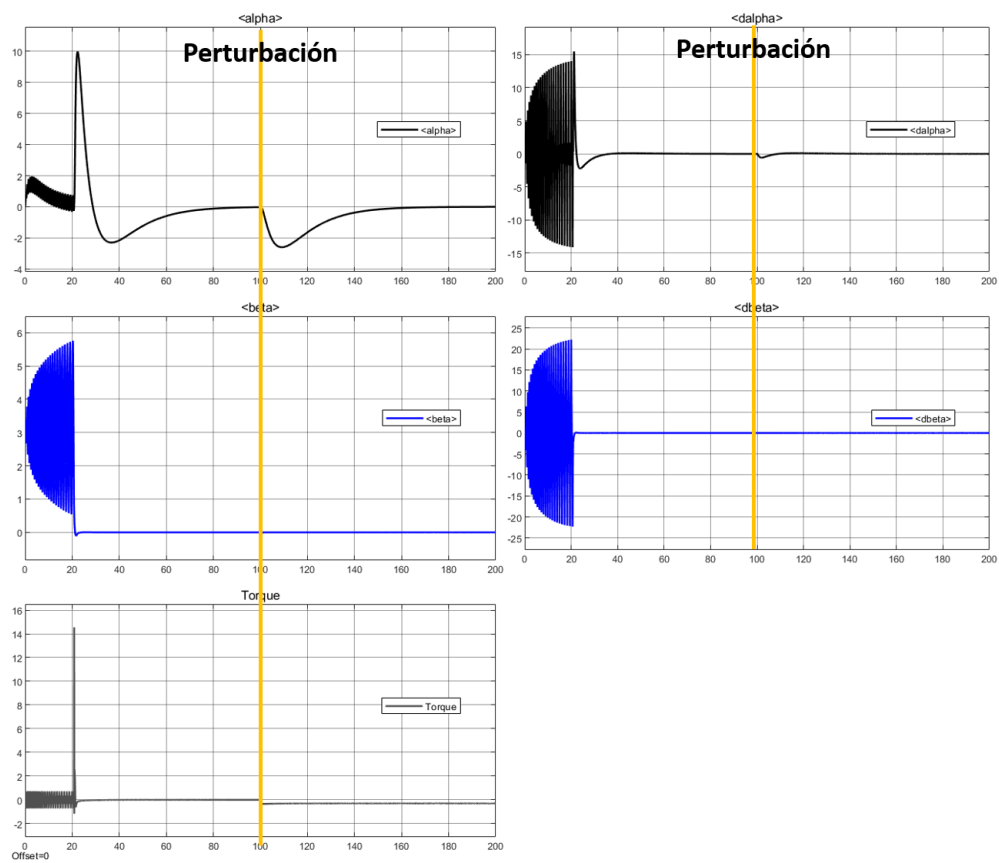


Figura 19: Resultados controlador en microprocesador

6. Bibliografía

- [1] B. S. Cazzolato and Z. Prime, "On the dynamics of the furuta pendulum," *Journal of Control Science and Engineering*, vol. 2011, 2011.
- [2] K. Ogata, *Modern control engineering*. Prentice hall, 2010.