

# Mécanique Analytique 2021 -2022

## Quizz et résumés de cours

Amaury Micheli [amaury.micheli@ijclab.in2p3.fr](mailto:amaury.micheli@ijclab.in2p3.fr)

8 novembre 2021

*Vous pourrez trouver dans ce document les différents quizz et points sur le cours fait en début de séance de TD.*

### 1 Séance 1

Quizz :

1. Pour un système décrit par le vecteur  $\vec{x}$ , on considère une position d'équilibre  $\vec{x}_0$  du système. Comment caractériser mathématiquement que  $\vec{x}_0$  est une position d'équilibre (asymptotique) ? Admettons maintenant que le système puisse être décrit comme simplement soumis au potentiel  $V(\vec{x})$ , que vous pouvez prendre unidimensionnel pour simplifier. Que devient alors la condition précédente ?
2. Calculer  $\frac{\partial}{\partial x} f[g(x, y, z)]$  et  $\frac{d}{dt} f[x(t), y(t), z(t)]$ .

### 2 Séance 2 :

Quizz :

1. Rappeler ce qu'est une contrainte holonome, scleronome et rhéonome.
2. Donner l'expression du Lagrangien à partir de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Écrire les équations d'Euler-Lagrange. Définissez également les moments généralisés. (Il faut apprendre ces équations.)

Cours :

Sur les coordonnées généralisées :

- A) Habituellement système de N particules décrites chacune par trois coordonnées cartésiennes (x,y,z). Pour résoudre la dynamique du système on a une équation par variable, donc 3N équations. Parfois les coordonnées ne sont pas indépendantes i.e. si x prend une certaine valeur alors y ne peut pas prendre n'importe quelle valeur.
- Deux exemples : - le pendule sphérique avec une tige rigide

- des particules dans une boîte sphérique ou en triangle (compliqué) On peut essayer de trouver un système de Coordonnées non nécessairement cartésiennes qui elles sont indépendantes et en ce sens optimales pour résoudre le problème. Pour le pendule ce sont simplement les coordonnées sphériques et pour la boîte ce n'est pas aussi simple parce que les contraintes ne sont pas holonomes.

- B) Ce qu'on utilise comme coordonnées généralisées peut être très bizarre et ne pas avoir d'interprétation physique immédiate ex : plus tard on verra les variables angle- action qui combine vitesse et position Les coordonnées sont choisies avant tout pour résoudre les équations du problème et à posteriori on peut leur donner un sens physique plus ou moins difficilement
- C) Dans la dérivation des équations d'euler Lagrange on utilise le fait que les coordonnées soit généralisées pour annuler indépendamment plusieurs termes d'une somme qui est nulle. Cette démonstration ne fonctionne plus pour des coordonnées non-généralisées. Que faire alors si on refuse d'utiliser des coordonnées généralisées? Que deviennent les équations d'euler Lagrange? Il faut utiliser une modification des équations en introduisant une équation supplémentaire par contrainte qui s'appelle un multiplicateur de Lagrange. C'est une technique très générale qui est souvent utilisée dans d'autre domaine pour faire de l'optimisation ex économie Elle est très bien expliquée et exemplifiée dans la partie 4.6 du cours

### 3 Séance 3 :

Quizz (La généralisation de quantité dans le cas Lagrangien, comprendre en quoi elle consiste.)

1. Différence entre potentiel et potentiel généralisé? (Réponse : le 2nd peut dépendre des vitesses.)
2. Pour un système décrit par le lagrangien  $\mathcal{L}$  et les coordonnées généralisées  $q_i$ , définir les moments généralisés et l'énergie. Calculer leurs dérivées le long d'une trajectoire. Ces expressions permettent de trouver facilement des quantités conservées.
3. Quand est-ce que le moment généralisé en coordonnées cartésiennes diffère de celui auquel on est habitué? (Réponse : Quand le potentiel dépend de la vitesse i.e généralisé cf 2.4.) Cette modification doit être incluse quand on quantifie la théorie par quantification canonique et en imposant  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ .
4. Sans faire de calcul, dans quel cas l'énergie définie à partir de la formule avec les dérivées du Lagrangien diffère-t-elle de l'énergie mécanique habituelle définie comme  $T + U$ ? (Réponse : cf p32 du cours système conservatif scleronome i.e. quand les contraintes sont indépendantes du temps.)

Cours :

Pourquoi cette différence entre les deux énergies ? L'énergie mécanique de notre système est conservée quand celui-ci est isolé, qu'il n'échange pas d'énergie avec l'extérieur.

Ce n'est pas le cas quand on a des forces extérieures qui dépendent du temps, par exemple on pousse à intervalles réguliers un pendule -; on lui donne de l'énergie, qui sont alors non-conservatives.

Cependant une partie des forces, les forces de contraintes peuvent être éliminées par l'utilisation de coordonnées généralisées par exemple pour les contraintes holonomes.

Si les forces extérieures sont conservatives et qu'on élimine des contraintes holonomes rhenomes i.e. explicitement dépendantes du temps on doit faire un changement de coordonnées dépendant du temps ex :  $q = r^*t + r_0$ . Et quand on regarde le système dans ces nouvelles coordonnées on ne voit parfois plus cette dépendance dans le temps par exemple dans le Lagrangien. (Mais typiquement on va avoir des nouveaux termes dans l'énergie cinétique.)

On va alors pouvoir utiliser la formule pour définir une énergie conservée alors que l'énergie mécanique n'est pas conservée. Cette formule permet donc de généraliser au cas où on a pris en compte des contraintes du temps.

Vous pouvez essayer de faire le calcul mais pas évident en partant de  $E = T + U$  en cartésien puis de faire le changement de variable et on voit que les deux diffèrent quand le changement de variable dépend du temps.

## 4 Séance 4 :

## 5 Séance 5 :

Quizz :

1. Donner l'expression de l'intégrale donnant la longueur d'une courbe  $y(x)$  entre  $a$  et  $b$  en commençant par prouver la forme de l'élément différentiel.
2. Énoncer le pp de moindre action pour un système passant par différents états (plus général que la mécanique) .

Cours : On va revenir sur le pp de moindre action et expliquer pourquoi c'est raisonnable. Ce n'est pas une preuve on revient simplement sur la logique.

La philosophie générale du principe de moindre action est la suivante : on sait que notre système va passer d'un état A à un état B. Pour un système mécanique ça pourrait d'une certaine position à une autre, mais c'est plus général. Ce que l'on cherche à savoir c'est quelle trajectoire va emprunter le système entre ces deux points. Notez le changement point de vue par rapport à la vision newtonienne où l'on résoud une équation différentielle pour faire évoluer le système à partir de certains condition initiales.

Il faut un moyen de comparer deux trajectoires pour savoir laquelle va être effectivement empruntée par le système. On voudrait donner une valeur, une mesure à chacune de ses trajectoires, les classer. Principe de moindre action : la trajectoire que l'on va prendre c'est celle qui va minimiser cette valeur donnée aux trajectoires.

Toute la question est maintenant de savoir comment, pour un système donné, construire cette valeur, comment construire cette action ?

Premièrement elle doit nécessairement dépendre de tout le chemin emprunté donc ça va être une intégrale le long de la trajectoire. Cependant, de quels paramètres de la trajectoire doit-elle dépendre ?

Prenons simplement une particule. On a envie de dire que l'action pourrait dépendre de la position en chaque point, mais aussi de la vitesse avec laquelle on passe par ses points et éventuellement de toutes les dérivées ! En fait on peut se restreindre à simplement une dérivée parce que l'expérience nous montre que la trajectoire d'un objet est entièrement par la connaissance de la vitesse et de la position en un point donné. Une autre raison de plus profonde de cela est le théorème d'Ostrogradsky auquel un exercice supplémentaire est consacré.

## 6 Séance 6 :

Ajd : ex 5.1 ex 5.2 Auto test : ex 5.5 Semaine prochaine : ex 5.3

Premièrement faites moi vos retours sur le partiel : - Est-ce que vous avez l'impression d'avoir été bien préparé.e.s ou non ? - Si non quels sont les points dont vous n'êtes pas satisfait.e.s ? Des points non abordés ? - il y a pour moi un point qui n'a pas été vu en td et j'en suis désolé c'est l'élimination d'une variable au niveau du Lagrangien.

Je reviens rapidement sur ce point. Je vous renvoie au cours p 43 : Quand on a une variable cyclique qn on peut considérer pour une valeur de pn le Lagrangien modifie  $L - p_n \dot{q}_n$  que l'on réécrit en terme des autres variables pour  $p_n = \text{cst}$  et  $\dot{q}_n = f_n()$

$p_n$  devient un paramètre du problème qui est fixe au début, comme par exemple la masse du mobile, et qui ne varie pas au cours du mouvement. 3 mins

C'est équivalent à ce qu'on avait fait au niveau de l'équation du mouvement par exemple pour le potentiel à force centrale (Pp de maupertuis en découle)

- la question de cours était aussi sur le théorème de Noether. Je n'ai pas le temps d'en parler et c'est dommage mais il faut vraiment souligner le rôle clé de ce théorème du point de vue du lien entre hypothèses physiques et modèles + utilité calculatoire ex : énergie, moment cinétique et impulsion 1 min

Quizz : - Écrire l'hamiltonien à partir de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, puis les équations d'Hamilton pour un système unidimensionnel

Cours : Pourquoi le Hamiltonien ?

Déjà pourquoi le lagrangien : - Utiliser des coordonnées généralisées plutôt que des contraintes + vecteurs, simplifient énormément les équations (Pratique)

- (Profonde) Réécrit la mécanique comme un principe d'optimisation et l'action est un point de vue extrêmement fécond qui est utilisée en physique fondamentale que ce soit en RG ou QFT

Et le Hamiltonien ? Une raison profonde : - En Lagrangien on peut faire des combinaisons des  $q_i$  pour essayer de rendre le problème plus simple ex : dans le premier exercice de l'année sur le lagrangien on avait pris  $q = x - X$ , ou encore il y a deux semaines on avait trouvé les coordonnées normales dans lesquelles le système étaient un système libre au premier ordre non trivial - Cependant les transformations que l'on peut faire sont en général limitées aux transformations dites ponctuelles  $Q_i = f_i(q_j)$  Pas de combinaison avec la vitesse sinon on ne sait plus comment écrire les équations du mouvement dans ces nouvelles variables. - En formalisme Hamiltonien on peut faire beaucoup plus de transformations telles que les équations du mouvement est toujours la même forme : les transformations canoniques. - En fait on a une équation, l'équation d'Hamilton-Jacobi qui nous dit quelle transformation faire pour résoudre le problème !

MAIS : en général on ne sait pas la résoudre... (On a quand même appris au passage que le mouvement peut se comprendre comme une transformation canonique)

Trois raisons pratiques : - On peut pousser plus loin l'idée des coordonnées normales i.e. trouver des variables dans lesquelles le système est libre. On peut faire ça par ordre successifs jusqu'à n'importe quel ordre en formalisme Hamiltonien ! Cf Chapitre 8

- On a  $2n$  équations d'ordre 1 plutôt que  $n$  équations d'ordre 2. Numériquement c'est la deuxième forme qu'on utilise pour intégrer les équations. Pour un problème général cette transformation n'est pas toujours simple ou possible : le formalisme Hamiltonien dit comment le faire de manière systématique pour un Lagrangien ! (c'est possible parce que le système est obtenu à partir d'une unique fonction le Lagrangien.)

- Dans ce cas le système est représenté par un point qui définit complètement l'état du système dans un espace à  $2N$  dimensions. Cela donne une représentation graphique simple des problèmes en petites dimensions. les différentes trajectoires possibles dans cet espace, appelées portrait de phase, ne se croisent pas.

Référence : Chapitre 6 Lanczos

## 7 Séance 7 :

Quizz : Retour sur la transformée de Legendre - Écrire la transformée de Legendre pour une fonction à  $n$  variables en général. Prendre le cas particulier de la fonction  $L = m * \dot{x}^2/2 + m * x^2/2 + m * x^2 * \dot{x}^2/2$

- Donner une condition pour qu'une fonction admette une transformée de Legendre ? Pourquoi alors en général le Lagrangien a une transformée de Legendre i.e. il y a un Hamiltonien associé ? Rk : si on essayait de modifier la forme du Lagrangien d'une particule libre alors ça pourrait ne plus marcher