



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης  
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Εργαστήριο Δυναμικής Μηχανών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

---

Μη Γραμμικός Έλεγχος Αυτόνομου  
Αεροχήματος Ιπτάμενης Πτέρυγας

---

Μαρτσόπουλος Αθανάσιος

Επιβλέπων: Καθ. Σεφερλής Παναγιώτης

Οκτώβριος, 2018

# Περίληψη

Το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι ο σχεδιασμός ενός συστήματος ελέγχου, για την αυτόνομη παρακολούθηση μιας προδιαγεγραμμένης τροχιάς αναφοράς, ενός μη επανδρωμένου αεροχήματος σταθερής πτέρυγας.

Το πρώτο βήμα για την επίτευξη του παραπάνω στόχου αποτέλεσε η μοντελοποίηση των εξωτερικών δυναμεών που δρούν στο αερόχημα, ενώ στη συνέχεια καταστρώθηκαν οι εξισώσεις κίνησης του οχήματος. Στη συνέχεια αναπτύχθηκε ένας σθεναρός ελεκτρικός πτήσης, βασισμένος στη θεωρία του μη γραμμικού ελέγχου επιφάνειας ολίσθησης (nonlinear sliding mode control), στον οποίον έγιναν οι κατάλληλες τροποποιήσεις για την αντιμετώπιση πρακτικών προβλημάτων υλοποίησης. Το πρόβλημα ελέγχου πλούγησης αντιμετωπίστηκε με την ανάπτυξη ενός μη γραμμικού συστήματος ελέγχου το οποίο βασίστηκε στη θεωρία ευστάθειας Lyapunov, με τρόπο που εγγυάται τη σύγκλιση του αεροχήματος στην επιθυμητή τροχιά αναφοράς. Στη συνέχεια, οι δύο παραπάνω νόμοι ελέγχου συνδυάστηκαν ενώ η ευστάθεια του συνολικού συστήματος κλειστού βρόχου επιβεβαιώθηκε μέσω της θεωρίας ευστάθειας Lyapunov. Τέλος, έγινε μοντελοποίηση των πιθανών εξωτερικών διαταραχών και το συνολικό σύστημα αξιολογήθηκε μέσω μιας σειράς προσομοιώσεων.

Η επιτυχία των αποτελεσμάτων επιβεβαιώνει τόσο τα μοντέλα του συστήματος όσο και τις τεχνικές ελέγχου που εφαρμόστηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία.



# **Abstract**

The subject of the present diploma thesis is the design of a control system, for the autonomous trajectory tracking of a fixed wing unmanned aerial vehicle (UAV).

The first step towards this goal was the proper modelling of all the externally applied forces on the UAV, followed by the derivation of the kinematic and dynamic equations that fully describe the vehicle's motion. Then, a robust flight control system was developed, based on the technique of nonlinear sliding mode control, with the necessary modifications for practical implementation. The navigation problem was solved with the development of a Lyapunov based nonlinear control system, that assures the vehicle's convergence to the desired trajectory. The two control systems were then combined and the closed loop stability was verified through Lyapunov's stability theory. Finally, the model of plausible external disturbances was developed and the total system was tested through a series of simulations.

The success of the derived results verifies both the system models and the control techniques that have been applied in the present diploma thesis.



# Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κ. Παναγιώτη Σεφερλή που μου έδωσε τη δυνατότητα να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα. Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στον Υποψήφιο Διδάκτορα κ. Κώστα Γερμακόπουλο για τις πολύτιμες συμβουλές του καθώς και για την αδιάκοπη ενασχόλησή του. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου για τη στήριξή τους σε όλη τη φοιτητική μου πορεία.



# Περιεχόμενα

<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Διατύπωση Προβλήματος & Στόχοι . . . . .	1
<b>2 Μοντελοποίηση</b>	<b>3</b>
2.1 Εισαγωγή . . . . .	3
2.2 Κινηματική . . . . .	3
2.2.1 Ορισμός Συστημάτων Συντεταγμένων . . . . .	3
2.2.2 Μητρώα Περιστροφής . . . . .	4
2.2.3 Σύνθεση Περιστροφών και Γωνίες Euler . . . . .	6
2.2.4 Κινηματικές Εξισώσεις . . . . .	9
2.3 Μοντελοποίηση Δυνάμεων και Ροπών . . . . .	12
2.3.1 Βαρυτικές Δυνάμεις . . . . .	12
2.3.2 Δυνάμεις και Ροπές Προώθησης . . . . .	12
2.3.3 Αεροδυναμικές Δυνάμεις και Ροπές . . . . .	14
2.4 Κινητική . . . . .	20
2.4.1 Μεταφορική Κίνηση . . . . .	20
2.4.2 Περιστροφική Κίνηση . . . . .	22
2.5 Μοντέλο Μεταβλητών Κατάστασης . . . . .	23
<b>3 Σχεδιασμός Ελεγκτή</b>	<b>25</b>
3.1 Εισαγωγή . . . . .	25
3.2 Θεωρία Ευστάθειας Μη Γραμμικών Συστημάτων . . . . .	26
3.3 Ελεγκτής Πτήσης . . . . .	29
3.3.1 Έλεγχος Επιφάνειας Ολίσθησης (Sliding Mode Control) . . . . .	29
3.3.2 Σχεδιασμός Ελεγκτή Πτήσης . . . . .	35
3.4 Ελεγκτής Πλοϊγησης . . . . .	38
<b>4 Προσομοιώσεις &amp; Αποτελέσματα</b>	<b>45</b>
4.1 Επιλογή Παραμέτρων Ελεγκτή . . . . .	45
4.2 Προσομοίωση Πτήσης Απουσία Διαταραχών . . . . .	47
4.3 Διαταραχές Συστήματος και Προσομοιώσεις . . . . .	52
4.4 Παρατηρήσεις και Συμπεράσματα . . . . .	57
<b>5 Συμπεράσματα &amp; Μελλοντικές Προεκτάσεις</b>	<b>61</b>
<b>A Αντισυμμετρικοί Πίνακες</b>	<b>63</b>
A.1 Ιδιότητες Αντισυμμετρικών Πινάκων . . . . .	63
A.2 Παράγωγος Πίνακα Περιστροφής . . . . .	64
A.2.1 Χρονική Παράγωγος Πίνακα Περιστροφής . . . . .	64
<b>B Αναλυτική Έκφραση Εξισώσεων</b>	<b>67</b>
<b>Γ Αριθμητικά Δεδομένα Αεροχήματος</b>	<b>71</b>
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>73</b>



# Κατάλογος σχημάτων

1.1 Οι τρείς τυπικές διατάξεις ΜΕΑ.	2
2.1 Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς.	4
2.2 Κεντροβαρικό Σύστημα Αναφοράς και Σύστημα Σχετικού Ανέμου.	4
2.3 Ανάλυση διανύσματος $\mathbf{p}$ .	5
2.4 Βασικός Πίνακας Περιστροφής $\alpha$ ζ.	6
2.5 Βασικός Πίνακας Περιστροφής $\alpha$ γ.	6
2.6 Βασικός Πίνακας Περιστροφής $\alpha$ χ.	6
2.7 Προσανατολισμός κεντροβαρικού συστήματος ως προς αδρανειακό σύστημα.	8
2.8 Προσανατολισμός συστήματος σχετικού ανέμου ως προς αδρανειακό σύστημα.	8
2.9 Προσανατολισμός κεντροβαρικού συστήματος ως προς το σύστημα σχετικού ανέμου.	9
2.10 Ροϊκής γραμμή εφαρμογής εξίσωσης Bernoulli.	13
2.11 Δυνάμεις και ροπές προώθησης.	15
2.12 Επιφάνειες ελέγχου συμβατικού αεροσκάφους.	16
2.13 Δυνατές εκτροπές επιφανειών ελέγχου αεροσκάφους τύπου «ιπτάμενης πτέρυγας».	16
2.14 Συνάρτηση $C_L(\alpha)$ .	18
2.15 Αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές.	20
3.1 Αναπαράσταση Συστήματος Ελέγχου.	25
3.2 Ευσταθές κατά Lyapunov σημείο ισορροπίας.	27
3.3 Ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.	28
3.4 Επιφάνεια Ολίσθησης για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ .	30
3.5 Γεωμετρική ερμηνεία (3.11).	31
3.6 Υψίσυχη ταλαντωση σήματος ελέγχου.	35
3.7 Συναρτήσεις $\text{sgn}(\sigma)$ και $\text{sat}(\sigma/\varphi)$ .	36
3.8 Δομή Ελεγκτή Πτήσης.	37
3.9 Συντονισμένη Στροφή.	42
3.10 Πρόβλημα γωνίας στρέβλωσης.	44
4.1 Μελετούμενες τροχιές αναφοράς.	45
4.2 Επίδραση παραμέτρων ελεγκτή πλοίγησης.	47
4.3 Τροχιά ευθείας ανάβασης.	48
4.4 Σφάλμα, μεταβλητές κατάστασης και σήματα ελέγχου τροχιάς ευθείας ανάβασης.	48
4.5 Τροχιά ελικοειδούς ανάβασης.	49
4.6 Σφάλμα και μεταβλητές κατάστασης τροχιάς ελικοειδούς ανάβασης.	49
4.7 Σήματα ελέγχου τροχιάς ελικοειδούς ανάβασης.	50
4.8 Τροχιά σάρωσης.	50
4.9 Σφάλμα και μεταβλητές κατάστασης τροχιάς σάρωσης.	51
4.10 Σήματα ελέγχου τροχιάς σάρωσης.	51
4.11 Σήματα ελέγχου τροχιάς σάρωσης εναλλακτικής χρονικής κλίμακας.	52
4.12 Ταχύτητα σχετικού ανέμου.	54

4.13 Τροχιά ελικοειδούς ανάβασης υπό την παρουσία σφάλματος στην εκτίμηση των αεροδυναμικών συντελεστών. . . . .	55
4.14 Σφάλμα, μεταβλητές κατάστασης και σήματα ελέγχου τροχιάς ελικοειδούς ανάβασης υπό την παρουσία σφάλματος στην εκτίμηση των αεροδυναμικών συντελεστών. . . . .	55
4.15 Τροχιά σάρωσης υπό την παρουσία σχετικού ανέμου και σφάλματος στην εκτίμηση των αεροδυναμικών συντελεστών. . . . .	56
4.16 Σφάλμα και μεταβλητές κατάστασης τροχιάς σάρωσης υπό την παρουσία σχετικού ανέμου και σφάλματος στην εκτίμηση των αεροδυναμικών συντελεστών. . . . .	57
4.17 Σήματα ελέγχου τροχιάς σάρωσης υπό την παρουσία σχετικού ανέμου και σφάλματος στην εκτίμηση των αεροδυναμικών συντελεστών. . . . .	57
4.18 Χαρακτηριστικές μεταβλητές κατάστασης τροχιάς σάρωσης εναλλακτικής χρονικής κλίμακας. . . . .	58
4.19 Σήματα ελέγχου τροχιάς σάρωσης εναλλακτικής χρονικής κλίμακας. . . . .	58

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Η σημαντική τεχνολογική ανάπτυξη που παρατηρείται τις τελευταίες δεκαετίες στον χώρο των μικροηλεκτρονικών κυκλωμάτων, των αισθητήρων καθώς και στις διατάξεις αποθήκευσης ενέργειας, έχει στρέψει το ενδιαφέρον στην ανάπτυξη μη-επανδρωμένων αεροχημάτων (MEA) μικρού μεγέθους και χαμηλού κόστους. Η χρήση των MEA ενδύκνειται για πληθώρα εφαρμογών, οι σημαντικότερες από τις οποίες είναι:

- **Επιστημονικές-ερευνητικές εφαρμογές:** περιβαλλοντικές και κλιματικές μετρήσεις, καταγραφή σύστασης ατμόσφαιρας.
- **Εφαρμογές ασφαλείας:** φύλαξη και περιπολία χώρου, έρευνα και διάσωση, επικοινωνίες, επιθεώρηση κατασκευών και εντοπισμός βλαβών.
- **Εφαρμογές χαρτογάφησης και φωτογραφικές.**
- **Γεωργία ακριβείας.**

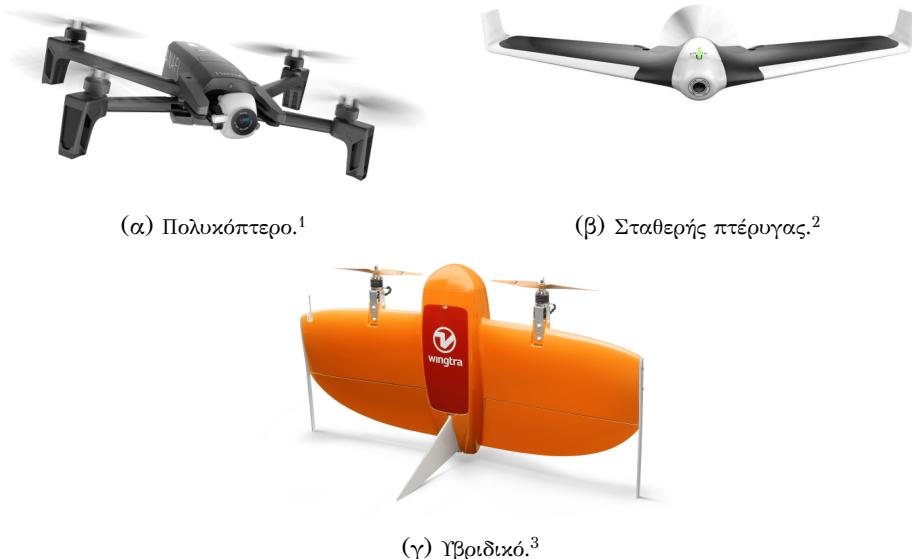
Οι πιο δημοφιλείς διατάξεις MEA μπορούν να χωριστούν στις παρακάτω κατηγορίες:

- **Πολυκόπτερα:** Τα πολυκόπτερα αεροχήματα, σχήμα 1.1α, δίνουν τη δυνατότητα κίνησης με μεγάλη ακρίβεια καθώς και τη δυνατότητα εκτέλεσης πολύπλοκων ελιγμών. Βασικό τους μειονέκτημα αποτελεί η υψηλή κατανάλωση ενέργειας και συνεπώς η μικρή αυτονομία.
- **Σταθερής πτέρυγας:** Τα MEA σταθερής πτέρυγας, σχήμα 1.1β, εκμεταλλεύμενα τον αεροδυναμικό τους σχεδιασμό επιτυγχάνουν μικρή κατανάλωση ενέργειας και συνεπώς μεγάλη αυτονομία. Ωστόσο, παρουσιάζουν σημαντικά μειωμένες δυνατότητες για ελιγμούς σε σχέση με τα πολυκόπτερα αεροχήματα.
- **Υβριδικά συστήματα:** Τα υβριδικά συστήματα, σχήμα 1.1γ συνδυάζουν τα χαρακτηριστικά των δύο παραπάνω διατάξεων. Με αυτόν τον τρόπο ο υβριδικός σχεδιασμός επιτυγχάνει μεγάλους χρόνους πτήσης αλλα και σημαντική ευελιξία του αεροχήματος.

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας, μελετάται η διάταξη του MEA σταθερής πτέρυγας με την προοπτική επέκτασης του σε υβριδική διάταξη. Για το σκοπό αυτό επιλέγεται η μελέτη αεροχήματος διάταξης *ιπτάμενης πτέρυγας (flying wing)* καθώς η συγκεκριμένη διάταξη είναι συνήθης επιλογή στον χώρο των υβριδικών συστημάτων (*tailsitters*).

### 1.1 Διατύπωση Προβλήματος & Στόχοι

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι ο σχεδιασμός ενός συστήματος ελέγχου, για την αυτόνομη καθοδήγηση ενός μη επανδρωμένου αεροχήματος σταθερής πτέρυγας σε μια προδιαγεγραμμένη τροχιά αναφοράς με επιθυμητές προδιαγραφές ευστάθειας και επίδοσης. Το μελετούμενο σύστημα ελέγχου, καλείται επίσης να εμφανίζει στοιχεία σθεναρότητας προκειμένου να μπορεί να οδηγήσει το σύστημα στην επιθυμητή τροχιά, ανεξαρτήτως των πιθανών διαταραχών που εισέρχονται στο σύστημα.



Σχήμα 1.1: Οι τρείς τυπικές διατάξεις ΜΕΑ.

Για την αντιμετώπιση του παραπάνω σύνθετου προβλήματος, ακολουθείται η εξής διαδικασία:

- Ανάλυση και μοντελοποίηση των δυνάμεων που ασκούνται στο αερόχρημα.
- Εξαγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν την κίνηση και τη δυναμική συμπεριφορά του αεροχήματος.
- Μελέτη και αξιολόγηση των δυνατών τεχνικών για τον έλεγχο του αεροχήματος σε όλο το χώρο λειτουργίας του.
- Ανάπτυξη και εφαρμογή ενός μη γραμμικού σθεναρού συστήματος ελέγχου πτήσης με τη χρήση της τεχνικής επιφάνειας ολίσθησης.
- Ανάπτυξη και εφαρμογή ενός μη γραμμικού συστήματος ελέγχου πλοιήγησης με χρήση της θεωρείας ευστάθειας Lyapunov.
- Αξιολόγηση των αποτελεσμάτων με την πραγματοποίηση προσομοιώσεων.

<sup>1</sup>Πηγή: <https://www.parrot.com/eu/drones/anafi>

<sup>2</sup>Πηγή: <https://www.dronethusiast.com/parrot-disco-fpv/>

<sup>3</sup>Πηγή: <http://px4.io/portfolio/wingtraone-tailsitter-vtol/>

# Κεφάλαιο 2

## Μοντελοποίηση

### 2.1 Εισαγωγή

Στόχος του κεφαλαίου είναι η ανάπτυξη των μαθηματικών εξισώσεων που περιγράφουν την κίνηση του μη επανδρωμένου αεροσκάφους ιπτάμενης πτέρυγας (flying wing). Για το σκοπό αυτό, το κεφάλαιο δομείται γύρω από τους εξής άξονες:

- Ορισμός και διατύπωση των κινηματικών εξισώσεων του οχήματος.
- Μοντελοποίηση των ασκούμενων δυνάμεων.
- Ανάπτυξη εξισώσεων κίνησης.

Πριν αναπτυχθόυν τα παραπάνω, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να αναφερθουν οι βασικές παραδοχές γύρω από τις οποίες θα διατυπωθεί το μαθηματικό μοντέλο.

1. **Στερεό σώμα:** Το σώμα θεωρείται ότι αποτελείται από ένα άπειρο αριθμό σωματιδίων που διατηρούν σταθερή την απόστασή τους κατά τη διάρκεια της κίνησης. Η θεώρηση του σώματος ως απαραμόρφωτο καθορίζει άμεσα τη διατύπωση των εξισώσεων κίνησης και συνεπώς την όλη μοντελοποίηση. Δεδομένου ότι στην πραγματικότητα τα δομικά του σώματος είναι σε κάποιο βαθμό παραμορφώσιμα, η παραδοχή αυτή εισάγει στο μοντέλο σφάλμα. Το σφάλμα αυτό που ανήκει στην κατηγορία σφαλμάτων μη μοντελοποιημένων δυναμικών, εξετάζεται και αξιολογείται στο κεφάλαιο 4.
2. **Αδρανειακό σύστημα αναφοράς:** Για τον ορισμό του αδρανειακού συστήματος αναφοράς χρησιμοποιείται το μοντέλο της επίπεδης ακίνητης γης. Το μοντέλο αυτό, στα πλαίσια πτήσεων μικρών αποστάσεων, θεωρεί αμελητέα την περιστροφή και την καμπυλότητα της γης απλοποιώντας έτσι σημαντικά τις μαθηματικές εκφράσεις. Αξίζει να αναφερθεί ότι η παραδοχή αυτή χρησιμοποιείται κατά κόρον στη βιβλιογραφία καθώς δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα, ειδικά για αυτόνομα αεροχήματα με μικρής εμβέλειας αποστολές. Οι αναλυτική απόδειξη του μοντέλου μπορεί να βρεθεί στην [8].

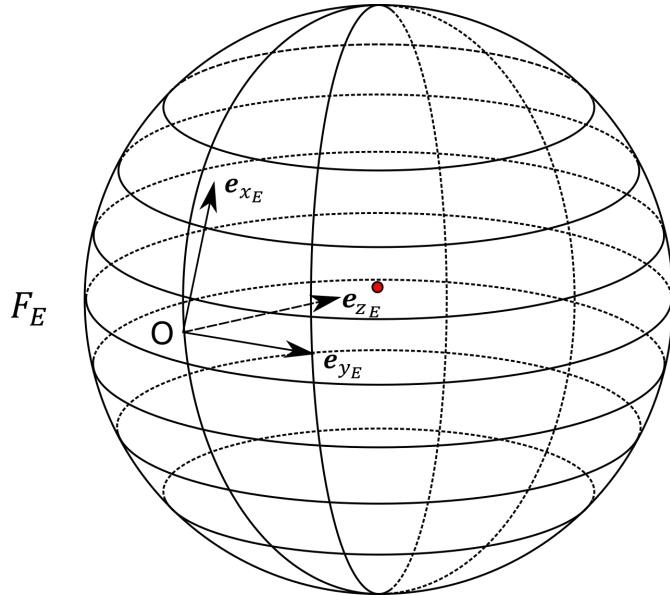
### 2.2 Κινηματική

#### 2.2.1 Ορισμός Συστημάτων Συντεταγμένων

**Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς  $F_E$ :** Το σύστημα αυτό (σχήμα 2.1) εχει την αρχή των αξόνων του σε ένα σημείο στην επιφάνεια της γης με τα διανύσματα  $e_{x_E}$ ,  $e_{y_E}$  και  $e_{z_E}$  να δείχνουν τον βορρά, την ανατολή και το κέντρο της γης αντίστοιχα.

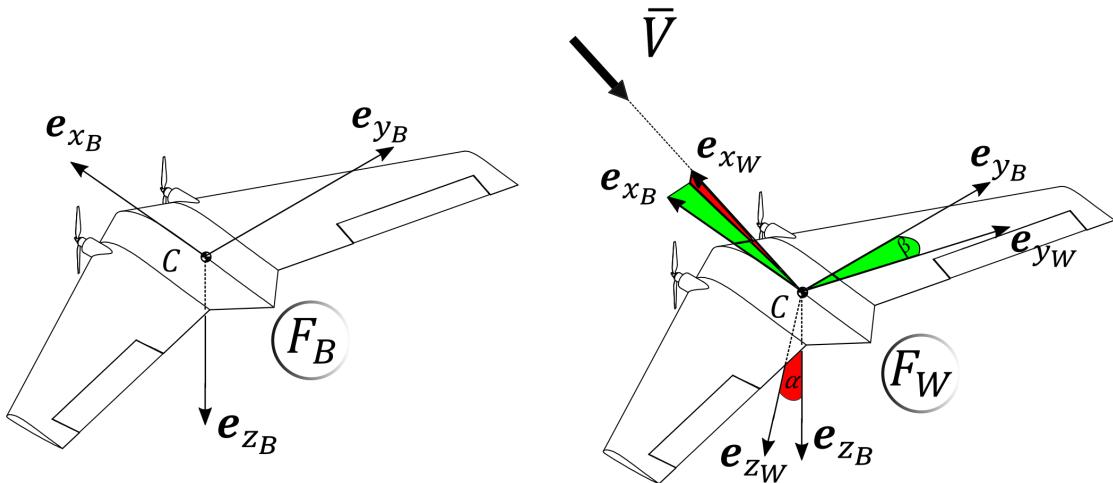
**Κεντροβαρικό Σύστημα Αναφοράς  $F_B$ :** Το σύστημα αυτό (σχήμα 2.2) εχει την αρχή των αξόνων του στο κέντρο μάζας του οχήματος και είναι «δεμένο» στο αερόχημα, δηλαδή κινείται και περιστρέφεται με αυτό. Το επίπεδο  $x_B - z_B$  ταυτίζεται με το επίπεδο συμμετρίας του αεροχήματος ενώ ο έξονας  $x_B$  βρίσκεται στη διεύθυνση της δύναμης προώθησης.

**Σύστημα Αναφοράς Σχετικού Ανέμου  $F_W$ :** Το σύστημα αυτό (σχήμα 2.2) εχει την αρχή των αξόνων του στο κέντρο μάζας του οχήματος και μεταφέρεται μαζί με αυτο, αλλά σε



Σχήμα 2.1: Αδρανειακό Σύστημα Αναφοράς.

αντίθεση με το κεντροβαρικό σύστημα αναφοράς, περιστρέφεται σχετικά με το όχημα. Η περιστροφή επιτυγχάνει την ταύτιση της συνολικής ταχύτητας αεροχώματος και ανέμου με τον άξονα  $x_W$  του συστήματος  $F_W$ . Ο ορισμός του συστήματος ( $F_W$ ) κρίνεται επίσης απαραίτητος καθώς σε αυτό μοντελοποιούνται και εκφράζονται οι αεροδυναμικές δυνάμεις όπως θα φανεί παρακάτω. Η διαφοροποίησή του από το κεντροβαρικό σύστημα γίνεται μέσω των γνωστών από την αεροδυναμική γωνιών α (γωνία προσβολής) και β (γωνία πλευρικής ολίσθησης). Σαφής ορισμός των γωνιών αυτών δίνεται στην ενότητα (2.2.2).



Σχήμα 2.2: Κεντροβαρικό Σύστημα Αναφοράς και Σύστημα Σχετικού Ανέμου.

## 2.2.2 Μητρώα Περιστροφής

### Ορισμός και Ιδιότητες

Ένας  $3 \times 3$  πίνακας περιστροφής μπορεί να ορισθεί ως ενας πίνακας μετασχηματισμού που δρα σε ενα διάνυσμα  $p \in \mathbb{R}^3$  και αντιστοιχεί τις συντεταγμένες του, οι οποίες είναι αρχικά εκφρασμένες σε ένα σύστημα  $F_0 : OX_0Y_0Z_0$ , σε ένα δεύτερο σύστημα  $F_1 : OX_1Y_1Z_1$  το οποίο είναι περιστραμένο σχετικά με το πρώτο. Σύμφωνα με το σχήμα 2.3 η έκφραση του διανύσματος  $p$  ως προς το σύστημα  $F_0$  είναι

$$\mathbf{p}^{F_0} = p_{x_0} \mathbf{e}_{x_0} + p_{y_0} \mathbf{e}_{y_0} + p_{z_0} \mathbf{e}_{z_0}.$$

Αντίστοιχα η έκφραση του ίδιου διανύσματος ως προς το σύστημα  $F_1$  είναι

$$\mathbf{p}^{F_1} = p_{x_1} \mathbf{e}_{x_1} + p_{y_1} \mathbf{e}_{y_1} + p_{z_1} \mathbf{e}_{z_1}.$$

Δεδομένου ότι το διάνυσμα  $\mathbf{p}$  είναι ανεξάρτητο του συστήματος στο οποίο εκφράζεται προκύπτει

$$p_{x_0} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{x_0} = p_{x_1} \mathbf{e}_{x_1} \cdot \mathbf{e}_{x_0} + p_{y_1} \mathbf{e}_{y_1} \cdot \mathbf{e}_{x_0} + p_{z_1} \mathbf{e}_{z_1} \cdot \mathbf{e}_{x_0},$$

$$p_{y_0} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{y_0} = p_{x_1} \mathbf{e}_{x_1} \cdot \mathbf{e}_{y_0} + p_{y_1} \mathbf{e}_{y_1} \cdot \mathbf{e}_{y_0} + p_{z_1} \mathbf{e}_{z_1} \cdot \mathbf{e}_{y_0},$$

$$p_{z_0} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{z_0} = p_{x_1} \mathbf{e}_{x_1} \cdot \mathbf{e}_{z_0} + p_{y_1} \mathbf{e}_{y_1} \cdot \mathbf{e}_{z_0} + p_{z_1} \mathbf{e}_{z_1} \cdot \mathbf{e}_{z_0}.$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να συμπυγθούν στη μητρωική μορφή

$$\mathbf{p}^{F_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x_1} \cdot \mathbf{e}_{x_0} & \mathbf{e}_{y_1} \cdot \mathbf{e}_{x_0} & \mathbf{e}_{z_1} \cdot \mathbf{e}_{x_0} \\ \mathbf{e}_{x_1} \cdot \mathbf{e}_{y_0} & \mathbf{e}_{y_1} \cdot \mathbf{e}_{y_0} & \mathbf{e}_{z_1} \cdot \mathbf{e}_{y_0} \\ \mathbf{e}_{x_1} \cdot \mathbf{e}_{z_0} & \mathbf{e}_{y_1} \cdot \mathbf{e}_{z_0} & \mathbf{e}_{z_1} \cdot \mathbf{e}_{z_0} \end{bmatrix} \mathbf{p}^{F_1} = R_{F_1}^{F_0} \mathbf{p}^{F_1}. \quad (2.1)$$

Ο πίνακας  $R_{F_1}^{F_0}$  ονομάζεται πίνακας περιστροφής. Τα διανύσματα των στηλών του εκφράζουν τις προβολές των αξόνων του συστήματος  $F_1$  στο σύστημα  $F_0$ .

Λόγω της συμμετρίας του εσωτερικού γινομένου βλέπουμε εύκολα ότι

$$R_{F_1}^{F_0} = (R_{F_0}^{F_1})^T.$$

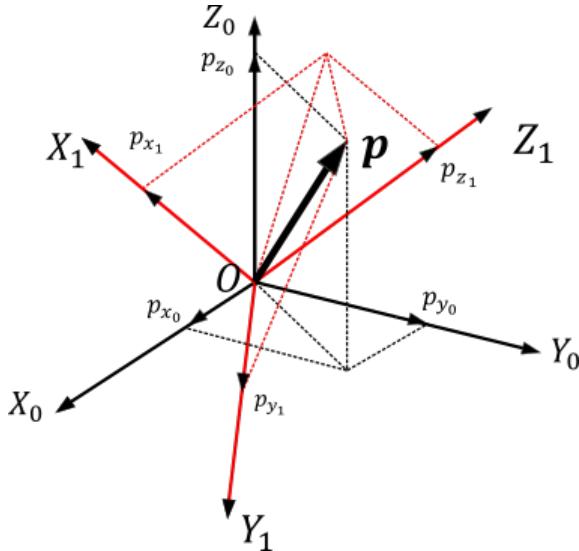
Επίσης δεδομένου ότι οι άξονες των συστημάτων συντεταγμένων είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους προκύπτει

$$(R_{F_0}^{F_1})^T = (R_{F_0}^{F_1})^{-1},$$

ή ισοδύναμα

$$(R_{F_0}^{F_1})^T (R_{F_0}^{F_1}) = I_{3 \times 3}.$$

Προσθέτοντας στις δύο παραπάνω παρατηρήσεις το γεγονός ότι τα διανύσματα στήλης του πίνακα περιστροφής εχουν μοναδιαία ευκλίδεια νόρμα, προκύπτει ότι ο πίνακας περιστροφής είναι ορθοκανονικός. Τέλος, μπορεί να αποδειχθεί ότι  $\det(R_{F_0}^{F_1}) = 1$  (για δειξιόστροφα συστήματα).

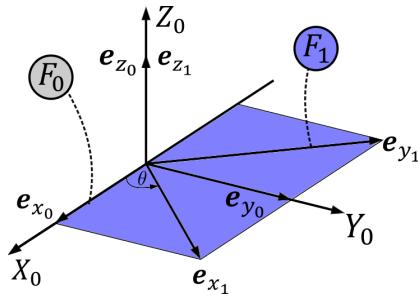


Σχήμα 2.3: Ανάλυση διανύσματος  $\mathbf{p}$ .

### Βασικοί Πίνακες Περιστροφής

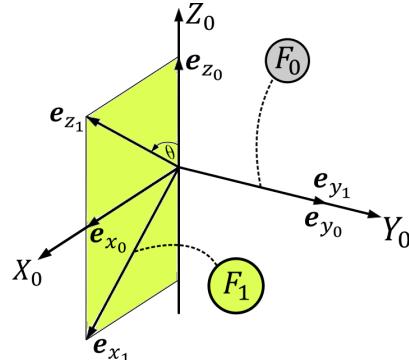
Για την περιγραφή μιας περιστροφής γύρω από τυχαίο άξονα, κρίνεται απαραίτητη η παρουσίαση των βασικών πινάκων περιστροφής. Ως βασικός πίνακας περιστροφής ορίζεται ο πίνακας που προκύπτει κατά την περιστροφή ενός συστήματος σχετικά με ένα άλλο κατά μια γωνία  $\theta$ , με τα δύο συστήματα να διατηρούν έναν άξονα κοινό. Ο συμβολισμός των βασικών πινάκων γίνεται ως  $R_j(\theta)$ , όπου  $j$  ο κοινός άξονας και  $\theta$  η γωνία περιστροφής. Με βάση τον παραπάνω συμβολισμό οι πίνακες  $R_z(\theta)$ ,  $R_y(\theta)$ ,  $R_x(\theta)$  δίνονται από τις σχέσεις που φαίνονται στα σχήματα 2.4, 2.5 και 2.6.

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



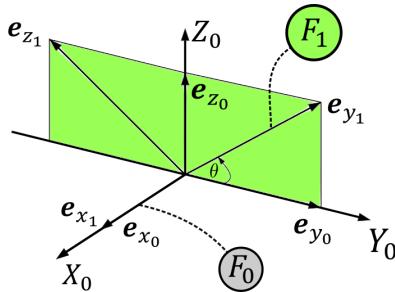
Σχήμα 2.4: Βασικός Πίνακας Περιστροφής άξονα z.

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Σχήμα 2.5: Βασικός Πίνακας Περιστροφής άξονα y.

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Σχήμα 2.6: Βασικός Πίνακας Περιστροφής άξονα x.

### 2.2.3 Σύνθεση Περιστροφών και Γωνίες Euler

Από τη σχέση (2.1) βλέπουμε ότι για τον καθορισμό ενός πίνακα περιστροφής απαιτείται ο προσδιορισμός των εννέα στοιχείων του. Ωστόσο, οι συνθήκες της ορθοκανονικότητας των στηλών του (καθετότητα και μοναδιαίο μέτρο), συνθέτουν έξι ανεξάρτητες εξίσωσεις. Επομένως, ο καθορισμός του πίνακα περιστροφής ανάγεται από ένα πρόβλημα προσδιορισμού εννέα παραμέτρων σε ένα πρόβλημα προσδιορισμού τριών. Στην παρούσα διπλωματική

εργασία, ως παράμετροι επιλέγονται οι γωνίες Euler καθώς προσφέρουν μια απλή γεωμετρική ερμηνεία των περιστροφών. Η σύνθεση του πίνακα περιστροφής με παραμέτρους γωνιών Euler, γίνεται με τον συνδυασμό τριών διαδοχικών βασικών περιστροφών, υπό τον περιορισμό ότι δύο διαδοχικές περιστροφές δεν μπορούν πραγματοποιηθούν γύρω από ίδιο ή παράλληλο άξονα. Από τον περιορισμό αυτό προκύπτουν δώδεκα διακριτές ομάδες δυνατών περιστροφών από τις οποίες επιλέγεται η ακόλουθη αλληλουχία:

1. Περιστροφή κατά γωνία  $\theta_z$  γύρω από **σταθερό** άξονα  $z$ .
2. Περιστροφή κατά γωνία  $\theta_{y'}$  γύρω από **τρέχων** άξονα  $y'$ .
3. Περιστροφή κατά γωνία  $\theta_{x''}$  γύρω από **τρέχων** άξονα  $x''$ .

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι σύνθεση των περιστροφών δεν είναι μεταθετική. Με άλλα λόγια η σειρά με την οποία γίνονται οι διαδοχικές περιστροφές θα πρέπει να είναι συγκεκριμένη. Η αλληλουχία των περιστροφών διέπεται από κανόνες οι οποίοι αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως προ και μετά πολλαπλασιασμού. Οι κανόνες αυτοί μπορούν να διατυπωθούν συνοπτικά ως:

1. Πολλαπλασιασμός από τα αριστερά όταν η περιστροφή πραγματοποιείται γύρω από **σταθερό** άξονα.
2. Πολλαπλασιασμός από τα δεξιά όταν η περιστροφή πραγματοποείται γύρω από **τρέχων** άξονα.

Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρεί την απόδειξη των παραπάνω κανόνων στην [17].

### Προσανατολισμός συστήματος $F_B$ ως προς σύστημα $F_E$

Σύμφωνα με τους ορισμούς που δόθηκαν παραπάνω, ο προσανατολισμός του κεντροβαρικού συστήματος ως προς το αδρανειακό περιγράφεται με τον πίνακα περιστροφής  $R_{F_B}^{F_E}$ , ο οποίος προκύπτει από τη σύνθεση τριών βάσικών περιστροφών σύμφωνα με τις συμβάσεις των γωνιών Euler. Τα βήματα για τον προσδιορισμό του πίνακα περιστροφής είναι τα ακόλουθα (σχήμα 2.7):

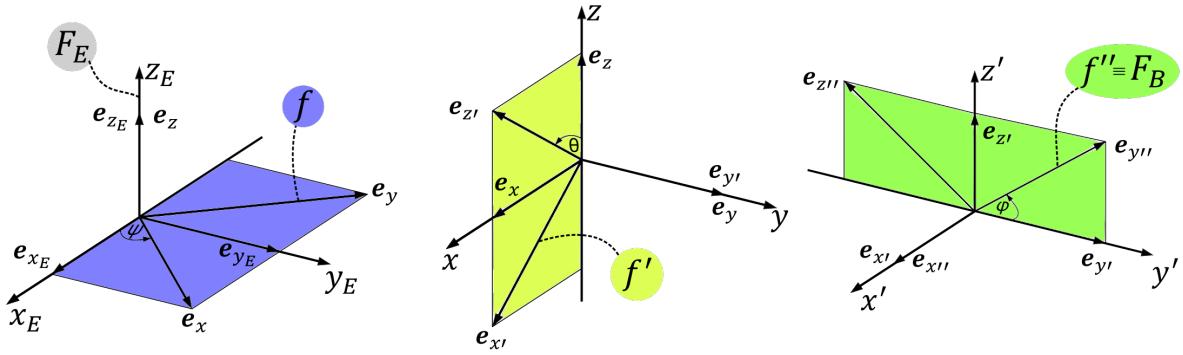
1. Περιστροφή κατά γωνία  $\psi$  γύρω από τον **σταθερό** άξονα  $z_E$ .
2. Περιστροφή κατά γωνία  $\theta$  γύρω από τον **τρέχων** άξονα  $y'$ .
3. Περιστροφή κατά γωνία  $\phi$  γύρω από τον **τρέχων** άξονα  $x''$ .

Τα παραπάνω βήματα μπορούν να γραφούν ως

$$R_{F_B}^{F_E} = R_{z_E}(\psi) R_{y'}(\theta) R_{x''}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix},$$

απόποιου προκύπτει

$$R_{F_B}^{F_E} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \sin \theta \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \sin \theta & \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 2.7: Προσανατολισμός κεντροβαρικού συστήματος ως προς αδρανειακό σύστημα.

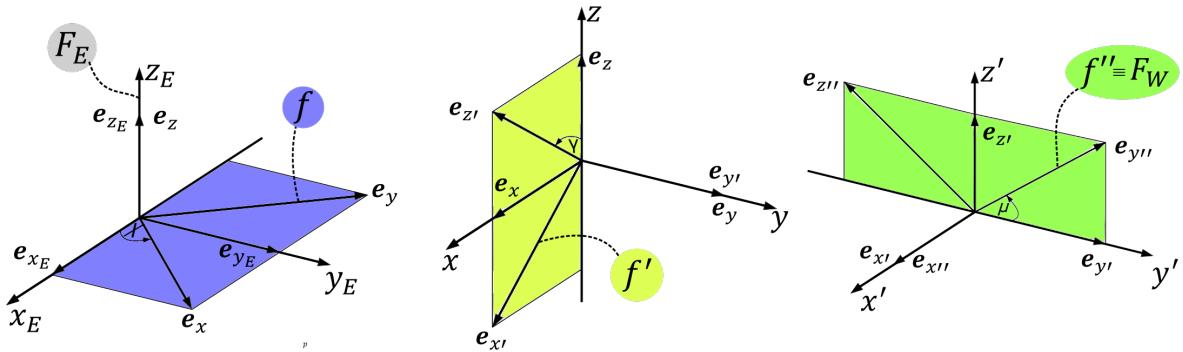
### Προσανατολισμός συστήματος $F_W$ ως προς σύστημα $F_E$

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο ορίζεται και ο πίνακας περιστροφής  $R_{F_W}^{F_E}$ , ο οποίος και περιγράφει το προσανατολισμό του συστήματος σχετικού ανέμου ως προς το αδρανειακό σύστημα. Τα βήματα για τον προσδιορισμό του πίνακα περιστροφής είναι τα ακόλουθα (σχήμα 2.8):

1. Περιστροφή κατά γωνία  $\chi$  γύρω από τον **σταθερό** άξονα  $z_E$ .
2. Περιστροφή κατά γωνία  $\gamma$  γύρω από τον **τρέχων** άξονα  $y'$ .
3. Περιστροφή κατά γωνία  $\mu$  γύρω από τον **τρέχων** άξονα  $x''$ .

Τα παραπάνω βήματα μπορούν να γραφούν ως

$$R_{F_W}^{F_E} = R_{z_E}(\chi) R_{y'}(\gamma) R_{x''}(\mu) = \begin{bmatrix} \cos \chi & -\sin \chi & 0 \\ \sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \mu & -\sin \mu \\ 0 & \sin \mu & \cos \mu \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 2.8: Προσανατολισμός συστήματος σχετικού ανέμου ως προς αδρανειακό σύστημα.

### Προσανατολισμός συστήματος $F_B$ ως προς το σύστημα $F_W$

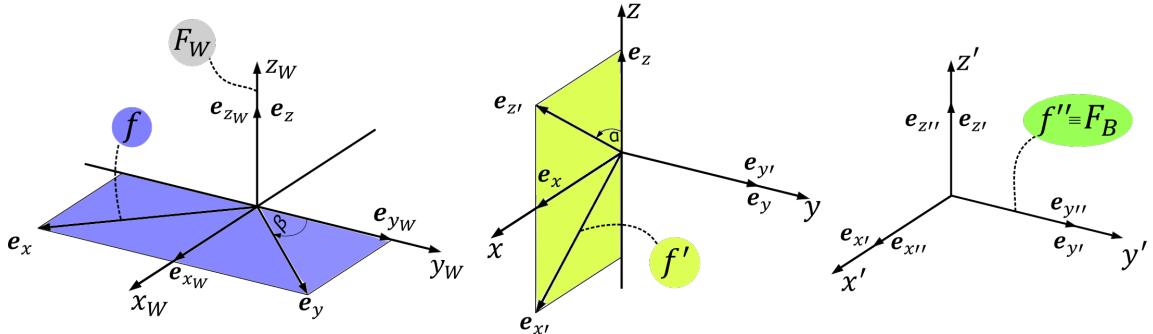
Ο πίνακας περιστροφής  $R_{F_B}^{F_W}$ , ο οποίος και περιγράφει το προσανατολισμό του κεντροβαρικού συστήματος ως προς το σύστημα σχετικού ανέμου, προκύπτει από την ακολουθία περιστροφών (σχήμα 2.9):

1. Περιστροφή κατά γωνία  $-\beta$  γύρω από τον **σταθερό** άξονα  $z_W$ .

2. Περιστροφή κατά γωνία α γύρω από τον **τρέχων** άξονα  $y'$ .
3. Μηδενική περιστροφή γύρω από τον **τρέχων** άξονα  $x''$ .

Τα παραπάνω βήματα μπορούν να γραφούν ως,

$$R_{F_B}^{F_W} = R_{z_W}(-\beta)R_{y'}(\alpha)I_{3x3} = \begin{bmatrix} \cos(-\beta) & -\sin(-\beta) & 0 \\ \sin(-\beta) & \cos(-\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 2.9: Προσανατολισμός κεντροβαρικού συστήματος ως προς το σύστημα σχετικού ανέμου.

#### 2.2.4 Κινηματικές Εξισώσεις

##### Περιστροφικές Συντεταγμένες

Οι κινηματικές εξισώσεις μπορούν να διατυπωθούν χρησιμοποιώντας τη σύνθεση περιστροφών. Συγκεκριμένα για την περίπτωση του κεντροβαρικού συστήματος ως προς το αδρανειακό σύστημα και με αναφορά το σχήμα 2.7, η σύνθεση περιστροφών (ή ιδιότητα της πρόσθεσης) μπορεί να διατυπωθεί ως

$$\omega_{F_B/F_E}^{F_B} = \omega_{f/F_E}^{F_B} + \omega_{f'/f}^{F_B} + \omega_{f''/f'}^{F_B},$$

ή

$$\omega_{F_B/F_E}^{F_B} = R_f^{F_B} \omega_{f/F_E}^f + R_{f'/f}^{F_B} \omega_{f'/f}^{f'} + R_{f''/f'}^{F_B} \omega_{f''/f'}^{f''}. \quad (2.2)$$

Από τους κανόνες σύνθεσης περιστροφών έχουμε:

1.  $R_f^{F_B} = R_{f''}^{F_B} R_{f'}^{f''} R_f^{f'}$ .
2.  $R_{f'}^{F_B} = R_{f''}^{F_B} R_{f'}^{f''}$ .
3.  $R_{f''}^{F_B} = I_{3x3}$ .

Από το σχήμα 2.7 εύκολα προκύπτει:

1.  $\omega_{f/F_E}^f = \dot{\psi} [0 \ 0 \ 1]^T$ .
2.  $\omega_{f'/f}^{f'} = [0 \ 1 \ 0]^T$ .
3.  $\omega_{f''/f'}^{f''} = \dot{\phi} [1 \ 0 \ 0]^T$ .

Τέλος από το σχήμα 2.7 εξάγουμε εύκολα τους βασικούς πίνακες περιστροφής  $R_f^{f''} = R_x(\phi)$  και  $R_f^{f'} = R_y(\theta)$ .

Συνεπώς, με βάση τη σχέση (2.2) και τις παραπόνω παρατηρήσεις προκύπτει

$$\begin{aligned}\omega_{F_B/F_E}^{F_B} &= R_f^{F_B} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\psi} + R_{f'}^{F_B} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} + R_{f''}^{F_B} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}, \\ \omega_{F_B/F_E}^{F_B} &= \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \dot{\psi} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ -\sin \phi \end{bmatrix} \dot{\theta} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\phi}, \\ \omega_{F_B/F_E}^{F_B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \theta \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Η εξίσωση (2.3) αποτελεί τη βασική κινηματική σχέση η οποία συνδέει την παράγωγο των γωνιών Euler με τις περιστροφικές ταχύτητες του αεροχήματος. Επιλύοντας ως προς την παράγωγο των γωνιών Euler και θέτοντας  $\omega_{F_B/F_E}^{F_B} = [p \ q \ r]^T$  προκύπτει η σχέση

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια διαδικασία προκύπτουν οι κινηματικές εξισώσεις που συνδέουν το διάνυσμα των γωνιακών ταχυτήτων του αεροχήματος με την παράγωγο των ανίστοιχων γωνιών Euler εκφρασμένες στο σύστημα σχετικού ανέμου. Συγκεκριμένα προκύπτει η σχέση

$$\omega_{F_B/F_E}^{F_W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & \cos \mu & \cos \gamma \sin \mu \\ 0 & -\sin \mu & \cos \mu \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mu} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\chi} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Επιλύοντας τη σχέση (2.5) ως προς την παράγωγο των γωνιών Euler και θέτοντας  $\omega_{F_B/F_E}^{F_W} = [p_W \ q_W \ r_W]^T$  προκύπτει

$$\begin{bmatrix} \dot{\mu} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \mu \tan \gamma & \cos \mu \tan \gamma \\ 0 & \cos \mu & -\sin \mu \\ 0 & \sin \mu \sec \gamma & \cos \mu \sec \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_W \\ q_W \\ r_W \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Τέλος η έκφραση που περιγράφει τη γωνιακή ταχύτητα του κεντροβαρικού συστήματος ως προς το σύστημα σχετικού ανέμου, προκύπτει και πάλι από τη διατύπωση της σύνθεσης περιστροφών (σχήμα 2.9)

$$\omega_{F_B/F_W}^{F_W} = \omega_{f/F_W}^{F_W} + \omega_{f'/f}^{F_W} + \omega_{f''/f'}^{F_W} = R_f^{F_W} \omega_{f/F_W}^f + R_{f'}^{F_W} \omega_{f'/f}^{f'},$$

όπου,

$$R_f^{F_W} = R_f^{F_W} R_{f'}^f \quad \text{με} \quad R_f^{F_W} = R_z(-\beta) \quad \text{και} \quad R_{f'}^f = R_y(\alpha).$$

Από το σχήμα 2.9 εύκολα προκύπτει

$$\omega_{f/F_W}^f = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\beta} \quad \text{και} \quad \omega_{f'/f}^{f'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\alpha}.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\omega_{F_B/F_W}^{F_W} &= -\dot{\beta} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & \cos \beta \sin \alpha \\ -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\alpha}, \\ \omega_{F_B/F_W}^{F_W} &= \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\alpha} \cos \beta \\ -\dot{\beta} \end{bmatrix}. \quad (2.7)\end{aligned}$$

### Μεταφορικές Συντεταγμένες

Για την ολοκλήρωση των κινηματικών εξισώσεων απαιτείται η διατύπωση των σχέσεων που συνδέουν τις μεταφορικές ταχύτητες των τριών συστημάτων αναφοράς. Οι εξισώσεις αυτές συνθέτουν και το πρόβλημα της πλοιόγησης όπως θα φανεί και σε παρακάτω παράγραφο.

1. Σύνδεση εκφράσεων μεταφορικής ταχύτητας αεροχήματος στο αδρανειακό και στο κεντροβαρικό σύστημα αναφοράς

$$\mathbf{v}_{C/F_E}^{F_E} = R_{F_B}^{F_E} \mathbf{v}_{C/F_E}^{F_B}.$$

Ορίζονταις τα μέγεθη  $\mathbf{v}_{C/F_E}^{F_E} = [\dot{x}_E \quad \dot{y}_E \quad \dot{z}_E]^T$  και  $\mathbf{v}_{C/F_E}^{F_B} = [u \quad v \quad w]^T$  προκύπτει η κινηματική σχέση

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} = R_{F_B}^{F_E} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

2. Σύνδεση εκφράσεων μεταφορικής ταχύτητας αεροχήματος στο αδρανεικό σύστημα και στο σύστημα σχετικού ανέμου

$$\mathbf{v}_{C/F_E}^{F_E} = R_{F_W}^{F_E} \mathbf{v}_{C/F_W}^{F_W}.$$

Ορίζονταις το μέγεθος  $\mathbf{v}_{C/F_W}^{F_W} = [V \quad 0 \quad 0]^T$  προκύπτει η κινηματική σχέση,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \\ \dot{z}_E \end{bmatrix} = R_{F_W}^{F_E} \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \cos \gamma \cos \chi \\ V \cos \gamma \sin \chi \\ -V \sin \gamma \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

3. Σύνδεση εκφράσεων μεταφορικής ταχύτητας αεροχήματος στο κεντροβαρικό σύστημα και στο σύστημα σχετικού ανέμου,

$$\mathbf{v}_{C/F_E}^{F_W} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = R_{F_B}^{F_W} \mathbf{v}_{C/F_E}^{F_B} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \sin \alpha \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτουν οι σχέσεις

$$v \sin \beta + u \cos \alpha \cos \beta + w \cos \beta \sin \alpha = V, \quad (2.10)$$

$$v \cos \beta - u \cos \alpha \sin \beta - w \sin \alpha \sin \beta, \quad (2.11)$$

$$w \cos \alpha - u \sin \alpha = 0. \quad (2.12)$$

Από την εξίσωση (2.12) εύκολα προκύπτει

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{w}{u} \right). \quad (2.13)$$

Κατάλληλη αλγεβρική διαχείρηση της σχέσης 2.10 μας δίνει

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}. \quad (2.14)$$

Τέλος συνδυασμός των σχέσεων (2.10), (2.11) και (2.13) οδηγεί στη σχέση

$$\beta = \sin^{-1} \left( \frac{v}{V} \right). \quad (2.15)$$

Οι αλγεβρικές σχέσεις (2.13), (2.14) και (2.15) είναι ιδιαίτερα σημαντικές καθώς επιτρέπουν τον προσδιορισμό μεγεθών που αναφέρονται στο σύστημα σχετικού ανέμου από μεγέθη που αναφέρονται στο κεντροβαρικό σύστημα.

### 2.3 Μοντελοποίηση Δυνάμεων και Ροπών

Στην παράγραφο αυτήν αναλύονται οι δυνάμεις και οι ροπές που ασκούνται στο αερόχημα. Οι δυνάμεις και οι ροπές μπορούν να χωριστούν σε τρείς κατηγορίες:

- Βαρυτικές δυνάμεις.
- Δυνάμεις και ροπές προώθησης.
- Αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές.

Στις επόμενες ενότητες αναλύονται και μοντελοποιούνται οι δυνάμεις και οι ροπές για κάθε μία από τις παραπάνω κατηγορίες.

#### 2.3.1 Βαρυτικές Δυνάμεις

Η βαρυτική δύναμη έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της γης και μπορεί έυκολα να εκφραστεί στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς ως

$$\mathbf{W}^{F_E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Η αντίστοιχη έκφραση της βαρυτικής δύναμης στο κεντροβαρικό σύστημα δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{W}^{F_B} = R_{F_E}^{F_B} \mathbf{W}^{F_E} = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Ενώ στο σύστημα σχετικού ανέμου από τη σχέση

$$\mathbf{W}^{F_W} = R_{F_E}^{F_W} \mathbf{W}^{F_E} = \begin{bmatrix} -mg \sin \gamma \\ mg \cos \gamma \sin \mu \\ mg \cos \gamma \cos \mu \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

#### 2.3.2 Δυνάμεις και Ροπές Προώθησης.

##### Δυνάμεις Προώθησης

Η μοντελοποίηση των δυνάμεων προώθησης από τις έλικες του αεροχήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί με την εφαρμογή της εξίσωσης του Bernoulli για ασυμπίεστα ρευστά,

κατά μήκος της ροϊκής γραμμής που φαίνεται στο σχήμα 2.10. Συγκεκριμένα η συνολική πιέση στο σημείο A δίνεται από τη σχέση,

$$P_A = P_0 + \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2,$$

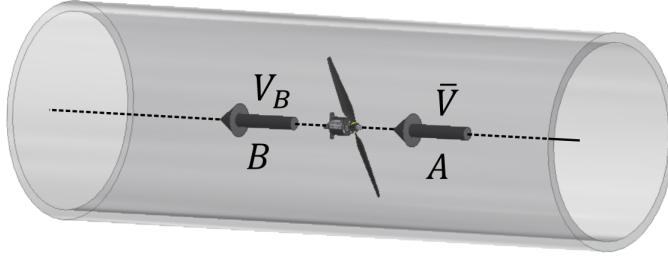
ενώ αντίστοιχα η πίεση στο σημείο B από τη σχέση,

$$P_B = P_0 + \frac{1}{2} \rho V_B^2.$$

Το γινόμενο της διαφοράς των πιέσεων στα σημεία A και B και της επιφάνειας της έλικας είναι προφανώς και η παραγώμενη δύναμη προώθησης, δηλαδή

$$T_i = S_{prop} C_{prop} (P_B - P_A) = \frac{1}{2} \rho S_{prop} C_{prop} (V_B^2 - V_A^2), \quad (2.19)$$

όπου,  $C_{prop}$  ο συντελεστής απόδοσης της έλικας και ο δείκτης  $i$  αναφέρεται στον δεξιό αριστερό κινητήρα.



Σχήμα 2.10: Ροϊκής γραμμή εφαρμογής εξίσωσης Bernoulli.

Για την ταχύτητα εξόδου του αέρα μπορεί να γίνει η θεώρηση

$$V_B = k_t \omega, \quad (2.20)$$

ενώ η γωνιακή ταχύτητα του κινητήρα συνδέεται με την εφαρμοζόμενη τάση σύμφωνα με τη σχέση

$$\omega_i = k_V V_i, \quad (2.21)$$

όπου,  $k_t$  σταθερά που προσδιορίζεται πειραματικά,  $k_V$  σταθερά που δίνεται από τον κατασκευαστή και  $V_i$  η τάση του δεξιού αριστερού κινητήρα.

Οι δυνάμεις προώθησης, στο συγκεκριμένο αερόχημα, ασκούνται κατά μήκος του άξονα  $x_B$  του κεντροβαρικού συστήματος όπως φαίνεται στο σχήμα 2.11. Συνπεπώς το διάνυσμα των δυνάμεων προώθησης στο κεντροβαρικό σύστημα αναφοράς με συνεισφορά αριστερού και δεξιού κινητήρα μπορεί να δοθεί από τη σχέση

$$\mathbf{T}^{F_B} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_L + T_R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων 2.20 και 2.21 στη (2.19) έχουμε

$$T = T_R + T_L = \frac{1}{2} \rho S_{prop} C_{prop} k_t^2 k_V^2 V_L^2 + \frac{1}{2} \rho S_{prop} C_{prop} k_t^2 k_V^2 V_R^2 - \rho S_{prop} C_{prop} \bar{V}^2. \quad (2.23)$$

Δεδομένου ότι η εφαρμοζόμενη τάση  $V_i \in [0, +\infty)$  και δεδομένου ότι η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$

είναι ένα προς ένα και επί, μπορεί να οριστεί η «εικονική» τάση  $\bar{V}_i$  από την ισότητα

$$\bar{V}_i = V_i^2. \quad (2.24)$$

Συνδυασμός των σχέσεων (2.23) και (2.24) δίνει τη σχέση της εφαρμοζόμενης δύναμης προώθησης, γραμμικά ως προς τις εικονικές τάσεις εισόδου ως

$$T = \frac{1}{2} \rho S_{prop} C_{prop} k_t^2 k_V^2 \bar{V}_L + \frac{1}{2} \rho S_{prop} C_{prop} k_t^2 k_V^2 \bar{V}_R - \rho S_{prop} C_{prop} \bar{V}^2. \quad (2.25)$$

### Ροπές Προώθησης

Οι ροπές προώθησης στο συγκεκριμένο αερόχημα διαφοροποιούνται σε δύο κατηγοριές. Συγκεκριμένα είναι:

1. Ροπές λόγω αεροδυναμικών δυνάμεων έλικας: Είναι γνωστό ότι ροπή αντίδρασης κατά την περιστοφή μιας έλικας προέρχεται λόγω αεροδυναμικών δυνάμεων και συγκεκριμένα δυνάμεων οπισθέλκουσας. Οι ροπές αυτές ασκούνται ως προς τον άξονα  $x_B$  και δίνονται από τη σχέση,

$$L_{T_i} = C_{D_i} \omega_i^2,$$

όπου,  $C_{D_i}$  ο συντελεστής οπισθέλκουσας της έλικας που προσδιορίζεται πειραματικά. Δεδομένου ότι οι δύο κινητήρες περιστρέφονται αντίρροπα, η συνισταμένη ροπή δίνεται από τη σχέση

$$L_T = L_{T_L} - L_{T_R} = C_{D_L} k_V^2 V_L^2 - C_{D_R} k_V^2 V_R^2.$$

Με την ίδια λογική που παρουσιάστηκε παραπάνω, μέσω του 1-1 μετασχηματισμού  $\bar{V}_i = V_i^2$ , η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$L_T = C_{D_L} k_V^2 \bar{V}_L - C_{D_R} k_V^2 \bar{V}_R.$$

2. Ροπή διαφορικής προώθησης: Από το σχήμα 2.11 είναι εμφανές ότι λόγω της ύπαρξης δύο κινητήρων, στις περιπτώσεις οπου  $T_L \neq T_R$ , παράγεται κατά μήκος του κεντροβαρικού άξονα  $z_B$  ροπή με μέτρο

$$N_{T_i} = T_i \tilde{b}.$$

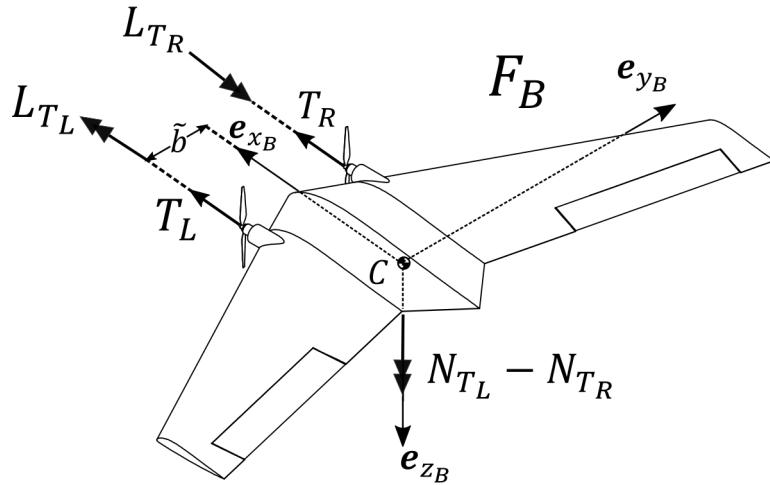
Είναι προφανές ότι η συνισταμένη ροπή δίνεται από τη σχέση,  $N_T = N_{T_L} - N_{T_R}$ .

Με βάση τα παραπάνω το διάνυσμα των ροπών προώθησης στο κεντροβαρικό σύστημα αναφοράς μπορεί να δοθεί από τη σχέση

$$\mathbf{M}_T^{F_B} = \begin{bmatrix} L_T \\ 0 \\ N_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{T_L} - L_{T_R} \\ 0 \\ N_{T_L} - N_{T_R} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

### Αεροδυναμικές Δυνάμεις και Ροπές

Όπως είναι γνωστό από τη μηχανική των ρευστών, οι αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές είναι απόρροια της αλληλεπίδρασης του κινούμενου αεροσκάφους με τον περιβάλλοντα αέρα, ο οποίος και στη γενική περίπτωση κινείται σχετικά με το αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Πρωτού αναλυθούν οι τρόποι μοντελοποίησης των δυνάμεων και ροπών αυτών, κρίνεται απαραίτητη η παρουσίαση των συμβάσεων που θα χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση αυτή.



Σχήμα 2.11: Δυνάμεις και ροπές προώθησης.

### Σχετικός Ανεμος

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, στη γενική περίπτωση πέρα από την κίνηση του οχήματος μέσα στον αέρα, παρατηρείται και κίνηση του ίδιου του ανέμου σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Η παραπάνω πρόταση μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά ως

$$\bar{V} = V - V_W,$$

όπου,  $V$  η ταχύτητα του κέντρου μάζας του αεροχήματος όπως την αντιλαμβάνεται παρατηρητής που ανήκει στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς και  $V_W$  η σχετική ταχύτητα του ανέμου όπως την αντιλαμβάνεται παρατηρητής που ανήκει στο σύστημα σχετικού ανέμου. Ο διαχωρισμός αυτός κρίνεται απαραίτητος καθώς ενώ οι κινηματικές εξισώσεις που περιγράφουν την ταχύτητα του σώματος εξαρτώνται αποκλειστικά από την ταχύτητα  $V$ , οι αεροδυναμικές δυνάμεις εξαρτώνται από τη συνολική ταχύτητα με την οποία ο αέρας προσεγγίζει το όχημα, δηλαδή την  $\bar{V}$ . Ωστόσο, είναι δυνατόν κάποιοις να προσεγγίσει την επιπλέον σχετική ταχύτητα του ανέμου ως εξωτερική διαταραχή ή ως σφάλμα μοντελοποίησης όπως και θα φανεί στο κεφάλαιο 4. Στην περίπτωση αυτή (η οποία θα εφαρμοστεί και στην παρούσα διπλωματική εργασία) έχουμε

$$\bar{V} = V.$$

### Επιφάνειες Ελέγχου

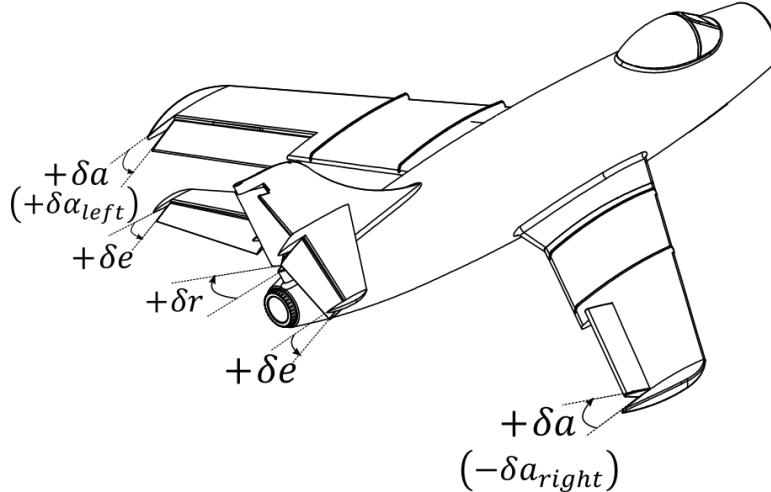
Οι επιφάνειες ελέγχου του αεροσκάφους χρησιμοποιούνται για να μεταβάλλουν τοπικά τη γεωμετρία του οχήματος και συνεπώς να μεταβάλλουν τις αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές, επιτρέποντας με αυτόν τον τρόπο τον έλεγχό του. Σε συμβατικές διατάξεις αεροσκαφών οι βασικές επιφάνειες ελέγχου είναι:

1. Πηδάλιο ανόδου-καθόδου (elevator), για έλεγχο της πρόνευσης (pitch).
2. Πηδάλιο εκτροπής ή διεύθυνσης (rudder), για τον έλεγχο της εκτροπής (yaw).
3. Πηδάλια περιστροφής ή κλίσης (ailerons), για την εκτέλεση ελιγμών περιστροφής (roll).

Στο σχήμα 2.12 ορίζονται οι θετικές εκτροπές των επιφανειών ελέγχου συμβατικού αεροσκάφους όπου, η εκτροπή του πηδαλίου ανόδου καθόδου συμβολίζεται με  $\delta_r$  και η εκτροπή των πηδαλίων περιστροφής συμβολίζεται με  $\delta_a$ . Ιδιαίτερα για τα πηδάλια περιστροφής αξίζει να σημειωθεί ότι η εκτροπή

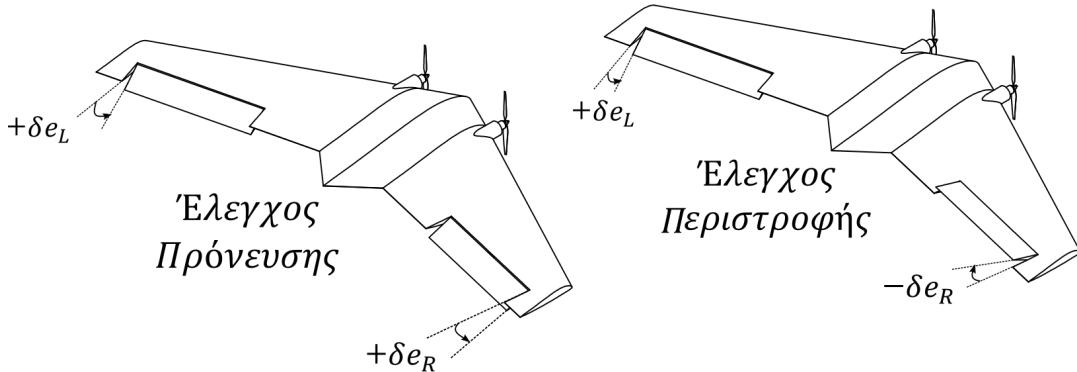
τους μπορεί να οριστεί ως σύνθεση εκτροπών της μορφής

$$\delta a = \frac{1}{2}(\delta a_{left} - \delta a_{right}).$$



Σχήμα 2.12: Επιφάνειες ελέγχου συμβατικού αεροσκάφους.

Σε γεωμετρίες αεροσκαφών «ιπτάμενης πτέρυγας», όπως αυτή της παρούσας διπλωματικής εργασίας, οι διαθέσιμες επιφάνειες ελέγχου μειώνονται σε δύο και συνεπώς για την επίτευξη των απαιτούμενων ελιγμών απαιτείται η συμπλοκή της κίνησης τους. Λόγω του μειωμένου αριθμού των επιφανειών, καθίσταται δυνατός ο έλεγχος μόνο ελιγμών πρόνευσης και περιστροφής. Ο έλεγχος αυτός γίνεται με τον συνδυασμό των εκτροπών των επιφάνειων ελέγχου,  $\delta e_L$  και  $\delta e_R$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.13.



Σχήμα 2.13: Δυνατές εκτροπές επιφανειών ελέγχου αεροσκάφους τύπου «ιπτάμενης πτέρυγας».

Αξίζει να σημειωθεί ότι τα εργαλεία μοντελοποίησης των αεροδυναμικών δυνάμεων και ροπών αναφέρονται σε συμβατικές γεωμετρίες αεροσκαφών. Συνεπώς είναι απαραίτητη η δυνατότητα μετάβασης από συμβατικές γεωμετρίες σε γεωμετρίες «ιπτάμενης πτέρυγας». Μια απλή προσέγγιση στο πρόβλημα είναι η διατύπωση του γραμμικού μετασχηματισμού

$$\begin{bmatrix} \delta e \\ \delta a \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta e_R \\ \delta e_L \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Η σχέση 2.27 δίνει τη δυνάτοτητα της μαθηματικής μοντελοποίησης των δυνάμεων και ροπών ενός αεροσκάφους γεωμετρίας «ιπτάμενης πτέρυγας», ως αεροσκάφους συμβατικής γεωμετρίας με πηδάλια ανόδου-καθόδου και κλίσης.

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο, κατά τη σχετική κίνηση του αεροχήματος και του αέρα δημιουργείται μια κατανομή πίεσης στη γεωμετρία αυτού. Η κατανομή πίεσης αυτή μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα σύνολο τριών δύναμεων (άντωση, οπισθέλκουσα και πλευρική δύναμη) και τριών ροπών (κλίσης, πρόνευσης και εκτροπής) το οποίο εφαρμόζεται και μοντελοποιείται στο σύστημα σχετικού ανέμου. Στη γενική περίπτωση, η κατανομή αυτή είναι συνάρτηση όλων των μεταβλητών κατάστασης καθώς και όλων των μεταβλητών ελέγχου του συστήματος. Ωστόσο, για τη μείωση της πολυπλοκότητας των μοντέλων, είναι σύνηθες να λαμβάνονται υπόψιν μόνο οι μεταβλητές που έχουν τη μεγαλύτερη επιρροή (προφανώς το μέγεθος της επιρροής του κάθε μεγέθους είναι κάτι που εξετάζεται πειραματικα). Δεδομένων των πραπάνω συμβάσεων μπορεί πλέον να αναλυθεί η μοντελοποίηση των αεροδυναμικών δυνάμεων και ροπών.

### Μοντελοποίηση Αεροδυναμικών Δυνάμεων

**Άντωση:** Τα κύρια μεγέθη που συνθέτουν τη δύναμη της άντωσης, η οποία εκφράζεται ως  $L = -Le_{z_W}$ , είναι αυτά της συνολικής ταχύτητας του αέρα, της γωνίας προσβολής, του ρυθμού πρόνευσης καθώς και της εκτροπής του πηδαλίου ανόδου-καθόδου. Με βάση αυτήν την παρατήρηση, η δύναμη της άντωσης μπορεί να μοντελοποιηθεί ως

$$L = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S C_L(\alpha, q, \delta e), \quad (2.28)$$

όπου,  $\rho$  η πυκνότητα του αέρα και  $S$  η μέση πτερυγική επιφάνεια. Στη γενική περίπτωση, η συνάρτηση  $C_L(\alpha, q, \delta e)$  είναι ισχυρά μη γραμμική, ωστόσο για μικρές γωνίες προσβολής είναι σύνηθες να λαμβάνεται η γραμμική της προσέγγιση της μορφής

$$C_L(\alpha, q, \delta e) = \left. \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} (\alpha - \alpha_0) + \left. \frac{\partial C_L}{\partial q} \right|_{q_0} (q - q_0) + \left. \frac{\partial C_L}{\partial \delta e} \right|_{\delta e_0} (\delta e - \delta e_0),$$

$\hat{\eta}$

$$C_L(\alpha, q, \delta e) = C_{L_0} + \left. \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \alpha + \left. \frac{\partial C_L}{\partial q} \right|_{q_0} q + \left. \frac{\partial C_L}{\partial \delta e} \right|_{\delta e_0} \delta e. \quad (2.29)$$

Συνδυασμός των εξισώσεων (2.28) και (2.29) δίνει την έκφραση για τη δύναμη της άντωσης

$$L = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S \left[ C_{L_0} + \left. \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} \alpha + \left. \frac{\partial C_L}{\partial q} \right|_{q_0} q + \left. \frac{\partial C_L}{\partial \delta e} \right|_{\delta e_0} \delta e \right]. \quad (2.30)$$

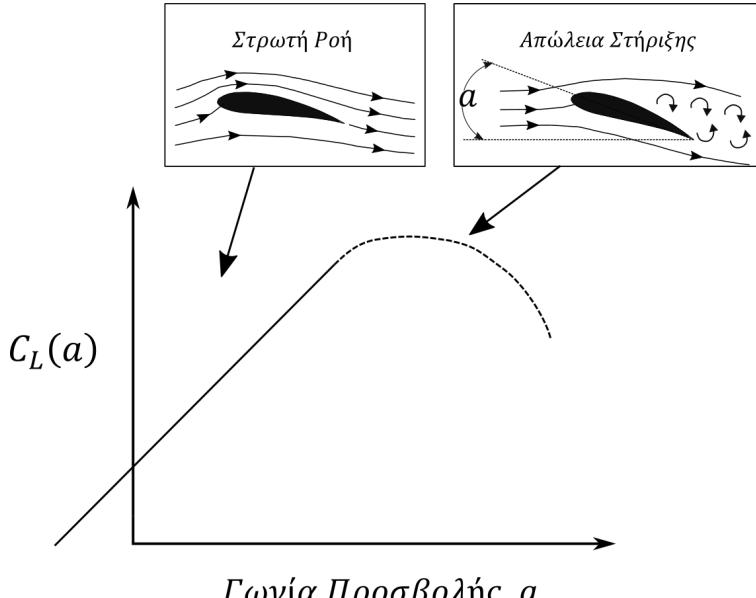
Δεδομένου ότι οι γωνίες  $\alpha$  και  $\delta e$  είναι εκφρασμένες σε rad ενώ ο ρυθμός πρόνευσης σε rad/sec, είναι σύνηθες να αδιαστατοποιείται η μερική παράγωγος  $\left. \frac{\partial C_L}{\partial q} \right|_{q_0}$  μέσω του όρου  $c/(2\bar{V})$ , όπου  $c$  το μήκος της χορδής του αεροχήματος. Με βάση την παραπάνω παρατήρηση η δύναμη της άντωσης μπορεί να αναδιατυπωθεί ως

$$L = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S \left[ C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_q} \frac{c}{2\bar{V}} q + C_{L_{\delta e}} \delta e \right], \quad (2.31)$$

όπου, οι σταθερές  $C_{L_\alpha}$ ,  $C_{L_q}$  και  $C_{L_{\delta e}}$  προκύπτουν εύκολα από τη σύγκριση των εξισώσεων 2.30 και 2.31. Αξίζει να σημειωθεί ότι η προσέγγιση της δύναμης της άντωσης, όπως αυτή δίνεται από τη σχέση (2.31), οδηγεί σε ικανοποιητικά αποτελέσματα για μικρές γωνίες προσβολής. Ωστόσο, σε μεγαλύτερης γωνίες προσβολής, όπως είναι γνωστό από την αεροδυναμική, εμφανίζεται το φαινόμενο της απώλειας στήριξης όπως φαίνεται στο σχήμα 2.14. Στην περίπτωση αυτή η σχέση (2.31) μπορεί να γραφεί ως

$$L = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S \left[ C_L(\alpha) + C_{L_q} \frac{c}{2\bar{V}} q + C_{L_{\delta e}} \delta e \right], \quad (2.32)$$

όπου, η συνάρτηση  $C_L(\alpha)$  επλέγεται ώστε ενα περιγράφει την καμπύλη του σχήματος 2.14 (η οποία προφανώς προκύπτει από πειραματικά δεδομένα).



Σχήμα 2.14: Συνάρτηση  $C_L(\alpha)$ .

**Οπισθέλκουσα:** Αντίστοιχα, τα κύρια μεγέθη που συνθέτουν τη δύναμη της οπισθέλκουσας, η οποία εκφράζεται ως  $D = -De_{xW}$ , είναι αυτά της συνολικής ταχύτητας του αέρα, της γωνίας προσβολής, του ρυθμού πρόνευσης καθώς και της εκτροπής του πηδαλίου ανόδου-καθόδου. Με βάση αυτήν την παρατήρηση, η δύναμη της οπισθέλκουσας μπορεί να μοντελοποιηθεί ως

$$D = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S C_D(\alpha, q, \delta e). \quad (2.33)$$

Με αντίστοιχη ανάλυση, όπως αυτη της προηγούμενης παραγράφου προκύπτει

$$D = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S \left[ C_{D_0} + C_{D_\alpha} \alpha + C_{D_q} \frac{c}{2\bar{V}} q + C_{D_{\delta e}} \delta e \right]. \quad (2.34)$$

Από την αεροδυναμική είναι γνωστό ότι η δύναμη της οπισθέλκουσας έχει διεύθυνση αντίθετη στην ταχύτητα του αεροσκάφους. Ωστόσο, αν ακολουθηθεί η γραμμική μοντελοποίηση ως προς τη γωνία προσβολής (σχέση 2.34), προκύπτει ότι για αρνητικές γωνίες η δύναμη της οπισθέλκουσας γίνεται αρνητική. Για τη διόρθωση της λανθασμένης εκτίμησης η σχέση (2.34) μετασχηματίζεται στην

$$D = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S \left[ C_D(\alpha) + C_{D_q} \frac{c}{2\bar{V}} q + C_{D_{\delta e}} \delta e \right]. \quad (2.35)$$

Η συνάρτηση  $C_D(\alpha)$  μπορεί να μοντελοποιηθεί από τη σχέση

$$C_D(\alpha) = C_{D_p} + \frac{(C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha)^2}{\pi e A R}, \quad (2.36)$$

όπου,  $C_{D_p}$  ο συντελεστής οπισθέλκουσας μηδενικής άντωσης,  $e$  ο συντελεστής του Oswald και  $AR = \frac{b^2}{S}$  ο λόγος επί μήκους. Από τη σχέση (2.36) είναι προφανές ότι η τετραγωνική δομή της συνάρτησης  $C_D(\alpha)$  διορθώνει τη λανθασμένη διατύπωση.

**Πλευρική Δύναμη:** Αντίστοιχα, τα κύρια μεγέθη που συνθέτουν την πλευρική δύναμη, η οποία εκφράζεται ως  $C = -Ce_{yW}$ , είναι αυτά της συνολικής ταχύτητας του αέρα, της γωνίας

πλευρικής ολίσθησης, του ρυθμού κλίσης, του ρυθμού εκτροπής καθώς και της εκτροπής του πηδαλίου περιστροφής. Με βάση αυτήν την παρατήρηση, η πλευρική δύναμη μπορεί να μοντελοποιηθεί ως

$$C = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S C_C(\beta, p, r, \delta\alpha). \quad (2.37)$$

Με αντίστοιχη ανάλυση, όπως αυτη της προηγούμενης παραγράφου προκύπτει

$$C = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S \left[ C_{C_0} + C_{C_\beta} \beta + C_{C_p} \frac{b}{2\bar{V}} p + C_{C_r} \frac{b}{2\bar{V}} r + C_{C_{\delta\alpha}} \delta\alpha \right], \quad (2.38)$$

όπου,  $b$  το εκπέτασμα του αεροχήματος. Οι τρείς παραπάνω δυνάμεις, συνθέτουν το διάνυσμα των αεροδυναμικών δυνάμεων στο σύστημα σχετικού ανέμου ως

$$\mathbf{F}_A^{FW} = [-D \quad -C \quad -L]^T. \quad (2.39)$$

Η διατύπωση των αεροδυναμικών δυνάμεων στο κεντροβαρικό σύστημα γίνεται μέσω του μετασχηματισμού

$$\mathbf{F}_A^{FB} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_{FW}^{FB} \mathbf{F}_A^{FW} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ \cos \beta \sin \alpha & -\sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -C \\ -L \end{bmatrix}.$$

Για την απλοποίηση της παραπάνω έκφρασης είναι σύνηθες να λαμβάνεται η παραδοχή της μικρής γωνίας πλάγιας ολίσθησης. Η παραδοχή αυτή οδηγεί, στη γνωστή από την αεροδυναμική αποσύμπλεξη μεταξύ του εγκάρσιου και διαμήκους άξονα του αεροχήματος (lateral-directional & longitudinal decoupling). Συνεπώς για  $\beta \approx 0$  η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\mathbf{F}_A^{FB} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -D \\ -C \\ -L \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

### Μοντελοποίηση Αεροδυναμικών Ροπών

**Ροπή Πρόνευσης:** Τα κύρια μεγέθη που συνθέτουν τη ροπή πρόνευσης, η οποία εκφράζεται ως  $M_m = M_m e_{y_B}$ , είναι αυτά της συνολικής ταχύτητας του αέρα, της γωνίας προσβολής, του ρυθμού πρόνευσης καθώς και της εκτροπής του πηδαλίου ανόδου-καθόδου. Με βάση αυτήν τη παρατήρηση, η ροπή πρόνευσης μπορεί να μοντελοποιηθεί ως

$$M_m = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S c C_{M_m}(\alpha, q, \delta e). \quad (2.41)$$

Με αντίστοιχη ανάλυση, όπως αυτη της προηγούμενης παραγράφου προκύπτει

$$M_m = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S c \left[ C_{M_{m0}} + C_{M_{m\alpha}} \alpha + C_{M_{mq}} \frac{c}{2\bar{V}} q + C_{M_{m\delta e}} \delta e \right]. \quad (2.42)$$

**Ροπή Κλίσης και Ροπή Εκτροπής:** Τα κύρια μεγέθη που συνθέτουν τις ροπές κλίσης και εκτροπής, οι οποίες εκφράζονται ως  $L_m = L_m e_{x_W}$  και  $N_m = N_m e_{z_W}$ , είναι αυτά της συνολικής ταχύτητας του αέρα, της γωνίας πλάγιας ολίσθησης, του ρυθμού κλίσης, του ρυθμού εκτροπής καθώς και της εκτροπής του πηδαλίου περιστροφής. Με βάση αυτήν την παρατήρηση, οι ροπές κλίσης και εκτροπής μπορούν να μοντελοποιηθούν ως

$$L_m = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S b C_{L_m}(\beta, p, r, \delta\alpha), \quad (2.43)$$

$$N_m = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S b C_{N_m}(\beta, p, r, \delta\alpha). \quad (2.44)$$

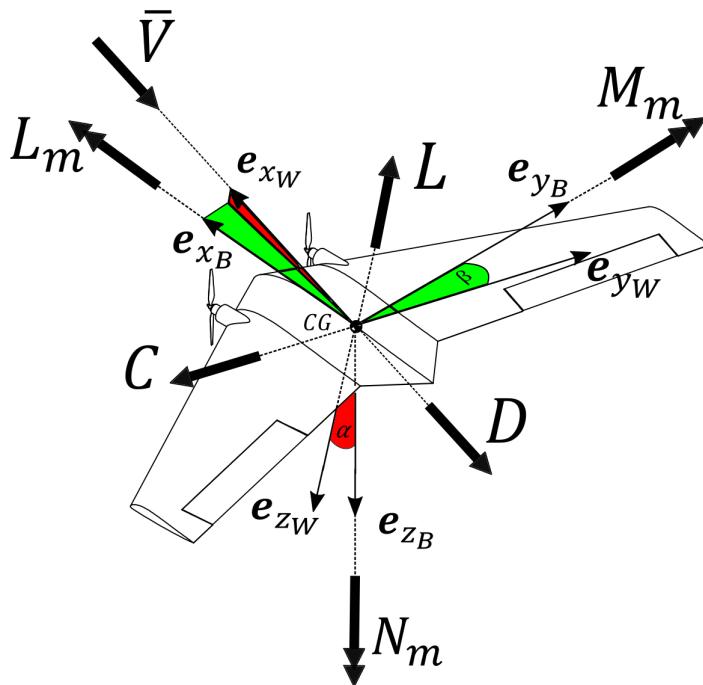
Με αντίστοιχη ανάλυση, όπως αυτή της προηγούμενης παραγράφου προκύπτει

$$L_m = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S b \left[ C_{L_{m0}} + C_{L_{m\beta}} \beta + C_{L_{mp}} \frac{b}{2\bar{V}} p + C_{L_{mr}} \frac{b}{2\bar{V}} r + C_{L_{m\delta\alpha}} \delta \alpha \right], \quad (2.45)$$

$$N_m = \frac{1}{2} \rho \bar{V}^2 S b \left[ C_{N_{m0}} + C_{N_{m\beta}} \beta + C_{N_{mp}} \frac{b}{2\bar{V}} p + C_{N_{mr}} \frac{b}{2\bar{V}} r + C_{N_{m\delta\alpha}} \delta \alpha \right]. \quad (2.46)$$

Οι τρείς παραπάνω ροπές, συνθέτουν το διάνυσμα των αεροδυναμικών ροπών στο κεντροβαρικό σύστημα ως

$$\mathbf{M}_A^{F_B} = [L_m \quad M_m \quad N_m]^T. \quad (2.47)$$



Σχήμα 2.15: Αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές.

## 2.4 Κινητική

Η κατάστρωση των εξισώσεων κίνησης του αεροχήματος μπορεί να πραγματοποιηθεί με τη διατύπωση των εξισώσεων Newton-Euler τόσο για τις μεταφορικές όσο και για τις περιστροφικές συνιστώσες του συστήματος. Η διατύπωση αυτή πραγματοποιείται ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς  $F_E$  ενώ η έκφραση τους θα δωθεί στο κεντροβαρικό σύστημα αναφοράς  $F_B$ . Η έκφραση των δυναμικών εξισώσεων επιλέγεται να γίνει στο σύστημα αναφοράς  $F_B$  καθώς:

1. Το μητρώο αδράνειας παραμένει χρονικά αμετάβλητο ως προς το σύστημα αυτό.
2. Οι μετρήσεις των βασικών αισθητήρων, όπως γυροσκόπιο και επιταχυνσιόμετρο, αναφέρονται στο σύστημα αυτό.

### 2.4.1 Μεταφορική Κίνηση

Οι εξισώσεις Newton-Euler για τις μεταφορικές συνιστώσες του συστήματος δίνονται από τη σχέση

$$\mathbf{F} = m \dot{\mathbf{v}}_{C/F_E},$$

όπου,  $m$  η συνολική μάζα του αεροχήματος,  $\mathbf{F}$  το σύνολο των εξωτερικών εφαρμοζόμενων δυνάμεων και  $\dot{\mathbf{v}}_{C/F_E}$  η αδρανειακή επιτάχυνση του κέντρου μάζας του σώματος. Η διατύπωση της παραπάνω σχέσης στο αδρανειακό σύστημα είναι

$$\mathbf{F}^{F_E} = m \dot{\mathbf{v}}_{C/F_E}^{F_E}.$$

Με πολλαπλασιασμό της παραπάνω σχέσης από αριστερά με τον πίνακα περιστροφής  $R_{F_E}^{F_B}$  προκύπτει

$$\mathbf{F}^{F_B} = m R_{F_E}^{F_B} \dot{\mathbf{v}}_{C/F_E}^{F_E}. \quad (2.48)$$

Η παράγωγος της ταχύτητας του κέντρου μάζας του αεροχήματος ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς και εκφρασμένη στο κεντροβαρικό σύστημα είναι

$$\dot{\mathbf{v}}_{C/F_E}^{F_B} = \frac{d}{dt}(R_{F_E}^{F_B} \mathbf{v}_{C/F_E}^{F_E}) = \dot{R}_{F_E}^{F_B} \mathbf{v}_{C/F_E}^{F_E} + R_{F_E}^{F_B} \dot{\mathbf{v}}_{C/F_E}^{F_E}.$$

Με βάση τη σχέση του παραρτήματος A.14 η παραπάνω έκφραση μπορεί να γραφεί ως

$$\dot{\mathbf{v}}_{C/F_E}^{F_B} = S(\omega_{F_E/F_B}^{F_B}) R_{F_E}^{F_B} \mathbf{v}_{C/F_E}^{F_E} + R_{F_E}^{F_B} \dot{\mathbf{v}}_{C/F_E}^{F_E},$$

$$R_{F_E}^{F_B} \dot{\mathbf{v}}_{C/F_E}^{F_E} = \dot{\mathbf{v}}_{C/F_E}^{F_B} - S(\omega_{F_E/F_B}^{F_B}) \mathbf{v}_{C/F_E}^{F_B}.$$

όπου,  $S$  αντισυμμετρικός πίνακας με όρισμα διάνυσμα όπως ορίζεται στο παράρτημα A.

Δεδομένου ότι  $\omega_{F_E/F_B}^{F_B} = -\omega_{F_B/F_E}^{F_B}$  και της γραμμικότητας του τελεστή  $S$  η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$R_{F_E}^{F_B} \dot{\mathbf{v}}_{C/F_E}^{F_E} = \dot{\mathbf{v}}_{C/F_E}^{F_B} + S(\omega_{F_B/F_E}^{F_B}) \mathbf{v}_{C/F_E}^{F_B}. \quad (2.49)$$

Συνδυασμός των σχέσεων 2.48 και 2.49 δίνει,

$$\mathbf{F}^{F_B} = m \dot{\mathbf{v}}_{C/F_E}^{F_B} + m S(\omega_{F_B/F_E}^{F_B}) \mathbf{v}_{C/F_E}^{F_B}. \quad (2.50)$$

Η σχέση 2.50 δίνει τη διατύπωση των εξισώσεων Newton-Euler στο κεντροβαρικό σύστημα το οποίο και περιστρέφεται σχετικά με το αδρανειακό. Επίλυση ως προς το ρυθμό μεταβολής των ταχυτήτων δίνει

$$\dot{\mathbf{v}}_{C/F_E}^{F_B} = \frac{1}{m} \mathbf{F}^{F_B} - S(\omega_{F_B/F_E}^{F_B}) \mathbf{v}_{C/F_E}^{F_B}. \quad (2.51)$$

Τα μεγέθη της εξίσωσης 2.51 έχουν προσδιοριστεί στις προηγούμενες παραγράφους.

Συγκεκριμένα,  $\mathbf{v}_{C/F_E}^{F_B} = [u \ v \ w]^T$  και  $\omega_{F_B/F_E}^{F_B} = [p \ q \ r]^T$ , ενώ για τις δυνάμεις βάσει των σχέσεων 2.17, 2.22 και 2.40 ισχύει

$$\mathbf{F}^{F_B} = \mathbf{W}^{F_B} + \mathbf{T}^{F_B} + \mathbf{F}_A^{F_B} = \mathbf{F}^{F_B} = \begin{bmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}.$$

Αντικατάσταση των γνωστών μεγεθών στη σχέση 2.51 οδηγούν στις τρείς εξισώσεις που περιγράφουν τη μεταφορική κίνηση του οχήματος, δηλαδή

$$\dot{u} = \frac{1}{m}(X + T) - g \sin \theta + rv - qw, \quad (2.52)$$

$$\dot{v} = \frac{1}{m}Y + g \sin \phi \cos \theta + pw - ru, \quad (2.53)$$

$$\dot{w} = \frac{1}{m}Z + g \cos \phi \cos \theta + qu - pv. \quad (2.54)$$

#### 2.4.2 Περιστροφική Κίνηση

Σύμφωνα με τη διατύπωση του νόμου Newton-Euler για τις περιστροφικές συνιστώσες του συστήματος, το σύνολο των εφαρμοζόμενων ροπών στο κέντρο μάζας του συστήματος ισούται με τον χρονικό ρυθμό μεταβολής της στοφορμής του γύρω από το κέντρο μάζας. Η παραπάνω πρόταση μπορεί να διατυπωθεί ως

$$\mathbf{M}_{C/F_E} = \dot{\mathbf{H}}_{C/F_E}.$$

Η διατύπωση της παραπάνω σχέσης στο αδρανειακό σύστημα είναι

$$\mathbf{M}_{C/F_E}^{F_E} = \dot{\mathbf{H}}_{C/F_E}^{F_E}.$$

Με πολλαπλασιασμό της παραπάνω σχέσης από αριστερά με τον πίνακα περιστροφής  $R_{F_E}^{F_B}$  προκύπτει

$$\mathbf{M}_{C/F_E}^{F_B} = R_{F_E}^{F_B} \dot{\mathbf{H}}_{C/F_E}^{F_E}. \quad (2.55)$$

Η παράγωγος της στροφορμής του κέντρου μάζας του αεροχήματος ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς και εκφρασμένη στο κεντροβαρικό σύστημα είναι

$$\dot{\mathbf{H}}_{C/F_E}^{F_B} = \frac{d}{dt}(R_{F_E}^{F_B} \mathbf{H}_{C/F_E}^{F_E}) = \dot{R}_{F_E}^{F_B} \mathbf{H}_{C/F_E}^{F_E} + R_{F_E}^{F_B} \dot{\mathbf{H}}_{C/F_E}^{F_E}.$$

Με βάση τη σχέση του παραρτήματος A.14 η παραπάνω έκφραση μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_{C/F_E}^{F_B} &= S(\omega_{F_E/F_B}^{F_B}) R_{F_E}^{F_B} \mathbf{H}_{C/F_E}^{F_E} + R_{F_E}^{F_B} \dot{\mathbf{H}}_{C/F_E}^{F_E}, \\ R_{F_E}^{F_B} \dot{\mathbf{H}}_{C/F_E}^{F_E} &= \dot{\mathbf{H}}_{C/F_E}^{F_B} - S(\omega_{F_E/F_B}^{F_B}) \mathbf{H}_{C/F_E}^{F_B}. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι  $\omega_{F_E/F_B}^{F_B} = -\omega_{F_B/F_E}^{F_B}$  και της γραμμικότητας του τελεστή  $S$  η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$R_{F_E}^{F_B} \dot{\mathbf{H}}_{C/F_E}^{F_E} = \dot{\mathbf{H}}_{C/F_E}^{F_B} + S(\omega_{F_B/F_E}^{F_B}) \mathbf{H}_{C/F_E}^{F_B}. \quad (2.56)$$

Συνδυασμός των σχέσεων 2.55 και 2.56 δίνει

$$\mathbf{M}_{C/F_E}^{F_B} = \dot{\mathbf{H}}_{C/F_E}^{F_B} + S(\omega_{F_B/F_E}^{F_B}) \mathbf{H}_{C/F_E}^{F_B}. \quad (2.57)$$

Η στροφορμή του σώματος μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mathbf{H}_{C/F_E}^{F_B} = I_B \omega_{F_B/F_E}^{F_B}, \quad (2.58)$$

όπου,  $I_B$  ο τανυστής αδράνειας του στερεού σώματος. Λόγω της επιλογής έκφρασης των εξισώσεων στο κεντροβαρικό σύστημα, η παράγωγος του τανυστή αδράνειας είναι μηδενική και συνεπώς η παράγωγος της στροφορμής δίνεται από τη σχέση

$$\dot{\mathbf{H}}_{C/F_E}^{F_B} = I_B \dot{\omega}_{F_B/F_E}^{F_B}. \quad (2.59)$$

Συνδυασμός των εξισώσεων (2.57), (2.58) και (2.59) δίνει

$$\mathbf{M}_{C/F_E}^{F_B} = I_B \dot{\omega}_{F_B/F_E}^{F_B} + S(\omega_{F_B/F_E}^{F_B}) I_B \omega_{F_B/F_E}^{F_B}. \quad (2.60)$$

Επίλυση ως προς το ρυθμό μεταβολής των περιστροφικών ταχυτήτων δίνει

$$\dot{\omega}_{F_B/F_E}^{F_B} = I_B^{-1} \mathbf{M}_{C/F_E}^{F_B} - I_B^{-1} S(\omega_{F_B/F_E}^{F_B}) I_B \omega_{F_B/F_E}^{F_B}, \quad (2.61)$$

όπου, το διάνυσμα των εξωτερικά εφαρμοζόμενων ροπών  $\mathbf{M}_{C/F_E}^{F_B}$  δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{M}_{C/F_E}^{F_B} = \mathbf{M}_T^{F_B} + \mathbf{M}_A^{F_B}.$$

Μέσω των σχέσεων (2.26) και (2.47) προκύπτει,

$$\mathbf{M}_{C/F_E}^{F_B} = \begin{bmatrix} L_T \\ 0 \\ N_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_m \\ M_m \\ N_m \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Λόγω της συμμετρίας του αεροχήματος στο επίπεδο  $xz$ , ο τανυστής αδράνειας του σώματος δίνεται ως

$$I_B = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Αντικατάσταση των εξισώσεων (2.62) & (2.63) στη σχέση (2.61) οδηγούν στις τρείς εξισώσεις που περιγράφουν την περιστροφική κίνηση του οχήματος, δηλαδή

$$\dot{p} = \frac{I_{zz}}{I_D} [L_m + L_T + I_{xz}pq - (I_{zz} - I_{yy})qr] + \frac{I_{xz}}{I_D} [N_m + N_T - I_{xz}qr - (I_{yy} - I_{xx})pq], \quad (2.64)$$

$$\dot{q} = \frac{1}{I_{yy}} [M_m - (I_{xx} - I_{zz})pr - I_{xz}(p^2 - r^2)], \quad (2.65)$$

$$\dot{r} = \frac{I_{xz}}{I_D} [L_m + L_T + I_{xz}pq - (I_{zz} - I_{yy})qr] + \frac{I_{xx}}{I_D} [N_m + N_T - I_{xz}qr - (I_{yy} - I_{xx})pq], \quad (2.66)$$

όπου,  $I_D = I_{xx}I_{zz} - I_{xz}^2$ .

## 2.5 Μοντέλο Μεταβλητών Κατάστασης

Οι εξισώσεις (2.52)-(2.54) και (2.64)-(2.66), καθώς και οι κινηματικές εξισώσεις (2.8) & (2.4) συνθέτουν ένα σύστημα δώδεκα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης της μορφής

$$\dot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{F}_a(\mathbf{x}_a, \mathbf{u}), \quad (2.67)$$

όπου,

$$\mathbf{x}_a = \left[ \mathbf{v}_{C/F_E}^{F_B} \quad \boldsymbol{\omega}_{F_B/F_E}^{F_B} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{x}_N \right]^T \quad \text{και} \quad \mathbf{u} = [\bar{V}_L \quad \bar{V}_R \quad \delta e \quad \delta \alpha]^T$$

με

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{C/F_E}^{F_B} &= [u \quad v \quad w]^T, \quad \boldsymbol{\omega}_{F_B/F_E}^{F_B} = [p \quad q \quad r]^T \\ \mathbf{e} &= [\phi \quad \theta \quad \psi]^T, \quad \mathbf{x}_N = [x_E \quad y_E \quad z_E]^T \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι,

$$\frac{\partial \mathbf{F}_a}{\partial x_E} = \frac{\partial \mathbf{F}_a}{\partial y_E} = \frac{\partial \mathbf{F}_a}{\partial z_E} = \mathbf{0},$$

το παραπάνω σύστημα μπορεί να αποσυμπλεχθεί και να διασπαστεί σε δύο επιμέρους, το σύστημα πλοϊγησης και το σύστημα εξισώσεων κίνησης.

- Σύστημα Πλοϊγησης:** Το σύστημα πλοϊγησης αποτελεί ένα σύστημα τριών μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$\dot{\mathbf{x}}_N = \mathbf{F}_N(\mathbf{u}_N), \quad (2.68)$$

όπου,

$$\boldsymbol{u}_N = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_{C/F_E}^{F_B} & \boldsymbol{e} \end{bmatrix}^T.$$

2. **Σύστημα Εξισώσεων Κίνησης:** Το σύστημα εξισώσεων κίνησης αποτελεί ένα σύστημα εννέα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \quad (2.69)$$

όπου,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_{C/F_E}^{F_B} & \boldsymbol{\omega}_{F_B/F_E}^{F_B} & \boldsymbol{e} \end{bmatrix}^T \quad \text{και} \quad \boldsymbol{u} = [\bar{V}_L \quad \bar{V}_R \quad \delta e \quad \delta \alpha]^T.$$

Κατάλληλη αλγεβρική διαχείρηση της διανυσματική συνάρτησης  $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$  οδηγεί στη δομη

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + G(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}, \quad (2.70)$$

όπου,  $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^9$  και  $G(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{9 \times 4}$ . Η αναλυτική έκφραση των συναρτήσεων  $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$  και  $G(\boldsymbol{x})$  δίνεται στο παράρτημα. Συνδυασμός των σχέσεων 2.69 και 2.70 δίνει την τελική μορφή του συστήματος εξισώσεων κίνησης

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + G(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}. \quad (2.71)$$

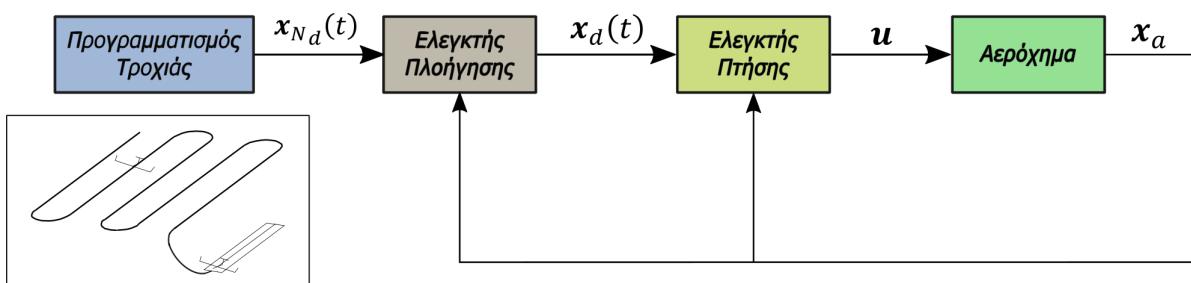
# Κεφάλαιο 3

## Σχεδιασμός Ελεγκτή

### 3.1 Εισαγωγή

Στόχος του κεφαλαίου είναι ο σχεδιασμός ενός συστήματος ελέγχου για την αυτόνομη καθοδήγηση του αεροχήματος, δεδομένης μια τροχιάς. Στο σχήμα 3.1 παρουσιάζεται ποιοτικά η δομή του συστήματος ελέγχου. Τα βήματα του προτεινόμενου συστήματος είναι:

1. Ο προγραμματισμός τροχίας παράγει ένα σήμα αναφοράς  $x_{N_d}(t)$  με τις συντεταγμένες της επιθυμητής τροχιάς.
2. Με βάση το σήμα αναφοράς τροχιάς, ο ελεγκτής πλοιήγησης παράγει ένα επιθυμητό σήμα αναφοράς για τις μεταβλητές κατάστασης του συστήματος εξισώσεων κίνησης  $x_d(t)$ .
3. Το σήμα των επιθυμητών μεταβλητών κατάστασης τροφοδοτείται στον ελεγκτή πτήσης, ο οποίος παράγει το κατάλληλο σήμα ελέγχου  $u$  για τις τάσεις των κινητήρων και τις εκτροπές των επιφανειών ελέγχου.
4. Εφαρμόζοντας το σήμα  $u$  στο σύστημα, προκύπτουν (μέσω άμεσων μετρήσεων ή κάποιου εκτιμητή καταστάσεων) οι νέες μεταβλητές κατάστασης του συστήματος,  $x_a$ .
5. Το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης  $x_a$  ανατροφοδοτείται στους ελεγκτές πλοιήγησης και πτήσης.



Σχήμα 3.1: Αναπαράσταση Συστήματος Ελέγχου.

Από την παραπάνω περιγραφή είναι προφανές ότι το πρόβλημα παρακολούθησης τροχιάς, ανάλογα με το σήμα εισόδου  $x_{N_d}(t)$ , δύναται να απαιτεί την κάλυψη μεγάλου εύρους του χώρου μεταβλητών κατάστασης. Συνεπώς, δεδομένης της ισχυρής μη γραμμικότητας του μοντέλου του αεροχήματος, η γραμμικοποίηση του συστήματος γύρω από ένα σημείο ισορροπίας και ο σχεδιασμός ενός ελεγκτή για το γραμμικοποιημένο σύστημα κρίνονται ανεπαρκή καθώς μπορούν να εγγυηθούν μόνο τοπική ευστάθεια και απόδοση. Για την κάλυψη όλου του εύρους του χώρου μεταβλητών κατάστασης του μη γραμμικού συστήματος μελετούνται οι ακόλουθες τεχνικές:

### 1. Gain scheduling

Έστω η μη γραμμική διαφορική εξίσωση, της σχέσης (2.69)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),$$

όπου,  $t \geq 0$ ,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  και  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ . Έστω επίσης ότι χώρος των σημείων ισορροπίας της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να παραμετροποιηθεί από τη μεταβλητή ρύθμισης  $\rho \in \mathbb{R}^l$ . Συνεπώς, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις  $\mathbf{x}^0 : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$  και  $\mathbf{u}^0 : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$  τέτοιες ώστε

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^0(t), \mathbf{u}^0(t)) = \mathbf{0},$$

$\forall \rho \in \Gamma$ , όπου  $\Gamma$  κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^l$ .

Για κάθε μεταβλητή ρύθμισης  $\rho$ , η γραμμικοποίηση του μη γραμμικού συστήματος μπορεί να γραφεί ως

$$\dot{\mathbf{x}}_\delta(t) = A(\rho)\mathbf{x}_\delta(t) + B(\rho)\mathbf{u}_\delta(t),$$

όπου

$$A(\rho) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^0(\rho), \mathbf{u}^0(\rho)), \quad B(\rho) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}^0(\rho), \mathbf{u}^0(\rho)),$$

$$\mathbf{x}_\delta = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^0(\rho), \quad \mathbf{u}_\delta = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^0(\rho).$$

Πρακτικά, η μέθοδος του gain scheduling, προτείνει το διαχωρισμό του μη γραμμικού συστήματος σε μια οικογένεια από γραμμικά συστήματα τα οποία προκύπτουν από τη γραμμικοποίηση του πρώτου γύρω από κάποια σημεία ισορροπίας ενδιαφέροντος. Στη συνέχεια σχεδιάζεται κάποιος νόμος ελέγχου για κάθε ένα από τα υποσυστήματα αυτά καθώς και η συνάρτηση η οποία θα επιτρέπει τη μετάβαση, με συνέχη τρόπο, από το ένα γραμμικό σύστημα στο άλλο. Με τον τρόπο αυτό, επιτυγχάνεται ο σχεδιασμός ενός γενικού ελεγκτή για το μη γραμμικό σύστημα χρησιμοποιώντας εργαλεία γραμμικού ελέγχου. Ωστόσο κατά την υλοποιήση της τεχνικής παρουσιάζονται σημαντικά προβλήματα όπως η εύρεση των κατάλληλων μεταβλητών ρύθμισης, η επιλογή των σημείων ισορροπίας, η εύρεση του τρόπου μετάβασης μεταξύ των γραμμικών συστημάτων, ο χαρακτηρισμός των ορίων ευστάθειας και απόδοσης των υποσυστημάτων καθώς και η εγγύηση της γενικής ευστάθειας του συνολικού συστήματος. Περισσότερα για τα προβλήματα και τους πιθανούς τρόπους αντιμετώπισης της τεχνικής αυτής, μπορούν να βρεθούν στην [14].

2. **Μη γραμμικός έλεγχος** Σε αντίθεση με την τεχνική του Gain Scheduling, η σύνθεση ενός μη γραμμικού συστήματος ελέγχου, μπορεί να εγγυηθεί την καθολική ευστάθεια του συστήματος σε όλο το χώρο μεταβλητών κατάστασης. Ορισμένες, από τις τεχνικές που ενδείκνυνται για τον έλεγχο μη γραμμικών μηχανολογικών συστημάτων είναι αυτή της γραμμικοποίησης μέσω ανάδρασης (*feedback linearization*), του ελέγχου επιφάνειας ολίσθησης (*sliding mode control*) καθώς και του μη γραμμικού προσαρμοστικού ελέγχου (*nonlinear adaptive control*). Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εξετάζεται και εφαρμόζεται η τεχνική του ελέγχου επιφάνειας ολίσθησης καθώς εκμεταλλεύεται την αφφινική, ως προς το σήμα ελέγχου, δομή του συστήματος (σχέση (2.71)) ενώ επιπλέον εγγυάται τη σθεναρότητα υπό την ύπαρξη διαταραχών. Στις επόμενες ενότητες, αφού παρουσιαστούν τα βασικά στοιχεία ευστάθειας των μη γραμμικών συστημάτων τα οποία είναι απαραίτητα για τη σύνθεση του νόμου ελέγχου, αναλύεται και εφαρμόζεται η τεχνική της επιφάνειας ολίσθησης για τη σύνθεση του ελεγκτή πτήσης.

### 3.2 Θεωρία Ευστάθειας Μη Γραμμικών Συστημάτων

Στην υποενότητα αυτή παρουσιάζονται στοιχεία της θεωρίας ευστάθειας μη γραμμικών συστημάτων. Οι ορισμοί καθώς και τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται βασίζονται στην

αναφορά [15].

Έστω το σύστημα κανονικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t), \quad (3.1)$$

όπου,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  και  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Ορισμός 1.** Ένα μη γραμμικό σύστημα (3.1) λέγεται αυτόνομο εάν η συνάρτηση  $\mathbf{f}$  δεν εξαρτάται άμεσα από τον χρόνο. Τότε το σύστημα μπορεί να γραφεί ως

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)). \quad (3.2)$$

Διαφορέτικά, το σύστημα είναι μη αυτόνομο.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το σύστημα του αεροχήματος είναι μη αυτόνομο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η επιθυμητή τροχιά που πρέπει να ακολουθηθεί, είναι χρονικά εξαρτώμενη και εισέρχεται άμεσα στο σύστημα ελέγχου (μέσω του αλγορίθμου προγραμματισμού τροχιάς) με αποτέλεσμα το σύστημα να είναι της δομής (3.1). Για το λόγο αυτό, τα παρακάτω αποτελέσματα επικεντρώνονται στα μη αυτόνομα συστήματα.

**Ορισμός 2.** Η μεταβλητή κατάστασης  $\mathbf{x}^*$  λέγεται σημείο ισορροπίας του συστήματος (3.1) εάν ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, t), \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.3)$$

όπου,  $t_0$  ο αρχικός χρόνος.

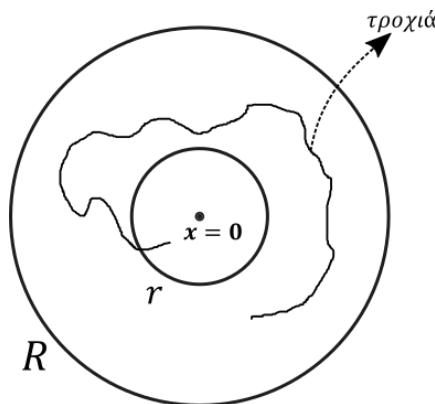
Το σύστημα (3.1) μπορεί να έχει πολλαπλά σημεία ισορροπίας ή και κανένα. Εάν η (3.1) έχει σημείο ισορροπίας, χωρίς βλάβη της γενικότητας, χρησιμοποιώντας μια μετάθεση στον  $\mathbb{R}^n$  είναι ανάγκη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σημείο ισορροπίας είναι το  $\mathbf{0}$ , δηλαδή  $\mathbf{f}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{0}$ .

Συμβολίζουμε με  $B_R = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| < R\}$  την ανοιχτή μπάλα του χώρου μεταβλητών κατάστασης με κέντρο το  $\mathbf{0}$  και ακτίνα  $R$  καθώς και με  $S_R = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| = R\}$  την επιφάνεια της σφαίρας.

**Ορισμός 3.** Το σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  λέγεται ευσταθές κατά Lyapunov (ή απλά ευσταθές) στο  $t_0$  εάν

$$\forall R > 0, \exists r(R, t_0) > 0, \|\mathbf{x}(t_0)\| < r \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < R, \quad \forall t \geq t_0.$$

Εάν αυτό ισχύει για κάθε  $t_0$  τότε το σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  λέγεται ευσταθές. Διαφορετικά, το σημείο ισορροπίας  $\mathbf{0}$  είναι ασταθές.

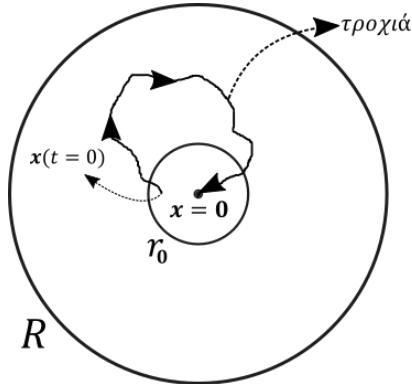


Σχήμα 3.2: Ευσταθές κατά Lyapunov σημείο ισορροπίας.

Συνεπώς για ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , εάν επιλέξω μια μπάλα ακτίνας  $R$  υπάρχει πάντοτε μια μπάλα ακτίνας  $r$  (η οποία μπορεί εξαρτάται από τον χρόνο  $t_0$ ), τέτοια ώστε ξεκινώντας τη μπάλα  $B_r$  η τροχία δεν βγαίνει ποτέ από τη μπάλα  $B_R$ , σχήμα 3.2.

**Ορισμός 4.** Το σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  λέγεται ασυμπτωτικά ευσταθές στο  $t_0$ , εάν είναι ευσταθές και μπορεί να επιλεχθεί κάποια ακτίνα  $r(t_0)$  τέτοια ώστε εάν

$$\|\mathbf{x}(t_0)\| < r(t_0) \Rightarrow \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \text{ καθώς } t \rightarrow \infty.$$



Σχήμα 3.3: Ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Οι παραπάνω ορισμοί χαρακτηρίζουν την τοπική συμπεριφορά του συστήματος (πως το σύστημα συμπεριφέρεται αν αρχικοποιηθεί κοντά σε ένα σημείο ισορροπίας).

**Ορισμός 5.** Το σημείο ισορροπίας  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  λέγεται γενικά ασυμπτωτικά ευσταθές εάν  $\forall \mathbf{x}(t_0)$

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \text{ καθώς } t \rightarrow \infty.$$

**Ορισμός 6.** Μια βαθμωτή συνεχής συνάρτηση  $V(\mathbf{x})$  λέγεται τοπικά θετικά ορισμένη εάν

$$1. V(\mathbf{0}) = 0.$$

$$2. \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow V(\mathbf{x}) > 0, \text{ σε μια μπάλα } B_{R_0}.$$

Εάν τα παραπάνω ισχύουν για κάθε  $R_0$ , τότε η συνάρτηση  $V(\mathbf{x})$  λέγεται γενικά θετικά ορισμένη.

**Ορισμός 7.** Μια βαθμωτή και χρονικά εξαρτώμενη συνάρτηση  $V(\mathbf{x}, t)$  είναι τοπικά θετικά ορισμένη εάν  $V(\mathbf{0}, t) = 0$  και υπάρχει μια θετικά ορισμένη συνάρτηση  $V_0(\mathbf{x})$  τέτοια ώστε

$$\forall t \geq t_0, \quad V(\mathbf{x}, t) \geq V_0(\mathbf{x})$$

**Ορισμός 8.** Μια βαθμωτή συνεχής συνάρτηση  $V(\mathbf{x})$  λέγεται θετικά ημιορισμένη εάν

$$V(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}.$$

**Ορισμός 9.** Μια βαθμωτή και χρονικά εξαρτώμενη συνάρτηση συνεχής συνάρτηση  $V(\mathbf{x}, t)$  λέγεται θετικά ημιορισμένη εάν υπάρχει μια θετικά ημιορισμένη συνάρτηση  $V_0(\mathbf{x})$  τέτοια ώστε

$$\forall t \geq t_0, \quad V(\mathbf{x}, t) \geq V_0(\mathbf{x})$$

Με αντίστοιχο τρόπο ορίζονται οι τοπικά αρνητικά ορισμένες και ημιορισμένες συναρτήσεις.

**Θεώρημα 1 (Θεώρημα Lyapunov για μη αυτόνομα συστήματα).** Εάν σε μια μπάλα  $B_{R_0}$ , γύρω από το σημείο ισορροπίας  $\mathbf{0}$ , υπάρχει μια συνεχώς διαφορίσιμη βαθμωτή συνάρτηση  $V(\mathbf{x}, t)$ , τέτοια ώστε

1. η  $V(\mathbf{x}, t)$  είναι θετικά ορισμένη,
2. η  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  είναι αρνητικά ημιορισμένη,

τότε το σημείο ισορροπίας  $\mathbf{0}$  είναι ευσταθές.

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι στη περίπτωση των μη αυτόνομων συστημάτων, η ανάλυση ασυμπτωτικής ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας είναι ιδιαίτερα δύσκολη (σε σύγκριση με τα αυτόνομα συστήματα). Η δυσκολία αυτή μπορεί να αντιμετωπιστεί με τη βοήθεια του λήμματος Barbalat το οποίο αφορά τις ασυμπτωτικές ιδιότητες συναρτήσεων και των παραγώγων τους. Κατάλληλη επέκταση του λήμματος στα δυναμικά μη αυτόνομα συστήματα μπορεί να βοηθήσει στην απόδειξη της ασυμπτωτικής ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας του μη αυτόνομου συστήματος.

**Λήμμα 1 (Λήμμα Barbalat).** Εάν μια διαφορίσιμη συνάρτηση  $f(t)$  έχει ένα πεπερασμένο όριο καθώς  $t \rightarrow \infty$  και η  $\dot{f}(t)$  είναι ομοιόμορφα συνεχής τότε,

$$\dot{f}(t) \rightarrow 0 \quad \text{καθώς } t \rightarrow \infty.$$

**Λήμμα 2 (Λήμμα τύπου Lyapunov).** Εάν μια βαθμωτή συνάρτηση  $V(\mathbf{x}, t)$  ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες

1. η  $V(\mathbf{x}, t)$  είναι κάτω φραγμένη,
2. η  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  είναι αρνητικά ημιορισμένη,
3. η  $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$  είναι ομοιόμορφα συνεχής,

τότε  $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

### 3.3 Ελεγκτής Πτήσης

Στην υποενότητα αυτή αναλύεται ο σχεδιασμός του ελεγκτή πτήσης. Αρχικά παρουσιάζεται η βασική θεωρία του ελέγχου ολίσθησης ενώ στη συνέχεια γίνεται εφαρμογή αυτής στο πρόβλημα σχεδιασμού του αυτομάτου πιλότου του αεροχώματος.

#### 3.3.1 Έλεγχος Επιφάνειας Ολίσθησης (Sliding Mode Control)

Η τεχνική ελέγχου επιφάνειας ολίσθησης χρησιμοποιείται για τη σύνθεση νόμων ελέγχου, οι οποίοι είναι σθεναροί σε εξωτερικές διαταραχές και σφάλματα μοντελοποίησης. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιεί την επαληνία ενός συνεχή και ενός μη συνεχή νόμου ελέγχου, έτσι ώστε να αναγκάσει τις μεταβλητές κατάστασης να προσεγγίσουν και να παραμείνουν πάνω σε μια δεδομένη επιφάνεια του χώρου μεταβλητών κατάστασης (επιφάνεια ολίσθησης). Συγκεκριμένα, θεωρούμε το μη γραμμικό σύστημα, με δομή αφφινική ως προς το σήμα ελέγχου

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (3.4)$$

όπου,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  το διάνυσμα εισόδου. Εξ ορισμού ο μη συνεχής νόμος ελέγχου είναι της μορφής [10]

$$u_i = \begin{cases} u_i^+, & \text{εάν } \sigma_i(\mathbf{x}, t) > 0. \\ u_i^-, & \text{εάν } \sigma_i(\mathbf{x}, t) < 0. \end{cases}, \quad (3.5)$$

οπου,  $\sigma_i(\mathbf{x}, t) = 0$  περιγράφει την  $i$ -οστη επιφάνεια ολίσθησης. Η συνολική επιφάνεια ολίσθησης δημιουργείται από την τομή των  $m$  επιμέρους επιφάνειων ως

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^m \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \sigma_i(\mathbf{x}, t) = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}\}, \quad (3.6)$$

όπου,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = [\sigma_1(\mathbf{x}, t), \sigma_2(\mathbf{x}, t), \dots, \sigma_m(\mathbf{x}, t)]^T$ . Με βάση τα παραπάνω, ο έλεγχος επιφάνειας ολίσθησης αποτελείται από τα παρακάτω βήματα:

1. Την κατασκευή της κατάλληλης επιφάνειας ολίσθησης έτσι ώστε τα δυναμικά του συστήματος να είναι τα επιθυμητά.
2. Τον σχεδιασμό του κατάλληλου νόμου ελέγχου, ο οποίος αναγκάζει το σύστημα να εισέλθει στην επιφάνεια ολίσθησης και να παραμείνει σε αυτήν.

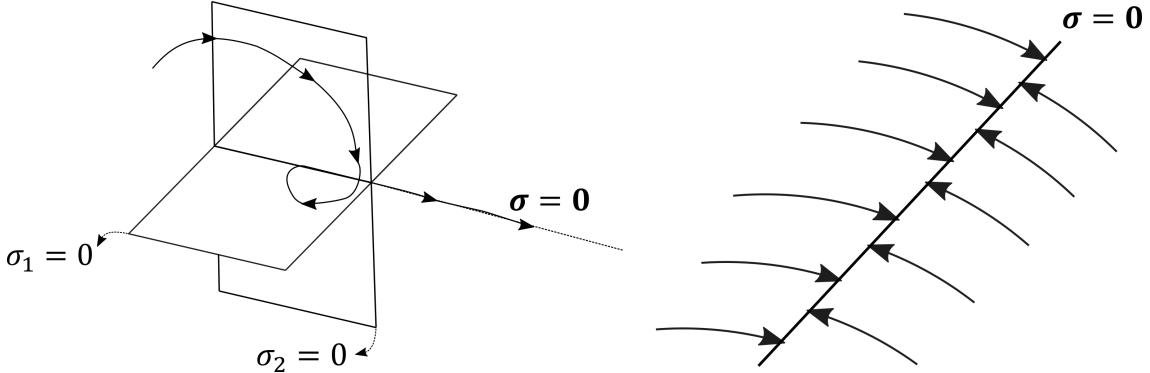
Σύμφωνα με την [15], για συστήματα πρώτης τάξης η επιφάνεια ολίσθησης μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε

$$\sigma_i(\mathbf{x}, t) = \lambda_i \tilde{x}_i, \quad (3.7)$$

όπου,  $\lambda_i$  θετική σταθερά και  $\tilde{x}_i = x_i - x_{d_i}$  με  $x_{d_i}$  την επιθυμητή τροχιά αναφοράς. Με βάση τα παραπάνω είναι προφανές πως δεδομένης μια αρχικής συνθήκης  $\mathbf{x}_d(0) = \mathbf{x}(0)$ , το πρόβλημα παρακολούθησης της τροχιάς ( $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_d$ ) είναι ισοδύναμο με την παραμονή του συστήματος στην επιφάνεια  $\Sigma$  για κάθε  $t > 0$ , δηλαδή  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$  για κάθε  $t > 0$ . Για τη διατήρηση του συστήματος στη επιφάνεια  $\Sigma$  ο νόμος ελέγχου του συστήματος θα πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε έξω από την επιφάνεια να ισχύει [15], [18]

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sigma_i^2 \leq -\eta_i |\sigma_i|, \quad (3.8)$$

όπου,  $\eta_i$  αυστηρά θετικός αριθμός. Η παραπάνω συνθήκη, η οποία ονομάζεται **συνθήκη ολίσθησης**, πρακτικά επιβάλλει ότι η απόσταση από την επιφάνεια ολίσθησης, η οποία εκφράζεται μέσω του όρου  $\sigma_i^2$ , θα πρέπει συνεχώς μειώνεται. Με το τρόπο αυτό οι τροχιές των μεταβλητών κατάστασης κινούνται προς την επιφάνεια  $\Sigma$  και στη συνέχεια παραμένουν σε αυτή (σχήμα 3.4). Επιπλέον, όπως αποδεικνύεται στην [15], ικανοποίηση της συνθήκης (3.8)



Σχήμα 3.4: Επιφάνεια Ολίσθησης για  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ .

εγγυάται ότι ακόμη και στην περίπτωση που  $\mathbf{x}_d(0) \neq \mathbf{x}(0)$ , η τροχιά θα φτάσει στην επιφάνεια  $\Sigma$  σε πεπερασμένο χρόνο. Τέλος, αν η τροχιά του συστήματος ανήκει στην επιφάνεια ολίσθησης τότε λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε **κατάσταση ολίσθησης**.

### Υπαρξη και Μοναδικότητα Λύσης

Από τους παραπάνω ορισμούς, είναι προφανές ότι διαφορικές εξισώσεις της μορφής (3.4) σε συνδυασμό με τον μη συνεχή νόμο ελέγχου (3.5), δεν ικανοποιούν απαραίτητα τις

υποθέσεις των κλασσικών θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων (διότι το δεξί μέρος των εξισώσεων δεν είναι απαραίτητα συνεχές). Ωστόσο, το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί σύμφωνα με τη μέθοδο Fillipov όπως αποδυκνύεται στις [4], [9], [16]. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα σύστημα μίας εισόδου

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, u), \quad (3.9)$$

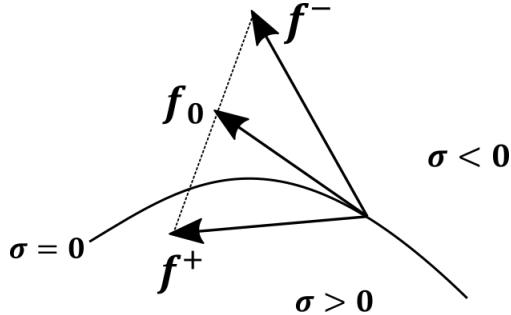
με νόμο ελέγχου της μορφής,

$$u = \begin{cases} u^+, & \text{εάν } \sigma_i(\mathbf{x}, t) > 0. \\ u^-, & \text{εάν } \sigma_i(\mathbf{x}, t) < 0. \end{cases}. \quad (3.10)$$

Στην [4] αποδυκνύεται ότι οι τροχιές των μεταβλητών κατάστασης πάνω στην επιφάνεια  $\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ , δεδομένου του ασυνεχόυς νόμου ελέγχου (3.10), είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \alpha \mathbf{f}^+ + (1 - \alpha) \mathbf{f}^- = \mathbf{f}_0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (3.11)$$

όπου,  $\mathbf{f}^+ = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, u^+)$ ,  $\mathbf{f}^- = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, u^-)$  και  $\mathbf{f}^0$  το συνολικό διάνυσμα ταχύτητας της τροχίας των μεταβλητών κατάστασης (εφαπτόμενο στην τροχιά), όπως φαίνεται στο σχήμα 3.5. Από την παραπάνω σχέση είναι προφανές ότι το συνεχές διάνυσμα  $\mathbf{f}_0$  προέρχεται από τον κυρτό συνδυασμό των τιμών της  $\mathbf{f}$  εκατέρωθεν της επιφάνειας  $\Sigma$  και συνεπώς οι λύσεις της (3.11) μπορούν να χαρακτηριστούν ως προς την ύπαρξη και τη μοναδικότητα.



Σχήμα 3.5: Γεωμετρική εφαρμογή (3.11).

### Ισοδύναμος Έλεγχος

Όπως αναφέρθηκε στην παραπάνω παράγραφο, με την εφαρμογή της μέθόδου Fillipov είναι δυνατή η εύρεση της τροχίας των μεταβλητών κατάστασης πάνω στην επιφάνεια ολίσθησης μέσω της λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.11). Μια πιο εύκολη στην εφαρμογή μέθοδος είναι αυτή του ισοδύναμου ελέγχου η οποία αποδυκνύεται στο βιβλίο του Vadim I. Utkin [18]. Αξίζει να σημειωθεί πως για την περίπτωση αφφινικών ως προς το σήμα ελέγχου συστημάτων οι δύο μέθοδοι είναι ισοδύναμες. Θεωρούμε το αφφινικό ως προς το σήμα εισόδου σύστημα της σχέσης (3.4)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})u. \quad (3.12)$$

Έστω επίσης ότι τη χρονική στιγμή  $t = t_0$ , η τροχιά των μεταβλητών κατάστασης τέμνει την επιφάνεια ολίσθησης και για  $t \geq t_0$  το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ολίσθησης. Η μέθοδος του ισοδύναμου ελέγχου απαιτεί την εύρεση της εισόδου  $u_{eq}$ , τέτοια ώστε η τροχιά των μεταβλητών κατάστασης να παραμένει στην επιφάνεια  $\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ , δεδομένου ότι οι  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  και  $G(\mathbf{x})$  είναι πλήρως γνωστές. Το γεγονός ότι το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ολίσθησης σημαίνει επιπλέον ότι  $\dot{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ ,  $\forall t \geq t_0$  ([15]). Εφαρμόζοντας την παραπάνω

συνθήκη και σε συνδυασμό με τη σχέση (3.7) έχουμε

$$\mathbf{0} = \dot{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \{ \Lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) \} = \Lambda \dot{\mathbf{x}} - \Lambda \dot{\mathbf{x}}_d = \Lambda \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Lambda G(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{eq} - \Lambda \dot{\mathbf{x}}_d, \quad (3.13)$$

όπου,  $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι μέσω του ισοδύναμου ελέγχου  $\mathbf{u}_{eq}$  οποιαδήποτε τροχιά ξεκινάει πάνω στην επιφάνεια  $\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ , παραμένει σε αυτήν καθώς  $\dot{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ . Επομένως η επιφάνεια  $\Sigma$  ορίζει ένα αναλλοίωτο σύνολο. Εάν  $\det\{\Lambda G(\mathbf{x})\} \neq 0$ ,  $\forall t, \mathbf{x}$ , τότε επίλυση της (3.13) ως προς τον ισοδύναμο ελέγχο δίνει

$$\mathbf{u}_{eq} = \{\Lambda G(\mathbf{x})\}^{-1} (\Lambda \dot{\mathbf{x}}_d - \Lambda \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \{G(\mathbf{x})\}^{-1} (\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{f}(\mathbf{x})). \quad (3.14)$$

Εφαρμογή της σχέσης (3.14) στην (3.12) μας δίνει

$$\dot{\mathbf{x}} = (I_{n \times n} - G(\mathbf{x}) \{\Lambda G(\mathbf{x})\}^{-1} \Lambda) \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}) \{\Lambda G(\mathbf{x})\}^{-1} \Lambda \dot{\mathbf{x}}_d = \dot{\mathbf{x}}_d. \quad (3.15)$$

Από τη σχέση (3.15) είναι προφανές ότι ο ισοδύναμος νόμος ελέγχου επιβάλλει την τροχιά των μεταβλητών κατάστασης πάνω στην επιφάνεια ολίσθησης έτσι ώστε αυτή να ταυτίζεται με την επιθυμητή. Επομένως το πρόβλημα του σχεδιασμού ελέγχου ανάγεται σε πρόβλημα σχεδιασμού των επιθυμητών δυναμικών. Συγκεκριμένα, τα δυναμικά των αποκλίσεων των μεταβλητών κατάστασης από τις επιθυμητές, μπορούν να σχεδιαστούν ως σύστημα πρώτης τάξης, δηλαδή,

$$(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_d) + K(\mathbf{x} - \mathbf{x}_d) = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = -K\tilde{\mathbf{x}}, \quad (3.16)$$

όπου,  $K = \text{diag}[1/\tau_1, 1/\tau_2, \dots, 1/\tau_n]$ , με  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  οι θετικές σταθερές χρόνου για τον σχεδιασμό των δυναμικών του σφάλματος. Η λύση της (3.16) είναι

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}_0 e^{-Kt}, \quad (3.17)$$

συνεπώς  $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{0}$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ , δηλαδή  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_d$  και  $\dot{\mathbf{x}} \rightarrow \dot{\mathbf{x}}_d$ , ικανοποιώντας την (3.15).

Για την ανάλυση της ευστάθειας του κλειστού βρόχου με επιβολή του ισοδύναμου νόμου ελέγχου, θεωρείται υποψήφια συνάρτηση Lyapunov (για το μη αυτόνομο σύστημα (3.12))

$$V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}, t) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t). \quad (3.18)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε

$$\dot{V} = \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}, t) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = (\Lambda \tilde{\mathbf{x}})^T (\Lambda \dot{\tilde{\mathbf{x}}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T \Lambda^T \Lambda (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_d).$$

Συνδυασμός της παραπάνω σχέσης με την (3.16) δίνει

$$\dot{V} = -\tilde{\mathbf{x}}^T (\Lambda^T \Lambda K) \tilde{\mathbf{x}}, \quad (3.19)$$

όπου, ο πίνακας  $\Lambda^T \Lambda K$  είναι θετικά ορισμένος και συνεπώς η συνάρτηση  $\dot{V}$  είναι αρνητικά ημιορισμένη. Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov πληροί τις συνθήκες του θεωρήματος 1 και συνεπώς το σύστημα είναι ευσταθές. Επιπλέον, από το λήμμα 2 προκύπτει ότι  $\dot{V} \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$  και συνεπώς  $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{0}$  καθώς  $t \rightarrow 0$ . Παρότι, ο ισοδύναμος νόμος ελέγχου μπορεί να οδηγήσει το συστηματικά στην επιφάνεια ολίσθησης, απαιτεί την πλήρη γνώση του μοντέλου οπως φαίνεται από τη (3.14). Ωστόσο, στην πραγματικότητα οι εξωτερικές διαταραχές, τα σφάλματα μοντελοποίησης καθώς και σφάλματα σχεδιασμού και κατασκευής είναι πιθανό να κάνουν το μοντέλο ιδιαίτερα αναχροιβές. Έστω το σύστημα (3.12) υπό την επίδραση φραγμένων διαταραχών μοντελοποίησης  $\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \Delta G(\mathbf{x}(t))$  και φραγμένων εξωτερικών διαταραχών  $d(t)$

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x})] + [G(\mathbf{x}) + \Delta G(\mathbf{x})] \mathbf{u} + d(t).$$

Θέτουμε  $\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \Delta G(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{d}(t)$ . Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u} + \xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (3.20)$$

Εφαρμόζοντας τον ίδιο νόμο ελέγχου για το παραπάνω σύστημα με τις επιπρόσθετες διαταραχές και με υποψήφια συνάρτηση Lyapunov ίδια με αυτήν της σχέσης (3.18) εύκολα προκύπτει

$$\dot{V} = \tilde{\mathbf{x}}\Lambda^T\Lambda\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (3.21)$$

Δεδομένου ότι το διάνυσμα των διαταραχών είναι αγνώστου προσήμου, η συνάρτηση  $V$  δεν μπορεί χαρακτηριστεί ως συνάρτηση Lyapunov και το σύστημα δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως προς την ευστάθεια. Επομένως, όπως παρουσιάζεται και στην [15] ο νόμος ελέγχου θα πρέπει να σχεδιαστεί έτσι ώστε να περιλαμβάνει ένα ασυνεχές σήμα εισόδου της μορφής (3.5) το οποίο θα είναι υπεύθυνο για την αντιμετώπιση των διαταραχών.

### Σχεδιασμός Σθεναρού Νόμου Ελέγχου

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, για την πρόσδοση σθεναρότητας στο σύστημα μπορεί να σχεδιαστεί επαυξημένος νόμος ελέγχου της μορφής

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{eq} + \{G(\mathbf{x})\}^{-1}\mathbf{u}_r, \quad (3.22)$$

όπου,  $\mathbf{u}_r = [u_{r_1}, u_{r_2}, \dots, u_{r_m}]^T$  ο ασυνεχής νόμος ελέγχου όπως παρουσιάζεται στη σχέση (3.5), δηλαδή

$$u_{r_i} = \begin{cases} u_{r_i}^+, & \text{εάν } \sigma_i(\mathbf{x}, t) > 0, \\ u_{r_i}^-, & \text{εάν } \sigma_i(\mathbf{x}, t) < 0. \end{cases}. \quad (3.23)$$

Μια πιθανή επιλογή για τον νόμο ελέγχου που να ικανοποιεί τη σχέση (3.23) είναι

$$u_{ri} = -\zeta \operatorname{sgn}(\sigma_i), \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, m \quad (3.24)$$

με  $\zeta$  θετική σταθερά και  $\operatorname{sgn}$  η συνάρτηση προσημάνσεως η οποία ορίζεται ως

$$\operatorname{sgn}(\sigma_i) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } \sigma_i > 0, \\ -1, & \text{εάν } \sigma_i < 0, \\ 0, & \text{εάν } \sigma_i = 0. \end{cases}. \quad (3.25)$$

Με βάση τα παραπάνω και την αντικατάσταση της σχέσης (3.14) ο νόμος ελέγχου μπορεί να αναδιατυπωθεί ως

$$\mathbf{u} = \{G(\mathbf{x})\}^{-1}(\dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \zeta \operatorname{sgn}(\sigma)). \quad (3.26)$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω νόμο ελέγχου στο διαταραγμένο σύστημα (3.20), έχουμε

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u} + \xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \dot{\mathbf{x}}_d - \zeta \operatorname{sgn}(\sigma) + \xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (3.27)$$

Για την ανάλυση της ευστάθειας του διαταραγμένου συστήματος (3.20) θεωρείται και πάλι υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t). \quad (3.28)$$

Η παράγωγος της παραπάνω συνάρτησης με εφαρμογή του επαυξημένου νόμου ελέγχου (3.26) είναι

$$\dot{V} = \boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\sigma}^T(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}^T\Lambda(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_d) = -\zeta\boldsymbol{\sigma}^T\Lambda\operatorname{sgn}(\sigma) + \boldsymbol{\sigma}^T\Lambda\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),$$

Εάν θέσουμε  $\rho(t) = \xi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ , η παραπόνω σχέση γίνεται

$$\dot{V} = -\zeta \sum_{i=1}^n \lambda_i |\sigma_i| + \sum_{i=1}^n \sigma_i \lambda_i \rho_i(t). \quad (3.29)$$

Όπως αναφέρθηκε και παραπόνω θεωρούμε ότι οι διαταραχές είναι φραγμένες, δηλαδή

$$\bar{\rho} \triangleq \max \{ \rho_1, \dots, \rho_n \} \quad \text{όπου} \quad \rho_i = \sup(|\rho_i(t)|) \quad (3.30)$$

Με βάση τη σχέση (3.30) και το γεγονός ότι το αθροισμα των απολύτων τιμών είναι παντοτε μαγαλύτερο ή ίσο του αθροίσματος των τιμών, ισχύει η ανισότητα

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i \lambda_i \rho_i(t) \leq \sum_{i=1}^n |\sigma_i \lambda_i| \bar{\rho},$$

ή

$$-\zeta \sum_{i=1}^n \lambda_i |\sigma_i| + \sum_{i=1}^n \sigma_i \lambda_i \rho_i(t) \leq -\zeta \sum_{i=1}^n \lambda_i |\sigma_i| + \sum_{i=1}^n |\sigma_i \lambda_i| \bar{\rho}.$$

Δηλαδή με βάση τη σχέση (3.29)

$$\dot{V} \leq -\zeta \sum_{i=1}^n \lambda_i |\sigma_i| + \bar{\rho} \sum_{i=1}^n |\sigma_i \lambda_i|, \quad (3.31)$$

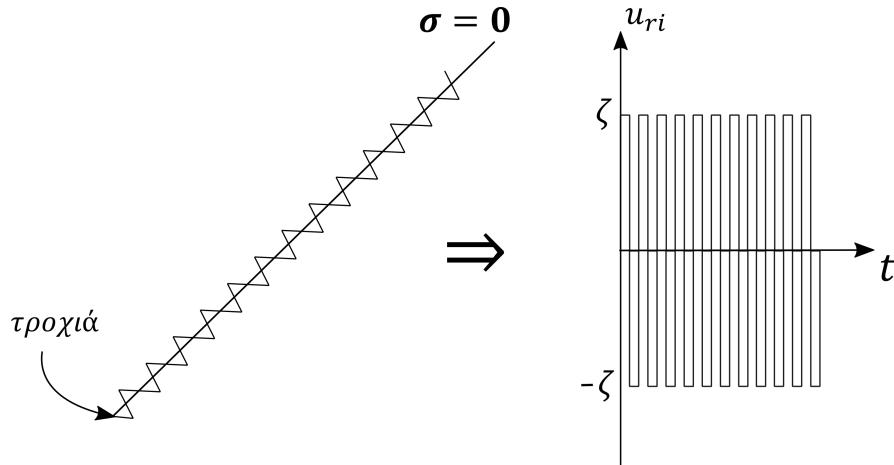
όπου, δεδομένου ότι οι σταθερές  $\lambda_i$  έχουν επιλεγεί θετικές, μπορούμε να γράψουμε

$$\dot{V} \leq -(\zeta - \bar{\rho}) \sum_{i=1}^n \lambda_i |\sigma_i|. \quad (3.32)$$

Από την παραπόνω σχέση είναι προφανές πως αν επιλέξουμε  $\zeta > \bar{\rho}$ , τότε η συνάρτηση  $\dot{V}$  είναι αρνητικά ημιορισμένη. Συνεπώς, η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov πληροί τις συνθήκες του θεωρήματος 1 και συνεπώς το σύστημα είναι ευσταθές υπό την ύπαρξη φραγμένων διαταραχών. Επιπλέον, σύμμφωνα με το λήμμα 2 προκύπτει ότι,  $\dot{V} \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$  δηλαδή  $\sigma \rightarrow 0 \Rightarrow \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_d$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ .

## Παρατηρήσεις

- Ταλάντωση σήματος ελέγχου:** Από τα παραπόνω έπεται ότι νόμος ελέγχου (3.26) ικανοποιεί τη σύνθηκη ολίσθησης, όπως διατυπώνεται από τη σχέση (3.8) με  $\eta_i = -(\zeta - \bar{\rho}) \lambda_i$ . Επομένως, ο ασυνεχής νόμος ελέγχου επιτυγχάνει τη διατήρηση του συστήματος στην επιφάνεια ολίσθησης υπό την ύπαρξη διαταραχών, μέσω της υφίσυχης (θεωρητικά άπειρης συχνότητας) εναλλαγής του ασυνεχούς σήματος ελέγχου. Δεδομένου ότι στην πράξη η ταχύτητα απόκρισης των ενεργοποιητών είναι πεπερασμένη και επιπλέον η τιμή της  $\sigma_i$  είναι γνωστή με πεπερασμένη ακρίβεια, η τροχιά εκτελεί ταλαντώσεις μικρού εύρους γύρω από την επιφάνεια  $\Sigma$ . Ωστόσο, λόγω της ασυνέχειας του νόμου ελέγχου, οι μικρές ταλαντώσεις γύρω από την επιφάνεια  $\Sigma$  οδηγούν σε ιδιαίτερα μεγάλη δραστηριότητα του ενεργοποιητή, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.6. Αυτή η απότομη εναλλαγή είναι ιδιαίτερα ανεπιθυμητη καθώς οδηγεί στη φθορά των ενεργοποιητών ενώ επιπλέον είναι πιθανό να διεγέρει υφίσυχα δυναμικά τα οποίο έχουν θεωρηθεί αμελητέα κατά τη μοντελοποίηση. Μια απλή λύση για την αντιμετώπιση του παραπόνω προβλήματος, είναι η προσέγγιση της συνάρτησης προσημάνσεως



Σχήμα 3.6: Γύψισυχη ταλαντωση σήματος ελέγχου.

μέσω της συνεχούς συνάρτησης κορεσμού

$$\text{sat}\left(\frac{\sigma_i}{\phi}\right) = \begin{cases} -1, & \text{εάν } \sigma_i < -\phi. \\ \sigma_i/\phi, & \text{εάν } |\sigma_i| \leq \phi. \\ 1, & \text{εάν } \sigma_i > \phi. \end{cases} . \quad (3.33)$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω, ο νόμος ελέγχου είναι δίνεται από τη συνεχή έκφραση

$$\mathbf{u} = \{G(\mathbf{x})\}^{-1} \left\{ \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \zeta \text{sat}\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\phi}\right) \right\}. \quad (3.34)$$

Με την προσέγγιση αυτή ο νόμος ελέγχου εγγυάται τη σύγκλιση της τροχιάς στο **οριακό στρώμα**  $B = \bigcap_{i=1}^m \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_i(\mathbf{x}, t) \leq \phi\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\| \leq \phi\}$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 3.7, καθώς και την ικανοποίηση της συνθήκης ολίσθησης (3.8) γύρω από αυτό. Αξίζει να σημειωθεί ότι η επιλογή του πλάτους του οριακού στρώματος  $\phi$  είναι ιδιαίτερα σημαντική. Συγκεκριμένα, η επιλογή ενός μεγάλου  $\phi$  έχει ως αποτέλεσμα έναν ομαλό νόμο ελέγχου με μειονέκτημα τη μείωση της σθεναρότητας και το σφάλμα σε μόνιμη κατάσταση ενώ αντίθετα η επιλογή ενός μικρού  $\phi$  οδηγεί και πάλι σε ένα σχεδόν ασυνεχή νόμο ελέγχου.

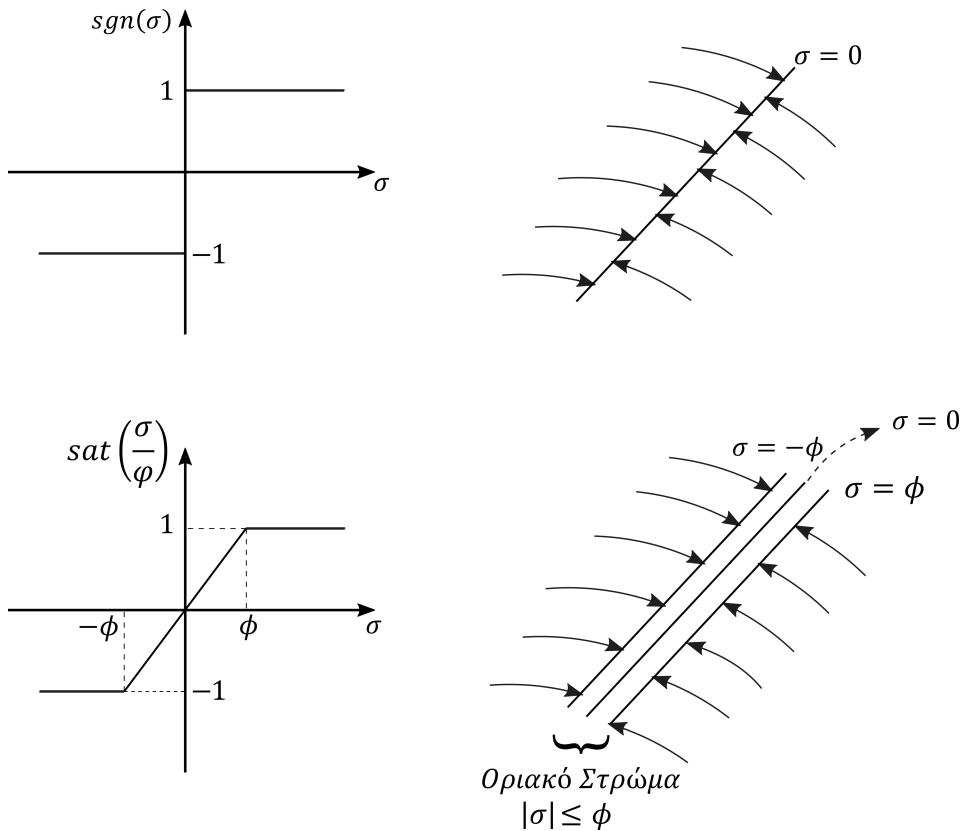
- Αντιστρεψιμότητα μητρώου  $G(\mathbf{x})$ :** Παρατηρώντας τον νόμο ελέγχου (3.34), βλέπουμε πως απαιτείται την αντιστροφή του μητρώου  $G(\mathbf{x})$ . Η απαίτηση αυτή προϋποθέτει τετραγωνικότητα του συστήματος (3.4) (δηλαδή ο αριθμός των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος θα πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των μεταβλητών ελέγχου ή  $n = m$ ). Δεδομένου, ότι εν γένει τα συστήμα που μελετάται δεν είναι τετραγωνικό, μπορεί να εισαχθεί ο γενικευμένος αντιστροφος (ή ψευδοαντιστροφος) [11],

$$G^{-1}(\mathbf{x}) \approx (G^T(\mathbf{x})G(\mathbf{x}))^{-1}G^T(\mathbf{x}). \quad (3.35)$$

### 3.3.2 Σχεδιασμός Ελεγκτή Πτήσης

Στην υποενότητα αυτή, εφαρμόζεται η τεχνική ελέγχου ολίσθησης, όπως περιγράφηκε παραπάνω, για τον σχεδιασμό ελεγκτή πτήσης. Συγκεκριμένα, έστω το σύστημα όπως δίνεται από τη σχέση (2.71)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad (3.36)$$

Σχήμα 3.7: Συναρτήσεις  $\text{sgn}(\sigma)$  και  $\text{sat}(\sigma/\phi)$ .

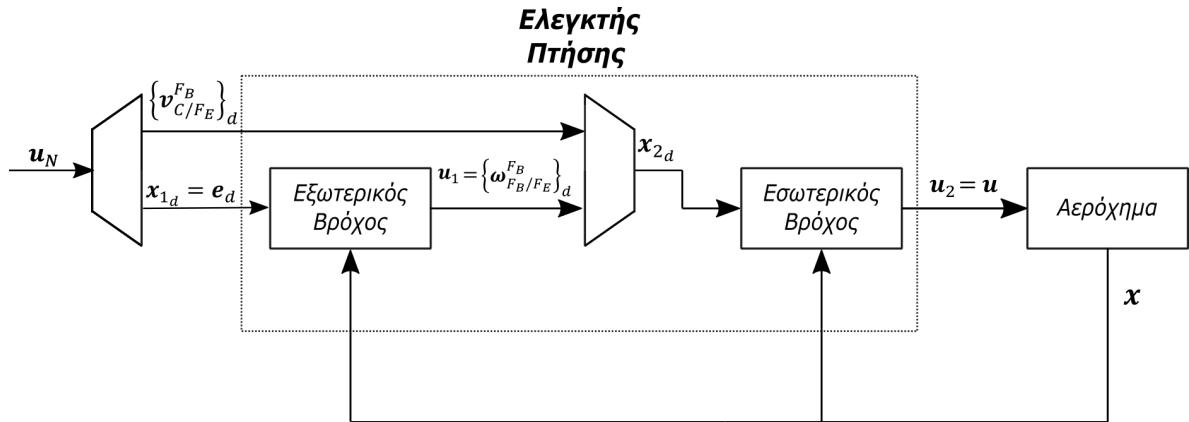
όπου,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{C/F_E}^{F_B} & \omega_{F_B/F_E}^{F_B} & \mathbf{e} \end{bmatrix}^T \quad \text{και} \quad \mathbf{u} = [\bar{V}_L \quad \bar{V}_R \quad \delta e \quad \delta \alpha]^T.$$

Για την απλοποίηση του συστήματος, χρησιμοποιείται η τεχνική διαχωρισμού χρονικών αλιμάκων, η οποία προτείνει τον σχεδιασμό ενός νόμου ελέγχου διαδοχικών βρόχων (Successive Loop Closure). Συγκεκριμένα, ο διαχωρισμός αυτός βασίζεται στο γεγονός ότι οι σταθερές χρόνου του εσωτερικού βρόχου είναι πολύ μικρότερες από αυτές του εξωτερικού και συνεπώς ο σχεδιασμός των νόμων ελέγχου για τον εσωτερικό και εξωτερικό βρόχο μπορεί να πραγματοποιηθεί ανεξάρτητα. Για τη συγκεκριμένη εφαρμογή σύστημα διαχωρίζεται έτσι ώστε το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης του εξωτερικού βρόχου να είναι το  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{e} = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T$  ενώ το διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης του εσωτερικού βρόχου είναι το  $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{C/F_E}^{F_B} & \omega_{F_B/F_E}^{F_B} \end{bmatrix}^T$ . Η επιλογή των δύο υποσυστημάτων είναι ιδιαίτερα συνηθισμένη στα συστήματα αυτομάτου πιλότου των αεροχημάτων, καθώς τα δυναμικά των γωνίων Euler είναι πολύ πιο αργά από τα δυναμικά των μεταφορικών και περιστροφικών ταχυτήτων. Σύμφωνα με το σχήμα 3.8, η υλοποίηση του ελεγκτή πτήσης αποτελείται από τα παρακάτω βήματα:

1. Τροφοδότηση του εξωτερικού βρόχου με το σήμα αναφοράς του ελεγκτή πλοήγησης,  
 $\mathbf{x}_{1d} = [\phi_d \quad \theta_d \quad \psi_d]^T$ .
2. Παραγωγή του σήματος ελέγχου εξωτερικού βρόχου,  $\mathbf{u}_1 = [p_d \quad q_d \quad r_d]^T$ , μέσω ελέγχου επιφάνειας ολίσθησης.
3. Τροφοδότηση του εσωτερικού βρόχου με το σήμα αναφοράς,  
 $\mathbf{x}_{2d} = [u_d \quad v_d \quad w_d \quad p_d \quad q_d \quad r_d]^T$ .

4. Παραγωγή του σήματος ελέγχου εσωτερικού βρόχου,  $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} = [\bar{V}_L \quad \bar{V}_R \quad \delta e \quad \delta \alpha]^T$ , μέσω ελέγχου επιφάνειας ολίσθησης.
5. Τροφοδότηση του σήματος ελέγχου  $\mathbf{u}_2$  στο αερόχημα.
6. Ανάδραση καταστάσεων.



Σχήμα 3.8: Δομή Ελεγκτή Πτήσης.

Στις παρακάτω υποενότητες αναλύεται ο σχεδιασμός του εσωτερικού και εξωτερικού βρόχου αντίστοιχα.

### Σχεδιασμός Εξωτερικού Βρόχου

Το σύστημα του εξωτερικού βρόχου δίνεται από τις σχέσεις

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}) + G_1(\mathbf{x})\mathbf{u}_1, \quad (3.37)$$

όπου,  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{e} = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T$  και

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1) = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \quad G_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}.$$

Σύμφωνα με τη σχέση (3.34) ο νόμος ελέγχου γράφεται ως

$$\mathbf{u}_1 = \{G_1(\mathbf{x})\}^{-1} \left\{ \dot{\mathbf{x}}_{1d} - \zeta_1 \Lambda_1 \text{sat}\left(\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_{1d}}{\phi_1}\right) \right\}. \quad (3.38)$$

Το σήμα αναφοράς παράγεται  $\mathbf{x}_{1d}$  έρχεται από τον ελεγκτή πλοήγησης ενώ η θετική σταθερά  $\zeta_1$  επιλέγεται για τη διατήρηση της σθεναρότητας, όπως περιγράφηκε σε παραπάνω παράγραφο.

### Σχεδιασμός Εσωτερικού Βρόχου

Το σύστημα του εσωτερικού βρόχου δίνεται από τις σχέσεις

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) + G_2(\mathbf{x})\mathbf{u}_2, \quad (3.39)$$

όπου  $\mathbf{x}_2 = [\mathbf{v}_{C/FE}^{FB} \quad \boldsymbol{\omega}_{FB/FE}^{FB}]^T$  και

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{x}) = [f_1(\mathbf{x}) \quad f_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad f_6(\mathbf{x})]^T, \quad G_2(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \mathbf{g}_6(\mathbf{x})]^T.$$

όπου η αναλυτική έκφραση των  $f_i$  και  $g_i$  δίνεται στο παράρτημα. Ο νόμος ελέγχου για το σύστημα εσωτερικού βρόχου διατυπώνεται ως

$$\mathbf{u}_2 = \{G_2(\mathbf{x})\}^{-1} \left\{ \dot{\mathbf{x}}_{2_d} - \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) - \zeta_2 \Lambda_2 \operatorname{sat}\left(\frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_{2_d}}{\phi_2}\right) \right\}. \quad (3.40)$$

Το σήμα αναφοράς παράγεται  $\mathbf{x}_{2_d}$  έρχεται από τον ελεγκτή πλοϊγησης και τον εξωτερικό βρόχο του ελεγκτή πτήσης ενώ η θετική σταθερά  $\zeta_2$  επιλέγεται για τη διατήρηση της σθεναρότητας, όπως περιγράφηκε σε παραπάνω παράγραφο.

### 3.4 Ελεγκτής Πλοϊγησης

Στην ενότητα αυτή αναλύεται ο σχεδιασμός ενός νόμου ελέγχου για την πλοϊγηση του αεροχώματος στον  $\mathbb{R}^3$ . Για τη σύνθεση ενός τέτοιου νόμου ελέγχου έχουν προταθεί αρκετές μεθοδολογίες οι οποίες μπορούν να διαχωριστούν σε δύο βασικές κατηγορίες:

1. **Παρακολούθηση μονοπατιού (path tracking)** : Στόχος αυτής της κατηγορίας μεθόδων, είναι η σύγκλιση του οχήματος σε ένα χωρικά προδιαγεγραμένο μονοπάτι. Η σύγκλιση της θέσης και του προσανατολισμού του οχήματος στο επιθυμητό μονοπάτι πραγματοποιείται με την εφαρμογή κατάλληλων κινηματικών και γεωμετρικών σχέσεων. Αν και οι τεχνικές αυτές έχουν αναπτυχθεί κυρίως για τροχιές στο επίπεδο, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρεί την επέκταση τους στον  $\mathbb{R}^3$  στις αναφορές [12],[6].
2. **Παρακολούθηση τροχιάς (trajectory tracking)**: Στόχος αυτής της κατηγορίας μεθόδων, είναι η σύγκλιση του οχήματος σε ένα χωρικά και χρονικά προδιαγεγραμένο μονοπάτι. Από την πληθώρα μεθόδων που έχουν προταθεί, στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής επιλέγεται η μεθοδολογία που περιγράφεται στην αναφορα [3] . Η συγκεκριμένη επιλογή βασίζεται στη γεγονός ότι ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου στηρίζεται στα εργαλεία ευστάθειας **Lyapunov** και έτσι μπορεί να συνδυαστεί με τον ελεγκτή πτήσης για την απόδειξη της συνολικής ευστάθειας του συστήματος.

Όπως έχει αποδειχθεί, το σύστημα πλοϊγησης αποτελείται από τρείς μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις της μορφής

$$\dot{\mathbf{x}}_N = \mathbf{F}_N(\mathbf{u}_N), \quad (3.41)$$

όπου,

$$\mathbf{u}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{C/F_E}^{F_B} & \mathbf{e} \end{bmatrix}^T.$$

Όπως αποδεικνύεται στην υποενότητα 2.2.4 (σχέση (2.9)), οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να διατυπωθούν στο σύστημα σχετικού ανέμου ως

$$\dot{x}_E = V \cos \gamma \cos \chi, \quad (3.42)$$

$$\dot{y}_E = V \cos \gamma \sin \chi, \quad (3.43)$$

$$\dot{z}_E = -V \sin \gamma. \quad (3.44)$$

Επιπλέον, ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου υποθέτει δυναμικά πρώτης τάξης για τα την είσοδο του συστήματος, δηλαδή

$$\dot{V} = c_1(V_{cmd} - V), \quad (3.45)$$

$$\dot{\gamma} = c_2(\gamma_{cmd} - \gamma), \quad (3.46)$$

$$\dot{\chi} = c_3(\chi_{cmd} - \chi). \quad (3.47)$$

Οι σχέσεις (3.45)-(3.47) βασίζονται στις παρακάτω παραδοχές:

1. Τα δυναμικά των μεταβλητών του συστήματος πλοήγησης είναι πολύ πιο αργά από αυτά του συστήματος των εξισώσεων κίνησης (τεχνική του διαχωρισμού πολλαπλών κλιμάκων).
2. Ο ελεγκτής πτήσης λειτουργεί ικανοποιητικά έτσι ώστε επιτυγχάνει την παρακολούθηση της επιθυμητής τροχίας των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος εξισώσεων κίνησης.

Με βάση τα παραπάνω το συνολικό σύστημα πλοήγησης περιγράφεται από τις εξισώσεις (3.42)-(3.44) και (3.45)-(3.47). Επιπλέον, η επιθυμητή τροχιά θεωρείται ότι δημιουργείται από τα δυναμικά ενός εικονικού οχήματος τέτοια ώστε

$$\dot{x}_{E_r} = V_r \cos \gamma_r \cos \chi_r, \quad (3.48)$$

$$\dot{y}_{E_r} = V_r \cos \gamma_r \sin \chi_r, \quad (3.49)$$

$$\dot{z}_{E_r} = -V_r \sin \gamma_r, \quad (3.50)$$

όπου προφανώς  $(x_{E_r}, y_{E_r}, z_{E_r}), V_r, \gamma_r$  και  $\chi_r$  η θέση, η ταχύτητα, η γωνία ανάβασης και η γωνίας πορείας αναφοράς αντίστοιχα. Ορίζω  $\tau_1 = V \cos \gamma$  και  $\tau_2 = V \sin \gamma$ . Επομένως οι εξισώσεις 3.42-3.44 γίνονται

$$\begin{aligned} \dot{x}_E &= \tau_1 \cos \chi, \\ \dot{y}_E &= \tau_1 \sin \chi, \\ \dot{z}_E &= -\tau_2. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Εάν οριστούν τα σήματα ελέγχου  $\tau_1^d, \tau_2^d$  και  $\chi^d$  έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η παρακολούθηση τροχίας, οι εξισώσεις (3.51) γίνονται

$$\begin{aligned} \dot{x}_E &= \tau_1^d \cos \chi^d, \\ \dot{y}_E &= \tau_1^d \sin \chi^d, \\ \dot{z}_E &= -\tau_2^d. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Θεωρούμε τα σφάλματα απόκλισης από την επιθυμητή τροχιά  $e_{x_E} = x_E - x_{E_r}, e_{y_E} = y_E - y_{E_r}$  και  $e_{z_E} = z_E - z_{E_r}$ . Τα σφάλματα απόκλισης μπορούν να σχεδιαστούν ως συστήματα πρώτης τάξης δηλαδή

$$\dot{e}_{x_E} + \alpha_1 e_{x_E} = 0, \quad (3.53)$$

$$\dot{e}_{y_E} + \alpha_2 e_{y_E} = 0, \quad (3.54)$$

$$\dot{e}_{z_E} + \alpha_3 e_{z_E} = 0. \quad (3.55)$$

Συνεπώς από τις εξισώσεις (3.53)-(3.55) εύκολα προκύπτει

$$\begin{aligned} \dot{x}_E &= \dot{x}_{E_r} - \alpha_1 e_{x_E}, \\ \dot{y}_E &= \dot{y}_{E_r} - \alpha_2 e_{y_E}, \\ \dot{z}_E &= \dot{z}_{E_r} - \alpha_3 e_{z_E}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

όπου,  $\alpha_1, \alpha_2$  και  $\alpha_3$  θετικές σταθερές. Από τις σχέσεις (3.52) και (3.56) έχουμε

$$\begin{aligned} \tau_1^d \cos \chi^d &= \dot{x}_{E_r} - \alpha_1 e_{x_E}, \\ \tau_1^d \sin \chi^d &= \dot{y}_{E_r} - \alpha_2 e_{y_E}, \\ \tau_2^d &= \dot{z}_{E_r} - \alpha_3 e_{z_E}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Με αλγεβρική διαχείριση των παραπάνω εξισώσεων εύκολα προκύπτει

$$\tau_1^d = \sqrt{(\dot{x}_{E_r}^2 - \alpha_1 e_{x_E})^2 + (\dot{y}_{E_r}^2 - \alpha_2 e_{y_E})^2}, \quad (3.58)$$

$$\tau_2^d = \alpha_3 e_{z_E} - \dot{z}_{E_r}, \quad (3.59)$$

$$\chi^d = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{y}_{E_r} - \alpha_2 e_{y_E}}{\dot{x}_{E_r} - \alpha_1 e_{x_E}}\right). \quad (3.60)$$

Στη συνέχεια ορίζουμε της μεταβλητές απόκλισης από τα επιθυμητά σήματα ελέγχου, δηλαδή

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_1 &= \tau_1 - \tau_1^d, \\ \tilde{\tau}_2 &= \tau_2 - \tau_2^d, \\ \tilde{\chi} &= \chi - \chi^d. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Δεδομένου ότι  $\dot{\tau}_1 = \dot{V} \cos \gamma - \tau_2 \dot{\gamma}$  και με τη χρήση των εξισώσεων (3.45) και (3.46), εύκολα προκύπτει

$$\dot{\tilde{\tau}}_1 = \dot{V} \cos \gamma - \tau_2 \dot{\gamma} - \dot{\tau}_1^d = c_1 \tau_1 \frac{\delta V}{V} - c_2 \tau_2 \delta \gamma - \dot{\tau}_1^d, \quad (3.62)$$

όπου,

$$\delta V = V_{cmd} - V \quad \text{και} \quad \delta \gamma = \gamma_{cmd} - \gamma.$$

Όμοια, δεδομένου ότι  $\dot{\tau}_2 = \dot{V} \sin \gamma + V \dot{\gamma} \cos \gamma$  και με τη χρήση των σχέσεων (3.45) και (3.46) έχουμε

$$\dot{\tilde{\tau}}_2 = c_1 \tau_2 \frac{\delta V}{V} + c_2 \tau_1 \delta \gamma - \dot{\tau}_2^d. \quad (3.63)$$

Οι σχέσεις (3.62) και (3.63) μπορούν να γραφούν σε μητρωική μορφή ως

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\tau}}_1 \\ \dot{\tilde{\tau}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_2 \tau_2 & c_1 \tau_1 \\ c_2 \tau_1 & c_1 \tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \gamma \\ \frac{\delta V}{V} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\tau}_1^d \\ \dot{\tau}_2^d \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

Τα δυναμικά των αποκλίσεων των σημάτων ελέγχου επιλέγονται έτσι ώστε

$$\dot{\tilde{\tau}}_1 + \lambda_1 \tilde{\tau}_1 = 0, \quad (3.65)$$

$$\dot{\tilde{\tau}}_2 + \lambda_2 \tilde{\tau}_2 = 0, \quad (3.66)$$

$$\dot{\tilde{\chi}} + \lambda_3 \tilde{\chi} = 0, \quad (3.67)$$

όπου,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  και  $\lambda_3$  θετικές σταθερές.

Με συνδυασμό των σχέσεων (3.64) και (3.65)-(3.66) προκύπτει

$$\begin{bmatrix} -c_2 \tau_2 & c_1 \tau_1 \\ c_2 \tau_1 & c_1 \tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \gamma \\ \frac{\delta V}{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tau}_1^d - \lambda_1 \tilde{\tau}_1 \\ \dot{\tau}_2^d - \lambda_2 \tilde{\tau}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Από την επίλυση των εξισώσεων (3.68) προκύπτει ο νόμος ελέγχου για την ταχύτητα και τη γωνία ανόδου

$$V_{cmd} = V + \frac{1}{c_1} \left\{ \cos \gamma (\dot{\tau}_1^d + \lambda_1 \tilde{\tau}_1) - \sin \gamma (\dot{\tau}_2^d - \lambda_2 \tilde{\tau}_2) \right\}, \quad (3.69)$$

$$\gamma_{cmd} = \gamma - \frac{1}{c_2 V} \left\{ \sin \gamma (\dot{\tau}_1^d + \lambda_1 \tilde{\tau}_1) - \cos \gamma (\dot{\tau}_2^d - \lambda_2 \tilde{\tau}_2) \right\}. \quad (3.70)$$

Αντίστοιχα, με βάση την εξίσωση (3.67) ο νόμος ελέγχου για τη γωνία πορείες είναι

$$\chi_{cmd} = \chi + \frac{\dot{\chi}^d - \lambda_3 \tilde{\chi}}{c_3}. \quad (3.71)$$

Όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, η ευστάθεια του συστήματος με την εφαρμογή του παραπάνω νόμου ελέγχου μπορεί να αναλυθεί με τη χρήση της θεωρίας ευστάθειας Lyapunov. Για το σκοπό αυτό, επιλέγεται υποψήφια συνάρτηση Lyapunov τέτοια ώστε,

$$V = \frac{1}{2}(\tilde{\tau}_1^2 + \tilde{\tau}_2^2 + \tilde{\chi}^2 + e_{x_E}^2 + e_{y_E}^2 + e_{z_E}^2). \quad (3.72)$$

Είναι προφανές ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι θετικά ορισμένη  $\forall x, t$  και συνεπώς είναι κάτω φραγμένη στο 0. Επιπλέον η παράγωγος της παραπάνω συνάρτησης είναι

$$\dot{V} = \tilde{\tau}_1 \dot{\tilde{\tau}}_1 + \tilde{\tau}_2 \dot{\tilde{\tau}}_2 + \tilde{\chi} \dot{\tilde{\chi}} + e_{x_E} \dot{e}_{x_E} + e_{y_E} \dot{e}_{y_E} + e_{z_E} \dot{e}_{z_E}. \quad (3.73)$$

Με τη χρήση των σχέσεων (3.53)-(3.55) και (3.65)-(3.67) η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\dot{V} = -\lambda_1 \tilde{\tau}_1^2 - \lambda_2 \tilde{\tau}_2^2 - \lambda_3 \tilde{\chi}^2 - \alpha_1 e_{x_E}^2 - \alpha_2 e_{y_E}^2 - \alpha_3 e_{z_E}^2. \quad (3.74)$$

Για θετικές σταθερές  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  και  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  είναι προφανές ότι η  $\dot{V}$  είναι αρνητικά ημιορισμένη και ομοιόμορφα συνεχής. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα 1, η συνάρτηση  $V$  είναι συνάρτηση Lyapunov και το σύστημα είναι ευσταθές. Επιπλέον, από το λήμμα 2 έχουμε  $\dot{V} \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Συνεπώς με βάση την (3.74) έχουμε  $\tilde{\tau}_1 \rightarrow 0, \tilde{\tau}_2 \rightarrow 0, \tilde{\chi} \rightarrow 0, e_{x_E} \rightarrow 0, e_{y_E} \rightarrow 0, e_{z_E} \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Για την ολοκλήρωση του νόμου ελέγχου απαιτείται η εύρεση της επιθυμητής γωνίας κλίσης  $\mu$ . Για τον σκοπό αυτό θεωρείται ότι η στροφές του αεροχήματος γίνονται έτσι ώστε οι πλευρικές δυνάμεις να είναι μηδενικές (σχήμα 3.9). Ο στροφές αυτές αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως συντονισμένες και μέσω του περιορισμού των μηδενικών πλευρικών δυνάμεων οδηγούν στην έκφραση της επιθυμητής γωνίας κλίσης, όπως αναλύεται στην παρακάτω υποενότητα.

### Συντονισμένη Στροφή

Δεδομένου του περιορισμού μηδενικής πλευρικής δύναμης, οι εξωτερικές δυνάμεις που δρουν στο αερόχημα μπορούν να γραφούν ως

$$\mathbf{F}^{FW} = \mathbf{W}^{FW} + \mathbf{T}^{FW} + \mathbf{F}_A^{FW} = \begin{bmatrix} -mg \sin \gamma \\ mg \sin \mu \cos \gamma \\ mg \cos \mu \cos \gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \cos \beta \cos \alpha \\ -T \sin \beta \cos \alpha \\ -T \sin \alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ L \end{bmatrix},$$

όπου, για  $\beta \simeq 0$  προκύπτει

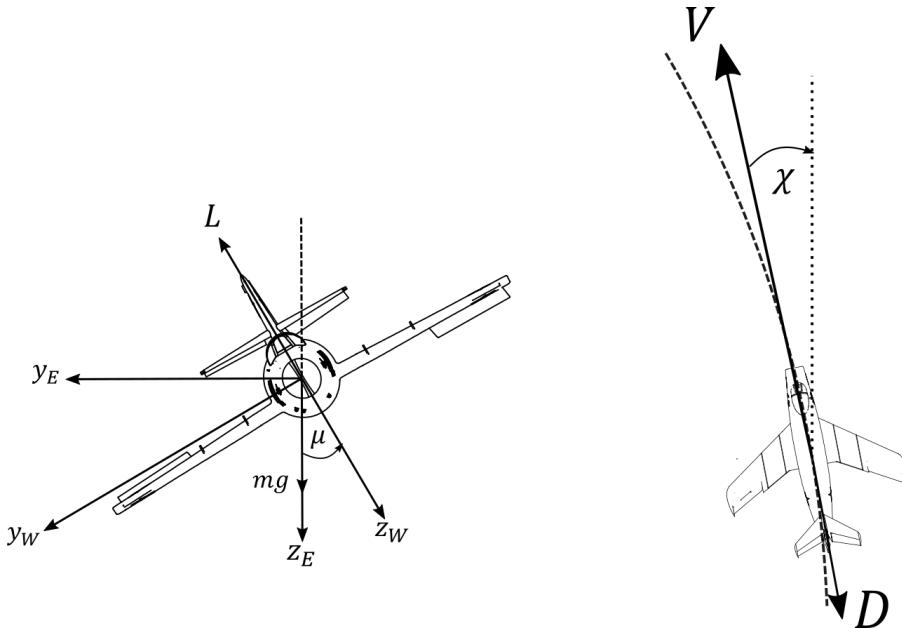
$$\mathbf{F}^{FW} = \begin{bmatrix} -mg \sin \gamma + T \cos \alpha - D \\ mg \sin \mu \cos \gamma \\ mg \cos \mu \cos \gamma - \sin \alpha - L \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Στην παράγραφο 2.4.1 έχει αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις Newton-Euler στο περιστρεφόμενο σύστημα σχετικού ανέμου μπορούν να διατυπωθούν ως,

$$\mathbf{F}_{FE} = m\dot{\mathbf{v}}_{C/FE}^{FW} + mS(\boldsymbol{\omega}_{FW/FE}^{FW})\mathbf{v}_{C/FE}^{FW}, \quad (3.76)$$

όπου,

$$\mathbf{v}_{C/FE}^{FW} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\omega}_{FW/FE}^{FW} = \begin{bmatrix} p_w \\ q_w \\ r_w \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 3.9: Συντονισμένη Στροφή.

Με εφαρμογή των παραπάνω σχέσεων έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{FW} = m \begin{bmatrix} \dot{V} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 0 & -r_w & q_w \\ r_w & 0 & -p_w \\ -q_w & p_w & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} -mg \sin \gamma + T \cos \alpha - D \\ mg \sin \mu \cos \gamma \\ mg \cos \mu \cos \gamma - \sin \alpha - L \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \dot{V} \\ r_w V \\ -q_w V \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

όπου η γ συνιστώσα της παραπάνω σχέσης δίνει

$$g \sin \mu \cos \gamma = r_w V. \quad (3.78)$$

Επιπλέον από τη σχέση (2.5) έχουμε

$$r_w = -\dot{\gamma} \sin \mu + \dot{\chi} \cos \mu \cos \gamma. \quad (3.79)$$

Από τις σχέσεις (3.78) και (3.79) προκύπτει ο νόμος ελέγχου για τη γωνία κλίσης

$$\mu_{cmd} = \tan^{-1} \left( \frac{V \dot{\chi} \cos \gamma}{V \dot{\gamma} + g \cos \gamma} \right)_{cmd}. \quad (3.80)$$

### Παρατηρήσεις

Με βάση τα παραπάνω είναι προφανές ότι το συνολικό διάνυσμα αναφοράς που τροφοδοτείται από τον ελεγκτή πλοιήγησης στον ελεγκτή πτήσης είναι το

$$\mathbf{u}_{N_d} = \begin{bmatrix} V_{cmd} \\ \mu_{cmd} \\ \gamma_{cmd} \\ \chi_{cmd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V + \frac{1}{c_1} \left\{ \cos \gamma (\dot{\tau}_1^d + \lambda_1 \tilde{\tau}_1) - \sin \gamma (\dot{\tau}_2^d - \lambda_2 \tilde{\tau}_2) \right\} \\ \tan^{-1} \left( \frac{V \dot{\chi} \cos \gamma}{V \dot{\gamma} + g \cos \gamma} \right)_{cmd} \\ \gamma - \frac{1}{c_2 V} \left\{ \sin \gamma (\dot{\tau}_1^d - \lambda_1 \tilde{\tau}_1) - \cos \gamma (\dot{\tau}_2^d - \lambda_2 \tilde{\tau}_2) \right\} \\ \chi_{cmd} = \chi + \frac{\dot{\chi}^d - \lambda_3 \tilde{\chi}}{c_3} \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

Οστόσο, κατά την υλοποίηση του νόμου ελέγχου παρουσιάζονται δύο τεχνικότητες οι οποίες αναλύονται και επιλύονται παρακάτω:

- Μετάβαση από το σύστημα σχετικού ανέμου στο κεντροβαρικό σύστημα:** Δεδομένου ότι τα μεγέθη της σχέσης (3.81) αναφέρονται στο σύστημα σχετικού ανέμου, απαιτείται η έκφραση τους στο κεντροβαρικό σύστημα προκειμένου να μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον ελεγκτή πτήσης. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω των σχέσεων

$$u_{cmd} = V_{cmd} \cos \beta \cos \alpha, \quad v_{cmd} = V_{cmd} \sin \beta, \quad w_{cmd} = V_{cmd} \cos \beta \sin \alpha, \quad (3.82)$$

$$\phi_{cmd} = \tan^{-1} \left( \frac{R_{32}}{R_{33}} \right), \quad \theta_{cmd} = \sin^{-1} (-R_{31}), \quad \psi_{cmd} = \tan^{-1} \left( \frac{R_{21}}{R_{11}} \right), \quad (3.83)$$

όπου,

$$R_{F_B}^{F_E} = R_{F_W}^{F_E} R_{F_B}^{F_W} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}.$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι η ίδια τεχνική εφαρμόζεται και για τη μεταφορά από το κεντροβαρικό σύστημα στο σύστημα σχετικού ανέμου.

- Επέκταση πεδίου ορισμού αντίστροφης εφαπτομένης:** Από τις σχέσεις (3.83) παρατηρούμε ότι οι επιθυμητές γωνίες  $\phi$ ,  $\theta$  και  $\psi$  προκύπτουν από τον υπολογισμό των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων  $\arctan(y)$  και  $\arcsin(x)$ . Για τις παραπάνω τριγωνομετρικές συναρτήσεις γνωρίζουμε ότι:

$$\arctan(y) \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{και} \quad \arcsin(x) \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad \forall \quad y \in \mathbb{R}, x \in [-1, 1] \quad (3.84)$$

Για τη συγκεκριμένη εφαρμογή που μελετάται, οι γωνίες  $\phi$  και  $\theta$  παίρνουν τιμές στο διάστημα  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  και συνεπώς οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις της σχέσης (3.84) μπορούν να χρησιμοποιηθούν αυτούσιες. Ωστόσο, το πεδίο ορισμού της γωνίας πορείας  $\psi$  είναι στην πραγματικότητα  $(-\infty, +\infty)$  καθώς εξαρτάται αποκλειστικά από τον προγραμματισμό πορείας, ο οποίος μπορεί να δώσει εντολή για παρακολούθηση οποιασδήποτε τιμής της γωνίας  $\psi$  στο  $\mathbb{R}$ . Συνεπώς είναι προφανές πως απαιτείται επέκταση του πεδίου ορισμού της αντίστροφης εφαπτομένης. Για το σκοπό αυτό αρχικά ορίζεται η αντίστροφη εφαπτομένη τεσσάρων τετραδονίων:

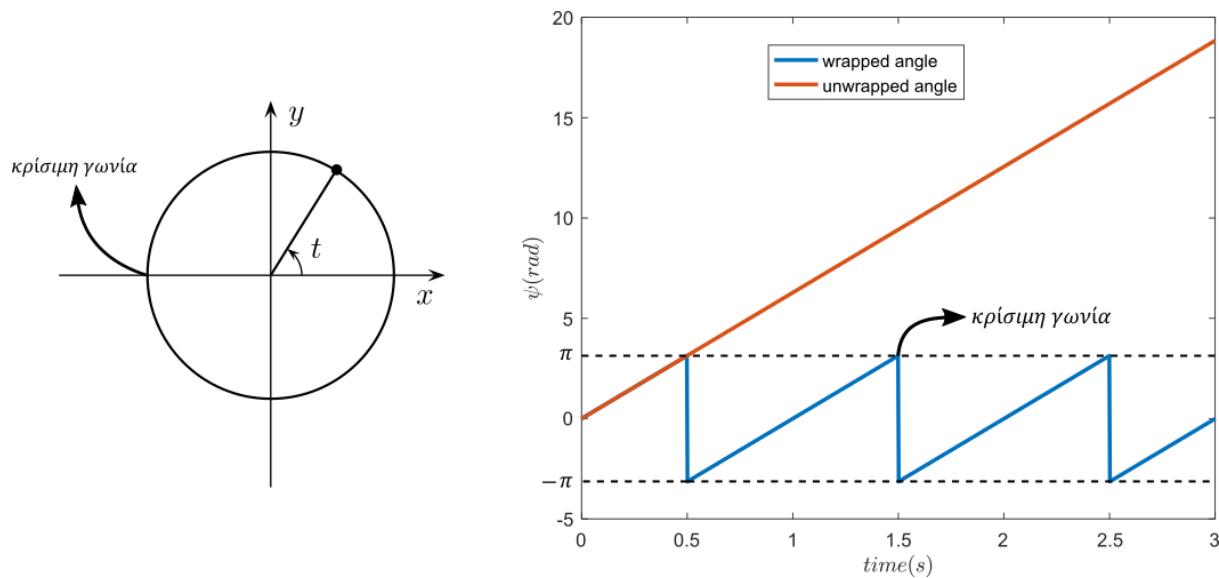
$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan(y/x), & \text{εάν } x > 0. \\ \arctan(y/x) + \pi, & \text{εάν } x < 0 \text{ και } y \geq 0. \\ \arctan(y/x) - \pi, & \text{εάν } x < 0 \text{ και } y < 0. \\ \pi/2, & \text{εάν } x = 0 \text{ και } y > 0. \\ -\pi/2, & \text{εάν } x = 0 \text{ και } y < 0. \\ \text{Δεν ορίζεται,} & \text{εάν } x = 0 \text{ και } y = 0. \end{cases}, \quad (3.85)$$

Η παραπάνω συνάρτηση λαμβάνει υπόψιν τα πρόσημα των ορισμάτων της και επιτρέπει τον ορισμό της αντίστροφης εφαπτομένης σε έναν ολόκληρο τριγωνομετρικό κύκλο, δηλαδή  $\text{atan2}(y, x) \in [-\pi, \pi]$ . Παρατηρώντας τη σχέση (3.85) βλέπουμε

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \text{atan2}(y, x) \neq \lim_{y \rightarrow 0^-} \text{atan2}(y, x), \quad \forall \quad x < 0. \quad (3.86)$$

Η παραπάνω ασυνέχεια αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως το πρόβλημα της γωνίας στρέβλωσης (*wrapping angle*). Μέσω ανάπτυξης αλγορίθμου καταμέτρησης περιστροφών και κατάλληλης διορθώσης των αποτελεσμάτων επιτυγχάνεται η επέκταση του πεδίου ορισμού της αντίστροφης εφαπτομένης στο  $(-\infty, +\infty)$ , όπως φαίνεται στο

σχήμα 3.10.

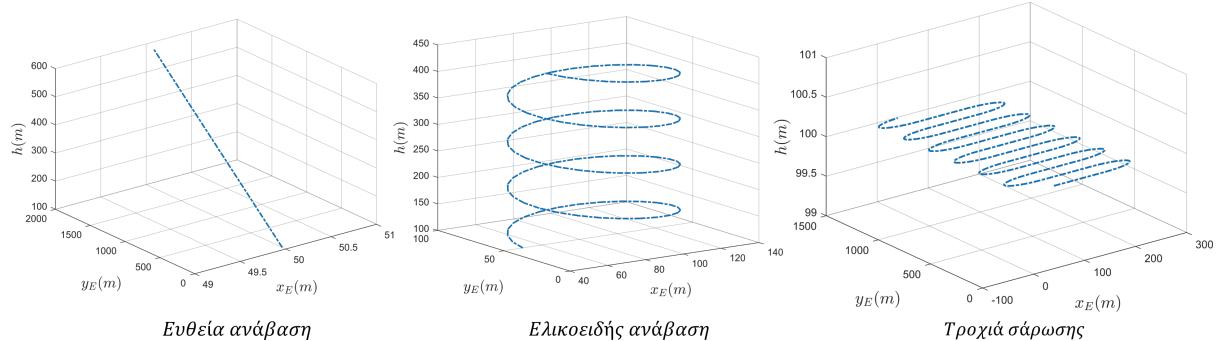


Σχήμα 3.10: Πρόβλημα γωνίας στρέβλωσης.

# Κεφάλαιο 4

## Προσομοιώσεις & Αποτελέσματα

Το παρόν κεφάλαιο έχει ως στόχο την επαλήθευση των θεωρητικών αποτελεσμάτων που εξήγησαν στο κεφάλαιο 3 μέσα από την εκπόνηση μιας σειρά προσομοιώσεων. Για το σκοπό μελετώνται τρείς βασικές τροχιές αναφοράς (ευθεία ανάβαση, ελικοειδής ανάβαση και τροχιά σάρωσης), τις οποίες το αερόχημα καλείται να ακολουθήσει με αυτόνομο τρόπο. Οι τροχιές αυτές επιλέγονται καθώς καλύπτουν μεγάλο μέρος του χώρου μεταβλητών κατάστασης ενώ ταυτόχρονα αποτελούνται από γεωμετρικά σχήματα (ευθείες και τόξα κύκλων) όπως αυτά ορίζονται από τη θεωρία βέλτιστων καμπυλών *Markov-Dubins* [7].



Σχήμα 4.1: Μελετούμενες τροχιές αναφοράς.

Έχοντας ως δεδομένο σήμα αναφοράς τις παραπάνω τροχιές, το κεφάλαιο δομείται γύρω από τους εξής άξονες:

- Επιλογή παραμέτρων του ελεγκτή για την επίτευξη σύγκλισης στην επιθυμητή τροχιά αναφοράς υπό την απουσία διαταραχών.
- Παρουσίαση της απόκρισης του συστήματος για την περίπτωση μηδενικών διαταχών.
- Εξέτασης της φύσης των πιθανών διαταραχών και ανάπτυξη κατάλληλων μοντέλων για την περιγραφή αυτών.
- Απόκριση του συστήματος υπό την παρουσία διαταραχών στους αεροδυναμικούς συντελεστές και στην ταχύτητα του ανέμου.

### 4.1 Επιλογή Παραμέτρων Ελεγκτή

Στην ενότητα αυτή γίνεται επιλογή των παραμέτρων του ελεγκτή με κριτήριο το σφάλμα από την επιθυμητή τροχιά. Για την επιλογή αυτή θεωρείται ότι το μοντέλο του αεροχήματος είναι πλήρως γνωστό ενώ οι εξωτερικές διαταραχές είναι μηδενικές. Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 3.4, ο σχεδιασμός του ελεγκτή πλοήγησης βασίζεται στην παραδοχή ότι ο ελεγκτής πτήσης, έχει τη δυνατότητα άμεσης σύγκλισης στο επιθυμητό σήμα αναφοράς. Με βάση την παραπάνω παραδοχή, η επιλογή των παραμέτρων του ελεγκτή πλοήγησης μπορεί να αποσυμπλεχθεί από αυτή του ελεγκτή πτήσης. Η επιλογή αυτή επιτυγχάνεται

με την πραγματοποίηση μιας σειράς προσομοιώσεων και την αξιολόγηση τους με βάση το παραγώμενο σφάλμα από την τροχιά αναφοράς, το οποίο ορίζεται ως

$$\|\mathbf{e}\| = \sqrt{(x_E - x_{E_r})^2 + (y_E - y_{E_r})^2 + (z_E - z_{E_r})^2} = \sqrt{e_{x_E}^2 + e_{y_E}^2 + e_{z_E}^2}. \quad (4.1)$$

Για την ανάδειξη της επίδρασης των παραμέτρων στην αποτελεσματικότητα του ελεγκτή πλοήγησης, θεωρούμε δύο ομάδες εξεταζόμενων παραμέτρων όπως φαίνεται στον πίνακα 4.1.

Παράμετρος	Ομάδα Παραμέτρων I	Ομάδα Παραμέτρων II
$\alpha_1$	0.5	3
$\alpha_2$	0.5	3
$\alpha_3$	0.5	3
$c_1$	5	10
$c_2$	5	10
$c_3$	3	6
$\lambda_1$	1	1
$\lambda_2$	1	1
$\lambda_3$	1	5

Πίνακας 4.1: Εξεταζόμενες τιμές παραμέτρων ελεγκτή πλοήγησης.

Στη συνέχεια θεωρείται επιθυμητή τροχιά αναφοράς (εικονικό όχημα)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{E_r} \\ \dot{y}_{E_r} \\ \dot{z}_{E_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_r \cos \gamma_r \cos \chi_r \\ V_r \cos \gamma_r \sin \chi_r \\ -V_r \sin \gamma_r \end{bmatrix} \quad \text{όπου } V_r = 20m/s, \gamma_r = 25^\circ \text{ και } \chi_r = 90^\circ,$$

με αρχικές συνθήκες  $\mathbf{p}(0) = [100 \quad 100 \quad -100]^T (m)$ . Αντίστοιχα, το πραγματικό όχημα αρχικοποιείται ως

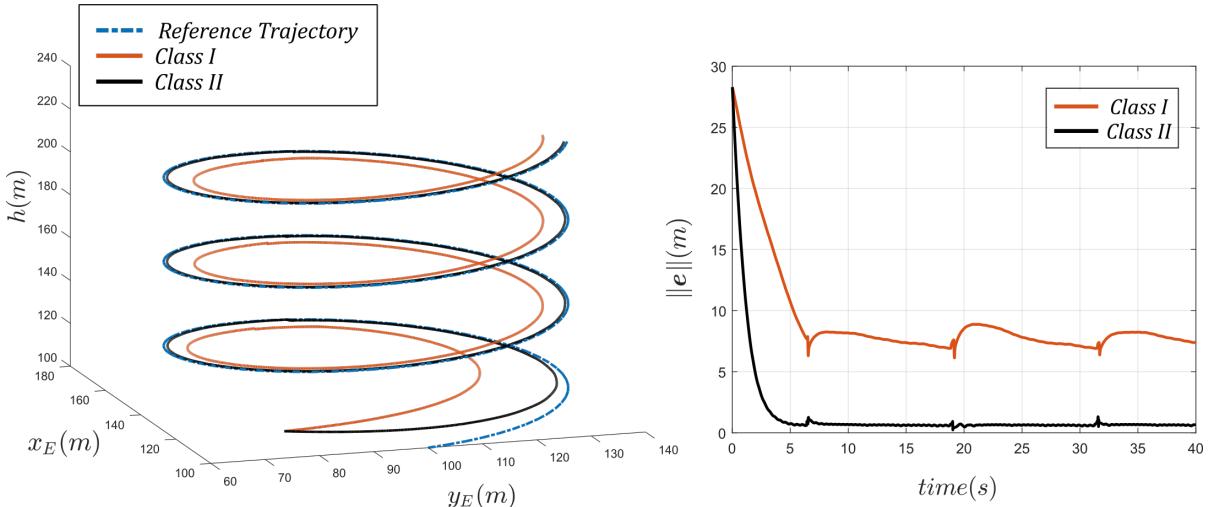
$$\begin{bmatrix} x_E(0) \\ y_E(0) \\ z_E(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 120 \\ -100 \end{bmatrix} \quad \text{με } V(0) = 15m/s, \gamma(0) = 0^\circ \text{ και } \chi(0) = 90^\circ.$$

Εφαρμόζοντας το νόμο ελέγχου των σχέσεων (3.69)-(3.71) στο σύστημα (3.48)-(3.50), για τις δύο ομάδες παραμέτρων, προκύπτουν τα αποτελέσματα του σχήματος 4.2. Είναι προφανές ότι η ομάδα παραμέτρων II οδηγεί σε σημαντικά γρηγορότερη σύγκλιση στην τροχιά αναφοράς ενώ το σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση πλησιάζει το μηδέν. Δεδομένου ότι το τελικό σφάλμα βρίσκεται εντός των αποδεκτών ορίων και ο χρόνος αποκατάστασης είναι ικανοποιητικός, η ομάδα παραμέτρων II κρίνεται κατάλληλη για τη σύνθεση του νόμου ελέγχου πλοήγησης.

Αντίστοιχα, δεδομένων των παραμέτρων του ελεγκτή πλοήγησης, απαιτείται η επιλογή των παραμέτρων του ελεγκτή πτήσης, όπως αυτός ορίζεται από τις σχέσεις (3.38) και (3.40). Κριτήριο για την αξιολόγηση των παραμέτρων αποτελεί το σφάλμα από το σήμα αναφοράς, το οποίο ορίζεται ως

$$\|\mathbf{e}_f\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_d\|. \quad (4.2)$$

Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι κατά την επιλογή των παραμέτρων του ελεγκτή πτήσης, λαμβάνονται υπόψιν τα φυσικά όρια των ενεργοποιητών, τόσο ως προς τα δυνατά εύρη λειτουργίας όσο και ως προς τους δυνατούς χρόνους απόκρισης. Με βάση τα παραπάνω, ο σχεδιασμός των δυναμικών του σφάλματος όπως παρουσιάστηκαν στη σχέση (3.16), επιτυγχάνεται λαμβάνοντας υπόψιν τα όσα αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 3 σχετικά με την τεχνική των διαδοχικών βρόχων. Λαμβάνοντας υπόψιν την απαίτηση για τα πολύ γρηγορότερα



Σχήμα 4.2: Επίδραση παραμέτρων ελεγκτή πλοιόγησης.

δυναμικά του εσωτερικού σε σχέση με τον εξωτερικό βρόχου, επιλέγονται

$$K_1 = \frac{1}{\tau_1} I_{3 \times 3} \quad \text{και} \quad K_2 = \frac{1}{\tau_2} I_{6 \times 6} \quad \text{όπου, } \tau_1 = 0.1 \quad \text{και} \quad \tau_2 = 0.01. \quad (4.3)$$

Για την ολοκλήρωση του νόμου ελέγχου επιλέγονται

$$\Lambda_1 = I_{3 \times 3}, \quad \Lambda_2 = I_{6 \times 6}, \quad \zeta_1 = 3, \quad \phi_1 = 3, \quad \zeta_2 = 20, \quad \phi_2 = 20. \quad (4.4)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η επιλογή των παραμέτρων  $\zeta_i, \phi_i$  γίνεται με σκοπό τη στάθμιση των εισερχόμενων στο σύστημα διαταραχών όπως έχει αναλυθεί και σε προηγούμενη ενότητα.

## 4.2 Προσομοίωση Πτήσης Απουσία Διαταραχών

Στην ενότητα αυτή πραγματοποιούνται οι προσομοίωσεις πτήσης του αεροχήματος θεωρώντας πλήρη γνώση του μοντέλου και μηδενικές εξωτερικές διαταραχές. Για το σκοπό αυτό, το σετ των διαφορικών εξισώσεων της σχέσης (2.67) επιλύεται με αριθμητική ολοκλήρωση, εφαρμόζοντας τους νόμους ελέγχου των σχέσεων (3.38),(3.40) και χρησιμοποιώντας ως αναφορά τις τροχιές του σχήματος σχήματος 4.1. Συγκεκριμένα έχουμε:

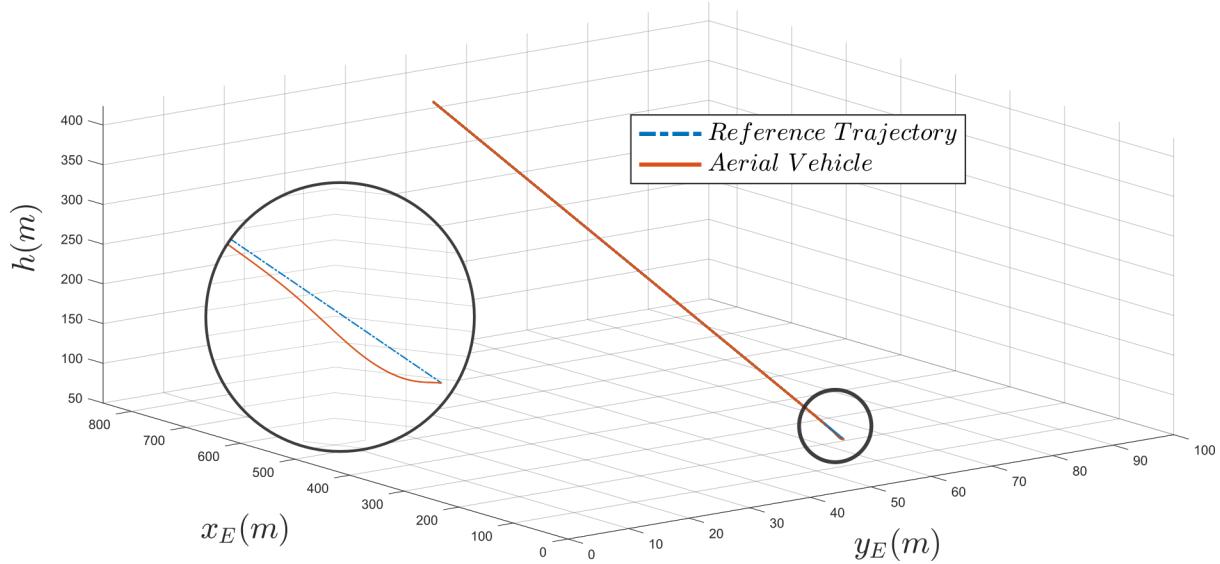
**Ευθεία ανάβαση:** Για την πραγματοποίηση της προσομοίωσης το αερόχημα αρχικοποιείται ως

$$\mathbf{x}(0) = [12 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad \text{και} \quad \mathbf{x}_n(0) = [50 \ 50 \ -100]^T.$$

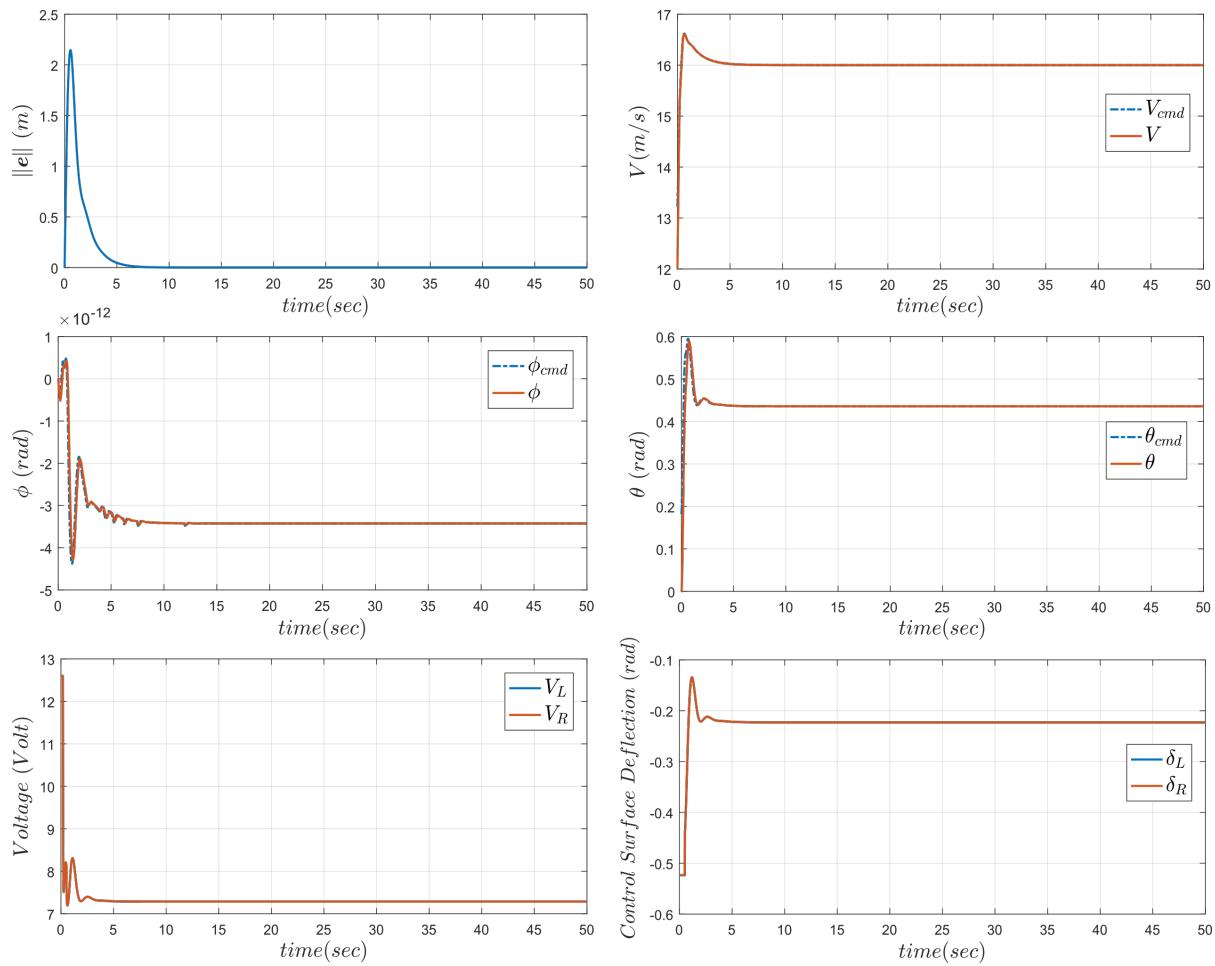
Αντίστοιχα, η τροχιά αναφοράς αρχικοποιείται ως

$$\mathbf{p}(0) = [50 \ 50 \ -100]^T \quad \text{με παραμέτρους, } V_r = 16 \text{ m/s, } \gamma_r = 20^\circ \text{ και } \chi_r = 0^\circ.$$

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης καθώς και τα παραγώμενα σήματα ελέγχου παρουσιαστιάζονται στα σχήματα 4.3 και 4.4. Παρατηρώντας τα σχήματα αυτά είναι προφανές ότι παρα τις μηδενικές αρχικές συνθήκες το αερόχημα σύντομα συγκλίνει στην επιθυμητή τροχιά. Επίσης από το σχήμα 4.4 βλέπουμε ότι ο ελεγκτής πτήσης καταφέρνει να παρακουλουθήσει με επιτυχιά το σήμα αναφοράς που παράγεται από τον ελεγκτή πλοιόγησης. Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι οι παραγώμενες εκτροπές των επιφανειών ελέγχου έχουν το αναμενόμενο πρόσημο για την επίτευξη θετικής γωνίας πρόνευσης, σύμφωνα και με τη σύμβαση του σχήματος 2.13.

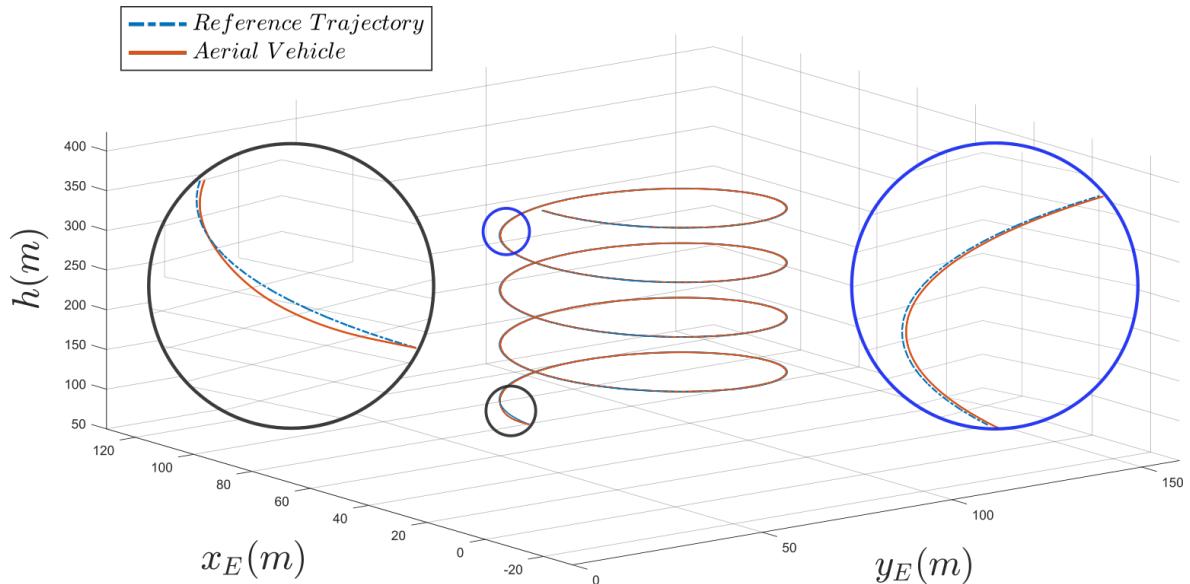


Σχήμα 4.3: Τροχιά ευθείας ανάβασης.

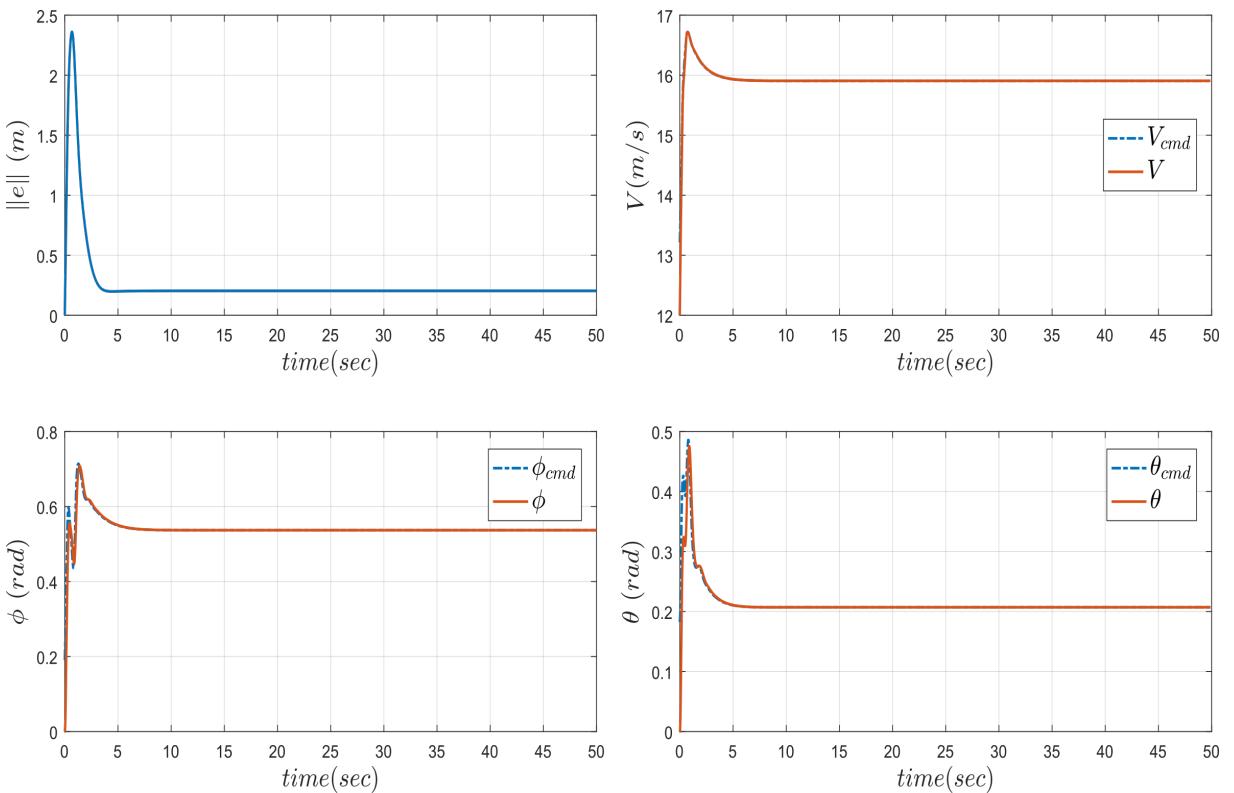


Σχήμα 4.4: Σφάλμα, μεταβλητές κατάστασης και σήματα ελέγχου τροχιάς ευθείας ανάβασης.

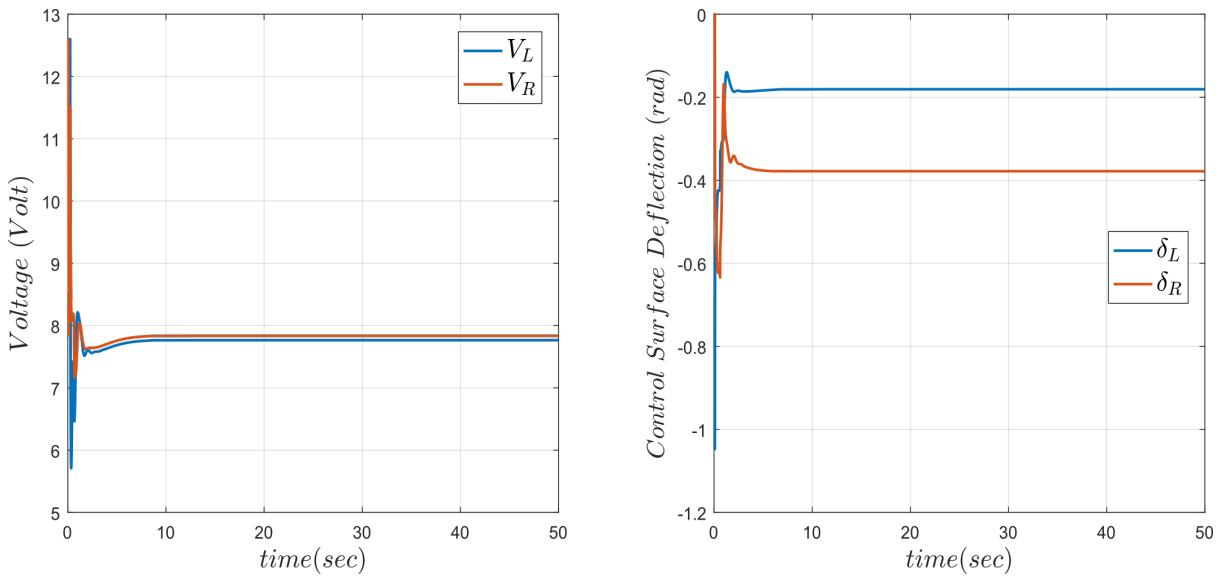
**Ελικοειδής ανάβαση:** Αντίστοιχα, για την πραγματοποίηση της προσομοίωσης με τροχία αναφοράς αυτή της ελικοειδούς ανάβασης, το αερόχημα αρχικοποιείται με αρχικές συνθήκες ίδιες με αυτές τις ευθείας ανάβασης. Επιπλέον, η τροχιά αναφοράς ξεκινάει από το σημείο  $p(0) = [50 \ 50 \ -100]^T$  με παραμέτρους  $V_r = 16 \text{ m/s}$ ,  $\gamma_r = 20^\circ$  και  $\chi_r = 0^\circ$ . Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης καθώς και τα παραγώμενα σήματα ελέγχου παρουσιασιάζονται στα σχήματα 4.5-4.7.



Σχήμα 4.5: Τροχιά ελικοειδούς ανάβασης.



Σχήμα 4.6: Σφάλμα και μεταβλητές κατάστασης τροχιάς ελικοειδούς ανάβασης.

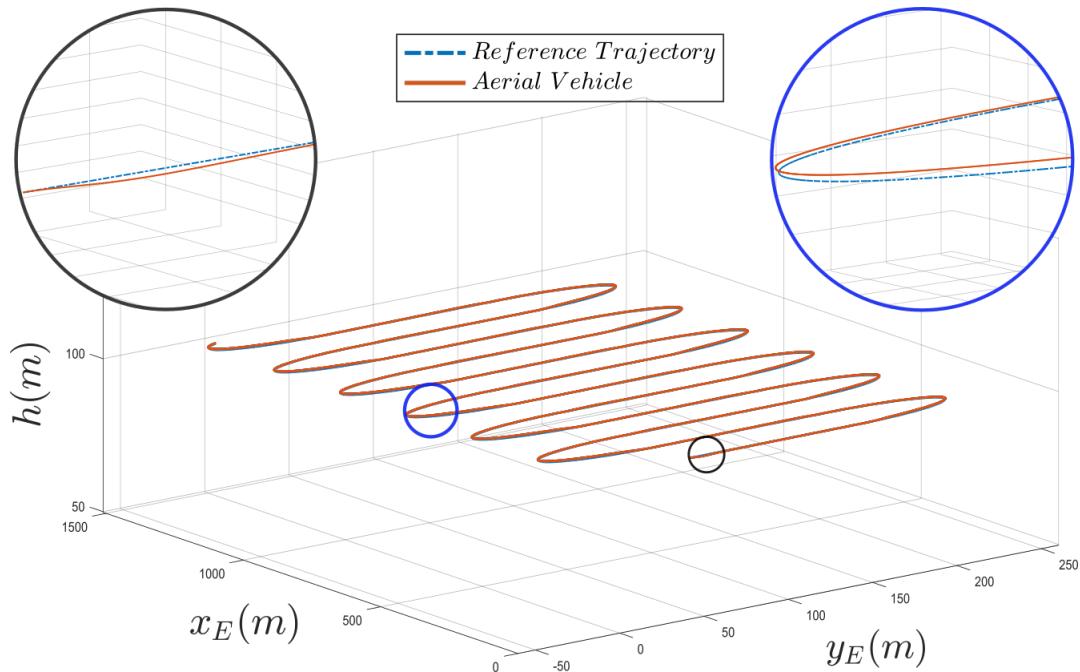


Σχήμα 4.7: Σήματα ελέγχου τροχιάς ελικοειδούς ανάβασης.

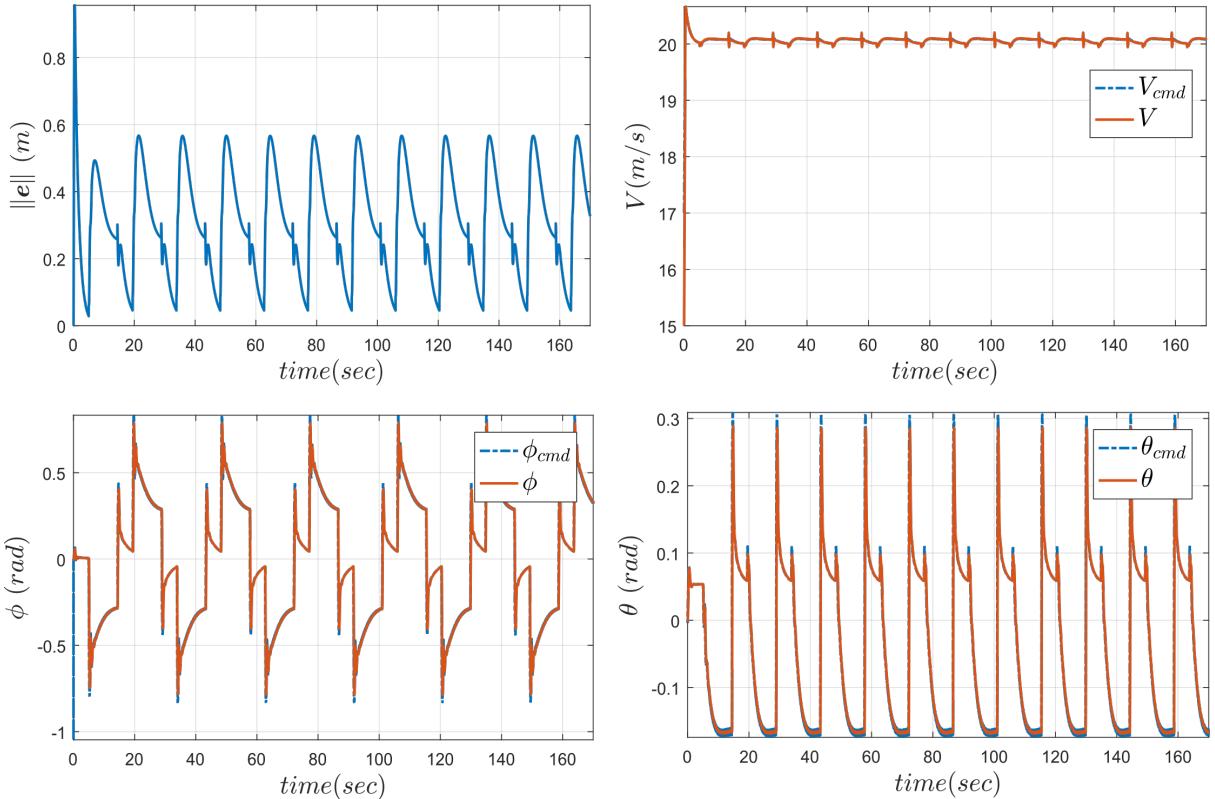
**Τροχιά σάρωσης:** Για την πραγματοποίηση της προσομοίωσης το αερόχημα αρχικοποιείται ως

$$\mathbf{x}(0) = [15 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{\pi}{2}]^T \quad \text{και} \quad \mathbf{x}_n(0) = [50 \ 50 \ -100]^T.$$

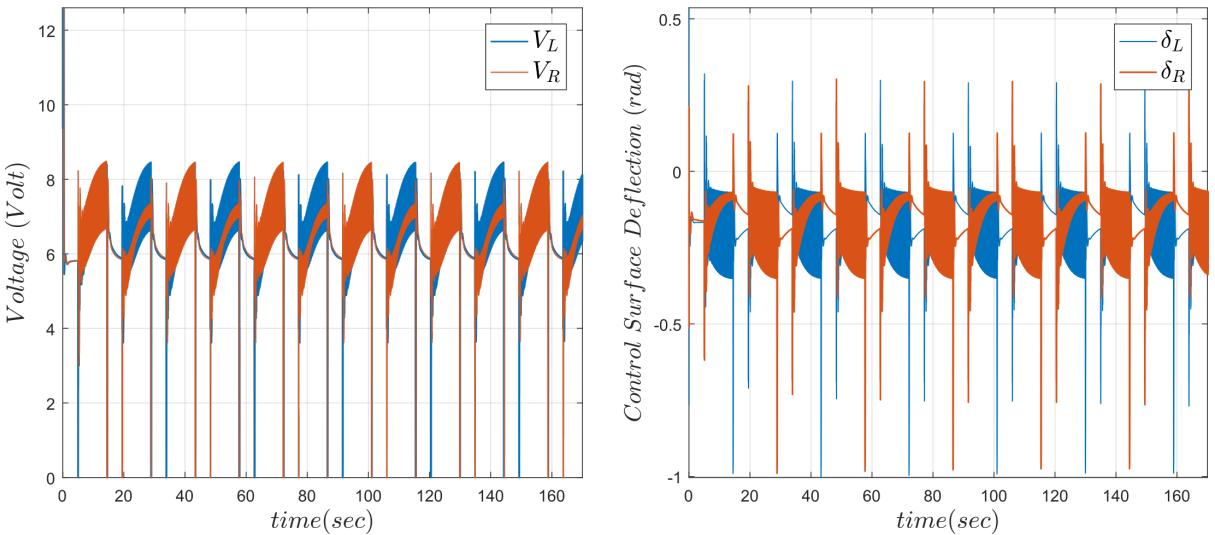
Επιπλέον, η τροχιά αναφοράς ξεκινάει από το σημείο  $p(0) = [50 \ 50 \ -100]^T$  με επιθυμητή ταχύτητα  $V_r = 20 \text{ m/s}$ . Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης καθώς και τα παραγώμενα σήματα ελέγχου παρουσιασιάζονται στα σχήματα 4.8-4.10.



Σχήμα 4.8: Τροχιά σάρωσης.



Σχήμα 4.9: Σφάλμα και μεταβλητές κατάστασης τροχιάς σάρωσης.

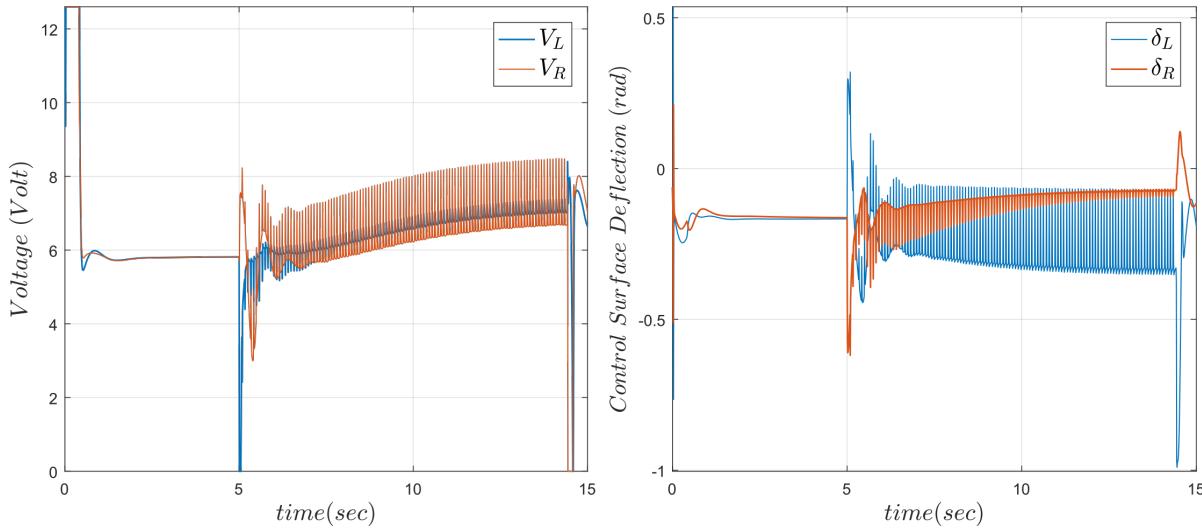


Σχήμα 4.10: Σήματα ελέγχου τροχιάς σάρωσης.

Για μεγαλύτερη σαφήνεια, στο σχήμα 4.11 παρουσιάζονται και πάλι τα σήματα ελέγχου για χρονικό ορίζοντα  $t = 15 \text{ sec}$ .

Παρατηρώντας τα παραπάνω σχήματα βλέπουμε ότι ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου επιτυγχάνει ικανοποιητική παρακολούθηση της τροχιάς αναφοράς απουσία διαταραχών. Σε όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις το σφάλμα σε μόνιμη κατάσταση βρίσκεται εντός των επιθυμητών ορίων (μικρότερο του μέτρου) με τις δράσεις των ενεργοποιητών να βρίσκονται επίσης εντός των φυσικών τους ορίων. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση που απαιτείται μικρότερο σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση, αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την καλύτερη επιλογή των παραμέτων του πίνακα 4.1. Έχοντας εξασφαλίσει μια πολύ καλή συμπεριφορά του συστήματος στην περίπτωση όπου οι εξωτερικές διαταραχές θεωρούνται

μηδενικές, στην επόμενη ενότητα εξετάζουμε την επίδραση αυτών στο σύστημα.



Σχήμα 4.11: Σήματα ελέγχου τροχιάς σάρωσης εναλλακτικής χρονικής κλίμακας.

### 4.3 Διαταραχές Συστήματος και Προσομοιώσεις

Στο πραγματικό σύστημα του αεροχήματος είναι πιθανό να δρούν διάφορες διαταραχές οι οποίες προέρχονται από μια πληθώρα παραγόντων. Για το λόγο αυτό, όπως αναλύεται και στο κεφάλαιο 3, ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου έχει δομηθεί έτσι ώστε να εμφανίζει στοιχεία σθενάροτητας ικανά να αντιμετωπίσουν τις πιθανές διαταραχές. Όπως είναι φυσικό, η ύπαρξη ενός μοντέλου για την πρόβλεψη των πιθανών διαταραχών κρίνεται καθοριστική για την αποτελεσματική σχεδίαση ενός σθεναρού νόμου ελέγχου. Με βάση τα παραπάνω, στόχος της παρούσας ενότητας είναι η καταγραφή των σημαντικότερων διαταραχών που δρούν στο σύστημα καθώς και η εύρεση του κατάλληλου μοντέλου για την πρόβλεψή τους. Οι πιθανές διαταραχές μπορούν ομαδοποιηθούν στις παρακάτω τρείς κατηγορίες:

- **Σφαλματα σχεδιασμού και κατασκευής:** Αφορά τα σφάλματα που προέρχονται από την εσφαλμένη εκτίμηση των παραμέτρων του συστήματος. Για το συγκεκριμένο σύστημα χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν η λανθασμένη εκτίμηση της μάζας, του τανυστή αδράνειας, των αεροδυναμικών συντελεστών καθώς και χαρακτηριστικών μεγεθών της γεωμετρίας του οχήματος.
- **Σφάλματα μοντελοποίησης:** Αφορά τα σφάλματα που προκύπτουν κατά την απλοποίηση μοντέλου του αεροχήματος. Για τη συγκεκριμένη εφαρμογή χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν, η θεώρηση του αεροχήματος ως στερεό σώμα, οι παραδοχές για την επιλογή του αδρανειακού συστήματος καθώς και η δομή των χρησιμοποιούμενων μοντέλων για τις αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές.
- **Εξωτερικές Διαταραχές:** Περιλαμβάνει όλους τους εξωγενείς παράγοντες που είναι πιθανό να μεταβάλλουν τις εξισώσεις του συστήματος. Για την συγκεκριμένη εφαρμογή κύρια πηγή εξωτερικών διαταραχών θεωρείται η ύπαρξη σχετικού ανέμου.

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας μελετούνται οι διαταραχές που προέρχονται τόσο από την εσφαλμένη εκτίμηση των αεροδυναμικών συντελεστών όσο και αυτές που προέρχονται από την ύπαρξη σχετικού ανέμου καθώς έχουν τη μεγαλύτερη επίδραση

το σύστημα. Συγκεκριμένα, για τη μοντελοποίηση του σφάλματος των αεροδυναμικών συντελεστών θεωρούμε

$$C_i = \bar{C}_i + \tilde{C}_i, \quad (4.5)$$

όπου,  $C_i$  η πραγματική τιμή,  $\bar{C}_i$  η εκτιμώμενη τιμή και  $\tilde{C}_i$  το πιθανό σφάλμα του αεροδυναμικού συντελεστή  $i$ . Αντίστοιχα, όπως έχει αναφερθεί στο κεφάλαιο 2, η ύπαρξη σχετικού ανέμου λαμβάνεται υπόψιν μέσω της σχέσης

$$\bar{V} = V - V_W, \quad (4.6)$$

όπου,  $V$  η ταχύτητα του κέντρου μάζας του αεροχήματος όπως την αντιλαμβάνεται παρατηρητής που ανήκει στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς και  $V_W$  η σχετική ταχύτητα του ανέμου οπώς την αντιλαμβάνεται παρατηρητής που ανήκει στο σύστημα σχετικού ανέμου. Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στις συναρτήσεις μοντελοποίησης των αεροδυναμικών δυνάμεων και ροπών, το σύστημα μεταβλητών κατάστασης (2.71) παίρνει τη μορφή

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x})\mathbf{u} + \xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (4.7)$$

με

$$\xi(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \left( -\hat{D} \cos \alpha + \hat{L} \sin \alpha - \rho S_{prop} C_{prop} (V_w^2(t) - 2VV_w(t)) \right) \\ \frac{1}{m} \hat{Y} \\ \frac{1}{m} (-\hat{D} \sin \alpha - \hat{L} \cos \alpha) \\ (I_{zz}/I_D) \hat{L}_m + (I_{xz}/I_D) \hat{N}_m \\ (1/I_{yy}) \hat{M}_m \\ (I_{xz}/I_D) \hat{L}_m + (I_{xx}/I_D) \hat{N}_m \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

και

$$\begin{bmatrix} \hat{D}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \hat{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \hat{L}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} = (\tilde{A}_1 V^2 + \tilde{A}_2 V) + (\bar{A}_1 + \tilde{A}_1) V_w^2(t) - 2(\bar{A}_1 + \tilde{A}_1) V V_w(t) - (\bar{A}_2 + \tilde{A}_2) V_w(t),$$

$$\begin{bmatrix} \hat{L}_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \hat{M}_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \hat{N}_m(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} = (\tilde{A}_3 V^2 + \tilde{A}_4 V) + (\bar{A}_3 + \tilde{A}_3) V_w^2(t) - 2(\bar{A}_3 + \tilde{A}_3) V V_w(t) - (\bar{A}_4 + \tilde{A}_4) V_w(t).$$

Η αναλυτική έκφραση των  $\bar{A}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})(i = 1, 3)$ ,  $\tilde{A}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})(i = 1, 3)$ ,  $\bar{A}_i(\mathbf{x})(i = 2, 4)$  και  $\tilde{A}_i(\mathbf{x})(i = 2, 4)$  δίνεται στο παράρτημα B. Με βάση το μοντέλο των διαταραχών της σχέσης (4.8) μπορόμε να προχωρήσουμε στη μελέτη της επίδρασης αυτών στο σύστημα του αεροχήματος. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή  $X \sim U(-0.4, 0.4)$ , τέτοια ωστε το πιθανό σφάλμα του αεροδυναμικού συντελεστή  $i$  να γραφεί ως

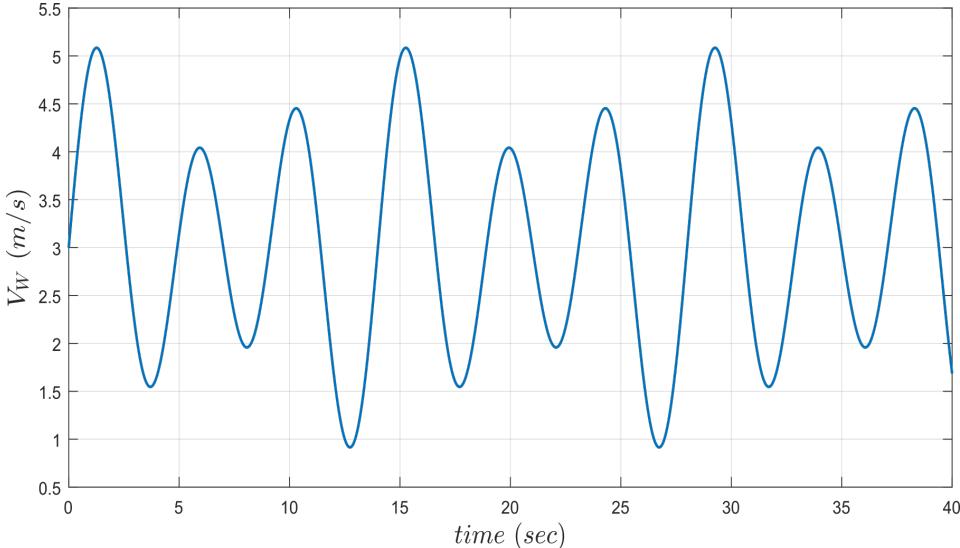
$$\tilde{C}_i = X \bar{C}_i. \quad (4.9)$$

Πρακτικά, η εξίσωση (4.9) ορίζει ότι το πιθανό σφάλμα κάθε αεροδυναμικού συντελεστή ισούται με κάποιο ποσοστό της εκτιμώμενης τιμής του, το οποίο ποσοστό είναι τυχαία μεταβλητή που κατανέμεται ομοιόμορφα μεταξύ των τιμών  $-40\%$  και  $40\%$ . Αντίστοιχα, για τη μελέτη της επίδρασης του σχετικού ανέμου στο μελετούμενο σύστημα θεωρούμε ότι η

ταχύτητα του σχετικού ανέμου μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση

$$V_W(t) = V_{W_0} + a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + a_3 \sin 3\omega t. \quad (4.10)$$

Επιλέγοντας,  $V_{W_0} = 3 \text{ m/s}$ ,  $a_1 = 0.1$ ,  $a_2 = 0.6$ ,  $a_3 = 1.5 \text{ (m/s)}$  και  $\omega = 2\pi/15 \text{ (rad/sec)}$  προκύπτει η ιστορία του σχήματος 4.12.



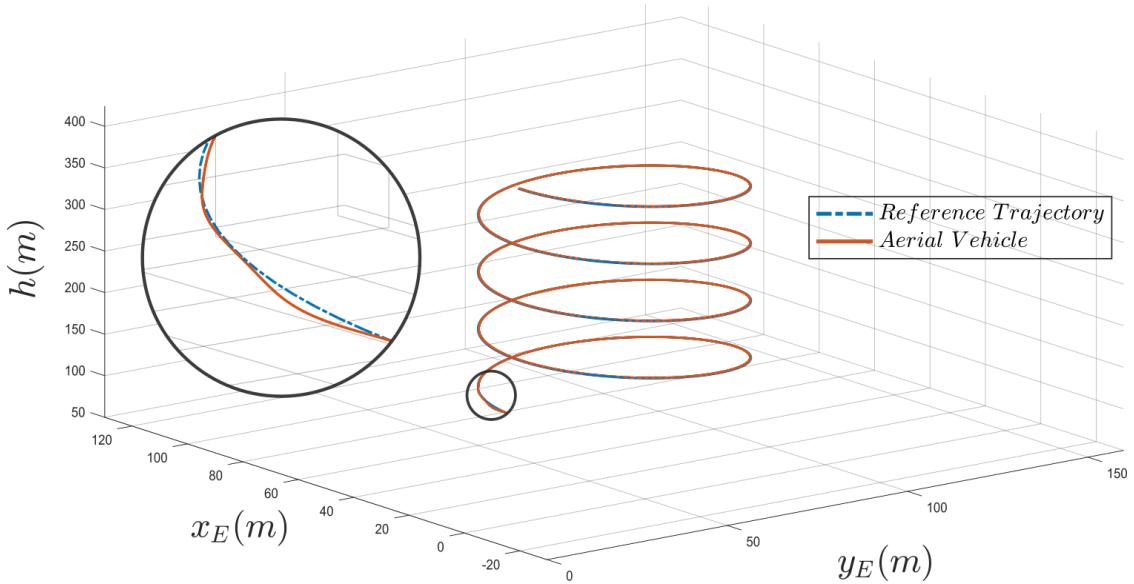
Σχήμα 4.12: Ταχύτητα σχετικού ανέμου.

Η σχέση (4.10) στηρίζεται στη λογική ότι η ταχύτητα του ανέμου δομείται γύρω από μια ονομαστική τιμή με περιοδικές ριπές ανέμου. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι επιλογή του τρόπου μοντελοποίησης τόσο του σφάλματος των αεροδυναμικών συντελεστών όσο και της ταχύτητας του ανέμου (σχέσεις (4.9) και (4.10)) δεν είναι σε καμία περίπτωση δεσμευτική. Ωστόσο, στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής επιλέγεται με τον συγκεκριμένο τρόπο καθώς κρίνεται επαρκής για την ανάδειξη της επίδρασης των διαταραχών στο μελετούμενο σύστημα.

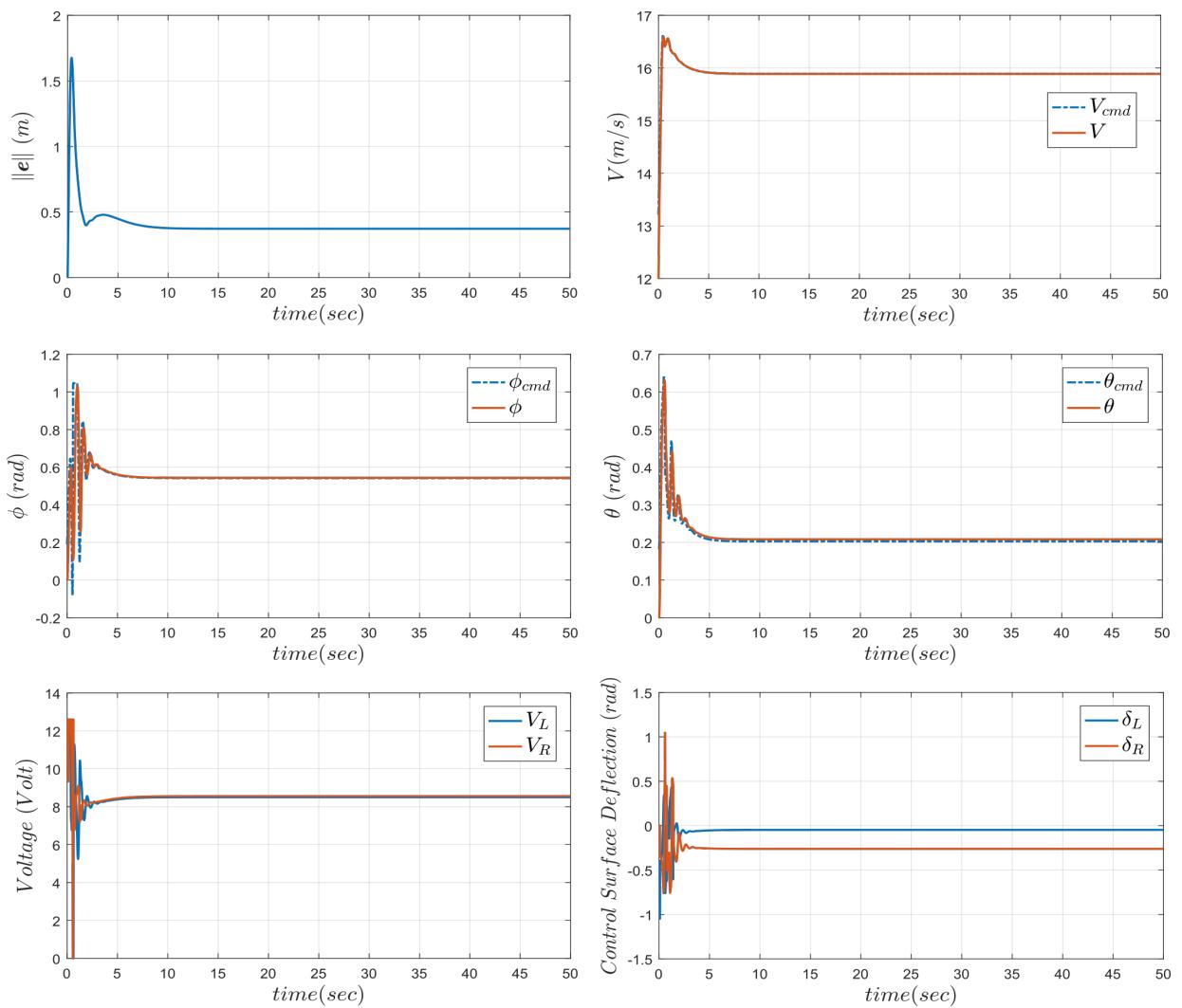
Για την πραγματοποίηση των προσομοιώσεων, θεωρούμε σε αρχικό στάδιο **μόνο** την ύπαρξη σφάλματος στις τιμές των αεροδυναμικών συντελεστών, όπως αυτό ορίζεται από τη σχέση (4.9). Ως τροχιά αναφοράς, εξετάζεται αυτή της ελικοειδούς ανάβασης, ενώ για λόγους σύγκρισης το όχημα αρχικοποιείται ακριβώς όπως και στην προηγούμενη περίπτωση δηλαδή ως

$$\mathbf{x}(0) = [12 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad \text{και} \quad \mathbf{x}_n(0) = [50 \ 50 \ -100]^T.$$

Αντίστοιχα, η τροχιά αναφοράς αρχικοποιείται στο σημείο  $\mathbf{p}(0) = [50 \ 50 \ -100]^T$  με παραμέτρους  $V_r = 16 \text{ m/s}$ ,  $\gamma_r = 20^\circ$  και  $\chi_r = 0^\circ$ . Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης καθώς και τα παραγώμενα σήματα ελέγχου παρουσιασίζονται στα σχήματα 4.13-4.14. Στα σχήματα αυτά παρατηρούμε, ότι παρά τα σφάλματα των αεροδυναμικών συντελεστών, ο **σθεναρός** νόμος ελέγχου επιτυγχάνει να οδηγήσει το όχημα στην επιθυμητή τροχιά, με αποδεκτό σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση. Συγκρίνοντας τα σχήματα 4.7 και 4.14, βλέπουμε ότι στην περίπτωση των εσφαλμένων αεροδυναμικών συντελεστών, οι δράσεις του ελεγκτή εμφανίζουν εντονότερη ταλαντωτική συμπεριφορά καθώς γίνεται προσπάθεια προσαρμογής του συστήματος στις πραγματικές παραμέτρους. Η ταλαντωτική αυτή συμπεριφορά είναι αποτέλεσμα των σθεναρών όρων του χρησιμοποιούμενου νόμου ελέγχου, μέσω των οποίων επιτυγχάνεται η σύγκλιση του οχήματος στην επιθυμητή τροχιά παρά την ύπαρξη των διαταραχών.



Σχήμα 4.13: Τροχιά ελικοειδούς ανάβασης υπό την παρουσία σφάλματος στην εκτίμηση των αεροδυναμικών συντελεστών.



Σχήμα 4.14: Σφάλμα, μεταβλητές κατάστασης και σήματα ελέγχου τροχιάς ελικοειδούς ανάβασης υπό την παρουσία σφάλματος στην εκτίμηση των αεροδυναμικών συντελεστών.

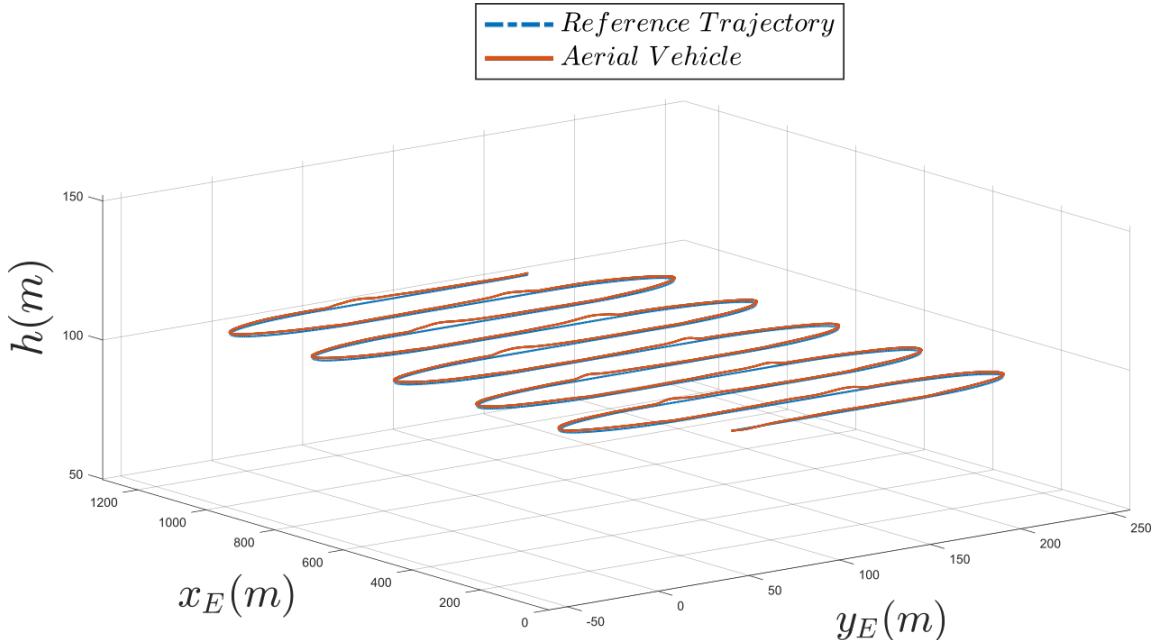
Στη συνέχεια εξετάζουμε τη περίπτωση οπου ύπαρξης τόσο σχετικού ανέμου όσο και σφάλματος στην εκτίμηση των αεροδυναμικών συντελεστών. Η ταχύτητα του σχετικού ανέμου θεωρούμε ότι μεταβάλλεται όπως ορίζεται από τη σχέση (4.10). Ως τροχιά αναφοράς, μελετάται η τροχιά σάρωσης, ενώ για λόγους σύγκρισης το όχημα αρχικοποιείται ακριβώς όπως και στην προηγούμενη περίπτωση δηλαδή ως

$$\mathbf{x}(0) = [15 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{\pi}{2}]^T \quad \text{και} \quad \mathbf{x}_n(0) = [50 \ 50 \ -100]^T.$$

Επιπλέον, η τροχιά αναφοράς ξεκινάει από το σημείο

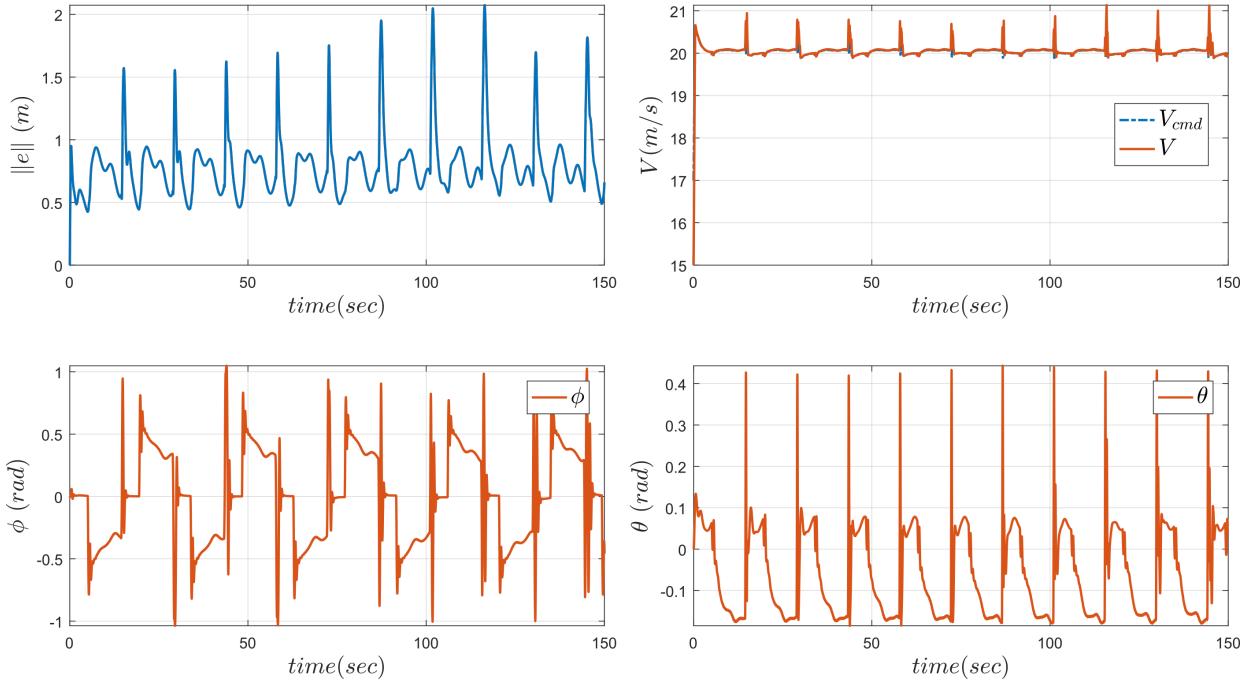
$$\mathbf{p}(0) = [50 \ 50 \ -100]^T \text{ με επιθυμητή ταχύτητα } V_r = 20 \text{ m/s.}$$

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης καθώς και τα παραγώμενα σήματα ελέγχου παρουσιάσονται στα σχήματα 4.15-4.17. Παρατηρώντας τα παραπάνω σχήματα, γίνεται προφανές το εύρος της επίδρασης του σχετικού ανέμου στο αερόχημα. Συγκεκριμένα, από το σχήμα 4.15 βλέπουμε ότι, η πρόσθετη ταχύτητα του σχετικού ανέμου, ιδιαίτερα κατά τις χρονικές στιγμές των ριπών, οδηγεί σε σημαντική άυξηση της δύναμης της άντωσης με αποτέλεσμα το αερόχημα να κερδίζει ύψος. Τις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές τα σθεναρά στοιχεία του προτεινόμενου νόμου ελέγχου, αυξάνουν τη δράση των ενεργοποιητών με σκοπό την επιστροφή του αεροχήματος στο επιθυμητό ύψος. Η αλληλουχία των δράσεων που περιγράφηκε παραπάνω επαναλαμβάνεται, λόγω της περιοδικότητας της σχέσης (4.10). Αξίζει να σημειωθεί ότι παρά το σφάλμα στους αεροδυναμικούς συντελεστές αλλά και την ύπαρξη σχετικού ανέμου, ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου επιτυγχάνει να διατηρήσει το όχημα στην επιθυμητή τροχιά αναφοράς, με το παραγώμενο σφάλμα να βρίσκεται σε ανεκτά επίπεδα.

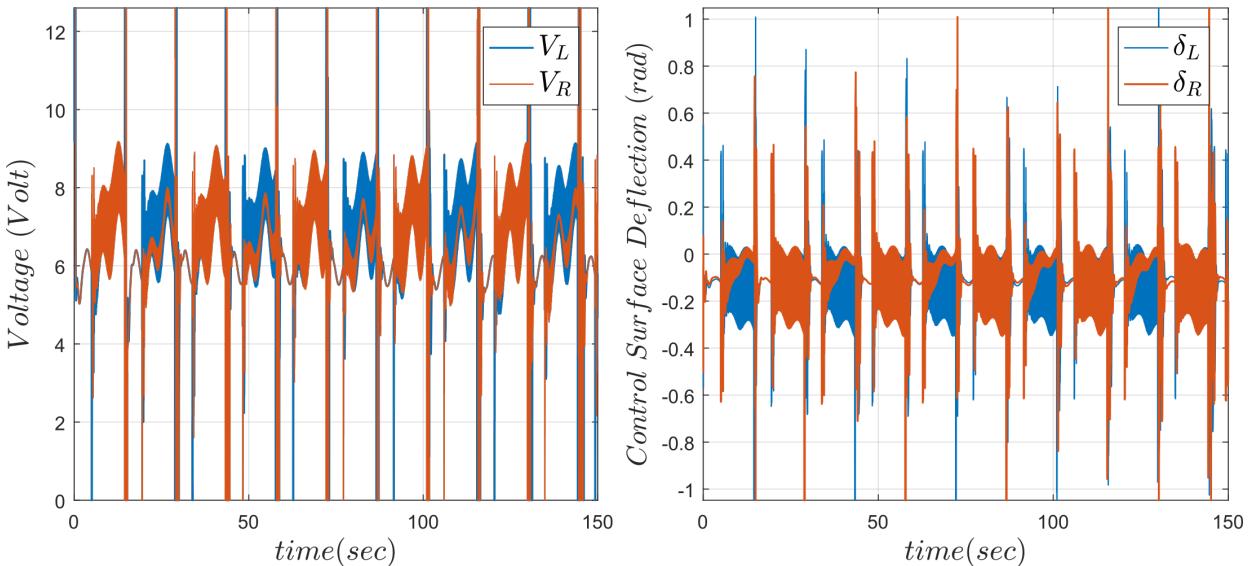


Σχήμα 4.15: Τροχιά σάρωσης υπό την παρουσία σχετικού ανέμου και σφάλματος στην εκτίμηση των αεροδυναμικών συντελεστών.

Για μεγαλύτερη σαφήνεια, στα σχήματα 4.18 και 4.19 παρουσιάζονται και πάλι χαρακτηριστικές μεταβλητές κατάστασης καθώς και τα σήματα ελέγχου για χρονικό ορίζοντα  $t = 15 \text{ sec}$ .



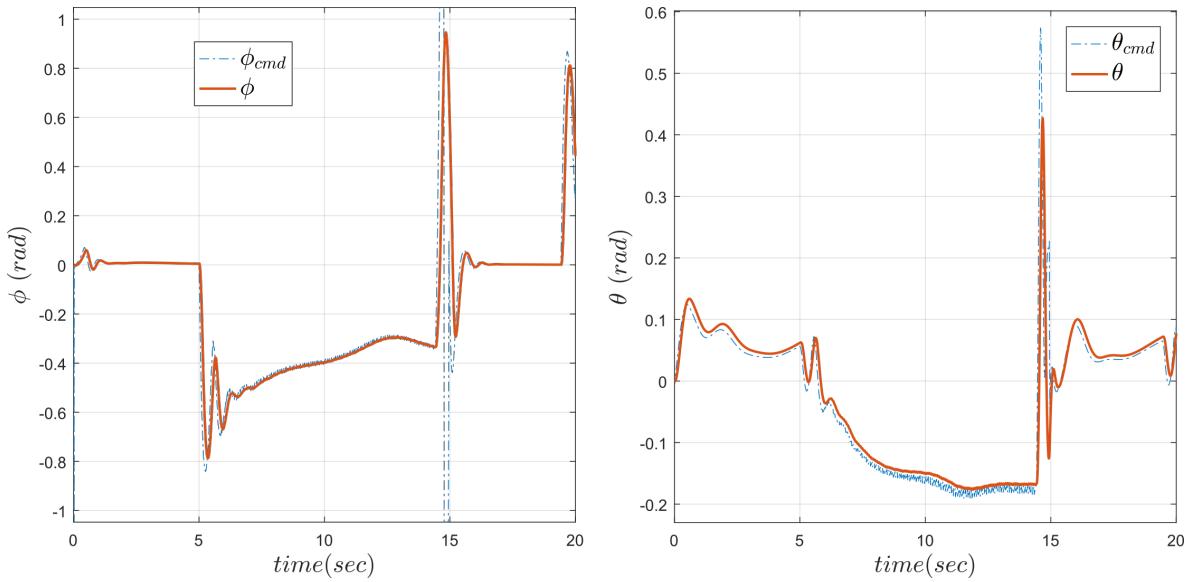
Σχήμα 4.16: Σφάλμα και μεταβλητές κατάστασης τροχιάς σάρωσης υπό την παρουσία σχετικού ανέμου και σφάλματος στην εκτίμηση των αεροδυναμικών συντελεστών.



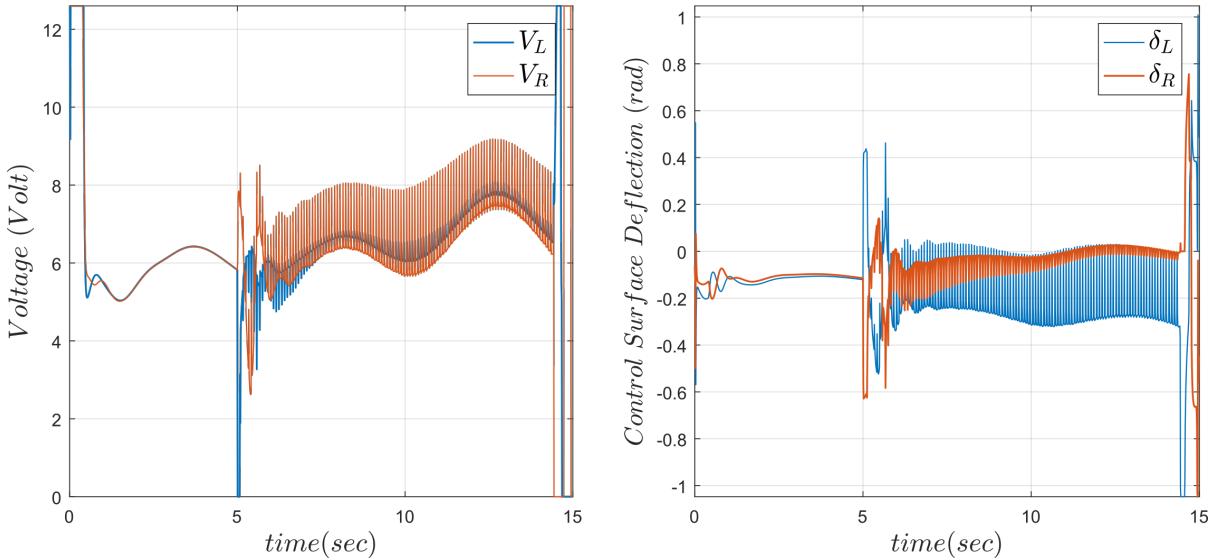
Σχήμα 4.17: Σήματα ελέγχου τροχιάς σάρωσης υπό την παρουσία σχετικού ανέμου και σφάλματος στην εκτίμηση των αεροδυναμικών συντελεστών.

#### 4.4 Παρατηρήσεις και Συμπεράσματα

Από την πληθώρα των προσομοιώσεων που πραγματοποιήθηκαν, είναι ασφαλές να πούμε ότι ο νόμος ελέγχου που σχεδιάστηκε στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής, ικανοποιεί τους στόχους που αρχικά είχαν τεθεί. Συγκεκριμένα σε όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις, ακόμη και σε αυτές όπου εισέρχονταν στο σύστημα σημαντικές διαταραχές, ο προτεινόμενος νόμος ελέγχου επιτυγχάνει να οδηγήσει το αερόχρημα στην επιθυμητή τροχιά αναφοράς, ικανοποιώντας τις προδιαγραφές ευστάθειας και επίδοσης. Ωστόσο πρέπει να τονισθεί ότι,



Σχήμα 4.18: Χαρακτηριστικές μεταβλητές κατάστασης τροχιάς σάρωσης εναλλακτικής χρονικής κλίμακας.



Σχήμα 4.19: Σήματα ελέγχου τροχιάς σάρωσης εναλλακτικής χρονικής κλίμακας.

κατά τη μεταφορά των παραπάνω θεωρητικών αποτελεσμάτων σε ένα πραγματικό πρόβλημα, είναι αναγκαίο να ερευνηθούν και να αξιολογηθούν τα παρακάτω:

- Τα φυσικά όρια των ενεργοποιητών:** Συγκεχριμένα, είναι απαραίτητο να εξετασθεί το κατά πόσο οι χρόνοι αντίδρασης των χρησιμοποιούμενων ενεργοποιητών καθώς και τα φυσικά τους όρια, είναι επαρκή για την παρακολούθηση των θεωρητικά παραγόμενων σημάτων ελέγχου.
- Η επίδραση της ταλάντωσης των ενεργοποιητών στο πλαίσιο του αεροχήματος:** Είναι προφανές, ότι η ύπαρξη ταλαντώσεων στα σήματα ελέγχου, έχει ως άμεσο επακόλουθο την ανάπτυξη δυνάμεων, μεταβαλλόμενου προσήμου και μέτρου, στις στηρίξεις των ενεργοποιητών. Η μελέτη και η αξιολόγηση της επίδρασης των δυνάμεων αυτών στο πλαίσιο του αεροχήματος κρίνεται απαραίτητη, καθώς θα αποτελέσει μέτρο για τη βελτίωση των δράσεων του νόμου ελέγχου.
- Επιτρεπόμενες αδρανειακές δυνάμεις:** Αξίζει να τονισθεί ότι, οι μεγάλοι ρυθμοί μεταβολής των μεταφορικών και περιστορφικών ταχυτήτων του αεροχήματος έχουν ως

άμεση συνέπεια την ανάπτυξη σημαντικών αδρανειακών δυνάμεων στο πλαίσιο αυτού. Συνεπώς είναι προφανές ότι, η ύπαρξη περιορισμών ως προς τις μέγιστες αδρανειακές δυνάμεις που επιτρέπεται να καταπονούν το αερόχημα, αποτελεί σημαντικό κριτήριο για το σχεδίασμα του νόμου ελέγχου. Περισσότερα για τους περιορισμούς αποδεκτής πτητικής συμπεριφοράς μπορούν να βρεθούν στην [13].

Οι παραπάνω παρατηρήσεις, αποτελούν ουσιαστικά μέτρα για την επιλογή των παραμέτρων του εφαρμοζόμενου νόμου ελέγχου έτσι ώστε ικανοποιούνται οι υπάρχοντες περιορισμοί του φυσικού συστήματος. Συνεπώς, κατά υλοποίηση του προτεινόμενου νόμου ελέγχου, η εξέταση των παραπάνω παρατηρήσεων κρίνεται αναγκαία.



## Κεφάλαιο 5

# Συμπεράσματα & Μελλοντικές Προεκτάσεις

Στην παρούσα διπλωματική εργασία σχεδιάστηκε ένας συνολικός νόμος ελέγχου για τη σύγκλιση ενός μη επανδρωμένου αεροχήματος σε μια προδιαγεγραμμένη τροχιά αναφοράς. Συγκεκριμένα, ο ελεγκτής πτήσης του αεροχήματος σχεδιάστηκε με εφαρμογή της τεχνικής επιφάνειας ολίσθησης, η οποία μέσω της θεωρίας ευστάθειας Lyapunov επιτυγχάνει να προσδώσει στον χρησιμοποιούμενο νόμο στοιχεία σθεναρότητας. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας και πάλι τη θεωρία ευστάθειας Lyapunov σχεδιάστηκε κατάλληλος νόμος ελέγχου πλοήγησης για την καθοδήγηση του οχήματος στην επιθυμητή τροχία. Στη συνέχεια, επιλέχθηκαν οι κατάλληλοι παράμετροι των παραπάνω νόμων, με γνώμονα επίτευξη της επιθυμητής ευστάθειας και επίδοσης του μελετούμενου σύστηματος, ενώ αναπτύχθηκαν και τα μοντέλα των πιθανών διαταραχών. Τέλος, για την αξιολόγηση των ελεγκτών πραγματοποιήθηκε μια σειρά προσομοιώσεων σε συνθήκες απουσίας αλλα και ύπαρξης διαταραχών.

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων, που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 4, δείχνουν ότι το σύστημα ακολούθησε τις προδιαγραφές που τέθηκαν. Συγκεκριμένα ο ελεγκτής πλοήγησης, σε όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις, παράγει τα κατάλληλα σήματα αναφοράς που θα οδηγήσουν το όχημα στην επιθυμητή τροχιά. Επιπλέον, ο ελεγκτής πτήσης επιτυγχάνει την άμεση σύγκλιση στα σήματα αναφοράς με μηδενικό σφάλμα στη μόνιμη κατάσταση, ικανοποιώντας έτσι τις προδιαγραφές ευστάθειας και επίδοσης. Αξίζει να σημειωθεί, ότι ακόμη και στις περιπτώσεις ύπαρξης διαταραχών που εξετάσθηκαν, το όχημα επιτυγχάνει να ακολουθήσει την τροχιά αναφοράς, χάρη στα στοιχεία σθεναρού σχεδιασμού.

Τέλος, μερικές πρακτικές ιδέες και προτάσεις για τα ανοικτά σημεία και τη βελτίωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας στο μέλλον, συνοψίζονται στη λίστα που ακολουθεί:

- Εκπόνηση πειραμάτων για την επαλήθευση των χρησιμοποιούμενων μοντέλων για τις αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές καθώς και για τις δυνάμεις και ροπές προώθησης.
- Εξέταση και αξιολόγηση των εναλλακτικών μεθόδων για την υλοποίηση του ελεγκτή πτήσης (μη γραμμικός προσαρμοστικός έλεγχος, μη γραμμικός προβλεπτικός έλεγχος).
- Εξέταση των εναλλακτικών αλγορίθμων για την υλοποίηση του νόμου πλοήγησης (Pure Pursuit, Line-of-Sight, Vector Field).
- Ενσωμάτωση περιορισμών αποδεκτής πτητικής συμπεριφοράς κατά τον σχεδιασμό του νόμου ελέγχου.
- Γλοποίηση του συστήματος ελέγχου με τη χρήση των κατάλληλων αισθητήρων και μονάδας επεξεργασίας (μικροελεγκτής).



# Παράρτημα Α

## Αντισυμμετρικοί Πίνακες

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες των αντισυμμετρικών πινάκων, οι οποίοι χρησιμοποιούνται για την ευκολότερη διαχείρηση των εξωτερικών γινομένων και των παραγώγων των πινάκων περιστροφών.

**Ορισμός 10.** Ένας  $n \times n$  πίνακας  $S$  λέγεται αντισυμμετρικός αν και μόνο αν

$$S^T + S = 0. \quad (\text{A.1})$$

Για το σύνολο ολων των  $3 \times 3$  αντισυμμετρικών πινάκων επιλέγεται ο συμβολισμός  $so(3)$ . Εάν ο πίνακας  $S \in so(3)$  έχει συνιστώσες  $s_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  τότε η εξίσωση (A.1) ισοδυναμεί με εννέα εξισώσεις της μορφής

$$s_{ij} + s_{ji} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{A.2})$$

Από την εξίσωση (A.2) βλέπουμε εύκολα ότι  $s_{ii} = 0$ , δηλαδή τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα  $S$  είναι μηδενικά, ενώ για τα μη διαγώνια στοιχεία ισχύει η σχέση

$$s_{ij} = -s_{ji}, \quad i \neq j.$$

Με βάση τα παραπάνω ο πίνακας  $S$  προσδιορίζεται από τρείς ανεξάρτητες μεταβλητές και παίρνει τη μορφή

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Εάν  $\mathbf{a} = [a_x \ a_y \ a_z]^T$  ένα διάνυσμα  $3 \times 1$ , τότε ο πίνακας  $S(\mathbf{a})$  ορίζεται έτσι ώστε να ισχύει η σχέση

$$S(\mathbf{a}) = S = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}.$$

### A.1 Ιδιότητες Αντισυμμετρικών Πινάκων

Ορισμένες από τις ιδιότητες των αντισυμμετρικών πινάκων είναι:

- Ο τελεστής  $S$  είναι γραμμικός, δηλαδή

$$S(c \mathbf{a} + d \mathbf{b}) = cS(\mathbf{a}) + dS(\mathbf{b}). \quad (\text{A.4})$$

- Για κάθε  $\mathbf{a}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$

$$S(\mathbf{a}) \mathbf{p} = \mathbf{a} \times \mathbf{p}, \quad (\text{A.5})$$

όπου,  $\mathbf{a} \times \mathbf{p}$  δηλώνει το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\mathbf{a}, \mathbf{p}$

3. Εάν  $R \in SO(3)$  και  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  μπορεί να δειχθεί ότι

$$R(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = R\mathbf{a} \times R\mathbf{b}. \quad (\text{A.6})$$

Η σχέση (A.6) αληθεύει αν και μόνο αν ο πίνακας  $R$  είναι ορθογώνιος.

4. Για  $R \in SO(3)$  (δηλαδή για κάθε πίνακα περιστροφής) και  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$

$$RS(\mathbf{a})R^T = S(R\mathbf{a}). \quad (\text{A.7})$$

Η εξίσωση A.7 προκύπτει εύκολα από συνδυασμό των σχέσεων (A.5) και (A.6). Έστω  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  ένα τυχαίο διάνυσμα. Τότε έχουμε

$$RS(\mathbf{a})R^T \mathbf{b} = R(\mathbf{a} \times R^T \mathbf{b}) = (R\mathbf{a}) \times (RR^T \mathbf{b}) = (R\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = S(R\mathbf{a})\mathbf{b}.$$

## A.2 Παράγωγος Πίνακα Περιστροφής

Έστω πίνακας περιστροφής  $R$ , ο οποίος είναι συνάρτηση της μεταβλητής  $\theta$ , έτσι ώστε

$$R = R(\theta) \in SO(3), \quad \forall \theta.$$

Δεδομένου ότι ο πίνακας είναι ορθογώνιος για κάθε  $\theta$  προκύπτει

$$R(\theta)R(\theta)^T = I_{3 \times 3}. \quad (\text{A.8})$$

Παραγώγηση της σχέση (A.8) ως προς τη μεταβλητή  $\theta$  οδηγεί στη σχέση

$$\frac{dR}{d\theta} R(\theta)^T + R(\theta) \frac{dR^T}{d\theta} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Εάν οριστεί ο πίνακας  $S$  ως

$$S := \frac{dR}{d\theta} R(\theta)^T, \quad (\text{A.10})$$

τότε ο ανάστροφος του  $S$  δίνεται από τη σχέση

$$S^T = \left( \frac{dR}{d\theta} R(\theta)^T \right)^T = R(\theta) \frac{dR^T}{d\theta}. \quad (\text{A.11})$$

Συνεπώς, η σχέση A.9 είναι ισοδύναμη με την

$$S + S^T = 0.$$

Με βάση τα παραπάνω, ο πίνακας  $S$  όπως ορίστηκε από τη σχέση (A.10) είναι αντισυμμετρικός. Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την εξίσωση (A.10) με τον πίνακα περιστροφής  $R$  προκύπτει η σχέση

$$\frac{dR}{d\theta} = SR(\theta). \quad (\text{A.12})$$

Η εξίσωση (A.12) είναι ιδιαίτερα σημαντική καθώς σημαίνει ότι ο η παράγωγος του πίνακα περιστροφής είναι ισοδύναμη με το πολλαπλασιασμό του πίνακα περιστροφής με ένα έναν αντισυμμετρικό πίνακα.

### A.2.1 Χρονική Παράγωγος Πίνακα Περιστροφής

Έστω ένα σύστημα αναφοράς  $f : OX_1Y_1Z_1$  το οποίο περιστρέφεται γύρω από ένα τυχαίο και πιθανώς μεταφερόμενο άξονα  $\hat{\mathbf{u}}$  και  $F_0 : OX_0Y_0Z_0$  το αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Επίσης, θεωρούμε χρονικά μεταβαλλόμενο πίνακα περιστροφής  $R$ , τέτοιο ώστε

$$R = R(t) \in SO(3), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Εάν ο πίνακας  $R(t)$  είναι μια συνεχής και διαφορίσιμη συνάρτηση ως προς τον χρόνο, τότε η σχέση A.12 μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως

$$\dot{R}(t) = S(t)R(t). \quad (\text{A.13})$$

Δεδομένου ότι ο πίνακας  $S(t)$  είναι αντισυμμετρικός μπορεί να ορισθεί και ως  $S(\omega(t))$  για ένα μοναδικό διανυσματικό ω(t). Το διάνυσμα αυτό αποδεικνύεται ότι εκράζει τη γωνιακή ταχύτητα του περιστρεφόμενου συστήματος ως προς το αδρανειακό τη χρονική στιγμή  $t$ , δηλαδή,

$$\omega(t) = \omega_{f/F_0}^{F_0}(t).$$

Συνεπώς η χρονική παράγωγος του πίνακα περιστροφής μπορεί να γραφεί ως

$$\dot{R}_f^{F_0}(t) = S(\omega_{f/F_0}^{F_0}(t)) R_f^{F_0}(t). \quad (\text{A.14})$$



## Παράρτημα Β

### Αναλυτική Έκφραση Εξισώσεων

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται οι αναλυτικές εκφράσεις των εξισώσεων του αεροχώματος στην αφφινική δομή ως προς το σήμα ελέγχου

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + G(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}. \quad (\text{B.1})$$

όπου,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_{C/F_E}^{F_B} & \boldsymbol{\omega}_{F_B/F_E}^{F_B} & \boldsymbol{e} \end{bmatrix}^T = [u \ v \ w \ p \ q \ r \ \phi \ \theta \ \psi]^T, \quad \boldsymbol{u} = [\bar{V}_L \ \bar{V}_R \ \delta e \ \delta \alpha]^T.$$

Το διανυσματικό πεδίο  $f(\boldsymbol{x})$  δίνεται από τις σχέσεις

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \dots, f_9(\boldsymbol{x})]^T,$$

όπου,

$$\begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ f_3(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} X_1(\boldsymbol{x}) + T_1(\boldsymbol{x}) \\ Y_1(\boldsymbol{x}) \\ Z_1(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g \sin \theta + rv - qw \\ g \sin \phi \cos \theta + pw - ru \\ g \cos \phi \cos \theta + qu - pv \end{bmatrix},$$

$$f_4(\boldsymbol{x}) = \frac{I_{zz}}{I_D} L_{m_1}(\boldsymbol{x}) + \frac{I_{xz}}{I_D} N_{m_1}(\boldsymbol{x}) + \frac{I_{zz}}{I_D} \left\{ I_{xz}pq - (I_{zz} - I_{yy})qr \right\} + \frac{I_{xz}}{I_D} \left\{ -I_{xz}qr - (I_{yy} - I_{xx})pq \right\},$$

$$f_5(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{I_{yy}} \left\{ M_{m_1}(\boldsymbol{x}) - (I_{xx} - I_{zz})pr \right\} - I_{xz}(p^2 - r^2),$$

$$f_6(\boldsymbol{x}) = \frac{I_{xz}}{I_D} L_{m_1}(\boldsymbol{x}) + \frac{I_{xx}}{I_D} N_{m_1}(\boldsymbol{x}) + \frac{I_{xz}}{I_D} \left\{ I_{xz}pq - (I_{zz} - I_{yy})qr \right\} + \frac{I_{xx}}{I_D} \left\{ -I_{xz}qr - (I_{yy} - I_{xx})pq \right\}$$

και

$$\begin{bmatrix} f_7(\boldsymbol{x}) \\ f_8(\boldsymbol{x}) \\ f_9(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p + q \sin \phi \tan \theta + r \cos \phi \tan \theta \\ q \cos \phi - r \sin \phi \\ q \sin \phi \sec \theta + r \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix}.$$

Οι δυνάμεις που εμφανίζονται στις παραπάνω εξισώσεις υπολογίζονται ως

$$\begin{bmatrix} X_1(\boldsymbol{x}) \\ Y_1(\boldsymbol{x}) \\ Z_1(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho V^2 S \begin{bmatrix} -\cos \alpha C_D(\alpha) + \sin \alpha C_L(\alpha) \\ C_{Y_0} + C_{Y_\beta} \beta \\ -\sin \alpha C_D(\alpha) - \cos \alpha C_L(\alpha) \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \rho V S \begin{bmatrix} c(-\cos \alpha C_{D_q} + \sin \alpha C_{L_q})q \\ b(C_{Y_p} p + C_{Y_r} r) \\ c(-\sin \alpha C_{D_q} - \cos \alpha C_{L_q})q \end{bmatrix}$$

και

$$T_1(\boldsymbol{x}) = -\rho S_{prop} C_{prop} V^2.$$

Αντίστοιχα ροπές υπολογίζονται ως

$$\begin{bmatrix} L_{m_1}(\mathbf{x}) \\ M_{m_1}(\mathbf{x}) \\ N_{m_1}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho V^2 S \begin{bmatrix} b(C_{L_{m_0}} + C_{L_{m_\beta}} \beta) \\ c C_{M_m}(\alpha) \\ b(C_{N_{m_0}} + C_{N_{m_\beta}} \beta) \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \rho V S \begin{bmatrix} b^2(C_{L_{m_p}} p + C_{L_{m_r}} r) \\ c^2 C_{M_{m_q}} q \\ b^2(C_{N_{m_p}} p + C_{N_{m_r}} r) \end{bmatrix}.$$

Η έκφραση για το μητρώο  $G(\mathbf{x})$  είναι

$$G(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}), \quad \dots, \quad \mathbf{g}_9(\mathbf{x})]^T,$$

όπου,

1.

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{m} [T_{2_l}(\mathbf{x}) \quad T_{2_r}(\mathbf{x}) \quad X_2(\mathbf{x}) \quad 0],$$

2.

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{m} [0 \quad 0 \quad 0 \quad Y_2(\mathbf{x})],$$

3.

$$\mathbf{g}_3(\mathbf{x}) = \frac{1}{m} [0 \quad 0 \quad Z_2(\mathbf{x}) \quad 0],$$

4.

$$\mathbf{g}_4(\mathbf{x}) = \left[ \frac{I_{zz}}{I_D} L_{T_{2_l}}(\mathbf{x}) + \frac{I_{xz}}{I_D} N_{T_{2_l}}(\mathbf{x}) \quad \frac{I_{zz}}{I_D} L_{T_{2_T}}(\mathbf{x}) + \frac{I_{xz}}{I_D} N_{T_{2_T}}(\mathbf{x}) \quad 0 \quad \frac{I_{zz}}{I_D} L_{m_2}(\mathbf{x}) + \frac{I_{xz}}{I_D} N_{m_2}(\mathbf{x}) \right],$$

5.

$$\mathbf{g}_5(\mathbf{x}) = \frac{1}{I_{yy}} [0 \quad 0 \quad M_{m_2} \quad 0],$$

6.

$$\mathbf{g}_6(\mathbf{x}) = \left[ \frac{I_{xz}}{I_D} L_{T_{2_l}}(\mathbf{x}) + \frac{I_{xx}}{I_D} N_{T_{2_l}}(\mathbf{x}) \quad \frac{I_{xz}}{I_D} L_{T_{2_T}}(\mathbf{x}) + \frac{I_{xx}}{I_D} N_{T_{2_T}}(\mathbf{x}) \quad 0 \quad \frac{I_{xz}}{I_D} L_{m_2}(\mathbf{x}) + \frac{I_{xx}}{I_D} N_{m_2}(\mathbf{x}) \right],$$

7.

$$\mathbf{g}_7 = \mathbf{g}_8 = \mathbf{g}_9 = \mathbf{0}_{1 \times 4}.$$

Αντίστοιχα οι δυνάμεις που εμφανίζονται στις παραπάνω εξισώσεις υπολογίζονται ως

$$\begin{bmatrix} X_2(\mathbf{x}) \\ Y_2(\mathbf{x}) \\ Z_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho V^2 S \begin{bmatrix} \sin \alpha C_{L_{\delta_e}} - \cos \alpha C_{D_{\delta_e}} \\ C_{Y_{\delta_\alpha}} \\ -\sin \alpha C_{D_{\delta_e}} - \cos \alpha C_{L_{\delta_e}} \end{bmatrix}$$

και

$$T_{2_l}(\mathbf{x}) = T_{2_r}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \rho S_{prop} C_{prop} k_t^2 k_v^2.$$

Ενώ οι ροπές από τις σχέσεις

$$\begin{bmatrix} L_{m_2}(\mathbf{x}) \\ M_{m_2}(\mathbf{x}) \\ N_{m_2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \rho V^2 S \begin{bmatrix} b C_{L_{m\delta_\alpha}} \\ c C_{M_{m\delta_e}} \\ b C_{N_{m\delta_\alpha}} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} L_{T_{2_l}}(\mathbf{x}) \\ N_{T_{2_l}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_{T_{2_r}}(\mathbf{x}) \\ N_{T_{2_r}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2C_{T_D} k_v^2 \\ \rho S_{prop} C_{prop} k_t^2 k_v^2 \tilde{b} \end{bmatrix}.$$

Τέλος παρουσιάζονται οι αναλυτικές εκφράσεις των πινάκων  $\bar{A}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})(i = 1, 3)$ ,  $\tilde{A}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})(i = 1, 3)$ ,  $\bar{A}_i(\mathbf{x})(i = 2, 4)$  και  $\tilde{A}_i(\mathbf{x})(i = 2, 4)$ , οι οποίοι δομούν το διάνυσμα των διαταραχών.

Συγκεκριμένα έχουμε

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \rho S \begin{bmatrix} \bar{C}_D(\alpha) + \bar{C}_{D_{\delta_e}} \delta_e \\ \bar{C}_{Y_0} + \bar{C}_{Y_\beta} \beta + \bar{C}_{Y_{\delta_\alpha}} \delta_\alpha \\ \bar{C}_{L_0} + \bar{C}_{L_\alpha} \alpha + \bar{C}_{L_{\delta_e}} \delta_e \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \rho S \begin{bmatrix} \tilde{C}_D(\alpha) + \tilde{C}_{D_{\delta_e}} \delta_e \\ \tilde{C}_{Y_0} + \tilde{C}_{Y_\beta} \beta + \tilde{C}_{Y_{\delta_\alpha}} \delta_\alpha \\ \tilde{C}_{L_0} + \tilde{C}_{L_\alpha} \alpha + \tilde{C}_{L_{\delta_e}} \delta_e \end{bmatrix}, \\
\bar{A}_2(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4} \rho S \begin{bmatrix} c(\bar{C}_{D_q} q) \\ b(\bar{C}_{Y_p} p + \bar{C}_{Y_r} r) \\ c(\bar{C}_{L_q} q) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \rho S \begin{bmatrix} c(\tilde{C}_{D_q} q) \\ b(\tilde{C}_{Y_p} p + \tilde{C}_{Y_r} r) \\ c(\tilde{C}_{L_q} q) \end{bmatrix}, \\
\bar{A}_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \rho S \begin{bmatrix} (\bar{C}_{L_{m_0}} + \bar{C}_{L_{m_\beta}} \beta + \bar{C}_{L_{m_{\delta_\alpha}}} \delta_\alpha) b \\ (\bar{C}_{M_{m_0}} + \bar{C}_{M_{m_\alpha}} \alpha + \bar{C}_{M_{m_{\delta_e}}} \delta_e) c \\ (\bar{C}_{N_{m_0}} + \bar{C}_{N_{m_\beta}} \beta + \bar{C}_{N_{m_{\delta_\alpha}}} \delta_\alpha) b \end{bmatrix}, \\
\tilde{A}_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \rho S \begin{bmatrix} (\tilde{C}_{L_{m_0}} + \tilde{C}_{L_{m_\beta}} \beta + \tilde{C}_{L_{m_{\delta_\alpha}}} \delta_\alpha) b \\ (\tilde{C}_{M_{m_0}} + \tilde{C}_{M_{m_\alpha}} \alpha + \tilde{C}_{M_{m_{\delta_e}}} \delta_e) c \\ (\tilde{C}_{N_{m_0}} + \tilde{C}_{N_{m_\beta}} \beta + \tilde{C}_{N_{m_{\delta_\alpha}}} \delta_\alpha) b \end{bmatrix}, \\
\bar{A}_4(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4} \rho S \begin{bmatrix} b^2(\bar{C}_{L_{m_p}} p + \bar{C}_{L_{m_r}} r) \\ c^2(\bar{C}_{M_{m_q}} q) \\ b^2(\bar{C}_{N_{m_p}} p + \bar{C}_{N_{m_r}} r) \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \tilde{A}_4(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \rho S \begin{bmatrix} b^2(\tilde{C}_{L_{m_p}} p + \tilde{C}_{L_{m_r}} r) \\ c^2(\tilde{C}_{M_{m_q}} q) \\ b^2(\tilde{C}_{N_{m_p}} p + \tilde{C}_{N_{m_r}} r) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$



# Παράρτημα Γ

## Αριθμητικά Δεδομένα Αεροχήματος

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αριθμητικά δεδομένα του αεροχήματος, σύμφωνα με το οποίο πραγματοποιήθηκαν οι προσομοιώσεις του κεφαλαίου 4. Η βασική γεωμετρία του αεροχήματος που μελετάται συμπίπτει με αυτήν που παρουσιάζεται στο παράρτημα Ε της αναφορας [5]. Ωστόσο, το μοντέλο της παρούσας διπλωματικής διαφοροποιείται από αυτό της [5], καθώς έχουν τοποθετηθεί δύο κινητήρες για την επίτευξη διαφορικής προώθησης. Τα αναλυτικά δεδομένα του μοντέλου παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Παράμετροι & Συντελεστές					
Παράμετρος	Τιμή	Συντελεστής	Τιμή	Συντελεστής	Τιμή
$m$	1.56 kg	$C_{L_0}$	0.09167	$C_{Y_0}$	0
$I_{xx}$	0.1147 kg m <sup>2</sup>	$C_{D_0}$	0.01631	$C_{L_{m0}}$	0
$I_{yy}$	0.0576 kg m <sup>2</sup>	$C_{M_{m0}}$	-0.02338	$C_{N_{m0}}$	0
$I_{zz}$	0.1712 kg m <sup>2</sup>	$C_{L_\alpha}$	3.5016	$C_{Y_\beta}$	-0.07359
$I_{xz}$	0.0015 kg m <sup>2</sup>	$C_{D_\alpha}$	0.2108	$C_{L_{m\beta}}$	-0.02854
$S$	0.2589 m <sup>2</sup>	$C_{M_{m\alpha}}$	-0.5675	$C_{N_{m\beta}}$	-0.0004
$b$	1.4224 m	$C_{L_q}$	2.8932	$C_{Y_p}$	0
$c$	0.3302 m	$C_{D_q}$	0	$C_{L_{mp}}$	-0.3209
$S_{prop}$	0.0127 m <sup>2</sup>	$C_{M_{mq}}$	-1.3990	$C_{N_{mp}}$	-0.01297
$\rho$	1.2682 kg/m <sup>3</sup>	$C_{L_{m\delta e}}$	0.2724	$C_{Y_r}$	0
$k_V$	3100 rpm/V	$C_{D_{\delta e}}$	0.3045	$C_{L_{mr}}$	0.03066
$k_t$	0.0094 m/rad	$C_{M_{m\delta e}}$	-0.3254	$C_{N_{mr}}$	-0.00434
$C_{D_L}$	0 (kg m <sup>2</sup> )/rad <sup>2</sup>	$e$	0.9	$C_{Y_{\delta \alpha}}$	0
$C_{D_R}$	0 (kg m <sup>2</sup> )/rad <sup>2</sup>	$C_{prop}$	1	$C_{L_{m\delta \alpha}}$	0.1682
$\tilde{b}$	0.3556 m	$C_{D_p}$	0.0254	$C_{N_{m\delta \alpha}}$	-0.00328



# Βιβλιογραφία

- [1] Σ.Νατσιάβας. *Εφαρμοσμένη Δυναμική*. Ζήτη, 1994.
- [2] Σ.Νατσιάβας. *Ταλαντώσεις Δυναμικών Συστημάτων με Μη Γραμμικά Χαρακτηριστικά*. Ζήτη, 2000.
- [3] M. Ahmed and K. Subbarao. Nonlinear 3-d trajectory guidance for unmanned aerial vehicles. In *2010 11th International Conference on Control Automation Robotics Vision*, pages 1923–1927, Dec 2010.
- [4] F.M. Arscott and A.F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides: Control Systems*. Mathematics and its Applications. Springer Netherlands, 1988.
- [5] R.W. Beard and T.W. McLain. *Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice*. Princeton University Press, 2012.
- [6] Venanzio Cichella, Enric Xargay, Vladimir Dobrokhotov, Isaac Kaminer, António M. Pascoal, and Naira Hovakimyan. Geometric 3d path-following control for a fixed-wing uav on  $\text{so}(3)$ . 2011.
- [7] L. E. Dubins. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *American Journal of Mathematics*, 79(3):497–516, 1957.
- [8] W. Durham. *Aircraft Flight Dynamics and Control*. Aerospace Series. Wiley, 2013.
- [9] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. Robert E. Krieger Publishing Company, Inc., Malabar, FL, 1980.
- [10] Sira-Ramirez Hebertt. Differential geometric methods in variable-structure control. *International Journal of Control*, 48(4):1359–1390, 1988.
- [11] Doh-Hyun Kim and Jun-Ho Oh. Tracking control of a two-wheeled mobile robot using input–output linearization. *Control Engineering Practice*, 7(3):369 – 373, 1999.
- [12] Guilherme Pelizer, Natassya Silva, and Kalinka Castelo Branco. 3d path-following algorithms for unmanned aerial vehicles adjusted with genetic algorithm. pages 63–80, 07 2017.
- [13] M.H. Sadraey. *Aircraft Design: A Systems Engineering Approach*. Aerospace Series. Wiley, 2012.
- [14] J. S. Shamma and M. Athans. Gain scheduling: potential hazards and possible remedies. *IEEE Control Systems*, 12(3):101–107, June 1992.
- [15] J.J.E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall International Editions. Prentice-Hall, 1991.
- [16] Eduardo D. Sontag. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer New York, New York, NY, 1998.
- [17] M.W. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics And Control*. Wiley India Pvt. Limited, 2008.
- [18] V.I. Utkin. *Sliding Modes in Control and Optimization*. Communications and Control Engineering. Springer Berlin Heidelberg, 2013.